S.M. Targ

# NAZARIY MEXANIKANING QISQA KURSI

*S.M.TARG*

# NAZARIY MEXANIKANING QISQA KURSI

O'n ikkinchi ruscha nashridan
tarjima qilingan

O'zbekiston Respublikasi
Oliy va O'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan
oliy texnika o'quv yurttlari uchun darslik sifatida tavsiya etilgan

**Farg'ona - 2007**

*С.М.ТАРГ*

# КРАТКИЙ КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Издание двенадцатое,
стереотипное

Рекомендовано Министерством общего и профессионального
образования Российской Федерации в качестве
учебника для студентов высших технических учебных заведений

Москва
«Высшая школа»
2005

## O'ZBEKCHA BIRINCHI NASHRGA SO'Z BOSHI

Nazariy mexanika fani barcha texnika oliy o'quv yurtlarida, eng asosiy fanlar qatorida o'qitiladi. Hoh samolyotsozlik bo'lsin, hoh avtomobilsozlik bo'lsin, hoh kemasozlik bo'lsin, hoh kosmosda parvoz qiluvchi apparatlar bo'lsin, hoh turmushda ishlatiladigan tikuv mashinalariyu, kimyo, oziq-ovqat, to'qimachilik mashinalari bo'lsin, hamma-hammasi mexanika qonunlari asosida loyihalanadi.

Ko'p qavatli imoratlar, televizion minoralar, katta uzunlikdagi daryo ko'priklari, sanoat binolari va ularni zil-zila bardoshligini hisoblashda mexanika qonunlari eng asosiy tayanch bo'lib xizmat qiladi. Nazariy mexanika fanini o'rganishda talabalar birinchi marta o'z hayotida va texnikada uchratadigan mexanikaga oid hodisalarni so'z bilan emas, balki aniq o'lchovli matematik formulalar bilan ifodalashni o'rganadilar.

Ushbu kitob jahonning rivojlangan mamlakat(Amerika, Angliya, Germaniya, Frantsiya, Rossiya va b.)larning eng nufuzli oliy texnika o'quv yurtlarida "Nazariy mexanika" fanidan hozirgi kunda foydalanilayotgan asosiy darslik hisoblangan S.M.Targning "Kratkiy kurs teoreticheskoy mexaniki", (Moskva shahrida. "Oliy maktab" nashriyoti tomonidan 2005 yilda chop etilgan) darslik kitobi o'zbek tiliga tarjima qilindi.

Ushbu darslik rus tilida, shuningdek, jahon aholisining qariyb yarmidan ortigi so'zlahadigan(ingliz, fransuz, italyan, ispan, portugal, arab, serboxorvat, v'etnam, arman, ozarbayjon, litva, eston va boshqa) tillarda bir necha martalab nashr etilgan. Бoshqacha qilib aytganimizda jahondagi bir necha avlod injenerlarni tayorlashda davr sinovidan muvaffaqiyatli o'tib, eng e'tiborli darsliklardan biri sifatida tan olingan, jahondagi byuk mexanik olimlarning sinovlaridan o'tganligi sababligina yshbu darzlikni tarjima uchun asos qilib olindi.

Bizning Respublikamizdagi barcha o'lchov birliklari va davlat standartlari ham, Rossiya davlati bilan deyarli bir xil, shuning uchun uhbu darslikdan texnikaga oid keyingi fanlarni o'zlashtirishda hech qanday nomutannosiblik uchramaydi.

Ushbu darslikni tayorlashda ayrim mavzular tegishli ravishda o'zbek studentlariga moslashtirilib qayta ishlanildi, ko'pchilik shakllar qaytadan chizildi. O'zbek talabalariga noma'lum bo'lgan tayanch so'z va iboralar alohida qilib ajratildi, ularning har biriga batafsil tushunchalar berildi. Ruscha nashrdagi maida harflar bilan berilgan matnlar o'rniga, oddiy shriftlardan foydalanildi.

Aziz talabalar! agar siz tanlagan injenerlik sohangizni mukammal o'rganishni istasangiz, siz hozirgi zamon darajasida yetuk bakalavr va magistr bo'lib yetishishni hohlasangiz, siz, albatta Nazariy mexanika bo'yicha chuqur va yetarli bilim olishlaringiz, juda muhim ekanligini tushunib olishingiz lozim bo'ladi.

Bizning asosiy maqsadimiz, jahondagi eng nufuzli oliy o'quv yurtlarida "Nazariy mexanika" fani qanday o'qitilsa, o'zbek talabalarini ham ulardan hech qanday kam bo'lmagan nisbatda ta'lim berishdan iborat va men o'ylaymanki, biz shunday oliy maqsadimizga albatta erishamiz.

Bizning buyuk ajdodlarimizdan Al-Xorazmiy, Al-Farg'oniy, Biruni, Ibn Sino, Ulug'bek kabi allomalarimiz jahon ilm-fani rivojiga ulkan hissalar qo'shib, o'zbek halqi dahosini dunyoga tanitib ketganlar. Bizning umidimiz shundan iboratki, siz o'zbek yoshlari, shu buyuk ajdodlarimizdan ham yuqoriroq natijalarga albatta erishasizlar deb o'ylayman.

Tarjimon.

## O'N IKKINCHI NASHRGA SO'Z BOSHI

Nazariy mexanikaning qisqa kursining o'n ikkinchi nashri, o'zining mazmuni va matnlarni bayon qilinish tartibi bo'yicha, muhim o'zgartirishlar va qo'shimchalar kiritilgan bo'lib, o'n birinchi nashrdan deyarli farq qilmaydi. Matnlarga ayrim o'zgartirishlar kiritilgan va aniqlangan xatolar tuzatilgan xolos.

Ushbu kitob, oliy texnika o'quv yurtlari studentlari uchun darslik hisoblanadi; mavzularning hajmi haqidagi ma'lumotlarni uning mundarijasi orqali aniqlab olish mumkin. Mavzular shunday bayon qilinganki, ushbu kitobdan qisqa kurs hajmida ta'lim olayotganlar ham, to'laroq hajmda o'rganayotganlar ham foydalanishlari mumkin. Shu sababli, nazariy mexanikani to'liq hajmda o'rganayotganlar uchun, bob va paragraflarda yulduzcha yoki petit (mayda harf)lar orqali alohida ajratib qo'yilgan. Kitobdan foydalanishda, qolgan qismini tushunishga katta zarar keltirilmagan holda, uning ixtiyoriy qismini tashlab o'tish mumkin. Lekin, kitobda yoritilgan qiziqarli masalalar, masalan, yerning tortilish kuchi maydonidagi harakat, yoki o'zgaruvchan massali jism (raketa)larning harakatlari bilan tanishib chiqishlik, barcha yo'nalishdagi studentlar uchun ham foydali deb hisoblaymiz.

Ushbu nashrda, nuqta dinamikasi juda muhim ahamiyat kasb etishligini hisobga olgan holda, u alohida qism sifatida bayon qilingan. Nuqta va sistema dinamikasini birga qo'shib o'rganishda tejaladigan vaqt o'zini oqlamasligi hisobga olindi, chunki bunday o'qitilishda mexanikaning juda ko'p muhim tushunchalarini o'zlashtirish ancha qiyin kechishi isbotlandi.

Oldingi nashrlardagi kabi, misol va masalalarni yechish usullarini yoritilishiga katta ahamiyat berilgan; kitobning uchdan bir qismi shularga ajratilgan. Masalalarni yechishda, mavzularni studentlar tomonidan mustaqil o'zlashtirishlarida yordam bo'lishini nazarda tutib, ularga qator ko'rsatmalar berib boriladi. Shu jihatdan, ushbu kitob barcha yo'nalishdagi studentlar uchun, ayniqsa sirtqi bo'lim studentlari uchun katta qulaylik keltiradi.

Kitobda, barcha studentlar vektorlar algebrasining asoslari bilan tanish deb hisoblagan holda, mavzular hamma kitoblardagi kabi vektor ko'rinishda bayon qilindi, lekin, kerakli bo'lgan ayrim ma'lumotlar eslatmada bayon etilgan. Har bir qismlardagi formulalar muntazam ravishda nomerlangan va shu qismning formulasiga murojaat qilinganda faqat uning nomeri ko'rsatilgan, boshqa qismdagi formulalarga murojaat qilishda ularning paragraflari ham ko'rsatilgan.

Ushbu kitob o'tgan yillar davomida, ingliz, frantsuz, italyan, ispan, portugal, arab, serboxorvat, v'etnam, arman, ozarbayjon, litva, eston va boshqa tillarga tarjima qilinib, o'sha mamlakatlarda bir necha martalab nashr etilgan. Muallif ushbu kitobni tarjima qilgan va nashrdan chiqargan hamkasblariga, o'zining cheksiz minnatdorchiligini izhor qiladi.

Muallif

## KIRISH

Hozirgi zamon texnikasi, injenerlarning oldiga yechilishi muhim bo'lgan qator masalalarni qo'ymoqda, ular, asosan, mexanik harakatlar va moddiy jismlarning o'zaro ta'sirlariga bog'liq bo'lib, nazariy mexanika faniga taalluqli hisoblanadi.

Fazodagi moddiy jismlarning bir-birlariga nisbatan holatlarini vaqt mobaynidagi o'zgarishlari mexanik harakat deb ataladi. Jismlarning bir-birlariga nisbatan ko'rsatgan ta'sirlari natijasida, ularning harakatlari yoki ularning geometrik shakllari (deformatsiyalanishi)ning o'zgarishi o'zaro mexanik ta'sir deb tushuniladi. Jismlarning o'zaro ta'sirlarini o'lchaydigan kattalikni, kuch deb ataladi. Tabiatdagi mexanik harakatlarga, osmon jismlarining harakatlari, yer sirtining tebranishi, havo va dengiz oqimlari, molekulalarning issiqlik ta'siridagi harakatlari va h.k., misol bo'ladi.

Texnikadagi mexanik harakatlarga esa, yer ustidagi, suvdagi va havodagi transport vositalarining harakatlari, turli xil mashina va mexanizmlar qismlarining harakatlari, suyuqlik va gazlarning harakatlari va h.k. lar misol bo'ladi. O'zaro mexanik ta'sirga esa, butun dunyo tortilish qonuniga asosan moddiy jismlarning o'zaro tortilishlari, yopishib (yoki to'qnashib) turgan jismlarning o'zaro bosimlari, suyuqlik va gazlarning zarrachalarini o'zaro ta'sirlari va h.k. misol bo'lishi mumkin.

Mexanik harakatlarni va moddiy jismlarning o'zaro ta'sirlarini o'rganadigan fan mexanika deb ataladi. Mexanikada o'rganiladigan muammolarning davrasi juda keng bo'lib, ushbu fanning rivojlanishiga bog'liq holda, deformatsiyalanuvchi qattiq jismning, suyuqlik va gazlarning mexanikasini o'rganuvchi qator mustaqil sohalar paydo bo'ldi. Bunday sohalarga, elastiklik nazariyasi, plastiklik nazariyasi, gidromexanika, aeromexanika, gazlar dinamikasi va tadbiqiy mexanikaning qator sohalari: materiallar qarshiligi, inshootlar statikasi, mexanizm va mashinalar nazariyasi, gidravlika va boshqa maxsus injenerlik fanlari misol bo'ladi. Yuqoridagilarga taallluqli bo'lgan umumiy tushunchalar, qonunlar va usullarni o'rganuvchi fanni nazariy (yoki umumiy) mexanika deb ataladi.

Mexanikaning asosida, klassik mexanikaning (yoki Nyutonning) insoniyat olib borgan tajribalari va kuzatishlari natijasida aniqlangan, hamda jamoa-ishlab chiqarishdagi amaliyotda o'z tasdig'ini topgan qonunlari deb ataluvchi aksiomalari yotadi. Shu sababli, har bir injener mexanika qonunlariga asoslangan bilimlarni, aniq va ishonchli deb qabul qilib, o'zining amaliy ishlarida hech qanday shubhalanmasdan bemalol qo'llashlariga imkon yaratildi.

Ilmiy izlanishlarning umumiy usuli shundan iboratki, birorta hodisani tahlil qilishda, undagi asosiy, aniqlovchi belgilarini ajratib olinadi, qolganlarini, ya'ni

---

[1] Fanning keyingi yillardagi rivojlanishi orqali shu narsa tasdiqlandiki, jismlarning yorug'lik tezliklariga yaqin bo'lgan harakatlari mexanikaning nisbiylik nazariyasi qonunlari bo'yicha sodir bo'lar ekan, mikro zarracha (elektron, pozitron va h.k.) larning harakatlari esa, kvant mexanikasining qonunlari bo'yicha sodir bo'lar ekan. Lekin, bu kashfiyotlar orqali faqat klassik mexanikaning tadbiq qilish doirasigina aniqlandi xolos. Uning qonunlari mikro zarrachalarning va yorug'lik tezligiga yaqin bo'lmagan tezlik bilan harakatlanuvchi barcha moddiy jismlar uchun, ya'ni texnikadagi qator muhim masalalarni va osmon mexanikasiga oid masalalarni juda katta aniqlikda yechishda eng asosiy manba bo'lib xizmat qiladi.

shu hodisaga yondosh bo'lgan belgilarni abstraksiya (faraz, tassavur-tarj) qilib olinadi. Natijada, real (haqiqiy) hodisani yoki ob'ektni o'rniga, uning asosiy, aniqlovchi belgilarini (xossalarini) ifodalovchi birorta model tanlab olinadi va qator abstrakt tushunchalar kiritiladi.

Klassik mexanikada kiritiladigan barcha tushuncha va tarkibiy qoidalar, shunday abstrakt tushunchalar yoki model sifatida qabul qilinadi. Ular tekshirilayotgan mexanik harakatlarning eng muhim, aniqlovchi xususiyatlarini o'zida aks ettirib, ularni o'rganishda va xarakterlashda katta yordam beradi. Masalan, mexanikada real (mavjud, haqiqiy-tarj) moddiy jismlarning muvozanati yoki harakatlari o'rniga, moddiy nuqta, absolyut qattiq jism yoki o'zgaruvchi muhitlarning muvozanati yoki harakatlari o'rganiladi. Ya'ni birinchi holda jismning shakli va o'lchamlari e'tiborga olinmaydi, ikkinchi holda ularning deformatsiyalari e'tiborga olinmaydi, uchinchi holda esa, muhitning molekulyar strukturasi e'tiborga olinmaydi. Lekin, faqat shunday modellarning mexanikasini yaratish orqali, real ob'ektlarning muvozanati yoki harakatlarini o'rganishda amalda qo'llaniladigan usullarni yaratish mumkin bo'ladi, ammo ular, albatta, juda ko'p tegishli sinovlardan o'tgan bo'lishlari lozim.

Nazariy mexanika fanining injenerlar tayyorlashdagi o'rni va ahamiyati shundan iboratki, u hozirgi zamon texnikasining juda ko'p sohalarining ilmiy asoslarini tashkil etadi. Hamda, tabiiy, ya'ni tabiat haqidagi fan hisoblangan mexanikaning qonunlari va usullari, atrofimizda sodir bo'layotgan qator muhim hodisalarning qonuniyatlarini mukammal o'rganishda va umuman, tabiatni o'rganishda katta ahamiyat kasb etadi.

Yechilishi ko'rilayotgan masalalarga asoslangan holda mexanika fani, statika, kinematika va dinamika qismlariga ajraladi. Statika qismida, kuchlar haqidagi bilimlar va kuchlar ta'siridagi jismlarning muvozanatlik shartlari o'rganiladi. Kinematika qismida, jismlarning harakatlarini umumiy geometrik xususiyatlari o'rganiladi. Dinamika qismida esa, moddiy jismlarning kuch ta'siridagi harakatlari o'rganiladi.

Mexanikaning fan sifatida paydo bo'lishi va uning taraqqiyoti, jamiyatning ishlab chiqaruvchi kuchlarining rivojlanish tarixi bilan uzviy bog'liq bo'lib, ishlab chiqarish va texnikaning rivojlanish bosqichlari bilan chambarchas bog'langan.

Qadim zamonlarda, ya'ni ishlab chiqarishning talablari asosan qurilish inshootlarini barpo qilishdagi texnikaga bog'liq bo'lganligi sababli, oddiy mashinalar (blok, vorot, richag, qiya tekislik va h.k.) deb ataluvchi qurilmalarning nazariy bilimlarini o'rganishga qaratilgan edi. Statikaning asosiy bilimlari qadimgi (eramizdan oldingi 287-212 y.) buyuk olimlardan biri bo'lgan Arximedning ilmiy asarlarida bayon etilgan.

Dinamika qismining rivojlanishi esa, ancha keyin boshlandi. XV-XVI asrlarda G'arbiy va Markaziy Evropa mamlakatlarida bozor munosabatlari rivojlana borgan sari, hunarmandchilik (manufaktura-tarj), savdo, dengiz kemalari qurilishi, harbiy (poroxning yonishi natijasida otiladigan) qurollarning va astronomik qonunlarning ochilishiga katta turtki berdi. Bularning hammasi, katta hajmda olib borilgan kuzatish ishlarining natijalarini umumlashtirilishi va sistemalashtirilishi asosida XVII asrga kelib dinamika qonunlarini ochilishiga imkon yaratdi.

Dinamika qonunlarini yaratilishiga eng katta hissa qo'shgan buyuk olimlardan birinchisi Galileo Galiley (1564-1642 y.), ikkinchisi Isaak Nyuton (1643-1727y.) hisoblanadi. I. Nyuton o'zining 1687 yilda chop etilgan "Tabiiy falsafaning matematik boshlanishi" kitobida, klassik mexanikaning (Nyutonning qonunlari deb ataluvchi) asosiy qonunlarini birinchi marta sistemalashtirilgan holda bayon qilgan edi.

XVIII asrda mexanikaning analitik usullari, ya'ni differentsial va integral hisoblariga asoslangan usullari, intensiv ravishda rivojlana boshladi. Nuqta va qattiq jism dinamikasiga oid masalalarning harakat differentsial tenglamalarini tuzish va ularni integrallash orqali yechimlarni aniqlash usullarini buyuk matematik va mexanik olim L.Eyler (1707-1783y.) tomonidan birinchi marta amalga oshirildi. Mexanikaning shu sohadagi ishlarining rivojlanishiga eng ahamiyatli hissa qo'shgan fransiyalik olimlardan, o'zining prinsipini taklif qilgan J.Dalamber (1717-1783y.), Dalamber prinsipiga va mumkin bo'lgan ko'chishlar prinsipiga asoslangan holda, dinamika masalalarining umumiy analitik usulini ishlab chiqqan J.Lagranj (1736-1813y.) lar hisoblanadilar. Ushbu analitik usullar hozirgi kunda, dinamika masalalarini yechishning asosiy usullari hisoblanadi.

Kinematika qismi, mashinashunoslikning tezkor rivojlanishi natijasida va uning ehtiyojlariga bo'ysundirilgan holda XIX asrdagina mustaqil qism sifatida paydo bo'ldi. Kinematika qismi hozirgi kunda, mashina va mexanizmlarning harakatlarini o'rganishda, asosiy ilmiy-nazariy asos bo'lib xizmat qilmoqda.

Mexanika fanining Rossiyada rivojlanishiga asosan, buyuk mutaffakir va olim M.B.Lomonosov (1711-1765y.), hamda Rossiyada uzoq vaqt yashab, Peterburg fanlar akademiyasida ijod qilgan L.Eyler juda katta hissa qo'shdilar. Mexanika fanining turli sohalariga o'zlarining katta hissalarini qo'shgan rus olimlaridan quyidagilarni eslatib o'tamiz: mexanika masalalarining analitik usullarini yaratishga katta hissa qo'shgan M.B.Ostrogradskiy (1801-1861y.); mexanizmlarning harakatini tadqiq qilishda muhim ahamiyatli ishlar olib borgan P.L. Chebishev (1821-1894y.); qattiq jism mexanikasining murakkab masalalaridan birini yechishga asos solgan S.B.Kovalevskaya (1850-1891y.); tabiiy fanlarning va mexanikaning eng muhim masalalaridan hisoblangan - muvozanat va harakatning turg'unlik nazariyasiga asos solgan A.M.Lyapunov (1857-1918y.); o'zgaruvchan massali jismlarning mexanikasiga katta hissa

[2] «Mexanika» iborasi, birinchi marta qadimgi eramizdagi buyuk falsafiy olim Aristotel (e.o. 384-322 y.)ning ilmiy asarlarida ishlatilgan bo'lib, yunoncha myochane-ya'ni hozirgi zamon tushunchasiga ag'darilsa, «inshoot», «mashina» degan ma'noni anglatadi.

qo'shgan I.B.Meshcherskiy (1859-1935y.); reaktiv harakatga oid fundamental tadqiqotlar olib borgan olim K.E.Tsiolkovskiy (1857-1935y.); dengiz kemasining nazariyasini yaratgan va giroskop nazariyasiga muhim hissa qo'shgan, hamda turli xil giroskopik priborlar yaratgan olim A.N.Krilov (1863-1945y.);

Rossiyada mexanika fanining keyingi yillardagi rivojiga muhim hissa qo'shgan va aviatsiya faniga asos solgan buyuk olim N.E.Jukovskiy (1847-1921y.) va uning yaqin shogirdlariidan hisoblangan, hamda gazlar dinamikasiga asos solgan olim S.A.Chapligin (1869-1942)larning ishlari alohida ahamiyatga ega. N.E. Jukovskiy ijodining xarakterli tomonlaridan biri shundaki, mexanikaning uslublarini texnikaning ustivor masalalariga qo'llashda alohida o'rnak ko'rsatdi. Misol tariqasida, shuni aytish mumkinki, u samolyotning dinamikasiga oid juda ko'p ilmiy asarlar yaratdi va trubalardagi gidravlik zarbalarning nazariyasini ishlab chiqdi va h.k. Bundan tashqari N.E.Jukovskiy o'zining ilmiy g'oyalari orqali, mexanika fanini oliy texnika o'quv yurtlarida o'qitish bo'yicha muhim ahamiyat kasb etdi.

## Birinchi qism.
# QATTIQ JISM STATIKASI

## 1 Bob
## STATIKANING ASOSIY TUSHUNCHALARI VA QOIDALARI

### 1§ Absolyut qattiq jism. Kuch. Statika masalalari

Mexanika fanining kuch haqidagi umumiy tushunchalarini va kuchlar ta'siridagi moddiy jismlarning muvozanat shartlarini o'rganuvchi qismi, statika deb ataladi.

Muvozanat holat deb, biror jismning boshqa jismlarga nisbatan tinch holatiga, masalan,yerga nisbatan harakatsiz holatiga aytiladi. Jismning muvozanat holati uning qattiq jism, suyuqlik va gazsimon holatda bo'lishligiga ham bog'liq bo'ladi. Suyuq va gazsimon jismlarning muvozanatlik shartlari gidrostatika va aerostatikaga oid fanlarida o'rganiladi. Umumiy mexanika kursidagi statika qismida, asosan, faqat qattiq jismlarning muvozanat shartlari o'rganiladi.

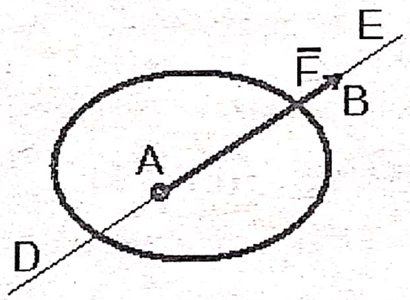
Tabiatdagi jamiki qattiq jismlar ularga ko'rsatilgan tashqi ta'sirlar natijasida u yoki bu miqdorda o'zlarining geometrik shakllarini o'zgartiradilar, bunday (masalan, egilish, siqilish, buralish, cho'zilish, qiyshayish kabi-tarj) o'zgarishlarni deformatsiyalanish deb ataladi. Deformatsiyalanish miqdorlari bir necha faktorlarga bog'liq bo'ladi, ya'ni qattiq jismlarning qaysi moddadan tarkib topgan ekanliklariga, ularning shakllariga, temperaturalariga va ularga ta'sir etayotgan kuchlarga ham bog'liq bo'ladi. Mashinalarni konstruksiyalashda va inshootlarni qurishda ularning mustahkamligini ta'minlash maqsadida, bunday deformatsiyalar iloji boricha sezilarli bo'lmagan miqdorda bo'lishligini ko'zda tutilishi shart hisoblanadi[3].

Shu sababli qattiq jismlarning muvozanat shartlarini o'rganish jarayonida, sezilarli bo'lmagan miqdordagi deformatsiyalarni e'tiborga olinmaslik qoida sifatida qabul qilinib, ularni deformatsiyalanmaydigan yoki absolyut qattiq jism deb hisoblanadi. Absolyut qattiq jism deb, shunday jismlarga aytiladiki, ularda ixtiyoriy olingan ikki nuqta orasidagi masofa har doim o'zgarmas bo'lishi shart. Statika masalalarini yechishda jamiki jismlarni absolyut qattiq jism deb faraz qilinadi va soddaroq holda ifodalash uchun qattiq jism deb ataladilar.

Qattiq jismning harakati yoki muvozanat holati, shu jism bilan boshqa jismlarning o'zaro ta'sirlarining xarakteriga bog'liq holda bo'ladi, ya'ni boshqa jismlar bilan bo'lgan o'zaro ta'sir natijalarida siqayotganligi, tortilayotganligi, surilayotganligiga bog'liq holda bo'ladi. Jismlarni bir-birlariga nisbatan ko'rsatgan o'zaro mexanik ta'sirlarining miqdorlari kuch deb ataladi.

Mexanikadagi kattaliklar ikki turga skalyar va vektor kattaliklarga bo'linadilar. Faqat son qiymatlari bilangina kifoyalanadigan kattaliklar skalyar kattaliklar hisoblanadilar, son qiymatlaridan tashqari yo'nalishlari va fazodagi

[3] Masalan, konstruksiyalarda qo'llaniladigan sterjenlarning materiali va o'lchamlarini shunday tanlab olinadiki, qo'yilgan yuklar ta'sirida ularning uzayishlari (siqilishdagi qisqarishlari) avvalgi uzunliklariga nisbatan mingdan bir qismgagina o'zgaradi xolos. Egilish va buralishdagi ruxsat etilgan deformatsiyalarning qiymatlari ham shu tartibda o'zgaradi.



1 shakl.

koordinatalariga bog'liq bo'lgan kattaliklar, vektor kattaliklar hisoblanadilar.

Kuch - vektor kattalik bo'lib, uning jismga ta'siri: 1) kuchning son qiymati yoki moduli, 2) kuch vektorining yo'nalishi (ya'ni koordinata o'qlari bilan hosil qilgan burchaklari), 3) shu kuch vektori qo'yilgan nuqtaning koordinatalariga bog'liq holda aniqlanadi.

Kuchning modulini, birlik sifatida qabul qilingan (etalon) qiymatga solishtirish orqali aniqlanadi. Xalqaro o'lchov birligi (SI sistemasi)da kuchning birligi 1 nyuton (1N); deb qabul qilingan. Katta miqdordagi kuchlarni o'lchashda 1 kilon'yuton (1kN=1000N) dan foydalaniladi. Kuchlarni statik o'lchashda dinamometr (kuch o'lchagich) nomli fizik o'lchov asbobidan foydalaniladi.

Kuch vektor kattalik bo'lganligi sababli, hamma vektorlar kabi, uning ustiga chiziqcha qo'yilgan bosh harflar bilan belgilanadi (masalan, $\overline{F}$), kuchning son qiymati (moduli)ni - $|\overline{F}|$ ko'rinishda yoki ustida chiziqcha qo'yilmagan holda, ya'ni oddiy - F harfi bilan belgilanadi. shakldа, kuch yo'naltirilgan strelka sifatida tasvirlanadi (1 shakl). Strelkaning uzunligi, tanlab olingan masshtabga bog'liq ravishda uning son qiymatini belgilaydi. 1 shakldagi A nuqta kuchning jismga qo'yilgan nuqtasini belgilaydi, shakldagi DE to'g'ri chizig'i kuch yotgan chiziqni belgilaydi, bu chiziqni mexanikada kuchning ta'sir chizig'i deb ataladi.

Mexanikada yana quyidagi ta'riflardan foydalaniladi:

1. Agar bir vaqtni o'zida bir jism (yoki jismlar)ga bir nechta kuchlar ta'sir etsa, ularni kuchlar sistemasi deb ataladi. Agar shu kuchlarning ta'sir chiziqlari bir tekislikda yotsa, bunday kuchlar tekislikda yotgan kuchlar sistemasi deb ataladilar. Agar shu kuchlarning ta'sir chiziqlari bir tekislikda yotmasa, bunday kuchlar fazoviy kuchlar sistemasi deb ataladi. Agarda barcha kuchlarning ta'sir chiziqlari bir nuqtadan o'tsa, bunday kuchlar uchrashuvchi kuchlar sistemasi deyiladi. Agarda kuchlarning ta'sir chiziqlari o'zaro parallel holda bo'lsa, bunday kuchlar parallel kuchlar sistemasi deb ataladi.

2. Jismni fazoning bir joyidan boshqa ixtiyoriy joyiga ko'chirish mumkin bo'lsa, bunday jismlar erkin jismlar deb ataladilar.

3. Agar bir jismga ta'sir etayotgan kuchlar sistemasini, boshqa kuchlar sistemasi bilan almashtirilganda jismning ilgarigi muvozanati yoki harakati o'zgarmasa, bunday kuchlar sistemasi *ekvivalent* kuchlar sistemasi deb ataladi.

4. Erkin jismga ta'sir etayotgan kuchlar sistemasi ta'sirida u, muvozanat holatda bo'lsa, bu kuchlar o'zaro muvozanatlashgan kuchlar sistemasi yoki nolga ekvivalent bo'lgan kuchlar sistemasi deb ataladi.

5. Agar berilgan kuchlar sistemasi bitta kuchga ekvivalent bo'lsa, bu kuch teng ta'sir etuvchi kuch deb ataladi. Moduli bo'yicha teng ta'sir etuvchiga teng bo'lgan, yo'nalishi bo'yicha unga qarama-qarshi va u bilan bir to'g'ri chiziqda yotuvchi kuchni, muvozanatlovchi kuch deb ataladi.

6. Bir jismga (yoki bir necha jismlarga) ta'sir etayotgan kuchlar ikki turga, ichki va tashqi kuchlarga bo'linadi. Boshqa jismlarni shu jismga ta'sir kuchlari

tashqi kuchlar deb ataladi. Bir jism (yoki jismlar sistemasi) qismlarining, o'zaro ta'sirlarini ichki kuchlar deb ataladi.

7. Jismning bir nuqtasiga ta'sir etadigan kuchni markazlashgan kuch deyiladi. Jismning butun hajmi bo'yicha, yoki ma'lum yuzacha bo'yicha ta'sir etuvchi kuchlarni tarqalgan (yoyilgan) kuchlar deb ataladi.

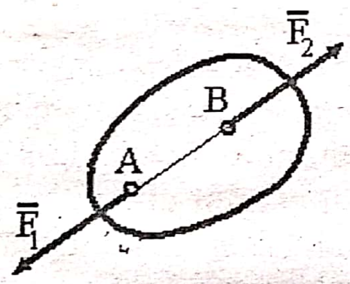
Markazlashgan kuch tushunchasi shartli tushuncha hisoblanadi, chunki aslida har qanday kuch jismga birorta yuza (yoki yuzacha) orqali ta'sir etadi, uni bir nuqtaga qo'yishlikning iloji yo'q. Mexanikada markazlashgan (yig'ilgan) kuch tushunchasi umuman olganda juda kichkina yuzachaga jamlangan holda bo'ladilar.

Masalan, xususiy holda og'irlik kuchini olaylik, aslida bu kuch jismning har bir zarrachasiga ta'sir etadigan kuchlarning yig'indisidan iborat. Hamda bu kuchning ta'sir chizig'i, shu jismning og'irlik markazi[4] deb atalgan markazidan o'tadi.

S t a t i k a n i n g  a s o s i y  m a s a l a s i: 1) Qattiq jismga ta'sir qilayotgan kuchlar sistemasini unga ekvivalent bo'lgan boshqa kuchlar sistemasi bilan almashtirish; ba'zi hollarda ularni sodda holdagi kuchlar sistemasiga keltirishlik; 2) Qattiq jismga ta'sir etayotgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlarini aniqlashlardan iborat bo'ladi.

Statikaning masalalarini geometrik shaklda (geometrik yoki grafik usulda) yoki matematik hisoblash (analitik) usuli bilan yechiladi. Geometrik usullar tasvirli ravishda, ancha tushunarli bo'lishiga qaramasdan, biz quyida, asosan, analitik usuldan ko'proq foydalanamiz.

## 2§ Statikaning tarkibiy qoidalari.



2 shakl

Statika kursini bayon qilishda ikki yo'lni tutish mumkin: 1) dinamika qismidagi asosiy qonunlardan kelib chiqadigan (120§ ga q.) tenglamalar orqali; 2) dinamikaga tayanmagan holda, mexanikaning statika aksiomalari yoki prinsiplari deb ataluvchi, ya'ni umumiy qonunlariga tayangan holda o'rganish. Aslida esa shu aksioma yoki prinsiplar dinamikaning asosiy (120§ ga qarang) qonunlaridan kelib chiqadi. Oliy texnika o'quv yurtlarida asosan, ikkinchi yo'l bilan boriladi, ya'ni statika kursini dinamikaga suyanmagan holda, dinamika qismidan oldin o'rganiladi.

Statikaning umumiy qoidalari (yoki aksiomalari) quyidagilardan iborat:

1.Agar absolyut qattiq jismga bir vaqtning o'zida ikkita kuch ta'sir etsayu, lekin u muvozanat holatda bo'lsa, bu kuchlar bir to'g'ri chiziqda yotishib, yo'nalishlari o'zaro qarama-qarshi bo'ladi va ularning son qiymatlari o'zaro teng($F_1$=$F_2$) bo'lishi shart (2 shakl).

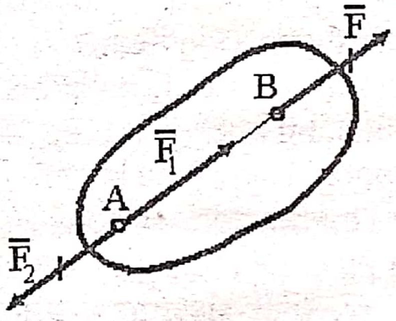
2.Biror jismga qo'yilgan kuchlar sistemasiga qo'shimcha ravishda o'zaro

[4] Jismlarning og'irlik markazlarini aniqlash masalalari VIII bobda ko'rib o'tiladi. shu o'rinda ta'kidlab o'tish lozimki, simmetriya markaziga ega bo'lgan bir jinsli (to'g'ri to'rt burchakli brus, tsilindr, shar va h.k.) jismlarning og'irlik markazlari shu simmetriya markazda joylashgan bo'ladi

muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasini qo'shsak yoki ularni sistemadan olib tashlasak, bu kuchlar sistemasining jismga ta'siri o'zgarmaydi.

Boshqacha qilib aytganimizda, ikkita o'zaro ekvivalent kuchlar sistemasi bir-birlaridan faqat o'zaro muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasining ortiqligi yoki kamligi bilan farqlanishlari mumkin ekan.

N a t i j a: Agar kuchni o'z ta'sir chizig'i bo'ylab bir nuqtadan ixtiyoriy ikkinchi nuqtaga ko'chirsak, jismning mexanik holati o'zgarmaydi.

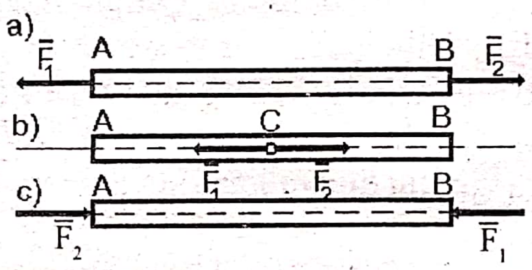


3 shakl

Faraz qilaylik (3 shakl), jismning B nuqtasiga F kuchi qo'yilgan bo'lsin. Shu kuchning ta'sir chizig'ida yotuvchi ixtiyoriy A nuqtani tanlab olaylik va shu nuqtaga ikkita o'zaro muvozanatlashuvchi $\overline{F}$ va $\overline{F}_2$ kuchlarni qo'yaylik, lekin ular $\overline{F}_1=\overline{F}$ va $\overline{F}_2=-\overline{F}$ dan iborat bo'lsinlar. Bunday qo'shimcha qo'yilgan ikkala kuchlar o'zaro muvozanatlashuvchi bo'lganligi uchun, jismning mexanik holati o'zgarmaydi. Ammo shakldan ko'rinib turibdiki, $\overline{F}$ va $\overline{F}_2$ kuchlar sistemasi ham o'zaro muvozanatlashuvchi kuchlardan iborat ekan. Shu sababli 2 aksiomaga asosan ularni jismdan olib tashlasak[5], jismning mexanik xolati o'zgarmaydi, natijada jismga son qiymati va yo'nalishi $\overline{F}$ kuchi bilan bir xil bo'lgan, lekin A nuqtaga qo'yilgan $\overline{F}_1$ kuchi ta'sir etmoqda.

Shunday qilib, har qanday $\overline{F}$ vektorni o'zining son qiymati va yo'nalishini o'zgartirmagan holda uning ta'sir chizig'i bo'ylab bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga ko'chirsak, jismning mexanik holati o'zgarmas ekanligini isbotladik. Bunday kuchlar sirpanuvchi kuchlar yoki sirpanuvchi vektorlar deb ataladilar.

Ushbu qoida faqat absolyut qattiq jismga ta'sir etuvchi kuchlar sistemasigagina taalluqli xolos. Injenerlik hisoblashlarda bu qoida orqali faqat konstruksiyalarning muvozanat shartlarini aniqlashdagina foydalanish mumkin xolos. Lekin konstruksiyalarni tashkil etuvchi qismlarining ichki zo'riqishlarini aniqlashda bu qoidadan foydalanish mutlaqo mumkin emas, chunki u katta xatoliklarga olib keladi.



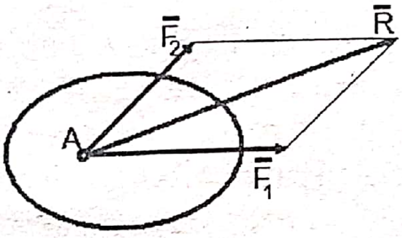
4 shakl.

Masalan, 4 *a* shaklda tasvirlangan AB sterjen faqat $F_1=F_2$ bo'lgan holatdagina muvozanatda bo'ladi. Agar kuchlar qo'yilgan nuqtalarni sterjenning boshqa ixtiyoriy C nuqtasiga ko'chirsak (4 b shakl), yoki $F_1$ kuchini B nuqtaga, $\overline{F}_2$ kuchini A nuqtaga ko'chirsak (4 c shakl), sterjenning muvozanat holati o'zgarmaydi.

Lekin sterjenning ichki zo'riqishlari turlicha bo'ladi. Birinchi holda 4 *a* shaklda sterjen cho'zilmoqda, ikkinchi 4 b shaklda sterjenga hech qanday ichki zo'riqish ta'sir etmaydi, uchinchi holatda esa 4 c shaklda sterjen siqilmoqda.

Demak, ichki kuchlarni aniqlashda, har qanday kuchlarni bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga ko'chirish mumkin emas ekanligi tasdiqlandi.

[5] Tashlab yuborilgan yoki ko'chirilgan kuchlarni shaklda ko'ndalang belgi bilan ajratib qo'yamiz.




5 shakl

Quyida faqat statikaga emas, balki umuman mexanikaga oid bo'lgan ikkita qonunlarni bayon qilamiz.

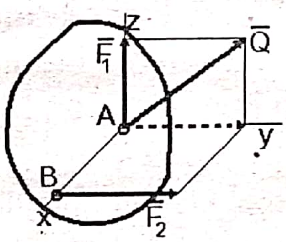
**Kuchlar parallelogrammi qonuni**: jismning bir nuqtasiga qo'yilgan ikkita kuch, shu nuqtaga qo'yilgan teng ta'sir etuvchi kuchga ega bo'lib, uning ko'rinishi berilgan kuch vektorlariga qurilgan parallelogrammning diagonalidan iborat bo'ladi.

$\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuch vektorlariga qurilgan parallelogrammning diagonali bo'lgan $\overline{R}$ vektor (5 shakl), $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlarning geometrik yig'indisidan iborat vektor deb ataladi, ya'ni

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$$

Shunga asosan, kuch parallelogrammi haqidagi qonunni quyidagicha ta'riflasak bo'ladi: jismning bir nuqtasiga qo'yilgan ikkita kuch, shu nuqtaga qo'yilgan bitta teng ta'sir etuvchiga ekvivalent bo'lib, u kuch berilgan kuchlarning geometrik yig'indisidan iborat bo'lib, shu kuchlar kesishgan nuqtaga qo'yilgan bo'lar ekan.

Lekin teng ta'sir etuvchi kuch bilan kuchlarning yig'indisini bir-birlaridan farqlash lozim. Buni quyidagi misolda ko'rsataylik (6 shakl). A va B nuqtalarga $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlar qo'yilgan bo'lsin. 6 shaklda ko'rsatilgan $\overline{Q}$ kuchi $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlarning geometrik ( $\overline{Q} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$ ) yig'indisiga teng, ammo u teng ta'sir etuvchi kuch bo'la olmaydi.



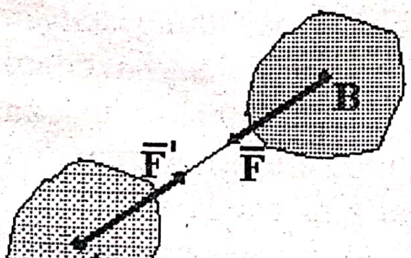

6 shakl

Chunki $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlar bir nuqtada yotgan emas, bu haqda keyinchalik 29§ dagi 38 masalada kengroq holda tushuntiriladi. Bunday 6 shaklda ko'rsatilgan holatda joylashgan $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlar sistemasi hech qachon teng ta'sir etuvchiga ega bo'la olmaydilar.

**Ta'sir va aks ta'sirning o'zaro tengligi haqidagi qonun:** ikkita jismning bir-birlariga ta'sir(kuch)lari bir to'g'ri chiziqda joylashib, son qiymatlari o'zaro teng, lekin yo'nalishlari qarama-qarshi bo'ladi.

Bu qonun mexanikaning asosiy qonunlaridan biri hisoblanadi. Buni quyidagicha tushunish lozim. Agar ixtiyoriy B jism boshqa A jismga $\overline{F}$ kuchi bilan ta'sir ko'rsatsa, xuddi shu onda A jism ham B jismga shu ta'sir chiziqda yotuvchi va son qiymati $\overline{F}$ kuchiga teng, lekin yo'nalishi qarama-qarshi bo'lgan $\overline{F}'$ kuchi bilan aks ta'sir ko'rsatadi, ya'ni $\overline{F}' = -\overline{F}$ (7 shakl). Lekin bu ikki $\overline{F}$ va $\overline{F}'$ kuchlari o'zaro muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasidan iborat bo'lmaydi, chunki ular turli jismlarga qo'yilgan.

**Ichki kuchlarning xossalari.** Oxirgi qonunga asosan har qanday jismning (konstruksiyaning) ixtiyoriy ikkita zarrachasi har doimo bir-birlariga nisbatan, bir to'g'ri chiziqda yotuvchi, qiymatlari teng va o'zaro qarama-qarshi yo'nalgan kuchlar bilan ta'sir ko'rsatadilar. Ular bitta jismga qo'yilgan bo'lganliklari uchun ular o'zaro muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasini tashkil etadilar, shu sababli bunday kuchlar sistemasi shu




7 shakl

jismning mexanik holatiga hech qanday ta'sir ko'rsata olmaydi. Shu sababli absolyut qattiq jismlarning muvozanat holat tenglamalarini tuzilganda, ichki kuchlarni tashlab yuboriladi, ya'ni e'tiborga olinmaydi. Demak, jismlarning muvozanat tenglamalarini tuzishda, faqat tashqi kuchlarnigina e'tiborga olish zarur ekan. Keyinchalik alohida aytilmagan bo'lsa, jismga (konstruksiyaga) ta'sir qilayotgan hamma kuchlarni faqat tashqi kuchlar deb hisoblaymiz.

Asosiy tushunchalardan yana biri, bu *qotishlik printsipi* hisoblanadi. Unga ko'ra: muvozanat holatida bo'lgan shakli o'zgaruvchan (deformatsiyalanuvchan) jism, qotib (absolyut qattiq holatga o'tib)qolsa, uning muvozanat holati saqlanib qoladi.

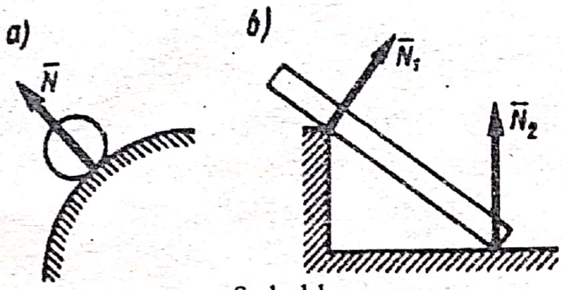
Masalan, biror egiluvchan zanjir muvozanat holatda bo'lgan bo'lsa-yu, keyin qotib egilmaydigan holatga o'tsa (masalan, zanjir halqalari bir-birlariga payvand qilinib qo'yilsa), albatta, uning muvozanat holati o'zgarmay qolishligi aniq. Chunki qotayotgan jismga qotishdan oldin ham qotgandan keyin ham bir xil kuchlar sistemasi ta'sir etadi, shu sababli ushbu prinsipni boshqacha qilib ham ifodalash mumkin: Muvozanat holatda bo'lgan o'zgaruvchan shaklli (deformatsiyalanuvchan) jismga ta'sir etuvchi kuchlar sistemasi, absolyut qattiq jismga ta'sir etuvchi kuchlar sistemasiga qo'yilgan shartlarga rioya qiladi; lekin bu shartlar zaruriy xolos, ammo yetarli bo'lmasligi mumkin, bu haqda keyinchalik so'z boradi (120§ ga qarang).

Masalan, egiluvchan arqonning ikki uchiga qarama-qarshi yo'nalishda qo'yilgan ikkita kuchlar muvozanatda ushlab turishi mumkin. Uning bu holatini qattiq sterjen misolida ham muvozanatda bo'lishligini ko'rishimiz mumkin. Lekin bu zaruriy xolos, ammo yetarli emas. Chunki arqon uchun bu kuchlar, albatta, cho'zuvchi bo'lishi shart, sterjen uchun uning hech qanday farqi yo'q (4 *a* shakl).

Qotish prinsipi injenerlik hisoblash ishlarida keng qo'llaniladi. Ushbu prinsip orqali shaklan o'zgaruvchan ixtiyoriy jism (remen, tros, zanjir, arqon va h.k.) larning yoki ixtiyoriy konstruksiyalarning muvozanat shartlariga oid tenglamalarni tuzganimizda, ularni absolyut qattiq jism deb faraz qilib statikaning muvozanat tenglamalar sistemalaridan foydalanish imkonini yaratadi. Agar tuzilgan tenglamalar sistemasi noma'lumlarni aniqlash uchun yetarli bo'lmasa, bu konstruksiyani alohida qismlarga ajratib, har bir qismi uchun qo'shimcha tenglamalar sistemasi tuziladi. Kerak bo'lsa qo'shimcha ravishda deformatsiya tenglamalari tuziladi, lekin bunday masalalar "Materiallar qarshiligi" fani orqali o'rganiladi.

## 3§ Bog'lanishlar va ularning reaksiyalari

Yuqorida ta'kidlaganimizdek, agar jism fazoning bir joyidan uning istalgan joyiga ko'cha olsa, bunday jismlar erkin jismlar deyiladi (masalan, havodagi sharning harakati). Agar jismning biror tomonga sodir qilishi mumkin bo'lgan harakati qisman cheklangan bo'lsa, bunday jismlar erkin bo'lmagan jismlar deb ataladi. Erkinmas jismlarning fazodagi harakat erkinligini chegaralanishiga sababchi bo'lgan boshqa jismlar bog'lanishlar deb ataladi. Ko'p hollarda erkinmas bo'lgan jismlarning o'zlari ham boshqa jismlarning harakatlarini qisman cheklab



8 shakl

qo'yishlari mumkin, shu sababli ana shunday jismlar keyinchalik bog'lanish sifatida ishtirok etishlari mumkin.

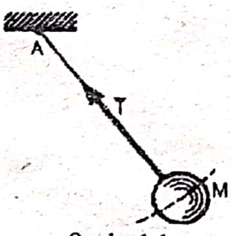
Masalan, stolning ustida joylashgan jism, sharnirga osib qo'yilgan eshik va shu kabilar erkinmas jismlarga misol bo'la oladi. Bu misollarda stol jism uchun, sharnir eshik uchun bog'lanish hisoblanadilar. Chunki stol jismni vertikal pastga tushishiga yo'l qo'ymaydi, sharnir esa eshikni faqat aylanma harakatdan boshqa hamma harakatlariga to'sqinlik qiladi.

Bog'lanishga ega bo'lgan erkinmas jismlar harakat qilganlarida, ular bog'lanishlarga ma'lum yo'nalishda va miqdorda bo'lgan bosim kuchlari bilan ta'sir ko'rsatadilar. O'z navbatida bog'lanishlar ham jismga ta'sir va aks ta'sir qonuniga asosan, xuddi shunday qiymatda, lekin qarama-qarshi yo'nalishda bo'lgan aks ta'sir kuchi ko'rsatadi. Erkinmas jismning harakatini cheklovchi bog'lanishlar (jismlar)ning jismga nisbatan ko'rsatgan aks ta'sirlari, reaksiya (aks ta'sir)kuchlari yoki bog'lanish reaksiyalari deb ataladi.

Bog'lanishlarning reaksiyasi oldindan ma'lum bo'lmaydi, u faqat jismning unga nisbatan ko'rsatgan ta'siriga bog'liq holda bo'ladi (agar bog'lanishga hech qanday kuchlar ta'sir etmasa, uning reaksiyasi nolga teng bo'ladi); ularni aniqlash uchun mexanikaning tegishli masalalarini yechish lozim. Bog'lanishlarning reaksiyasi har doim jismning harakat yo'nalishi cheklangan tomonga qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'ladi. Agarda bog'lanish jismni bir necha yo'nalishdagi harakatini cheklayotgan bo'lsa, bunday bog'lanishning reaksiyasini yo'nalishi ham oldindan ma'lum bo'lmaydi va tegishli masalalarni yechish orqali aniqlanadi.

Bog'lanish reaksiyalarining yo'nalishlarini to'g'ri aniqlanishi mexanika masalalarini yechishda muhim ahamiyatga ega. Shu sababli ko'p uchraydigan ba'zi bog'lanishlarning reaksiyalari qanday yo'nalishlari mumkinligini o'rganib chiqamiz (qo'shimcha misollar 17§ da).

**1. Silliq tekislik (yuza, sirt) yoki tayanch**. Silliq yuzali bog'lanish deb, ishqalanishga ega bo'lmagan yoki ishqalanish kuchi e'tiborga olinmagan yuzaga aytiladi. Bunday yuzalardan iborat bog'lanishlar faqat shu yuzalarga tik bo'lgan (normal) yo'nalishdagi harakatgagina qarshilik ko'rsatishlari mumkin (8, *a* shakl)[6]. Shu sababli silliq yuzadan yoki silliq tayanchdan iborat bo'lgan bog'lanishlarning reaksiyalari - $\bar{N}$, ularning tutashgan joylariga qo'yilgan bo'lib, tutashuvchi jismlarning umumiy normali bo'yicha yo'naladi. Agarda tutashuvchi jismlardan biri nuqtadan iborat bo'lsa, (8, b shakl) reaksiya kuchi ikkinchi yuzaning normali bo'ylab yo'naladi.



9 shakl

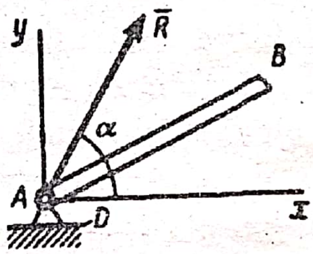
**2. I p.** Cho'zilmaydigan egiluvchan ipdan iborat bo'lgan bog'lanishlar (9 shakl). M jismni A nuqtadan MA masofadan uzoqda bo'lgan masofaga borishiga qarshilik ko'rsatadi xolos.

[6] 8-12 shakllarda jismlarga ta'sir etuvchi kuchlar tasvirlanmagan.

Shu sababli tarang ipdan iborat bog'lanishning reaksiyasi, shu ipning tarangligi bo'yicha yo'nalgan bo'ladi.

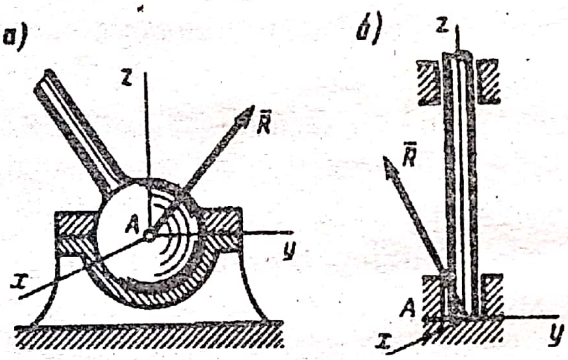
3. **Silindrsimon sharnir (podshipnik).** Silindrik sharnir (yoki sharnir) ikki jismni bir-biriga shunday bog'laydiki, natijada bir jism ikkinchi jismga nisbatan umumiy o'q, ya'ni sharnir o'qi atrofida faqat aylanma harakat qila oladilar xolos (10 shakl).

Agar AB jism qo'zg'almas D tayanchga sharnir orqali biriktirilgan bo'lsa, jismning A nuqtasi sharnir o'qiga perpendikulyar bo'lgan hech qaysi bir tomonga harakat qila olmaydi. Shu sababli tsilindrik sharnirdan iborat bo'lgan bog'lanishning reaksiyasi - $\overline{R}$, sharnir o'qiga perpendikulyar bo'lgan tekislikda joylashgan bo'lib, ixtiyoriy yo'nalishda bo'lishi mumkin, ya'ni Axy tekisligida ixtiyoriy ravishda joylashgan bo'ladi. Bu holda $\overline{R}$ - reaksiya kuchining na moduli R - ni, na yo'nalishini ($\alpha$-burchakni) oldindan aniqlab bo'lmaydi.



10 shakl.

4. **Sferasimon sharnir, tovon.** Sferasimon sharnir bilan biriktirilgan jismlar A nuqtadan o'tuvchi ixtiyoriy o'q atrofida xohlagan tomonga aylanishi mumkin. U holda jismning A nuqtasi (11 shakl) qo'zg'almas bo'ladi. Shu sababli, sferasimon sharnirdan iborat bog'lanishning reaksiya kuchi - $\overline{R}$, A nuqtaga qo'yilgan bo'lib, u fazoning ixtiyoriy tomoniga yo'nalgan bo'lishi mumkin. Bu holda ham yuqoridagi kabi $\overline{R}$ - reaksiya kuchining na modulini va Axyz o'qlari bilan tashkil etgan burchaklarni oldindan aniqlab bo'lmaydi.

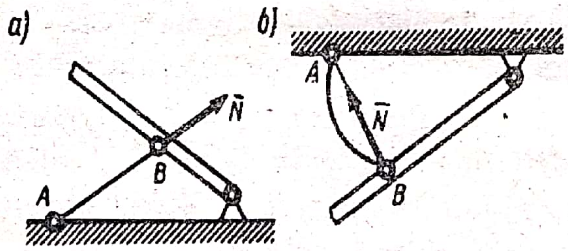


11 shakl

11, b shaklda tasvirlangan t o v o n (tayanch podshipnik)dan iborat bog'lanishning reaksiyasi $\overline{R}$ -ning fazodagi yo'nalishini ham oldindan aniqlab bo'lmaydi.

5. **Vaznsiz sterjen**. Agar sterjenning sof og'irligi, u ko'tarib turgan yukning og'irligidan bir necha marta kichkina bo'lsa, bunday sterjen vaznsiz deb ataladi. Faraz qilaylik muvozanatda bo'lgan jismga vaznsiz sterjenlar A va B nuqtalaridagi sharnirlar orqali (12, *a* shakl) mahkamlangan bo'lsin.

U holda sterjenga faqat A va B nuqtalarga qo'yilgan ikkita kuch ta'sir etishi mumkin, agar jism muvozanatda bo'lsa bu kuchlar o'zaro muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasini tashkil etib, AB to'g'ri chiziq bo'ylab (4 *a*, b shakllar) yo'naladilar. U holda ta'sir va aks ta'sir qonuniga asosan sterjen jismga ham shu AB chiziq bo'ylab yo'nalgan kuchlar bilan ta'sir ko'rsatadi. Shu sababli vaznsiz sterjendan iborat bog'lanishlarning reaksiya kuchlari -$\overline{N}$, sterjenning o'qi bo'ylab yo'nalgan bo'ladi



12 shakl.

Agar bog'lanish egri chiziqli vaznsiz sterjendan iborat bo'lsa (12 b shakl), u holda ham bunday sterjenning reaksiyasi A va B nuqtalardan o'tuvchi o'q bo'ylab yo'nalgan bo'ladi. (12, *a* shakldagi reaksiya vaznsiz sterjenning siqilayotganligini belgilaydi, 12 b shakldagi reaksiya vaznsiz sterjenning cho'zilayotganligini belgilaydi).

Statika masalalarini yechishda, reaksiya kuchlari aniqlanishlari zarur bo'lgan noma'lum kattaliklar hisoblanadilar. Ularni aniqlash orqali, ta'sir va aks ta'sir qonuniga, asosan bog'lanishga ta'sir etayotgan kuchning miqdori aniqlanadi, ular esa o'z o'rnida konstruksiyalarning mustahkamligini ta'minlashda foydalaniladigan asosiy parametrlar bo'lib hisoblanadilar.

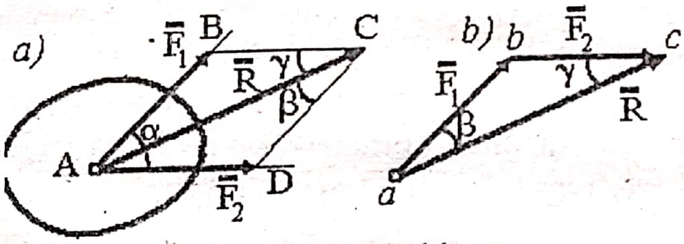
# II BOB
# KUCHLARNI QO'SHISH. UCHRASHUVCHI KUCHLAR SISTEMASINI QO'SHISH

## 4§ Kuchlarni geometrik usulda qo'shish. Uchrashuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisi. Kuchlarni tashkil etuvchilarga ajratish

Mexanikaning aksariyat masalalari vektor algebrasi fanidagi vektorlarni qo'shish amaliga oid bo'lib, xususiy holda kuch vektorlarini qo'shish bilan bog'liqdir. Mexanikada ixtiyoriy kuchlar sistemasining geometrik yo'l bilan aniqlangan yig'indisini bosh vektor deb ataladi. Yuqoridagi 3§ (6 shakl)da takidlaganimizdek bosh vektorni teng ta'sir etuvchi vektor bilan aralashtirib yubormasligimiz lozim.

Ko'p hollarda kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi umuman bo'lmasligi ham mumkin, lekin bosh vektorni har doim hisoblab chiqarishimiz mumkin.

**1. Ikkita kuchni qo'shish.** Bir nuqtaga qo'yilgan va ixtiyoriy ravishda yo'nalgan $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlarning teng ta'sir etuvchi vektori $\overline{R}$ -ni shu kuchlarga qurilgan parallelogram usuli bilan aniqlanadi (13 *a* shakl) yoki shu parallelogrammning birorta yarmidan iborat bo'lgan kuch uchburchagi orqali aniqlanadi (13 b shakl).

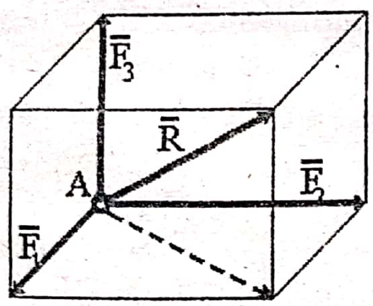



13 shakl.

Agar berilgan kuchlar orasidagi burchak α - ga teng bo'lsa, u holda teng ta'sir etuvchining moduli R va uni kuchlar bilan tashkil qilgan burchaklari, ya'ni β va γ -larni quyidagi formulalar orqali aniqlanadi,

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha} \qquad (1)$$

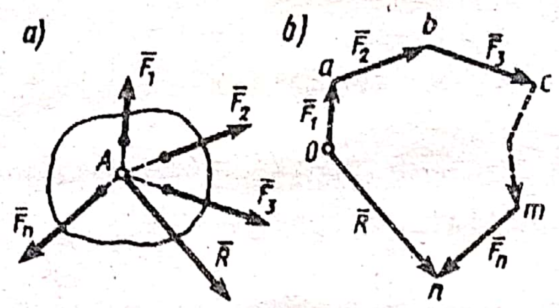
$$\frac{F_1}{\sin\gamma} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\alpha} \qquad (2)$$




14 shakl

**2. Bir tekislikda joylashmagan uchta kuchlarni qo'shish.** Bir nuqtaga qo'yilgan lekin bir tekislikda joylashmagan ixtiyoriy $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ va $\overline{F}_3$ kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi $\overline{R}$, shu kuchlarga qurilgan parallelepipedning diagonaliga teng bo'lib, (parallelepiped usuli bilan) ularni ketma ket qo'shish orqali yoki kuchlar ko'pburchagi usuli bilan aniqlanadi (14 shakl).

**3. Uchrashuvchi kuchlar sistemasini qo'shish.** Ixtiyoriy kuchlar sistemasining geometrik yig'indisi (bosh vektori)ni, shu sistemaga ketma - ket parallelogramm usulini qo'llash orqali, yoki kuch ko'pburchagini qo'llash usuli orqali aniqlanadi. Ikkinchi usul qulay va soddaroq hisoblanadi. Kuch ko'pburchagi usuli bilan $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ va $\overline{F}_3$ ... $\overline{F}_n$ (15, *a* shakl) kuchlarni qo'shishda ixtiyoriy O nuqta tanlab olamiz (15, b shakl), so'ngra shu O nuqtaga tanlab olingan masshtabga binoan $\overline{F}_1$ vektorni ifodalovchi $\overline{Oa}$ - vektorni, so'ngra *a* nuqtadan $\overline{F}_2$ vektorni ifodalovchi $\overline{ab}$ - vektorni va b - nuqtadan $\overline{F}_3$-vektorni ifodalovchi $\overline{bc}$ -vektorni qo'yamiz.



15 shakl

Shunday tarzda birin- ketin har bir kuchni ifodalovchi vektorlarni qo'yaveramiz va oxirgi n - chi vektorni, ya'ni $\overline{F}_n$- ni ifodalovchi $\overline{mn}$-vektorini ham qo'yamiz. Endi birinchi vektorning boshi hisoblangan O nuqtani, n - chi vektorning uchi bilan birlashtiruvchi $\overline{On}$-vektori, berilgan vektorlarning geometrik yig'indisi $\overline{R}$ -ni belgilaydi, ya'ni $\overline{On}=\overline{R}$ ga teng bo'ladi, yoki

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ... + \overline{F}_n \quad \text{yoki} \quad \overline{R} = \sum \overline{F}_k$$

**4. Uchrashuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisini aniqlash**. Ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasini yoki boshqacha qilib aytganda, uchrashuvchi kuchlar sistemasini ko'rib chiqamiz (15 *a* shakl). Absolyut qattiq jismlarga qo'yilgan kuchlar sirpanuvchi kuchlar bo'lganligi uchun, bir nuqtada uchrashuvchi kuchlar sistemasini, har doim bir nuqtaga qo'yilgan kuchlar sistemasiga keltirishimiz mumkin (15 *a* shaklda, bu A nuqta).

Kuchlarni parallelogramm usulida birin ketin qo'sha borib shuni aniqlaymizki, har qanday uchrashuvchi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchi yagona vektorga ega bo'lib, u berilgan kuchlarning geometrik yig'indisiga (bosh vektorga) teng bo'lib, uning ta'sir chizig'i kuchlarning kesishgan (uchrashgan) nuqtasidan o'tar ekan. Demak, 15 *a* shaklda tasvirlangan $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, ... $\overline{F}_n$ vektorlardan tashkil topgan kuchlar sistemasi, ularning bosh vektori $\overline{R}$ -dan iborat bo'lgan, teng ta'sir etuvchi vektorga ega bo'lar ekan. Ushbu teng ta'sir etuvchi vektor kuchlarning kesishuvchi A - nuqtasiga, (yoki A nuqtadan o'tkazilgan $\overline{R}$ -kuchining ta'sir chizig'ida yotuvchi boshqa nuqtaga) qo'yilar ekan.

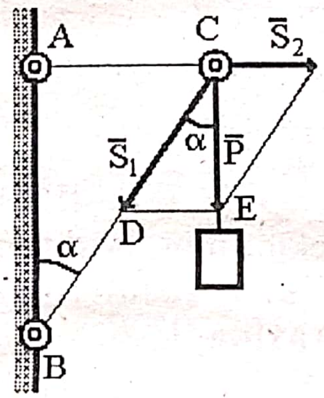
5. **Kuchlarni tashkil etuvchilarga ajratish**. Kuchlarni tashkil etuvchilarga ajratish deb, shunday bir necha vektorlardan iborat kuchlar sistemasini tuzish mumkinki, berilgan kuch vektori ushbu kuchlarning teng ta'sir etuvchisidan iborat bo'lishi shart ekan. Bunday masala bir necha yechimga ega bo'lishi mumkin, lekin bir yechimga ega bo'lishligi uchun qo'shimcha shartlar berilgan bo'lishi zarur ekan. Quyida shunday shartlardan ikkitasini ko'rib chiqamiz:

*a) Kuchni berilgan ikkita yo'nalish bo'yicha tashkil etuvchilarga ajratish.* Bu holda shunday parallelogramm qurish lozimki, uning diagonali berilgan kuch vektoridan iborat bo'lib, uning tomonlari (tashkil etuvchilari) berilgan yo'nalishlarga parallel bo'ladi. Masalan, 13 *a* shaklda berilgan $\overline{R}$ - kuch vektori AB va AD yo'nalishlar bo'yicha $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlardan iborat ikkita tashkil etuvchilarga ajratildi. (bu holda $\overline{R}$ - kuch vektori, AB va AD chiziqlar bilan bir tekislikda joylashgan bo'ladi).

*b) Kuchni berilgan uchta yo'nalishdagi tashkil etuvchilarga ajratish.* Agar berilgan uchta yo'nalishlar bir tekislikda yotmasalar, u holda bunday masala yagona bir yechimga ega bo'lib, uning uchun shunday parallelepiped qurish mumkinki uning diagonali berilgan $\overline{R}$ -kuchdan iborat bo'lib, qirralari esa berilgan yo'nalishlarga parallel bo'ladi (14 shakl).

Kuchlarni tashkil etuvchilarga ajratish usulidan bog'lanishlarga ta'sir etayotgan bosimlarini aniqlashda foydalaniladi. Buning uchun jismga (konstruksiyaga) qo'yilgan kuchni bog'lanishlarning reaksiyalariga parallel bo'lgan yo'nalishlardagi tashkil etuvchilarga ajratish lozim bo'ladi. Chunki ta'sir va aks ta'sir qonuniga asosan, jismning bog'lanishga ta'sir kuchi va bog'lanish reaksiyasi bir to'g'ri chiziqda yotadi.

**1 masala.** Bir-birlari bilan C nuqtada sharnir orqali mahkamlangan, A va B nuqtalarda esa sharnirlar orqali devorga mahkamlangan ikkita AC va BC sterjenlardan iborat bo'lgan kronshteyn berilgan. ∠ BAC=90°, ∠ ABC=α ga teng bo'lsin (16 shakl). Kronshteynning C nuqtasiga P og'irlikdagi yuk osilgan. Sterjenlarning og'irliklarini hisobga olmagan holda ularning reaksiyalari aniqlansin.



16 shakl

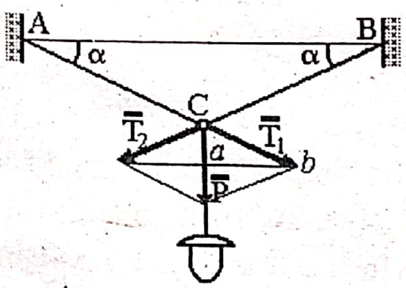
Yechish: Sterjenlarning reaksiyalari, ularni siquvchi yoki cho'zuvchi kuchlardan iborat bo'ladi. Sterjenlar vaznsiz bo'lganligi sababli, yuqorida ta'kidlaganimizdek, ularning reaktsiya kuchlari, shu sterjenlar bo'ylab (C nuqtadagi sharnirga ta'sir qiladilar) yo'nalgan bo'ladi. Shu sababli yukning og'irlik kuchi $\overline{P}$-ni C nuqtaga qo'yamiz. Sterjenlardagi zo'riqishlarni $\overline{S}_1$ va $\overline{S}_2$ deb belgilab, shaklda ko'rsatilgandek yo'naltiramiz. Hosil bo'lgan CDE uchburchakdan,

$$S_1 = \frac{P}{\cos\alpha},\ S_2 = Ptg\alpha$$

ekanligini aniqlaymiz. Shunday qilib, BC sterjen $S_1$ kuch bilan siqilayotgan va AB sterjen esa $S_2$ kuch bilan cho'zilayotgan ekanligini aniqladik. α - burchak ortishi bilan, sterjenlardagi zo'riqishlarning son miqdorlari ortib boradi va uning qiymati 90°ga yaqinlashgan sari ularning son qiymati juda katta bo'ladi.

**2 masala.** Og'irligi P=200 N bo'lgan fonar, AC va BC troslarga osib qo'yilgan (17 shakl). Troslarning gorizont bilan hosil qilgan burchaklari α =5° bo'lsa, troslarning taranglik kuchlari aniqlansin.

Yechish: $\overline{P}$ kuchini C nuqtaga qo'yamiz va uni troslarning taranglik yo'nalishlari bo'yicha tashkil etuvchilarga ajratamiz. Bu holda kuchlarga qurilgan parallelogramm rombdan iborat bo'ladi; uning diagonallari o'zaro perpendikulyar bo'lib, kesishgan nuqtalarida teng ikkiga bo'linadi.



17 shakl

Uchburchak *aCb* dan,

$$\frac{P}{2} = T_1 \sin\alpha \text{ va } T_1 = T_2 = \frac{P}{2\sin\alpha} \approx 1150N$$

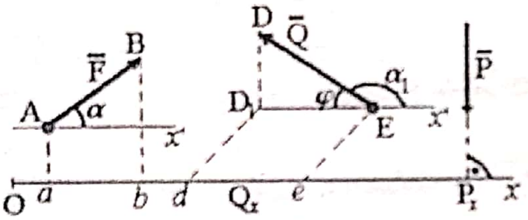
ekanligi aniqlaymiz Aniqlagan formulalarimizga asosan burchak α-ni kamaytirsak, trosning taranglik kuchi orta boradi (masalan, α=1° ga teng bo'lsa T=5750 N bo'ladi). Trosni gorizontal holda yo'naltirib taranglash mumkin emas, chunki α=0° bo'lganda, T=∞N ga teng bo'ladi.

## 5§ Kuchning o'qqa va tekislikka proeksiyasi. Kuchlarning analitik usulda berilishi va ularni qo'shish

Statika masalalarini analitik usulda yechish, kuchni o'qqa proeksiyalash tushunchasiga asoslangan. Kuchning (yoki har qanday vektorning) biror o'qqa proeksiyasi, shu kuchning modulini o'qning musbat yo'nalishi bilan kuch vektori orasidagi burchakning kosinusiga ko'paytmasiga teng bo'lgan algebraik qiymatga aytiladi. Agar shu burchak o'tkir bo'lsa, - proeksiya musbat ishorali bo'ladi, o'tmas bo'lsa - proeksiya manfiy ishorali bo'ladi. Agar shu kuch o'qqa perpendikulyar holda yo'nalgan bo'lsa, uning proeksiyasi nolga teng bo'ladi.

Masalan, 18 shak'da tasvirlangan kuchlarning proeksiyalari quyidagicha bo'ladi,

$$F_x = F\cos\alpha = ab;\, Q_x = Q\cdot\cos\alpha = -Q\cos\varphi = -de,\ P_x = 0. \qquad (4)$$

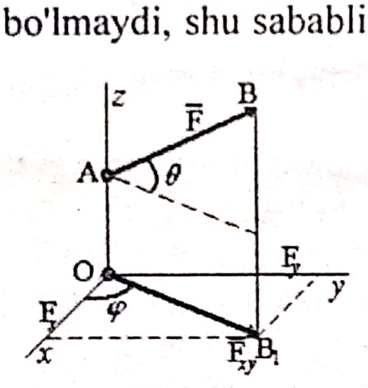


18 shakl

$\overline{F}$ - kuchning Oxy tekislikka proeksiyasi deb, $\overline{F}$- vektorining boshi va oxiridan shu tekislikka tushirilgan proeksiyalarining orasidagi $\overline{F_{xy}} = \overline{OB_1}$ vektorga aytiladi (19 shakl). Shunday qilib, kuchning o'qqa proeksiyasidan farqli ravishda, kuchning tekislikka proeksiyasi vektor qiymat ekan, chunki uning son qiymatidan tashqari, shu Oxy tekislikda ma'lum yo'nalishga ega bo'ladi (kuchning o'qdagi proeksiyasi skalyar qiymatdan iborat -tarj).

Kuchning tekislikdagi proeksiyasining moduli $F_{xy}$=F·cosθ, bu erda θ-berilgan kuch vektori $\overline{F}$- bilan, uning Oxy tekislikdagi $\overline{F_{xy}}$ proeksiyasi orasidagi burchak (19 shakl).

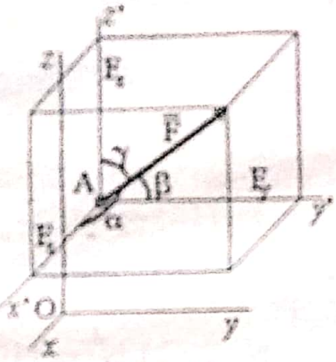
Ayrim hollarda kuchni to'g'ridan-to'g'ri o'qqa proeksiyalash mumkin bo'lmaydi, shu sababli uni, avvalo, shu o'q yotgan tekislikka proeksiyalanadi, undan so'ng shu proeksiya vektorni o'qqa proeksiyalanadi. Masalan, 19 shaklda ko'rsatilgan $\overline{F}$-kuchini to'g'ridan to'g'ri koordinata o'qlariga proeksiyalab bo'lmaydi, shuning uchun ularni o'qlardagi proeksiyalari quyidagicha aniqlanadi,



19 shakl

$$F_x = F_{xy}\cdot\cos\varphi = F\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi;$$
$$F_y = F_{xy}\cdot\sin\varphi = F\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi; \qquad (5)$$

**Kuchni analitik usulda berilishi**. Kuchni analitik usulda berilishi uchun, avvalo, Oxyz, koordinata o'qlarini tanlab olishimiz lozim, so'ngra shu o'qlarga nisbatan kuchning fazodagi yo'nalishi berilgan bo'ladi. Mexanika fanida faqat o'ng koordinata sistemalaridan foydalanish qabul qilingan. Bu sistemaning xususiyati shuki, Oz o'qining musbat uchidan qaraganda Ox o'qini soat strelkasiga teskari yo'nalishda 90° ga burganimizda, bu o'q Oy o'qi bilan ustma-ust tushadi (20 shakl).



20 shakl

Agarda berilgan F kuchning moduli va uning koordinata o'qlari bilan hosil qilgan α, β, γ - burchaklari ma'lum bo'lsa, shu holdagina $\overline{F}$-kuch vektorini tasvirlash mumkin. Shunday qilib, F va α, β, γ-lar $\overline{F}$- kuch vektorining tashkil etuvchilari hisoblanadi. Undan tashqari bu $\overline{F}$-kuchning qo'yilgan nuqtasining koordinatalari, ya'ni x, y, z -lar ham berilgan bo'lishlari shart.

Mexanika masalalarini yechishda kuchlarni ularning proeksiyalari $F_x$, $F_y$, $F_z$ - orqali berilishi qulay hisoblanadi. Ushbu proeksiyalarni bilgan holda, kuchning moduli va koordinata o'qlari bilan hosil qilgan burchak kosinuslarini quyidagi formulalar orqali aniqlanadi,

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}, \qquad \cos\beta = \frac{F_y}{F}, \qquad \cos\gamma = \frac{F_z}{F}, \tag{6}$$

Agar berilgan kuchlarning hammasi bir tekislikda joylashgan bo'lsa, har bir kuchni ularning Ox va Oy o'qlardagi proeksiyalari orqali berilishi mumkin bo'ladi. U holda yuqoridagi formulalar soddaroq ko'rinishga keladilar,

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}, \qquad \cos\beta = \frac{F_y}{F}, \tag{7}$$

**Kuchlarni analitik usulda qo'shish.** Kuchlarning vektor bog'lanishi bilan ularning proeksiyalarini bog'lanishi geometriya fanidagi quyidagi teorema orqali ifodalanadi: yig'indi vektorning biror o'qqa proeksiyasi, yig'indi vektorni tashkil etuvchi vektorlarning shu o'qqa proeksiyalarining yig'indisiga teng. Ushbu teoremaga asosan, agar $\overline{R}$ - vektori $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, ... $\overline{F}_n$ vektorlarning yig'indisidan iborat bo'lsa, ya'ni $\overline{R} = \sum \overline{F}_i$ bo'lsa, u holda:

$$R_x = \sum F_{kx}; \qquad R_y = \sum F_{ky}; \qquad R_z = \sum F_{kz}; \tag{8}$$

Shu sababli, $R_x$, $R_y$ va $R_z$ - larni bilgan holda (6) formula orqali, yig'indi vektorning moduli va burchak kosinuslarini aniqlaymiz, ya'ni:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}, \qquad \cos\beta = \frac{R_y}{R}, \qquad \cos\gamma = \frac{R_z}{R}, \tag{9}$$

Yuqoridagi (8) va (9) formulalar kuchlarni analitik qo'shish uchun zarur bo'lgan formulalarni tashkil etadi.

Berilgan kuchlar bitta tekislikda joylashgan kuchlardan iborat bo'lsa (9) formulalar ancha soddalashadi,

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}, \qquad \cos\beta = \frac{R_y}{R}, \tag{10}$$

Agar kuchlar, o'zlarining modullari va burchak kosinuslari bilan berilgan bo'lsalar, ularni analitik usulda qo'shish uchun avvalo ularning proeksiyalarining yig'indilarini aniqlash lozim bo'ladi.

**3 masala**. Modullari va burchaklari F=17,32 N; T=10 N; P=24 N; $\varphi=30^\circ$ $\psi=60^\circ$ iborat uchta kuchlarning yig'indisi aniqlansin (21 shakl).

Yechish: Berilgan kuchlarning koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini aniqlaymiz,

$$F_x = F\cos\varphi = 15 \text{ N},\ T_x = -T\cos\psi = -5 \text{ N},\ P_x = 0;$$
$$F_y = -F\sin\varphi = -8{,}66 \text{ N};\ T_y = T\sin\psi = 8{,}66 \text{ N};\ P_y = -P = -24 \text{ N}.$$

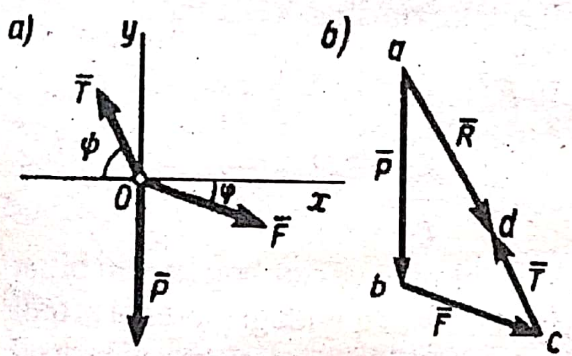
U holda (10) formulaga asosan,

$$R_x = 15 - 5 = 10 \text{ N},\ R_y = -8{,}66 + 8{,}66 - 24 = -24 \text{ N}.$$

Demak,

$$R = \sqrt{10^2 + (-24)^2} = 26\ N;\ \cos\alpha = 5/13,\ \cos\beta = -12/13.$$

Shunday qilib, R=26 N; $\alpha=67^\circ 20'$; $\beta=157^\circ 20'$ ekanligi aniqlandi.



21 shakl.

Ushbu masalani geometrik yo'l bilan yechish uchun, tegishli masshtab qabul qilinadi (masalan, 1 sm da - 10 N ) va uchta kuchdan iborat kuch ko'pburchagi quriladi (21 b shakl). Shu kuch ko'pburchakni berkituvchi vektor $\overline{ad}$ shu kuchlarning yig'indisi $\overline{R}$ - vektorni tanlangan masshtabdagi modulini va uning yo'nalishini aniqlab beradi. Agar *ad* - kesmaning uzunligi *ad*=2,5 sm.. bo'lsa, uni masshtabga ko'paytirsak, R=25 N ekanligini aniqlaymiz. Demak, absolyut xatolik 1 N dan iborat ekan, yoki xatolik 4% ni tashkil qilar ekan.

## 6§ Uchrashuvchi kuchlar sistemasining muvozanati

Biror qattiq jismga qo'yilgan uchrashuvchi kuchlar sistemasining muvozanat holatda bo'lishligi uchun, ularning teng ta'sir etuvchisi, ya'ni ularning bosh vektori nolga teng bo'lishi zaruriy va yetarli shart hisoblanadi (4§ ga q.). Ushbu muvozanat shartlarning geometrik va analitik ifodalari quyidagicha bo'ladi:

1. **Muvozanatning geometrik sharti.** Kuchlar sistemasining bosh vektori $\overline{R}$ kuch ko'pburchagini yopuvchi vektor bo'lganligi sababli (15 shaklga q.), $\overline{R}$ - nolga teng bo'lishi uchun, oxirgi kuchning uchi birinchi kuchning boshi bilan uchrashishi shart bo'ladi, ya'ni kuch ko'pburchagi o'z-o'zidan yopiladi.

Demak, uchrashuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun, shu kuch vektorlaridan qurilgan kuch ko'pburchagi o'z-o'zidan yopiq ko'pburchakni tashkil etishi, zaruriy va yetarli shart hisoblanadi.

2. **Muvozanatning analitik shartlari.** Bosh vektorning moduli analitik usulda quyidagi formula bilan aniqlanadi,

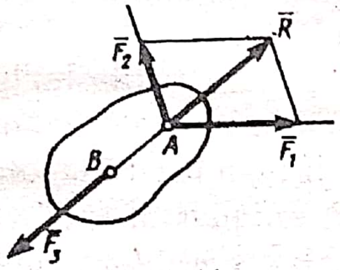
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

Ildiz ostidagi, yig'indilarning har biri musbat sonlardan iborat bo'lganligi sababli, har bir yig'indi bir vaqtni o'zida $R_x=0$, $R_y=0$, $R_z=0$, ya'ni (8) formulaga asosan,

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad \sum F_{ky} = 0; \qquad \sum F_{kz} = 0; \qquad (11)$$

bo'lgandagina bosh vektor R - ning moduli nolga teng bo'ladi.

(11) tenglamalar sistemasi uchrashuvchi kuchlar sistemasining muvozanat tenglamasi deyiladi, ya'ni fazoda joylashgan uchrashuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun, kuchlarning uchta koordinata o'qlaridagi proeksiyalarining har bir o'qdagi yig'indilari nolga teng bo'lishlari zaruriy va yetarli shart hisoblanadi.



22 shakl

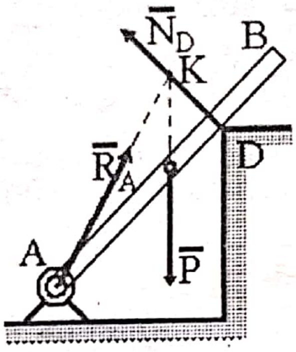
Agar jismga qo'yilgan uchrashuvchi kuchlar bir tekislikda joylashgan bo'lsa, unday kuchlar tekislikda joylashgan kuchlar sistemasi deb ataladi va ularning muvozanat tenglamalarining soni ikkita bo'ladi,

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad \sum F_{ky} = 0; \qquad (12)$$

3. **Uchta kuch haqidagi teorema.** Ayrim hollarda statika masalalarini uchta kuch haqidagi teorema orqali yechish qulay bo'ladi: agar qattiq jismga bir tekislikda yotgan va o'zaro parallel bo'lmagan uchta kuch ta'sir etib, u jism muvozanat holatda bo'lsa, bu kuchlarning ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadi.

Bu teoremani isbot qilish uchun, shu jismga ta'sir qilayotgan kuchlarning faqat ikkitasini, masalan, $\overline{F_1}$ va $\overline{F_2}$ larni olib ko'raylik. Teoremaga asosan bu kuchlar o'zaro parallel bo'lmagan holda bir tekislikda yotadilar, shu sababli ularning ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadi, o'sha nuqtani A harfi bilan belgilaylik (22 shakl). Bu nuqtaga $\overline{F_1}$ va $\overline{F_2}$ kuchlarni keltirib qo'yaylik va ularni geometrik usulda qo'shib, teng ta'sir etuvchisi $\overline{R}$ - ni aniqlaymiz va uni o'sha A nuqtaga qo'yaylik. U holda jismga bir vaqtning o'zida ikkita kuch ta'sir etadi.

Ulardan biri $\overline{F_1}$ va $\overline{F_2}$ kuchlarning yig'indisidan iborat bo'lgan va A nuqtaga qo'yilgan $\overline{R}$ - kuchi, ikkinchisi esa shu jismning birorta B nuqtasiga qo'yilgan $\overline{F_3}$-kuchidan iborat bo'ladi. Agar jism shu ikkala kuch ta'sirida muvozanatda bo'lsa, birinchi aksiomaga asosan $\overline{R}$ va $\overline{F_3}$ kuchlar bir chiziqda joylashgan bo'lib, ularning yo'nalishlari qarama-qarshi, son qiymatlari esa o'zaro teng bo'lishlari kerak. Shunga asosan $\overline{F_3}$-kuchining ta'sir chizig'i ham, albatta, shu A nuqtadan o'tadi, demak, teorema isbotlandi.



23 shakl

Ushbu teoremani teskarisi o'rinli bo'lmaydi. Ya'ni, bir jismga qo'yilgan uchta kuch ta'sirida jism muvozanat holatda bo'lmasligi ham mumkin; shu sababli bu teorema uchta kuch ta'siridagi jismning muvozanat holati uchun zaruriy shartni isbotlaydi xolos.

**Misol.** A nuqtaga sharnir orqali mahkamlangan va D nuqtada o'tkir qirraga tayangan AB brus berilgan bo'lsin (23 shakl). Ushbu brusga uchta, ya'ni brusning og'irlik kuchi $\overline{P}$, D nuqtaning reaksiyasi $\overline{N}_D$ va A sharnirning reaksiya kuchi $\overline{R}_A$ - lar ta'sir etadi. Brus muvozanatda bo'lganligi sababli, uchala kuchlarning ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadi. $\overline{N}_D$ va $P$ kuchlarning yo'nalishlari ma'lum va ularning ta'sir chiziqlari K - nuqtada kesishadi. Teoremaga asosan A nuqtaning reaksiya kuchining ta'sir chizig'i ham shu K nuqtadan o'tishi shart, ya'ni u AK to'g'ri chiziq bo'ylab yo'naladi. Ushbu masalada A nuqtadagi sharnirning reaksiya kuchi $\overline{R}_A$-ning ta'sir chizig'i noma'lum edi, lekin uchta kuch haqidagi teoremadan foydalanib, uning yo'nalishi aniqlandi.

## 7§ Statika masalalarini yechish

Statika qismida asosan quyidagi ikki turdagi masalalar yechiladi: 1) jismga ta'sir etayotgan kuchlarning barchasi oldindan (qisman yoki to'liq) ma'lum bo'lib, kuchlarning qaysi hollarida yoki ular o'zaro qanday munosabatda bo'lgan holatlarida jism muvozanatda bo'lishi aniqlanadi (4, 5 masalalar); 2) jismning muvozanat holati oldindan ma'lum bo'lgan holda, shu jismga ta'sir etayotgan kuchlarning hammasi yoki ularning ma'lum bir qismi aniqlanadi (6,7 va 8 masalalar). Statikaning barcha masalalarida bog'lanishlar, reaksiya kuchlari oldindan noaniq bo'ladi.

Statikaning masalalarini yechishdan oldin, izlanayotgan noma'lumlarni aniqlashda qaysi jismning (yoki jismlarning) muvozanat shartlarini tekshirilishini aniqlab olish lozim. Statika masalalarini yechish quyidagi bosqichlar (amallar)dan iborat bo'ladi.

**1. Muvozanat sharti tekshirilayotgan jismni (yoki jismlarni) aniqlash.** Masalalarni yechishdan oldin berilgan yoki izlanayotgan noma'lum kuchlar qaysi jismga qo'yilayotganligi aniqlanadi. (Masalan, agar tayanchga tushayotgan bosim kuchini aniqlash zarur bo'lsa, shu tayanchga ta'sir qilayotgan jismning muvozanat shartlarini aniqlash lozim bo'ladi).

Agar berilgan kuchlar jismning bir qismiga ta'sir etib, izlanayotgan noma'lum kuchlar jismning boshqa qismida bo'lsa, yoki berilgan kuchlar va izlanayotgan noma'lum kuchlar bir necha qismlardan tashkil topgan jismga ta'sir etayotgan bo'lsa, jismni bir necha qismlarga ajratish yoki ularning muvozanat shartlarini birin-ketin tekshirish lozim bo'ladi.

2. **Ta'sir etuvchi kuchlarni shaklda tasvirlash.** Qaysi jismning muvozanat shartini tekshirish kerakligini aniqlab olganimizdan keyin (faqat shundan keyin),

shu jismga qo'yilgan barcha tashqi kuchlarni va bog'lanishlarning noma'lum reaksiya kuchlarini vektor shaklida tegishli nuqtalarga qo'yilgan holda tasvirlash kerak. Bog'lanish reaksiyalarini tasvirlashda 3§ da aytilgan qoidalarga rioya qilish lozim.

3. **Muvozanat shartlari tenglamalarini tuzish**. Muvozanatlik shartlari tekshirilayotgan jismning, unga qo'yilgan kuchlar va noma'lum reaksiya kuchlaridan iborat sistema uchun muvozanat tenglamalari tuziladi. Muvozanat tenglamalar sistemasi, jismlarning muvozanat holatlariga bog'liq ravishda turlicha tuziladi, shu sababli ularni qanday tuzish lozimligi haqida, darslikning tegishli joylarida ko'rsatib o'tiladi.

4. **Noma'lumlarni aniqlash, masalaning yechimini tekshirish**. Masalalarni yechishda, jismlarning va ularga qo'yilgan kuchlar sistemasining chizmasini sifatli qilib chizilishi katta ahamiyatga ega. Yaxshi qilib chizilgan chizma muvozanat tenglamalarini tuzishda sodir bo'ladigan xatoliklarni kamayishiga va yechimni to'g'ri yo'ldan borishligiga katta yordam beradi.

Barcha hisoblash ishlarini algebraik tenglamalar orqali olib borishlik tavsiya etiladi. Umumiy holda olib borilgan hisoblar, keyinchalik tenglamalarda yo'l qo'yilgan xatolarni tezda aniqlash uchun katta yordam beradi (tenglamalardagi qiymatlar bir xil o'lchovli bo'lishlari shart). Kuchlarning son qiymatlarini faqat masalani echib bo'lgandan keyingina qo'yishlik tavsiya etiladi.

Ushbu paragrafda faqat uchrashuvchi kuchlar qo'yilgan jismlarning muvozanatiga oid masalalarni ko'rib chiqamiz xolos. Ularni yechish uchun geometrik yoki analitik usuldan foydalanamiz.

*Geometrik usul*. Jismga ta'sir etayotgan (berilgan yoki noma'lum) kuchlar soni uchtadan oshmasa, faqat geometrik usul qo'llanilishi tavsiya etiladi. U holda jismga ta'sir etayotgan uchta kuchdan iborat ko'pburchak yopiq holda bo'lib, kuch uchburchagini tashkil etadi. Kuch uchburchagini qurishni, qiymati va yo'nalishi ma'lum bo'lgan kuchdan boshlanadi. So'ngra hosil bo'lgan kuch uchburchagidan noma'lum qiymatlarning yo'nalishlari va modullari aniqlanadi.

*Analitik usul*. Analitik usulni qo'llashda jismga ta'sir etayotgan kuchlarning soni ixtiyoriy bo'lishi mumkin. Avvalo tegishli yo'nalishda koordinata o'qlarini yo'naltirish lozim. Agar jismga qo'yilgan kuchlar bir tekislikda joylashgan uchrashuvchi kuchlardan iborat bo'lsa, muvozanat tenglamalar sistemasi ikkita (12 formulalar), agar jismga qo'yilgan kuchlar fazoda joylashgan uchrashuvchi kuchlardan iborat bo'lsa, muvozanat tenglamalar sistemasi uchta (11 formulalar) tenglamalardan iborat bo'ladi. Koordinata o'qlarini yo'naltirishning optimal yo'llaridan foydalanish lozim, buning uchun o'qlarning yo'nalishini shunday tanlash lozimki, noma'lumlar iloji boricha faqat bitta o'qqagina pro[illegible]siyalansa, tenglamalarni yechish qulayroq kechadi.

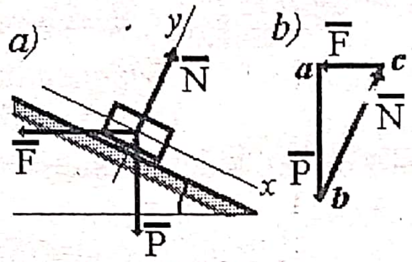
Birinchi marta masala yechuvchilar uchun masl[illegible]hatimiz shuki, tenglamalar tuzishlaridan oldin har bir kuchning o'qlardagi proeksiyalarini avvaldan hisoblab alohida qog'ozga jadval qilib yozib olsalar (4 masalaga q.) xatoga yo'l qo'yilish kamayadi.

Ba'zi bir qo'shimcha ko'rsatmalarni quyidagi masalalarni yechish davomida aytib o'tamiz.

**4 masala.** Og'irligi P - ga teng bo'lgan yuk, gorizontga α- burchak ostida qiya bo'lgan silliq tekislik ustiga o'rnatilgan (24 *a* shakl). Shu yukni ushlab turish uchun gorizontal yo'nalishda bo'lgan $\overline{F}$ kuchning son qiymati (moduli) aniqlansin, hamda shunday muvozatdagi holatda yukning qiya tekislikka ko'rsatgan normal bosim $\overline{N}$ - kuchining moduli aniqlansin.

**Yechish.** Izlanayotgan noma'lum kuchlar turli jismlarga ta'sir etmoqda: $\overline{F}$ - kuchi jismga, $\overline{Q}$ - kuchi esa bog'lanishga ta'sir etmoqda ($\overline{Q}$ -kuchi shaklda tasvirlanmagan)

Masalani yechishda jismning tekislikka bosim kuchini, shu kuchga teng va qarama-qarshi yo'nalgan *N*-normal bosim kuchi bilan almashtiramiz. U holda jismga bir vaqtni o'zida uchta $\overline{F}$, $\overline{N}$ va $\overline{Q}$ kuchlar ta'sir etadi va jismning shunday holatining muvozanat shartini tekshiramiz. Bu masalani geometrik yo'l bilan ham, analitik yo'l bilan echish mumkin. Masalani ikkala usul bilan yechamiz.



24 shakl

*Geometrik usul.* Jism muvozanat holatda bo'lgani uchun, unga ta'sir etuvchi $\overline{P}$, $\overline{F}$ va $\overline{N}$ kuchlar siniq chiziqdan iborat kuch uchburchagini tashkil qiladilar. Kuch uchburchagini qurishni moduli va yo'nalishi aniq bo'lgan kuch vektoridan boshlash lozim (24 b shakl). Chizmadan tashqarida bo'lgan ixtiyoriy joyda *a* - nuqta tanlab olamiz va tanlangan masshtabda yukning og'irlik kuchini $\overline{P}$ - vektor shaklda ifodalaymiz, uning oxirini b-nuqta bilan belgilaymiz. Bu vektorning boshidan (*a* - nuqtadan) $\overline{F}$ -kuchiga parallel, oxiridan (*b*-nuqtadan) $\overline{N}$ -kuchiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz, ularning kesishgan nuqtasi, *abc* - kuch uchburchagining uchinchi nuqtasi, ya'ni c-nuqtani belgilab beradi.

Bu kuch uchburchagining tegishli tomonlarining uzunligi tegishli kuchlarning tanlangan masshtabdagi modullarini aniqlab beradi (Masalan, *P=ab, N=bc, F=ca*). Kuchlarning yo'nalishini strelkalarning yo'nalishiga qarab aniqlanadi. Jism muvozanatda bo'lgani uchun strelkalar birin-ketin davom etib ketishi lozim (ya'ni birining oxiriga ikkinchisining boshi qo'yiladi). $\angle bac=90^0$, $\angle abc=\alpha$- ga teng bo'lgani uchun,

$$F=P\cdot tg\alpha \qquad N=P/\cos\alpha.$$

ekanligini aniqlaymiz.

*Analitik usul.* Jismga ta'sir etayotgan kuchlar sistemasi bir tekislikda yotganligi uchun, faqat ikkita muvozanat tenglamalar sistemasini tuzamiz (12 formula). Koordinata o'qlarini o'tkazamiz. Tenglamalarni soddaroq bo'lishligi uchun x - o'qini noma'lum $\overline{N}$ - vektorga perpendikulyar holda yo'naltiramiz.

[7] Jadvalni ustunlar bo'yicha to'ldirish maqulroq bo'ladi, ya'ni avval $\overline{P}$ -kuchni ikkala o'qqa proeksiyalash kerak, so'ngra $\overline{F}$ kuchini va h.k. Jadvalni oldindan tuzib olish natijasida, ayniqsa birinchi marta masala yechishda, ya'ni hali kuchlarni proeksiyalash va ularning momentlarini hisoblash bo'yicha yetarli darajada tajriba orttirmaganlar uchun xatoga yo'l qo'yishlik ehtimoli kamayadi, Boshqa sistemalar uchun, shunga o'xshash jadvallar (17§ dagi)10, 19 va (30§ dagi) 40 masalalarda berilgan.

So'ngra $\overline{P}$, $\overline{F}$ va $\overline{N}$ - vektorlarning x va y koordinata o'qlariga proeksiyalarini aniqlab, jadvalning tegishli kataklariga yozib chiqamiz.

| $\overline{F}_k$ | $\overline{P}$ | $\overline{F}'$ | $\overline{N}$ |
|---|---|---|---|
| $F_{kx}$ | $P\sin\alpha$ | $-F\cos\alpha$ | 0 |
| $F_{ky}$ | $-P\cos\alpha$ | $-F\sin\alpha$ | N |

Endi muvozanat tenglamalarini tuzib chiqamiz,

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad \sum F_{ky} = 0,$$

(12) formulaga asosan quyidagilarni hosil qilamiz,

$$P\sin\alpha - F\cos\alpha = 0; \qquad -P\cos\alpha - F\sin\alpha + N = 0;$$

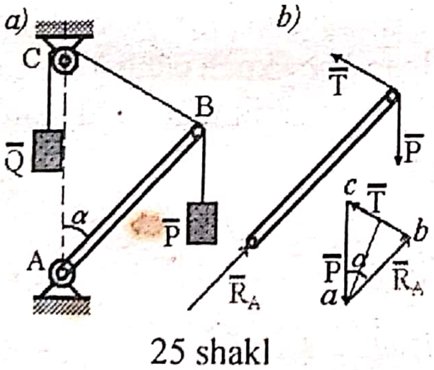
bu tenglamalarni noma'lumlarga nisbatan yechib, ularning son qiymatlarini aniqlaymiz,

$$F = P\mathrm{tg}\alpha,\ N = P\cos\alpha + P\sin^2\alpha/\cos\alpha = P/\cos\alpha.$$

Kuchlar soni uchtadan oshmagan holda geometrik usul analitik usulga nisbatan, sodda va qulay bo'ladi. Yechimdan ko'rinib turibdiki $\alpha<45^\circ$ bo'lganda F<P bo'ladi, $\alpha>45^\circ$ bo'lganda F>P bo'ladi. Har qanday $\alpha>0$ qiymatlarda N>P bo'ladi.

Izlanayotgan Q bosim kuchi N kuchiga qarama-qarshi yo'nalgan bo'lib, son qiymatlari o'zaro teng bo'ladi (Q=N, lekin $\overline{Q} = -\overline{N}$).

**5 masala.** AB sterjen A nuqtada sharnir orqali qo'zg'almas nuqtaga mahkamlangan (25 *a* shakl). Sterjenning B uchiga og'irligi P -ga teng bo'lgan yuk osib qo'yilgan va u nuqta cho'zilmaydigan ipga bog'langan bo'lib, ipning ikkinchi uchiga Q -yuk blokdan oshirib osib qo'yilgan. Blokning o'qi C va A sharnirning markazi bitta vertikal chiziqda joylashgan, hamda AC=AB. Sterjenning og'irligini hisobga olmagan holda, $\alpha$ - burchakning qaysi qiymatlarida konstruksiya muvozanat holatda bo'lishi va shu muvozanat holatda AB sterjenga ta'sir qilayotgan zo'riqish kuchlari aniqlansin.



25 shakl

Yechish. AB sterjenga qo'yilgan kuchlar ta'siridagi muvozanat holatini ko'rib chiqaylik. Buning uchun AB sterjenni alohida chizib olamiz (25 b shakl) va unga ta'sir etuvchi kuchlarni shaklda tasvirlaymiz: ular yukning og'irlik kuchi - $\overline{P}$, ipning taranglik kuchi - $\overline{T}$ va AB sterjen bo'ylab yo'nalgan reaksiya kuchi - $\overline{R}_A$ lardan iborat. Agar C blokdagi ishqalanish kuchini e'tiborga olmasak, blokning ikkala tomonida ipning taranglik kuchlari o'zaro teng bo'ladi, shunga ko'ra T=Q.

Geometrik usulni qo'llash yordamida, $\overline{P}, \overline{T}$ va $\overline{R}_A$ kuchlardan tashkil topgan *cab* kuch uchburchagini quramiz (25 b shakl). Oldingi masaladagi kabi kuch uchburchagini $\overline{P}$-vektordan boshlab quramiz. Hosil bo'lgan shakllardan, ya'ni *abc* va ABC uchburchaklarning o'xshashligidan foydalanib, *ca*=*ab* va $\angle cab=\alpha$ ekanligini aniqlaymiz. Shunga asosan,

$R_A$=P, va sin($\alpha$/2)=Q/2P,

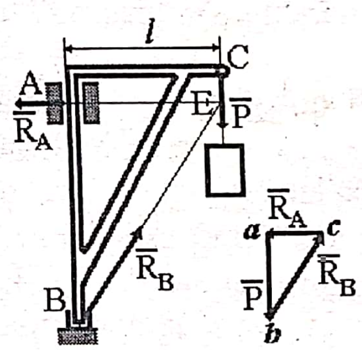
chunki T=Q=2P sin(α/2).

Olingan natijalarga asosan shuni aniqlash mumkinki, $\alpha$<180° faqat Q<2P bo'lgan holdagina muvozanat bo'lishi mumkin. Bu holda Q va $\alpha$ - ning qiymatlariga bog'liq bo'lmagan AB sterjen P - kuchining moduliga teng kuch bilan siqilgan holatda turadi.

α =180° bo'lgan holat alohida tekshirilishi lozim. Ko'rinib turganidek, bunday holatda P va Q kuchlarining barcha qiymatlarida ham u muvozanatda bo'ladi. U holda agar P>Q bo'lsa, sterjen $R_A$= P-Q ga teng kuch bilan cho'ziladi. Agar Q>P bo'lsa, sterjen $R_A$= Q-P ga teng bo'lgan kuch bilan siqilgan holda bo'ladi.

Shunga e'tibor berish lozimki, $\overline{Q}$ kuch muvozanatlik shartida (kuch uchburchagida) bevosita ishtirok etgani yo'q, chunki bu kuch muvozanati tekshirilayotgan AB sterjenga emas, balki yukka qo'yilgan.

**6 masala**. Og'irligi $\overline{P}$ bo'lgan yuk, A nuqtada sharnirga va B nuqtada tovonga o'rnatilgan kranning uchiga osib qo'yilgan (26 *a* shakl). Kran yelkasining uzunligi - *l* va AB=h bo'lsa, A va B nuqtalardagi bog'lanish reaksiyalari aniqlansin.



26 shakl

Yechish. Kranga osib qo'yilgan $\overline{P}$ yuk, hamda $\overline{R_A}$ va $\overline{R_B}$- reaksiya kuchlari ta'siridagi muvozanat holatini tekshiraylik. B nuqtadagi bog'lanishning reaksiya $\overline{R_B}$- kuchi kran tekisligida ixtiyoriy yo'nalishda bo'lishi mumkin, A nuqtaning reaksiyasi faqat AB - ga perpendikulyar, ya'ni gorizontal ravishda yo'nalgan bo'ladi. Kran unga qo'yilgan uchta kuch ta'sirida muvozanatda bo'lganligi uchun, kranga ta'sir etuvchi kuchlarning ta'sir chiziqlari bitta nuqtada kesishishlari shart. Shunga ko'ra kuchni vertikal yo'naltiramiz, $\overline{R_A}$- kuchi A nuqtadan gorizontal yo'nalishda bo'lib $\overline{P}$ kuchining ta'sir chizig'ini E nuqtada kesib o'tadi. Demak, B nuqtaning reaksiya kuchining ta'sir chizig'i BE chizig'ida yotishi shart.

Masalani geometrik usulni qo'llab yechaylik. Buning uchun $\overline{P}$ kuchidan boshlab, $\overline{P}$, $\overline{R_A}$ va $\overline{R_B}$ - kuch vektorlaridan iborat bo'lgan *abc* - kuch uchburchagini (26 *b* shakl) quramiz. ABC va *abc* uchburchaklarning o'xshashligidan foydalanib,

$$\frac{R_A}{P}=\frac{l}{h},\quad \frac{R_B}{P}=\frac{\sqrt{h^2+l^2}}{h}$$

bundan,

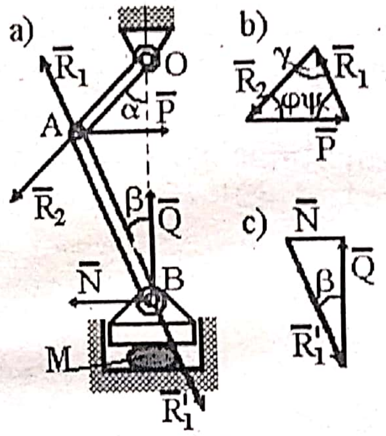
$$R_A=Pl/h,\quad R_B=P\sqrt{1+l^2/h^2}.$$

larning modullarini aniqladik.

Kuch uchburchagi *abc* - dan ko'rinib turibdiki, $\overline{R_A}$ va $\overline{R_B}$-kuchlarining yo'nalishlari shaklda to'g'ri tasvirlangan. Kranning A podshipnikka va B tovonga ko'rsatgan bosim kuchlari tegishlicha $R_A$ va $R_B$ -kuchlarining yo'nalishiga teskari, qiymatlari esa ularga teng bo'ladi. *l*/h nicbat qancha katta bo'lsa, bosim ham shunga proporsional ravishda ortib boraveradi.

Ushbu masala orqali uch kuch haqidagi teoremaning qo'llanilishini misol tariqasida o'rganib chiqdik.

**7 masala**. Tirsakli pressning A nuqtasidagi sharnirga gorizontal ravishda yo'nalgan $\overline{P}$ - kuchi qo'yilgan (27 *a* shakl). Sterjenlar va porshenning og'irligini hisobga olmagan holda α va β burchaklarning qiymatlariga bog'liq ravishda M jismga tushayotgan bosim kuchining miqdori hisoblansin.



27 shakl

Yechish. Avvalo, A nuqtaning muvozanat shartini tekshirib chiqaylik, chunki qiymatlari ma'lum $\overline{P}$- kuch shu nuqtaga qo'yilgan ekan. A nuqtaga $\overline{P}$- kuchdan tashqari AO va AB sterjenlar bo'ylab yo'nalgan $\overline{R}_2$ va $\overline{R}_1$ reaksiya kuchlari ham ta'sir qiladi. Shu sababli A nuqtaning muvozanat sharti uchun, kuch uchburchagini quramiz (27 b shakl). shakldan tegishli burchaklarni aniqlaymiz, φ=90°-α; ψ=90°-β; γ=α+β. Sinuslar teoremasidan foydalanib, quyidagi proporsiyalarni yozamiz,

$$\frac{R_1}{\sin\varphi} = \frac{P}{\sin\gamma} \qquad R_1 = \frac{P\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Endi porshenning muvozanat holatini tekshiramiz. Porshenga AB sterjenning bosim kuchi $\overline{R}'_1$=-$\overline{R}_1$, devorning bosim kuchi - $\overline{N}$ va presslanayot (siqilayot)gan jismning reaksiya kuchi - $\overline{Q}$ lardan iborat uchta kuch ta'sir etmoqda. Shu sababli bu kuchlar uchrashuvchi kuchlar sistemasini tashkil qilib, ularning ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadi.

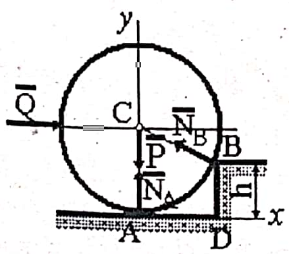
Shu kuchlardan iborat bo'lgan kuch, uchburchagini quramiz (27 c shakl), shunga asosan $Q = R'_1\cos\beta$ ni aniqlaymiz. $R_1$ ning yuqorida aniqlangan qiymatini keltirib qo'ysak,

$$Q = \frac{P\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{P}{tg\alpha + tg\beta}.$$

Porshenning M jismga ko'rsatgan bosim kuchi moduli bo'yicha Q - kuchiga teng bo'lib, yo'nalishi qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'ladi. Oxirgi formuladan ko'rinib turibdiki, P kuchining qiymati o'zgarmagan holda, α va β burchaklarning kamayishi hisobiga Q -kuchining miqdori ortib boradi.

Agar OA va AB sterjenlarning uzunliklari o'zaro teng bo'lsa, α=β bo'ladi va Q=0,5·P·ctgα bo'ladi.

**8 masala**. Og'irligi P -ga teng bo'lgan tsilindr gorizontal tekislikda joylashgan bo'lib, uning bir tomonidan siquvchi $\overline{Q}$ - kuch ta'sir etmoqda, ikkinchi tomonidan esa u B nuqtadagi o'tkir qirraga qadalib qolgan holda muvozanat holatda turibdi (28 shakl). Agar BD=h=R/2 (R-silindrning radiusi) bo'lsa, A va B nuqtalardagi reaksiya kuchlari aniqlansin.



28 shakl

Yechish. Avvalo berilgan $\overline{P}$, $\overline{Q}$ - kuchlar hamda $\overline{N}_A$ va $\overline{N}_B$ lardan iborat reaksiya kuchlari ta'siridagi tsilindrning muvozanat shartini ko'rib chiqamiz. Shakldan ko'rinib turibdiki, barcha kuchlar bitta tekislikda joylashgan bo'lib, ular tsilindrning markazi C nuqtada kesishmoqdalar. Tsilindrga ta'sir etayotgan kuchlar soni 4 ta bo'lganligi uchun masalani analitik usulda yechish lozim bo'ladi. Shu sababli (12) formulaga asosan, 2 ta tenglamadan iborat tenglamalar sistemasini tuzamiz. Buning uchun koordinata o'qlarini shaklda ko'rsatilganday tanlab olamiz.

U holda, shakldagi koordinata o'qlariga proeksiyalaymiz

$$Q-N_B\cos\alpha=0; \quad N_A-P+N_B\sin\alpha=0$$

h=0,5R bo'lsa $\sin\alpha=(R-h)/R=0,5$ bo'ladi va $\alpha=30^\circ$ bo'ladi. Birinchi tenglamadan $N_B$ –ning qiymatini aniqlaymiz

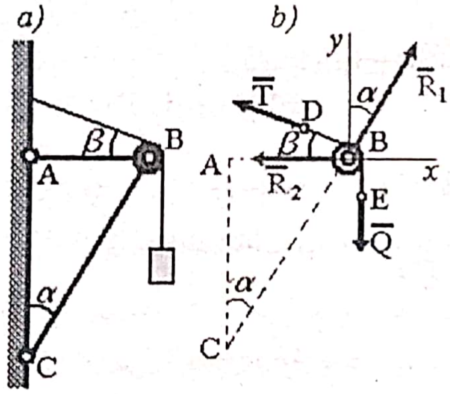
$$N_B=\frac{Q}{\cos\alpha}=\frac{2}{3}Q\sqrt{3}$$

aniqlangan bu qiymatni ikkinchi tenglamaga qo'ysak

$$N_A=P-Qtg\alpha=P-Q\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Agar $Q=P\sqrt{3}$ bo'lsa $\overline{N}_A=0$ bo'ladi, agar $Q=P\sqrt{3}$ bo'lsa, silindr yerdan ko'tarilib, B nuqta atrofida aylanma harakat qila boshlaydi.

**9 masala.** AB va BC sterjenlardan tashkil topgan kronshteyn A va C nuqtalarda devorga sharnirlar orqali mahkamlangan, sterjenlarning uchlari B nuqtada sharnirli blok orqali bir-birlariga birlashtirilgan (29 *a* shakl). Blokning sirtiga tashlangan ipning bir uchi qo'zg'almas devorga mahkamlangan, ikkinchi uchiga og'irligi Q -ga teng bo'lgan yuk osib qo'yilgan. Sterjenlarni vaznsiz deb hisoblab, ularning zo'riqishlari aniqlansin, α va β burchaklar ma'lum deb hisoblansin.




25 shakl

Yechish. Avvalo ipning bir qismini blokka qo'yilgan holdagi blokning muvozanat holatini tekshirib chiqaylik[8]. Aniqroq bo'lishi uchun blokni alohida tasvirlaymiz (29 b shakl). Ipning ozgina qismi ta'sir qilayotgan blokka 4 ta kuch ta'sir etmoqda, ular: blokning o'ng tomonidagi ipning taranglik kuchi -$\overline{Q}$, blokning chap tomonidagi ipning taranglik kuchi - $\overline{T}$ (modul jihatdan bu kuchlar o'zaro teng, ya'ni T=Q); hamda AB va BC sterjenlar bo'ylab yo'nalgan $\overline{R}_1$ va $\overline{R}_2$ reaksiya kuchlaridan iborat. Blokka ta'sir etuvchi kuchlar soni uchtadan ortiq bo'lganligi sababli, masalani analitik usuldan foydalanib yechamiz, buning uchun (12) formuladan foydalanamiz. Avvalo B nuqtadan koordinata o'qlarini o'tkazamiz, so'ngra 29 b shaklga asosan ikkita muvozanat tenglamalarni tuzamiz,

$$-T\cos\beta+R_1\sin\alpha-R_2=0$$
$$-Q+T\sin\beta+R_1\cos\alpha=0.$$

T=Q ekanligini hisobga olib ikkinchi tenglamadan,

$$R_1=Q(1-\sin\beta)/\cos\alpha.$$

[8] Bunday hollarda, blok bilan ipning unga yopishib turgan qismini bir jism deb hisoblash ma'qulroq bo'ladi. U holda, ip bilan blok orasidagi noma'lum bo'lgan kuch, ichki kuch bo'lganligi sababli muvozanat tenglamalarida ishtirok etmaydi.

aniqlaymiz. $R_1$ - ning aniqlangan qiymatini birinchi tenglamaga qo'yib, tegishli hisoblashlardan so'ng,

$$R_2 = Q\frac{\sin\alpha - \cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha}$$

$R_1$ - ni hisoblash formulasiga asoslanib, shuni aniqlaymizki $\alpha$ va $\beta$ - lar o'tkir burchaklardan iborat bo'lgan hollarda $R_1>0$ bo'ladi. Bundan shuni aniq ta'kidlash mumkinki, $R_1$- reaksiya kuchi har doim o'z yo'nalishini shaklda ko'rsatilgandek saqlab qoladi. Blokning BC sterjenga bosim kuchi teskari tomonga yo'nalgan bo'lar ekan (BC sterjen siqilmoqda). $R_2$- reaksiya kuchining qiymati boshqacha bo'ladi. $\alpha$ va $\beta$ burchaklar har doim o'tkir burchaklardan iborat bo'ladi deb hisoblab, agar $\alpha>(90°-\alpha+\beta)$ yoki $2\alpha>(90°+\beta)$ bo'lsa,

$$\sin\alpha-\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha-\sin(90°-\alpha+\beta),$$

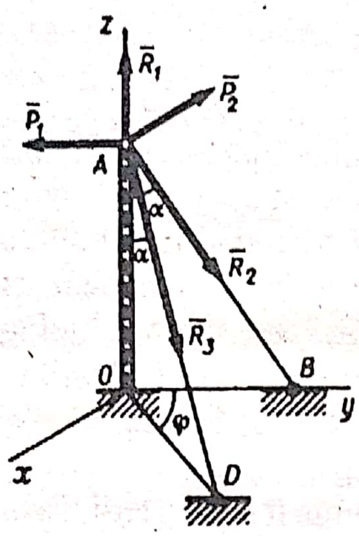
bu ayirma musbat bo'ladi. Shu sababli $\alpha>(45°+b/2)$ bo'lganda $R_2>0$ bo'ladi, ya'ni $\overline{R}_2$ -reaksiya kuchi shaklda ko'rsatilgan yo'nalishini saqlab qoladi; agar $a<(45°+b/2)$ bo'lsa $R_2<0$ bo'ladi va uning yo'nalishi qarama-qarshi tomonga o'zgaradi (A dan B ga). Shu sababli birinchi holda AB sterjen cho'zilayotgan bo'ladi, ikkinchi holda siqilayotgan bo'ladi. Agar $\alpha=(45°+\beta/2)$ bo'lsa $R_2=0$ bo'ladi.

Yuqoridagilarga asoslanib quyidagi xulosalarga kelamiz: 1) agar sistemada ustiga iplar tashlangan bloklar ishtirok etgan bo'lsa, blokning muvozanat tenglamalarini tuzishda uning ustiga qo'yilgan iplardan bir qismini qoldirish lozim bo'ladi. Agar blokning ishqalanish kuchini va ipning blokka nisbatan ishqalanish kuchini e'tiborga olmasak, ipning blokdan chiqqan ikkala tomondagi taranglik kuchlarining modullari o'zaro teng bo'ladi, yo'nalishlari esa qarama - qarshi bo'lib ipning tarangligi bo'yicha yo'nalgan bo'ladilar (aks holda ip tarangligi katta tomonga qarab siljiydi).

2) Agar shaklda reaksiya kuchlarini tasvirlashda, ularning yo'nalishlari teskari chizib qo'yilgan bo'lsa, masalani geometrik yo'l bilan yechilganda, kuch uchburchagini qurishda u darrov aniqlanadi (strelkalar qoidasi), analitik usulni qo'llagan holimizda ana shu reaksiya kuchining moduli javobda *manfiy* ishorali bo'ladi.

Ammo, iloji bo'lgan hollarda reaksiya kuchining yo'nalishlarini albatta to'g'ri yo'naltirish kerak. Masalan, 6 masalada podshipnik A - ning reaksiya kuchini yo'nalishini quyidagi mulohazalar orqali aniqlash mumkin: agar podshipnikni olib tashlasak, $\overline{P}$ - kuch ta'sirida kran o'ng tomonga qarab ag'anay boshlaydi; demak kranni muvozanat holatda ushlab turishlik uchun, $\overline{R}_A$ -reaksiya kuchining yo'nalishi chap tomonga yo'nalgan bo'lishi kerak.

**10 masala.** Yerga vertikal holda o'rnatilgan OA ustun, ikkita AB va AD troslar bilan 30 shaklda ko'rsatilgandek tortib qo'yilgan. Tortib turuvchi troslarning tarangliklari ustun bilan $\alpha$ burchaklarni tashkil qiladi. AOB va AOD tekisliklarining orasidagi burchak $\varphi$ - ga teng. Ustunga gorizontal tekislikda joylashgan simlar bog'langan bo'lib, ulardan birining moduli $P_1$ -ga teng va Oy o'qiga parallel yo'nalgan, ikkinchisining moduli $P_2$ -ga teng va Ox o'qigà parallel yo'nalgan. Troslarning og'irligini hisobga olmagan holda ularning zo'riqishlarini hamda ustunga ko'rsatilayotgan bosim kuchining miqdori aniqlansin.



30 shakl.

**Yechish**. Troslar va simlar mahkamlangan A nuqtaning muvozanat holatini tekshirib chiqamiz. A nuqtaga simlarning $\overline{P_1}$ va $\overline{P_2}$ tortilish kuchlari, troslarning $\overline{R_1}$ va $\overline{R_2}$ tortish kuchlari va ustunga ko'rsatilgan bosimning reaksiya kuchi $\overline{R_1}$ ta'sir etmoqda. A nuqtaga qo'yilgan kuchlar sistemasi fazoviy kuchlar sistemasini tashkil etadi, shu sababli bu nuqtaning muvozanat tenglamasini 11 formula orqali tuzamiz. Buning uchun barcha kuchlarning koordinata o'qlardagi proeksiyalarini aniqlaymiz va ularni jadvalga yozib chiqamiz.

| $\overline{F}_k$ | $\overline{P_1}$ | $\overline{P_2}$ | $\overline{R_1}$ | $\overline{R_2}$ | $\overline{R_3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_{kx}$ | 0 | $-P_2$ | 0 | 0 | $R_3\sin\alpha\sin\varphi$ |
| $F_{ky}$ | $-P_1$ | 0 | 0 | $R_2\sin\alpha$ | $R_3\sin\alpha s o s\varphi$ |
| $F_{kz}$ | 0 | 0 | $R_1$ | $-R_2\cos\alpha$ | $-R_3\cos\alpha$ |

$\overline{R_3}$- reaksiya kuchining x va y o'qlardagi proeksiyalarini aniqlash uchun 5 paragrafdagi qoidaga binoan amalga oshiramiz (19 shakl). (11) formulaga asosan

$$\sum F_{kx}=0;\quad \sum F_{ky}=0;\quad \sum F_{kz}=0;$$

lardan iborat muvozanat tenglamalarni tuzib chiqamiz:

$$-P_2+R_3\sin\alpha\cdot\sin\varphi=0,$$

$$-P_1+R_2\sin\alpha+R_3\sin\alpha\cdot\cos\varphi=0$$

$$R_1-R_2\cos\alpha-R_3\cos\alpha=0.$$

Ushbu tenglamalarni yechib noma'lumlarni aniqlaymiz,

$$R_3=\frac{P_2}{\sin\alpha\cdot\sin\varphi},\quad R_2=\frac{P_1-P_2 ctg\varphi}{\sin\alpha}$$

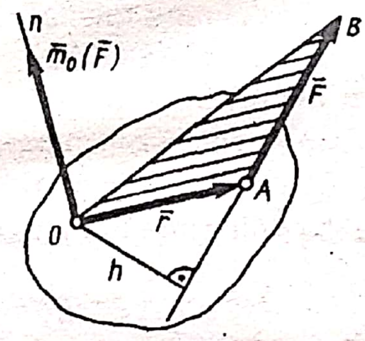
$$R_1=(P_1+\frac{P_2}{2}\cdot tg\varphi)ctg\alpha.$$

Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki, $P_2 ctg\varphi>P_1$ yoki $tg\varphi<P_2/P_1$ bo'lganda $R_2<0$ bo'ladi va $\overline{R_2}$ - reaksiya kuchi shaklda ko'rsatilgan yo'nalishga teskari yo'nalishda bo'ladi, bu esa mumkin emas, chunki tros siqilishga ishlay olmaydi. Shu sababli AD trosni shunday yo'naltirish lozimki, $tg\varphi>P_2/P_1$ tengsizlik qanoatlanishi shart.

# III BOB
# KUCHNING MARKAZGA NISBATAN MOMENTI. JUFT KUCH.

## 8§ Kuchning markazga (yoki nuqtaga) nisbatan momenti

Kuchning nuqtaga nisbatan momenti haqidagi muhim tushunchani kiritamiz. Kuchning momenti hisoblanayotgan nuqta, moment markazi deb ataladi, kuchning shu nuqtaga nisbatan olingan momenti - markazga nisbatan moment deb ataladi. Agar jism qo'yilgan kuchlar ta'sirida, biror nuqta atrofida aylanma harakat qila olsa, kuchning shu nuqtaga nisbatan momenti jismning aylanma harakatini samaradorligini belgilaydi.




31 shakl.

Masalan, A nuqtaga qo'yilgan $\overline{F}$- kuchini olib ko'raylik (31 shakl). Birorta O markazdan shu kuchning ta'sir chizig'iga perpendikulyar chiziq o'tkazaylik; shu perpendikulyar chiziqning uzunligi h-ni O markazga nisbatan $\overline{F}$*-kuchning elkasi* deb ataladi. Kuchning O markazga nisbatan momenti: 1) $F \cdot h$ ko'paytmadan iborat bo'lgan momentning modulidan; 2) O markaz va $\overline{F}$ kuch vektoridan o'tuvchi OAB tekisligining joylashishidan; 3) jismning shu tekislik bo'yicha aylanishining yo'nalishiga bog'liq ravishda aniqlanadi.

Analitik geometriya fanidan ma'lumki, har qanday tekislikning fazodagi holati unga o'tkazilgan normal (*perpendikulyar*)ning yo'nalishi bilan aniqlanadi. Shunday qilib, kuchning markazga nisbatan momenti nafaqat uning moduli bilan, balki fazodagi yo'nalishi bilan ham belgilanadi, ya'ni kuchning momenti vektor qiymatdan iborat ekan.

$\overline{F}$-kuchning O markazga nisbatan momenti deb, kuchning moduli F-ni h - elkaga ko'paytmasiga teng bo'lgan, yo'nalishi bo'yicha, O markaz va $\overline{F}$ kuch vektori yotgan tekislikka perpendikulyar bo'lgan va shu O markazga qo'yilgan $\overline{m}_o(\overline{F})$-vektorga aytiladi. Shu $\overline{m}_o(\overline{F})$ vektorning uchidan qaraganimizda $\overline{F}$ kuch vektori O markaz atrofida soat strelkasiga teskari yo'nalishda bo'lishi shart (31 shakl). Shu qoidaga binoan,

$$\left|\overline{m}_O(\overline{F})\right| = F \cdot h = 2 \cdot S_{OAB}$$

bu yerdagi $S_{OAB}$ - OAB uchburchakning yuzasi. Oxirgi natija shuni belgilaydiki $S_{OAB} = AB \cdot h/2 = F \cdot h/2$ ga teng bo'ladi. Kuchning momenti Nyuton·metr (N·m) larda o'lchanadi. $\overline{m}_o(\overline{F})$- vektorning ifodasini aniqlash uchun, $\overline{OA}$ vektorni $\overline{F}$ - vektorga vektor ko'paytmasini[9], $\overline{OA} \times \overline{F}$ ko'paytmani yozib chiqamiz,

$$\left|\overline{OA} \times \overline{F}\right| = 2 \cdot S_{OAB} = \left|\overline{m}_O(F)\right|$$

[9] $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi $\overline{a} \times \overline{b}$ yuzasiga teng, yo'nalishi esa shu yuzaga tik bo'lib, uning uchidan qarab $\overline{a}$ -vektorni soat strelkasiga teskari tomonga 180° -dan kam bo'lgan burchakka burilganda $\overline{b}$ - vektorni ustiga tushishi lozim.

$\overline{OA}\times\overline{F}$ vektor OAB tekisligiga perpendikulyar bo'lib, shu vektorning uchidan qarab $\overline{OA}$ vektorni soat strelkasining aylanishiga teskari tomonga burilganda 180° dan kam bo'lgan burchakda $\overline{F}$ - vektor bilan ustma-ust tushadi, ya'ni $\overline{m}_o(\overline{F})$-vektor bilan bir xil ekanligi isbotlandi. Demak $\overline{OA}\times\overline{F}$ va $\overline{m}_o(\overline{F})$ vektorlar ham yo'nalishlari bo'yicha, ham modullari bo'yicha bir xil vektorlar ekanligi isbotlandi, ya'ni bitta vektor ekanligi ma'lum bo'ldi. Bunga asosan,

$$\overline{m}_o(\overline{F})=\overline{OA}\times\overline{F} \text{ ёки } \overline{m}_o(\overline{F})=\overline{r}\times\overline{F}, \qquad (14)$$

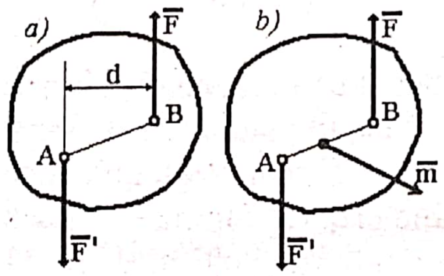
bu yerda $\overline{r}=\overline{OA}$, A nuqtaning O markazdan o'tkazilgan radius vektori.

Shunday qilib, $\overline{F}$-kuchning O markazga nisbatan olingan momenti, O markazdan kuch qo'yilgan nuqtaga o'tkazilgan radius vektor $\overline{r}=\overline{OA}$-ni kuch vektoriga vektor ko'paytmasiga teng ekan. Ushbu xulosa, kuchning markazga nisbatan olingan momentining ikkinchi ta'rifi bo'lib xizmat qilishi mumkin.

Kuch momentining quyidagi xossalarini aytib o'tamiz: 1) kuchning qo'yilgan nuqtasini, uning ta'sir chizig'i bo'ylab o'zgartirganimizda, momentning son qiymati (*moduli*) o'zgarmaydi; 2) agar kuchning ta'sir chizig'i O markazni kesib o'tsa (*kuchning elkasi nolga teng bo'ladi*), yoki kuchning moduli nolga teng bo'lgan hollarda kuchning momenti nolga teng bo'ladi.

## 9§ Juft kuch. Juftning momenti.

Modullari o'zaro teng, yo'nalishlari qarama-qarshi va parallel bo'lgan vektorlardan tashkil topgan ikkita kuchlardan iborat sistemaga - juft kuch[10] deb, ataladi (32 *a* shakl). Juft kuchlarni tashkil etuvchi $\overline{F}$ va $\overline{F}'$ vektorlardan iborat kuchlar sistemasi hech qachon muvozanat holatda bo'lmaydi (chunki bu kuchlar bir to'g'ri chiziqda yotmaydilar). O'z navbatida bu kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi ham bo'lmaydi, chunki ixtiyoriy kuchlar sistemasining bosh vektori, ya'ni vektor yig'indisi $\overline{R}$ bo'ladi, juft kuchlar uchun u $\overline{R}=\overline{F}+\overline{F}'=0$ ga teng bo'ladi. Shu sababli juft kuchlar, jismlarning o'zaro maxsus ta'sirlariga oid bo'lganligi uchun, alohida o'rganiladi.




32 shakl

Juft kuchlarning ta'sir chiziqlari joylashgan tekislik, juft kuchlarning tekisligi deb ataladi. Juft kuchlarning ta'sir chiziqlari orasidagi eng qisqa masofa, *juftning elkasi* deb ataladi. Juft kuchlarning jismga ta'siri, uning aylanma harakatini belgilaydi va uni belgilovchi qiymat *juftning momenti* deb ataladi. Juftning momenti: 1) F·d -ko'paytmadan iborat bo'lgan juftning moduli; 2) juftning ta'sir kuchi joylashgan tekislik; 3) juftning shu tekislik bo'yicha aylanishining yo'nalishi bilan belgilanadi. Shunday qilib, kuchning markazga nisbatan momenti kabi, juftning momenti ham vektor qiymatdan iborat ekan.

**Ta'rif**: Juft kuchning momenti deb, moduli juftni tashkil qiluvchi kuchlarning birini modulini juftning elkasiga ko'paytmasiga teng bo'lgan, yo'nalishi esa juft kuchlar yotgan tekislikka perpendikulyar bo'lib, jismni soat

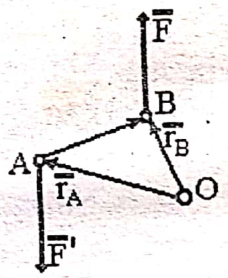
[10] Juftlar nazariyasini, buyuk frantsuz olimi- mexanik va geometr L.Puanso (1777-1859y.) yaratgan

strelkasi yo'nalishiga teskari bo'lgan yo'nalishda aylantirishga harakat qiluvchi $\overline{m}$ yoki $\overline{M}$ - harfi bilan belgilanadigan vektorga aytiladi (32, b shakl).

$\overline{F}$ - kuchning A nuqtaga nisbatan elkasi d - ga teng bo'lib, $\overline{F}$-kuch va A nuqta yotgan tekislik bilan juft kuchlar joylashgan tekislik bir bo'lganligi uchun,

$$\overline{m} = \overline{m}_A(\overline{F}) = \overline{AB} \times \overline{F}$$

formula o'rinli bo'ladi. Lekin, kuchning vektor momenti faqat markazga qo'yilsa, juft kuchning vektor momenti ixtiyoriy nuqtaga qo'yilishi mumkin (ya'ni erkin vektor deb ataladi). Juft kuchning momenti ham, kuchning momenti kabi nyuton·metr (N·m) bilan o'lchanadi.



33 shakl

Juft kuchning momentiga boshqacha ham ta'rif berish mumkin. Juftning momenti juftni tashkil etuvchi kuchlarning ixtiyoriy O markazga nisbatan olingan momentlarning yig'indisiga teng, ya'ni

$$\overline{m} = \overline{m}_O(\overline{F}) + \overline{m}_O(\overline{F}'), \qquad (15)$$

Ushbu ta'rifni isbotlash uchun, ixtiyoriy O markaz tanlab olamiz (33 shakl), va bu nuqtadan kuchlar qo'yilgan nuqtalarga $\bar{r}_A = \overline{OA}$ va $\bar{r}_B = \overline{OB}$ bo'lgan radius vektorlar o'tkazamiz. U holda $\overline{F}' = -\overline{F}$ ekanligini e'tiborga olib, 14 formulaga asosan,

$$\overline{m}_O(\overline{F}) = \bar{r}_B \times \overline{F}, \qquad \overline{m}_O(\overline{F}') = \bar{r}_A \times \overline{F}' = -\bar{r}_A \times \overline{F},$$

hosil qilamiz, ularning geometrik yig'indisi,

$$\overline{m}_O(\overline{F}) + \overline{m}_O(\overline{F}') = (\bar{r}_B - \bar{r}_A) \times \overline{F} = \overline{AB} \times \overline{F},$$

hosil qilamiz. $\overline{AB} \times \overline{F} = \overline{m}$, ekanligini hisobga olsak (15) formula isbotlanganligini ko'ramiz. Bundan yuqorida ko'rsatilgan natija kelib chiqadi, ya'ni

$$\overline{m} = \overline{AB} \times \overline{F} = \overline{m}_A(\overline{F}) \text{ yoki } \overline{m} = \overline{m}_B(\overline{F}') \qquad (15')$$

demak, juftning momenti birorta kuchning ikkinchi kuch qo'yilgan markazga nisbatan olingan momentiga teng ekan. Juft kuchlar momentining moduli,

$$m = F \cdot d \qquad (15'')$$

formula orqali hisoblanadi.

Agarda, juft kuchlarning qattiq jismga ta'siri (aylantirish samarasi) har bir kuchning ixtiyoriy O nuqtaga nisbatan olingan momentlarning yig'indisiga teng ekanligini e'tiborga olsak, (15) formulaga asosan momentlari teng bo'lgan ikkita juft kuchlar *ekvivalent* bo'lar ekan. Ya'ni ular jismga bir xil ta'sir ko'rsatar ekanlar. Boshqacha qilib aytganimizda, vektor momentlari $\overline{m}$ - o'zaro teng bo'lgan ikkita juft kuchlar, ularni tashkil etuvchi kuchlarning modullari qanday bo'lishligidan qat'iy nazar va ular bitta tekislikdami yoki parallel tekislikdami joylashganliklaridan qat'iy nazar *ekvivalent juftlar* ekanlar. Juft kuchlar uchun markaz O nuqtaning ahamiyati bo'lmaganligi uchun, uning vektor momentini ixtiyoriy nuqtaga joylash mumkin, ya'ni *erkin vektor* hisoblanadi.

Keyinchalik juft kuchni chizmalarda tasvirlashda uning o'rniga, uni xarakterlovchi vektor moment $\overline{m}$ - ni tasvirlaymiz. U holda [(15")formula] orqali m -juftning moduli (son qiymati)ni va $\overline{m}$ - vektor orqali juftning ta'sir etayotgan tekisligi hamda uning aylanish yo'nalishini aniqlab olinadi.

Agarda jismga bir vaqtning o'zida moment vektorlari $\overline{m}_2$, $\overline{m}_2$,... $\overline{m}_n$ -ga teng bo'lgan bir nechta juft kuchlar ta'sir etsa, (15) formulaga asosan shu juftlarni ixtiyoriy nuqtaga nisbatan olingan momentlarining yig'indisi $\overline{m}_1+\overline{m}_2+...+\overline{m}_n$ lardan iborat vektor bo'lib, uning bosh momenti $\overline{M}=\sum \overline{m}_k$ -ga teng bo'lgan bitta juft kuchga ekvivalent bo'ladi. Bu natija juftlarni qo'shish haqidagi teoremaning ifodasi hisoblanadi.

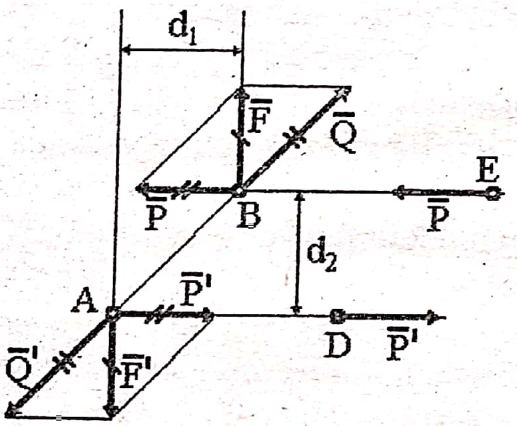
## 10§ Juftlarni qo'shish va ularni ekvivalentligi haqidagi teorema

Yuqorida 9 paragrafdagi xulosalarni haqiqattan to'g'ri ekanligini bevosita isbot qilish mumkin.

Jismga $\overline{F}$ va $\overline{F}'$ kuchlardan tashkil etgan juft ta'sir etayotgan bo'lsin. Shu juft kuchlar joylashgan tekislikda yotuvchi ixtiyoriy olingan D va E nuqtalardan shu tekislikda o'zaro parallel bo'lgan ikkita chiziq o'tkazaylik. Bu chiziqlar $\overline{F}$ va $\overline{F}'$ kuchlarning ta'sir chiziqlarini A va B nuqtalarda kesib o'tishsin (34 shakl). So'ngra shu $\overline{F}$ va $\overline{F}'$ kuchlarni (*ular ilgari boshqa nuqtalarga joylashgan bo'lsalar*) ana shu A va B nuqtalarga ko'chirib qo'yaylik. Endi $\overline{F}$- kuchni AB va EB yo'nalishdagi ikkita $\overline{Q}$ va $\overline{P}$ tashkil etuvchi vektorlarga ajrataylik, o'z navbatida $\overline{F}'$- kuchni ham BA va AD yo'nalishda bo'lgan ikkita $\overline{Q}'$ va $\overline{P}'$ vektorlarga ajrataylik.

Shaklda tasvirlangandek $\overline{Q}'=-\overline{Q}$ va $\overline{P}'=-\overline{P}$ tenglamalar o'rinli bo'ladi. Shu sababli $\overline{Q}'$ va $\overline{Q}$ vektorlarni o'zaro muvozanatlovchi sistemani tashkil qilganligi sababli jismdan olib tashlaymiz. Natijada berilgan $\overline{F}$ va $\overline{F}'$ juft kuchlar o'rnida $\overline{P}'$ va $\overline{P}$ kuchlardan tashkil topgan, kuchlarning modullari ham, ularning yelkalari ham boshqa bo'lgan yangi juft kuchlar paydo bo'ldi. Yangi hosil bo'lgan juftni tashkil etuvchi $\overline{P}'$ va $\overline{P}$ kuchlarni D va E nuqtalarga qo'ysak, ularning ta'sir chiziqlari ham boshqacha ekanligini ko'rishimiz mumkin.

D va E nuqtalarni ixtiyoriy ravishda tanlab olganligimiz va ularni kesib o'tuvchi AD va BE chiziqlarni ham ixtiyoriy ravishda yo'naltirganligimizni e'tiborga olsak $\overline{P}$ va $\overline{P}'$ kuchlardan tashkil topgan juftni, tekislikning xohlagan joyida hosil qilishimiz mumkinligining guvohi bo'ldik. Hosil bo'lgan $\overline{P}$ va $\overline{P}'$ kuchlardan iborat juftning kuchlarini $\overline{F}$-kuchning ta'sir chizig'iga parallel holda ham paydo qilish mumkin, buning uchun yuqoridagi o'zgartirishlarni yana bir marta qaytarish lozim bo'ladi.




34 shakl.

Endi $\overline{F}$, $\overline{F}'$ va $\overline{P}$, $\overline{P}'$ kuchlardan tashkil topgan juftlarning momentlari o'zaro teng ekanligini ko'rsatib o'taylik. Ularning momentlarini tegishlicha $\overline{m}_1$ va $\overline{m}_2$-lar bilan belgilaylik. (15') formulaga asosan $\overline{m}_1=\overline{AB}\times\overline{F}$ va $\overline{m}_2=\overline{AB}\times\overline{P}$ bo'ladi. Ammo $\overline{F}=\overline{P}+\overline{Q}$ bo'lganligi sababli $\overline{AB}\times\overline{F}=\overline{AB}\times\overline{P}+\overline{AB}\times\overline{Q}$, lekin $\overline{AB}\times\overline{Q}=0$ ekanligi sababli $\overline{m}_1=\overline{m}_2$ isbotlandi.

Ushbu isbot qilingan natijaga asosan quyidagi xulosaga kelamiz:

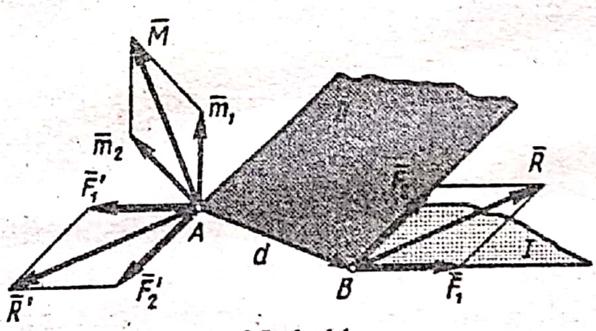
1) juft kuchlarni ular joylashgan tekislikning bir joyidan ixtiyoriy boshqa joyga ko'chirsak, jismning holati o'zgarmaydi.

2) juft kuchlar momentining modulini o'zgartirmagan holda, juftni tashkil etuvchi kuchlarining modullarini va juftning yelkasini tegishli ravishda o'zgartirsak jismning holati o'zgarmaydi.

Bulardan tashqari, juft kuchlarning yana bir muhim xossasini ko'rsatib o'tamiz (isbotini keltirmaymiz).

3) juft kuchni bir tekislikdan o'ziga parallel bo'lgan va shu jismga tegishli bo'lgan har qanday boshqa tekislikka ko'chirsak, jismning holati o'zgarmaydi.

Demak, moment vektorlari o'zaro teng va bir xil yo'nalgan ikkita juft ekvivalent juftlar ekan (ekvivalent juftlar haqidagi teorema). Bunga asosan, har qanday juftni vektor momentini saqlagan holda, uning tashkil etuvchi kuchlar modullari va yelkalarini o'zgartirish yoki bir tekislikdan o'ziga parallel bo'lgan boshqa tekislikka ko'chirish yoki bir tekislikning bir joyidan boshqa istalgan joyga ko'chirish kabi amallarni bajarish mumkin ekanligi isbotlandi.



35 shakl.

*Endi juftlarni qo'shish haqidagi teoremani isbot qilaylik. Teorema: qattiq jismga ta'sir etuvchi bir necha juftlar, shunday bitta juftga ekvivalentki, bu ekvivalent juft momentining vektori berilgan juftlar momentlari vektorlarining geometrik yig'indisiga teng bo'ladi.*

Buni isbotlash uchun I va II tekisliklarda joylashgan va momentlari $\overline{m}_1$ va $\overline{m}_2$ dan iborat ikkita juftni olaylik (35 shakl). Tekisliklarning kesishgan chizig'ida yotuvchi AB=d kesmani olaylik va shu kesmada $\overline{F_1}$, $\overline{F_1}'$ kuchlardan tashkil topgan $\overline{m}_1$-juftni, hamda $\overline{F_2}$, $\overline{F_2}'$ kuchlardan tashkil topgan $\overline{m}_2$-juftni tasvirga tushiraylik (lekin, albatta, $F_1d=m_1$ va $F_2d=m_2$).

A va B nuqtalarga qo'yilgan kuchlarni geometrik ravishda qo'shib, shuni aniqlaymizki, $\overline{F_1}$, $\overline{F_1}'$ va $\overline{F_2}$, $\overline{F_2}'$ lardan iborat bo'lgan ikkita juft $\overline{R}$, $\overline{R}'$-kuchlardan tashkil topgan bitta juftga ekvivalent ekan. Endi shu ekvivalent juftning moment vektorini aniqlaylik. $\overline{R}=\overline{F_1}+\overline{F_2}$ bo'lgani sababli $\overline{AB}\times\overline{R}=\overline{AB}\times\overline{F}_1+\overline{AB}\times\overline{F}_2$ yoki (15') formulaga asosan $\overline{M}=\overline{m}_1+\overline{m}_2$ ekanligi isbotlandi.

Ushbu teorema ikkita juft uchun isbot qilindi, lekin shuni ta'kidlash lozimki, agar tekisliklar ustma-ust bo'lsalar (ya'ni I va II tekisliklar bitta tekislikdan iborat bo'lsa) ham ushbu teorema o'z kuchini saqlab qoladi.

Agar jismga bir vaqtning o'zida moment vektorlari $\overline{m}_1, \overline{m}_2, .., \overline{m}_n$ dan iborat bo'lgan $n$-ta juftlar ta'sir etsa, juftlarni yuqorida isbot qilingan teoremaga asosan, birin ketinqo'shish orqali ularni yagona ekvivalent juft bilan almashtirish mumkin bo'lib, hosil bo'lgan ekvivalent juftning moment vektori

$$\overline{M}=\overline{m}_1+\overline{m}_2+....+\overline{m}_n=\sum\overline{m}_k \qquad (16)$$

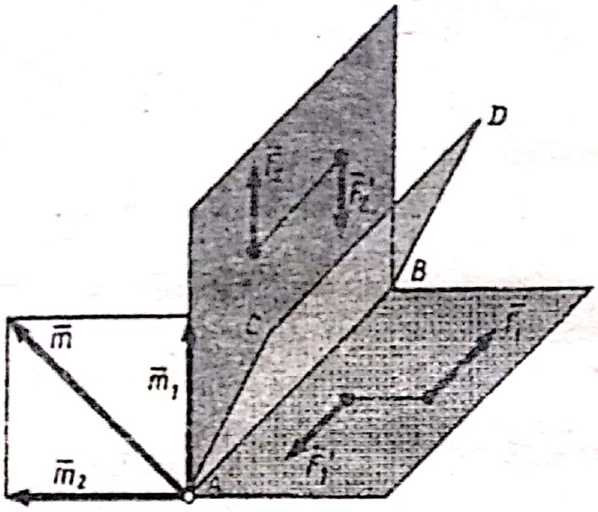
formula orqali aniqlanadi.

Yuqoridagilarga asosan, bir nechta juft kuchlar ta'siridagi qattiq jismning muvozanat shartini aniqlash oson, ya'ni

$$\overline{M}=0 \quad \text{yoki} \quad \sum \overline{m}_k = 0 \qquad (17)$$

dan iborat bo'lar ekan.

**11 masala.** Qattiq jismga o'zaro perpendikulyar bo'lgan tekisliklarda joylashgan $\overline{F_1}$, $\overline{F_1'}$ va $\overline{F_2}$, $\overline{F_2'}$-kuchlardan tashkil topgan ikkita juft kuch ta'sir etmoqda (36 shakl). Har bir juft momentining moduli 30 N·m ga teng. Shu juftlarning yig'indisi aniqlansin.




36 shakl.

**Yechish.** Juftlar joylashgan tekisliklarning kesishgan chizig'ida joylashgan ixtiyoriy A nuqtaga $\overline{m}_1$ va $\overline{m}_2$ vektorlarni tegishli yo'nalishlarda qo'yamiz. So'ngra ularni geometrik usulda qo'shib, yig'indi vektorni aniqlaymiz, ya'ni $\overline{m}=\overline{m}_1+\overline{m}_2$. Demak shu ikki juftga ekvivalent bo'lgan bitta juft, shu $\overline{m}$-vektorga perpendikulyar bo'lgan ABCD tekislikda joylashib, momentining moduli $m=30\sqrt{2}$ N·m ga teng bo'lar ekan.

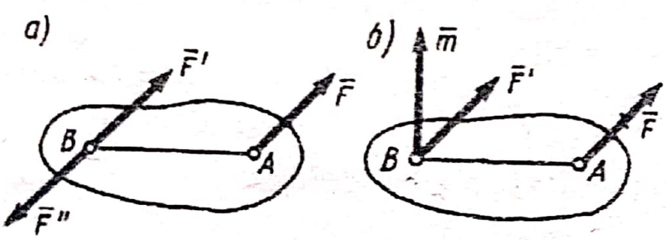
# IV BOB
# KUCHLAR SISTEMASINI BIR MARKAZGA KELTIRISH. MUVOZANAT SHARTLARI

## 11§ Kuchni o'ziga parallel ko'chirish haqidagi teorema

Uchrashuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisini parallelogramm usuli bilan qo'shish orqali to'g'ridan-to'g'ri aniqlash mumkin. Agar biz ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir nuqtaga keltira olsak edi, ularni ham shu usulda qo'shib, teng ta'sir etuvchisini aniqlagan bo'lar edik. Shu sababli biz quyida ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir nuqtaga keltirish haqidagi teoremani ko'rib chiqamiz.

**Teorema:** absolyut qattiq jismga qo'yilgan kuchni, shu jismning mexanik holatini o'zgartirmagan holda o'ziga parallel yo'nalishda jismning bir nuqtasidan ixtiyoriy boshqa nuqtasiga ko'chirish mumkin, lekin shu sistemaga qo'shimcha ravishda shunday juft kuchi qo'yilishi lozimki, uning momenti berilgan kuchning ko'chirilish nuqtasiga nisbatan olingan momentiga teng bo'lishi kerak.

**Isbot:** Qattiq jismning ixtiyoriy A nuqtasida unga $\overline{F}$ kuchi qo'yilgan bo'lsin (37 *a* shakl). Ikkinchi aksiomaga asosan ixtiyoriy B nuqtasiga o'zaro muvozanatlashuvchi $\overline{F}'$ va $\overline{F}''$ lardan iborat ikkita kuch qo'ysak jismning mexanik holati o'zgarmaydi. Lekin bu kuchlarni shunday tanlab olish




37 shakl.

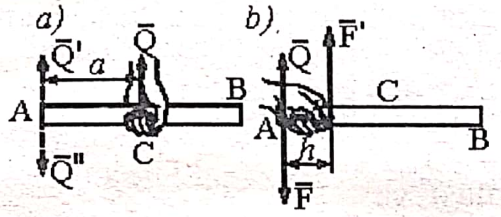
lozimki, ularning har birining modullari $\overline{F}$-kuchning moduliga teng bo'lsin, ya'ni F=F'=F". Ushbu muvozanatlashuvchi vektorlarni $\overline{F}$ - vektorga parallel holda quyidagicha qilib yo'naltiramiz $\overline{F}=\overline{F}'$ va $\overline{F}=-\overline{F}''$.

Hosil bo'lgan uchta kuchlardan iborat sistema, avvalgi bitta kuchga ekvivalent bo'ladi, lekin $\overline{F}$, $\overline{F}''$ kuchlari juft kuchlardan iborat bo'lib, uning momenti $\overline{F}$-kuchning B nuqtaga nisbatan olingan momentiga teng bo'ladi, ya'ni

$$\overline{m}=\overline{m}_B(\overline{F}) \qquad (18)$$

B nuqtada esa $\overline{F}$ - kuchiga teng va yo'nalishi bir xil bo'lgan $\overline{F}'$-kuch joylashdi. Demak, go'yoki biz $\overline{F}$-kuchni o'ziga parallel ravishda A nuqtadan B nuqtaga ko'chirgan bo'ldik, ya'ni (18) formula (15') formuladan kelib chiqdi. Shunday qilib teorema isbot qilindi. Bu qoidani 37, b shakldagi kabi tasvirlash ham mumkin. Ushbu teoremani yaxshiroq tushuntirish uchun quyidagi misollarni ko'rib chiqamiz.

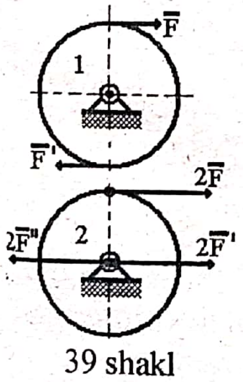
**1 misol.** Og'irligi P va uzunligi $2a$ - bo'lgan AB brusni muvozanat holatda ushlab turish uchun uning o'rtasidagi C nuqtaga son qiymati Q bo'lgan kuchni yuqoriga yo'naltirilgan holda qo'yish kerak, ammo P=Q bo'lishi shart (38 *a* shakl). Kuchlarning vektor ifodasi esa $\overline{P}=-\overline{Q}$ bo'ladi.



38 shakl

Yuqorida isbot qilingan teoremaga asosan $\overline{Q}$-kuchni brusning chekkasidagi A nuqtaga ko'chirib qo'yish uchun, shu nuqtaga $\overline{Q}'$ kuchni va momenti m=Q$a$ ga teng bo'lgan $\overline{Q}$, $\overline{Q}''$ kuchlardan iborat juftni qo'yishimiz lozim. Agar juftning yelkasini kichikroq (38 b shakl) tanlasak, ya'ni u $h$-ga teng bo'lsa (h<$a$), u holda juftni tashkil etuvchi $\overline{F}$, $\overline{F}'$ kuchlarning modullari tegishlicha kattaroq bo'lishi lozim, chunki Fh=Q$a$ tenglama qanoatlanishi kerak. Demak, brusni A chekkasidan ushlab gorizontal holatda saqlashimiz uchun jismga $\overline{Q}'$ kuchdan tashqari $\overline{F}$, $\overline{F}'$ juft kuchni qo'yishimiz lozim. Bu xususiyatni nafaqat teorema orqali isbotlandi, hatto amalda ham shunday qo'shimcha moment bilan ushlab turishlikni bevosita qo'limiz orqali sezishimiz ham mumkin bo'ladi.

**2 misol.** Radusi r -ga teng bo'lgan baraban -1 ga qarama-qarshi tomonga yo'nalgan ikkita ip o'ralgan. Bu iplarning uchlariga (39 shakl) qarama-qarshi yo'nalishda bo'lgan $\overline{F}$ va $\overline{F}'$ kuchlar qo'yilgan, ya'ni $\overline{F}=-\overline{F}'$. Shunday radiusli baraban -2 ga bitta ip o'ralgan bo'lib, uning uchiga $2\overline{F}$ qiymatga ega bo'lgan kuch qo'yilgan. Ushbu kuchlarning barabanlarga ta'sirini ko'rib chiqamiz.



39 shakl

1- barabanga momenti m=2Fr - ga teng bo'lgan, bitta juft kuch ta'sir etishi natijasida u aylanma harakat qilmoqda. 2 - barabanga qo'yilgan $2\overline{F}$ kuchni uning o'qiga keltirib qo'yish uchun, barabanga qo'shimcha ravishda $2\overline{F}$, $2\overline{F}''$ kuchlardan iborat juft qo'yamiz. Natijada 2 barabanga: 1) 1- barabanga qo'yilgan juftning momentiga teng bo'lgan momentli $2\overline{F}$, $2\overline{F}''$ juft kuch, hamda; 2) 2 - barabanning o'qiga bosim kuchi bilan ta'sir etuvchi $2\overline{F}'$ kuch ta'sir etmoqda.

Shunday qilib ikkala baraban ham bir xil aylanma harakat qiladi, lekin 2 - barabanning o'qiga 2 $\overline{F}'$-kuchga teng bo'lgan bosim kuchi ta'sir etadi, shu vaqtni o'zida baraban -1 ning o'qiga esa hech qanday kuch ta'sir etmaydi.

## 12§ Kuchlar sistemasini bir markazga keltirish

Qattiq jismga ixtiyoriy ravishda yo'nalgan va son qiymatlari turlicha bo'lgan bir nechta $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, ..., $\overline{F}_n$ kuchlar sistemasi ta'sir etayotgan bo'lsin. Ushbu murakkab n -ta kuchlar sistemasini, jismning holatini o'zgartirmagan holda, bitta kuch va bitta momentga ega bo'lgan sodda holdagi ekvivalent kuchlar sistemasi bilan almashtirish zarur bo'lsin (40, *a* shakl).

Jismning ixtiyoriy bir nuqtasini tanlab olamiz va uni O nuqta bilan belgilaymiz, so'ngra 11 paragrafda isbot qilingan teoremaga asosan barcha kuchlarni birin-ketin shu O markazga ko'chirib keltiramiz. Har bir kuchni O nuqtaga ko'chirganimizda, tegishli momentga ega bo'lgan juft kuchlarni ham qo'shib boramiz (37 b shakl).

U holda bir vaqtning o'zida jismning O nuqtasiga qo'yilgan

$$\overline{F}_1=\overline{F}_1', \ \overline{F}_2=\overline{F}_2', ...., \ \overline{F}_n'=\overline{F}_n$$

iborat bo'lgan n - ta uchrashuvchi kuchlar sistemasi va

$$\overline{m}_1=\overline{m}_O(\overline{F}_1); \quad \overline{m}_2=\overline{m}_O(\overline{F}_2); .....\overline{m}_n=\overline{m}_O(\overline{F}_n);$$

lardan iborat n - ta juftlar ta'sir etayotgan bo'ladi.

O nuqtaga qo'yilgan uchrashuvchi kuchlarni geometrik usulda qo'shib, ularning bosh vektorini aniqlaymiz va uni shu O nuqtaga qo'yamiz, ya'ni $\overline{R}=\sum\overline{F}_k'$ yoki (19) tengliklarga asosan,

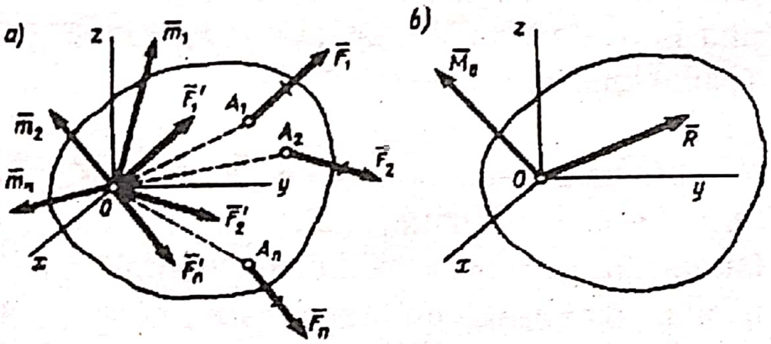
$$\overline{R}=\sum\overline{F}_k \quad . \quad (21)$$

bo'ladi.

Hosil bo'lgan barcha juftlar yig'indisini aniqlash uchun ularning har birlari moment vektorlarini geometrik usulda qo'shamiz.

Natijada juftlardan iborat sistema bitta $\overline{M}_O=\sum\overline{m}_k$ juftga almashtiriladi yoki (21) tengliklarga asosan,

$$\overline{M}_O=\sum\overline{m}_O(\overline{F}_k) \quad (22)$$




40 shakl

(21) tenglama orqali hisoblangan $\overline{R}$ -vektor, berilgan ixtiyoriy kuchlar sistemasining bosh vektori deb ataladi. (22) tenglama orqali hisoblab aniqlangan

$\overline{M}_O$ - vektor, berilgan ixtiyoriy kuchlar sistemasining shu O markazga nisbatan bosh momenti deb ataladi.

Shunday qilib, quyidagi teorema isbot qilindi: absolyut qattiq jismga ta'sir etuvchi ixtiyoriy kuchlar sistemasini birorta O markazga keltirganimizda, ularning o'rniga berilgan kuchlar sistemasining bosh vektoriga teng bo'lgan bitta R -kuch va berilgan kuchlar sistemasining O markazga nisbatan olingan momentlarining vektor yig'indisidan iborat bo'lgan bitta $\overline{M}_O$-bosh moment bilan almashtirish mumkin ekan (40, b shakl).

Shuni eslatib o'tish lozimki, bu yerdagi $\overline{R}$ -kuch teng ta'sir etuvchi kuch emas, chunki jismga undan tashqari juft kuchlar ham ta'sir etmoqda.

Demak, turlicha kuchlardan tashkil topgan ikkita kuchlar sistemasining bosh vektori va bosh momentlari o'zaro teng bo'lsa, bunday kuchlar sistemasi ekvivalent hisoblanar ekan (bu - kuchlar sistemasi ekvivalentligining ta'rifidan kelib chiqadi).

Shuni ta'kidlashimiz lozimki, bosh vektor $\overline{R}$ -ning qiymati va yo'nalishi keltirish nuqta O-ning qayerda olishimizdan qat'iy nazar har doim bir xil bo'ladi, shu sababli bosh vektorni *invariant* deb ataladi. Lekin bosh moment $\overline{M}_O$ - keltirish nuqta O-ning qayerda olishimizga uzviy bog'liq bo'lib, turlicha qiymat va yo'nalishda bo'lishi mumkin.

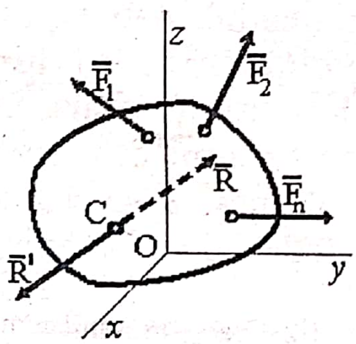
Quyidagi xususiy hollar sodir bo'lishi mumkin: 1) agar $\overline{R}=0$, lekin $\overline{M}_O\neq 0$ bo'lsa, kuchlar sistemasi $\overline{M}_O$-dan iborat bitta juft kuchga keltirilar ekan. Bu holda yuqorida ta'kidlaganimizdek erkin vektordan iborat bo'ladi, ya'ni kuchlar sistemasining momenti O nuqtaga bog'liq bo'lmaydi. 2) agar $\overline{R}\neq 0$ lekin $\overline{M}_O=0$ bo'lsa, berilgan kuchlar sistemasi bitta $\overline{R}$ - bosh vektordan iborat kuchga keltirilar ekan. Bu holda ana shu $\overline{R}$ -kuchi bir vaqtni o'zida teng ta'sir etuvchi vektor hisoblanadi, chunki jismga hech qanday juft ta'sir etgani yo'q.

## 13§ Kuchlar sistemasining muvozanatlik shartlari. Teng ta'sir etuvchining momenti haqidagi teorema

Har qanday kuchlar sistemasining muvozanati uchun, shu kuchlar sistemasining bosh vektori va bosh momenti nolga teng bo'lishligi zaruriy va yetarli shartdir. Uning analitik ifodasi:

$$\overline{R}=0,\ \overline{M}_O=0 \tag{23}$$

bu yerdagi O -ixtiyoriy ravishda tanlab olingan nuqtaning o'rni, chunki $\overline{R}=0$ bo'lsa bosh moment erkin vektordan iborat bo'ladi (12§ ga qarang).



41 shakl

(23) tenglamalar bilan ifodalangan shartlar zaruriy hisoblanadi. Chunki ularning birortasi bajarilmasa (masalan, $\overline{R}\neq 0$ bo'lsa)kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchidan iborat bo'ladi va muvozanat bo'lmaydi, yoki (masalan, $\overline{M}_O\neq 0$ bo'lsa) kuchlar sistemasi juft kuchga aylanib qoladi va natijada muvozanat holati yana bajarilmaydi. Shu bilan birga (23) tenglamalar muvozanatlikning yetarli shartlari ham hisoblanadi. Chunki $\overline{R}=0$ bo'lsa kuchlar sistemasi, vektor momenti

$\overline{M}_O$ - dan iborat bo'lgan juft kuchga aylanib qoladi, shu sababli $\overline{M}_O$=0 bo'lishi shart, shundagina sistema muvozanat holatda bo'ladi.

*Teng ta'sir etuvchi kuchning moment haqidagi Varin'on*[11] *teoremasi:* agar berilgan kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchiga ega bo'lsa, teng ta'sir etuvchi kuchning ixtiyoriy olingan nuqtaga nisbatan momenti, berilgan kuchlarning o'sha nuqtaga nisbatan olingan momentlarining yig'indisiga teng bo'ladi.

**Isbot**: Absolyut qattiq jismga qo'yilgan $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$,..., $\overline{F}_n$ kuchlar sistemasi C nuqtadan o'tuvchi va qiymati $\overline{R}$ -vektordan iborat bo'lgan teng ta'sir etuvchiga keltirilsin (41 shakl). Shu C nuqtaga teng ta'sir etuvchi vektorga teskari yo'nalishda bo'lgan moduli $\overline{R}$ -ga teng bo'lgan $\overline{R}'$-vektorni qo'yaylik. U holda berilgan kuchlar sistemasi unga qo'shimcha qo'yilgan $\overline{R}'$-vektor bilan birgalikda muvozanatdagi kuchlar sistemasini tashkil etadi, chunki $\overline{M}_O$=0. (22) formulaga asosan, berilgan kuchlar sistemasining momentlarining yig'indisi nolga teng bo'ladi, ya'ni $\sum \overline{m}_O(\overline{F}_k)+\sum \overline{m}_O(\overline{R}')=0$. Lekin $\overline{R}$ =- $\overline{R}'$ bo'lgani uchun, $\overline{m}_O(\overline{R}')=-\overline{m}_O(\overline{R})$ tenglik o'rinli bo'ladi. Shu sababli, yuqoridagilarga asosan,

$$\overline{m}_O(\overline{R})=\sum \overline{m}_O(\overline{F}_k) \qquad (24)$$

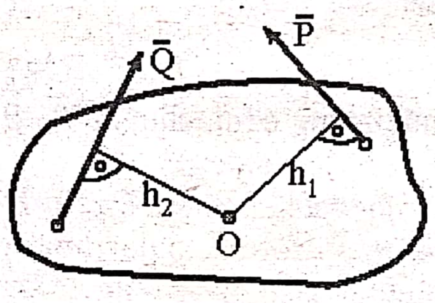
ekanligini isbot qildik. Shunday qilib teorema isbotlandi. Ushbu teoremaning natijasidan juda ko'p hollarda foydalanish bir muncha qulayliklarga olib keladi.

# V BOB
# YASSI KUCHLAR SISTEMASI

## 14§ Kuchning va juft momentlarining algebraik ifodalari

Biror tekislikda joylashib ixtiyoriy ravishda yo'nalgan kuchlar sistemasi yassi kuchlar sistemasi deb ataladi. Bunday kuchlar sistemasini o'rganishdan oldin quyidagi asosiy tushunchalar bilan tanishib olishlik zarur bo'ladi.

1. **Kuchning markazga nisbatan momentining algebraik ifodasi.** Agarda kuchlar sistemasining barcha kuchlari bitta tekislikda joylashgan bo'lib, ularni shu tekislikdagi ixtiyoriy O nuqtaga nisbatan olingan momentlarining vektor ifodasi, shu tekislikka perpendikulyar bo'lgan bitta to'g'ri chiziq bo'ylab joylashgan bo'ladilar. U holda vektorlik belgisidan foydalanmasdan, $\overline{F}$ -kuchning O markazga nisbatan olingan momentini algebraik ifoda shaklida qabul qilib, ularning momentlari yo'nalishlarini bir-birlaridan farqlash uchun faqat ularning ishoralaridan foydalanamiz. Shu sababli bunday momentni algebraik ko'rinishda ifodalab, $\overline{m}_o(\overline{F})$ - simvol orqali belgilaymiz..Demak, $\overline{F}$ -kuchning O markazga nisbatan olingan momentining algebraik ifodasi deb, kuchning



42 shakl

[11] P. Varin'on (1654-1722 y.) - buyuk frantsuz olimi, matematik va mexanik. "Yangi mexanikaning loyihasi" (1687y.) nomli kitobida statikaning asoslarini bayon qilgan.

modulini uning elkasiga ko'paytmasini tegishli ishora bilan belgilangan qiymatiga aytiladi, ya'ni[12]

$$m_O(\overline{F}) = \pm F \cdot h \qquad (25)$$

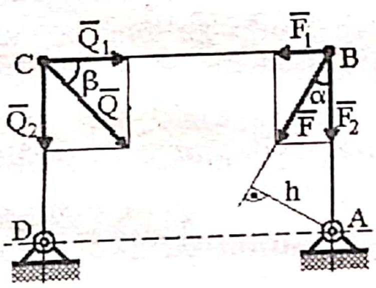
Ishorani belgilash xususida quyidagi qoidadan foydalaniladi. Mexanikada qabul qilingan o'ng koordinata sistemasida, agar kuch O markaz atrofida jismni soat strelkasi yo'nalishiga teskari tomonga aylantirishga intilayotgan bo'lsa, uning momenti musbat ishora bilan belgilanadi, aks holda manfiy ishora bilan belgilanadi.

42 shakIda tasvirlangan kuchlar uchun: $m_O(\overline{P}) = P \cdot h_1$ va $m_O(\overline{Q}) = -Q \cdot h_2$ bo'ladi.

Yuqoridagi (22) va (24) formulalardagi vektor momentlarning yig'indilari algebraik momentlar uchun ham o'z ko'rinishini saqlab qoladi, lekin ular vektor yig'indi bo'lmasdan algebraik yig'indidan iborat bo'ladilar.

**Misol.** $\overline{F}$ va $\overline{Q}$ kuchlarning A nuqtaga nisbatan momentlari aniqlansin (43 shakl). Bu yerdagi AB=$a$, AD=b -ga teng bo'lib, α va β burchaklar aniq deb hisoblansin.

Yechish. A nuqtadan $\overline{F}$ kuchining ta'sir chizig'iga perpendikulyar tushirib, uning yelkasini aniqlaymiz, ya'ni h=$a$ sinα; $\overline{F}$ - kuch jismni A nuqta atrofida soat strelkasiga teskari tomonga aylantirishga intilayotganligi sababli, u musbat ishora bilan belgilanadi. Shu sababli, $m_A(\overline{F}) = F \cdot h = Fa\sin\alpha$ bo'ladi.



43 shakl

$\overline{Q}$ -kuchining elkasini to'g'ridan-to'g'ri aniqlab bo'lmaydi, shu sababli uni ikkita $\overline{Q}_1$ va $\overline{Q}_2$ -tashkil etuvchi vektorlarga ajratib olib, so'ngra har-bir tashkil etuvchi vektorlarni A nuqtaga nisbatan olingan momentlarini algebraik ravishda qo'shib, $\overline{Q}$ -kuchining algebraik momentini aniqlaymiz. $\overline{Q}_1$-kuchining A nuqtaga nisbatan elkasi AB=$a$ va $\overline{Q}_2$-kuchining elkasi AD=b -ga teng bo'lgani uchun Varin'on teoremasiga binoan, ularni tegishli ishoralar bilan belgilab, $\overline{Q}$ -kuchini A nuqtaga nisbatan momentini yozamiz:

$$m_A(\overline{Q}) = m_A(\overline{Q}_1) + m_A(\overline{Q}_2) = -Q_1 \cdot a + Q_2 \cdot b,$$

hamda

$$Q_1 = Q\cos\beta \quad \text{va} \quad Q_2 = Q\sin\beta$$

ekanligi uchun, oxirgi tenglamadan

$$m_A(\overline{Q}) = Q(b \cdot \sin\beta - a \cdot \cos\beta)$$

aniqlaymiz. Agarda bu algebraik momentni quyidagicha qilib yozsak, ya'ni

$$m_A(\overline{Q}) = Q(b \cdot sin\beta - a \cdot cos\beta\ ) = Q \cdot h \quad \Rightarrow$$

bu yerda $\quad \Rightarrow \quad h = b \cdot sin\beta - a \cdot cos\beta$

$\overline{Q}$ -kuchining A nuqtaga nisbatan yelkasi h - ning qiymati nimaga teng ekanligini aniqlaymiz. Ko'rinib turibdiki, bu qiymatni bevosita, ya'ni Varin'on teoremasidan foydalanmasdan aniqlab bo'lmas edi.

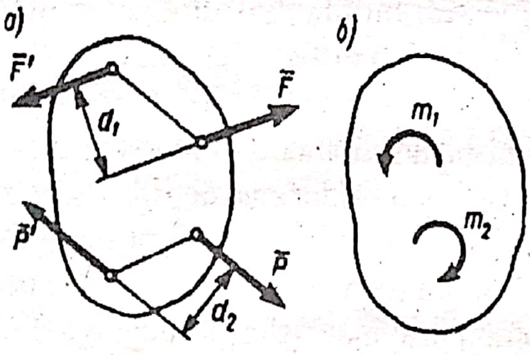
$\overline{F}$ -kuchini ham ikkita $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ tashkil etuvchilarga ajratib, so'ngra ularning A nuqtaga nisbatan momentlarini aniqlab, ularning algebraik yig'indisini hisoblab chiqarish mumkin edi. Masalan,

[12] Tengliklardagi "±" bunday belgilar, berilgan qiymatni yoki musbat yoki manfiy ekanligini ko'rsatadi.

$$m_A(\overline{F}) = m_A(\overline{F}_1) + m_A(\overline{F}_2) = (F\sin\alpha)\cdot a + 0 = (F\sin\alpha)\cdot a$$

chunki $\overline{F}_2$ kuchning A nuqtaga nisbatan yelkasi nolga teng.

2. **Juftning algebraik momenti**. Ma'lumki, juftning momenti, juftni tashkil *etuvchi kuchlardan birining* modulini juftning yelkasiga ko'paytmasiga teng (15' formulaga qarang). Juftning yelkasi deb, juft kuchlarining ta'sir chiziqlari orasidagi eng qisqa masofaga aytiladi. Shu sababli juftning momentini ham algebraik shakldagi ifodasini aniqlab, shartli ravishda m (yoki M) harfi bilan belgilash mumkin. Demak, juftning algebraik momenti deb, juftning birorta kuchini modulini, shu juftning elkasiga ko'paytmasini tegishli ishora bilan belgilangan qiymatiga aytiladi, ya'ni



44 shakl.

$$m = \pm Fd \quad \text{yoki} \quad M = \pm Fd \qquad (26)$$

Momentlarning ishoralarini belgilash tartibi, kuch momentining ishorasini belgilash kabidir. Masalan, 44, *a* shakldagi $\overline{F}$ va $\overline{F}'$ juft momentining ishorasi musbat bo'lib, uning algebraik momenti $m_1 = F\cdot d_1$ - ga teng bo'ladi. $\overline{P}$ va $\overline{P}'$ juftning algebraik momenti esa manfiy ishorali bo'lib, tegishlicha $m_2 = -P\cdot d_2$ - ga teng bo'ladi.

Juft kuch faqat o'zining momenti bilangina xarakterlanganligi sababli, chizmada juftning qaysi tomonga (soat strelkasi yo'nalishidami, yoki aksincha ekanligini) aylanishdagi yo'nalishini ifodalovchi yoysimon strelka orqali tasvirlanadi (44, b shakl).

Yuqoridagi vektor momentlar uchun isbot qilingan (16) va (17) formulalar, algebraik momentlar uchun ham o'rinlidir, faqat shu formulalardagi yig'indilar geometrik emas, balki algebraik ifodalardan iborat bo'ladi.

**12 masala**. ABCD egri richag, unga qo'yilgan $\overline{P}$ va $\overline{P}'$ kuchlardan iborat bo'lgan juft ta'sirida muvozanat holatda turibdi (45 shakl). Agar AB $=a=15$ sm. BC=b=30 sm. CD=c=20 sm., P=P'=300 N ga teng bo'lsa, tayanchlarga tushayotgan bosim kuchlari aniqlansin.

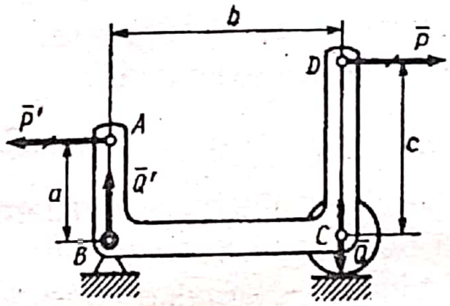
Yechish. Berilgan $\overline{P}$ va $\overline{P}'$ kuchlardan iborat juftni, shu tekislikda vertikal yo'nalishda joylashgan va unga ekvivalent bo'lgan $\overline{Q}$, $\overline{Q}'$ boshqa juft bilan almashtiraylik. Lekin ikkala juftlarning algebraik momentlari o'zaro teng bo'lishlari shart, ya'ni $P(c-a)=Q\cdot b$. Shunga ko'ra, B va C tayanchlarga tushayotgan bosim kuchlarining son qiymatlari,

$$Q=Q'=P(c-a)/b=50\ \text{N}.$$

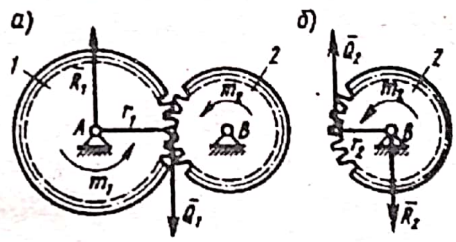
bo'lib, ular o'zaro parallel, lekin qarama-qarshi yo'nalishlar bo'yicha ta'sir qilar ekan.

**13 masala**. Radiusi $r_1$ - bo'lgan tishli g'ildirak 1-ga momenti $m_1$-ga teng bo'lgan juft kuchlar ta'sir etmoqda (46, *a* shakl). Uzatma muvozanatda bo'lishi uchun, radiusi $r_2$ - bo'lgan 2 - shesternyaga qanday momentli juft qo'yilish lozimligi aniqlansin.

Yechish. Avvalo, g'ildirak 1-ning muvozanat shartlarini tekshiraylik. Unga momenti $m_1$- ga teng bo'lgan juft kuch qo'yilgan bo'lib, uni muvozanatlash uchun moduli bo'yicha teng, lekin ishorasi teskari bo'lgan boshqa juft qo'yish lozim, ular $\overline{Q}_1$, $\overline{R}_1$-lardan iborat bo'lsin. Bu yerda $\overline{Q}_1$- g'ildirak-1 va shesternya -2 ning tishlari




45 shakl




46 shakl

uchrashayotgan nuqtadan o'tkazilgan urinma bo'ylab yo'nalgan bo'ladi. $\overline{R}_1$-kuchi esa $\overline{Q}_1$-kuchga parallel va qarama-qarshi yo'nalishda bo'lib, shesternya 1-ni aylanish o'qining reaksiya kuchidan iborat bo'ladi. (17) formulaga asosan, g'ildirak 1-ning muvozanat tenglamasini yozib, noma'lum Q -ning son qiymatini aniqlaymiz,

$$m_1 + (-Q_1 r_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = m_1 / r_1$$

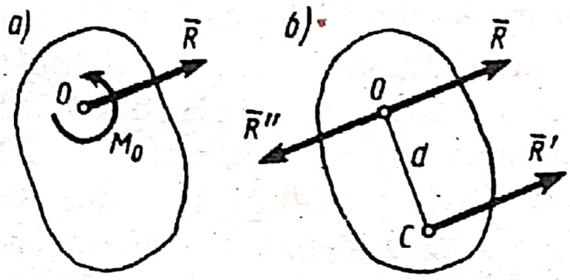
Endi shesternya -2 ning muvozanat tenglamasini tuzamiz (46, b shakl). Ta'sir va aks ta'sir haqidagi qonunga asosan, unga g'ildirak-1 tomonidan $\overline{Q}_1$ - vektorga teskari yo'nalishda bo'lgan $\overline{Q}_2$=-$\overline{Q}_1$ kuch ta'sir etadi. $\overline{Q}_2$-kuch B nuqtaning reaksiya kuchi $\overline{R}_2$ bilan birgalikda juft kuchni hosil qilib, uning algebraik momenti $-Q_2 r_2$ bo'ladi. shesternya -2 ga qo'yilgan $m_2$ - juft kuchlarni ana shu $\overline{Q}_2$, $\overline{R}_2$ lardan tashkil topgan juft kuchlar muvozanatlashi mumkin bo'ladi. (17) formuladan foydalanib, shesternya -2 ning muvozanat tenglamasini tuzamiz.

$$m_2 + (-Q_2 r_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_2 = Q_1 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad m_2 = m_1 r_2 / r_1$$

Albatta, butun konstruksiya uchun (17) formulaga asosan, muvozanat tenglamalarini tuzib bo'lmaydi, chunki $m_1$ va $m_2$ momentlar konstruksiyaning turli jismlariga qo'yilgan.

Yuqoridagi hisoblashlar orqali aniqlangan, hamda g'ildirak-1 va shesternya-2 gardishlariga qo'yilgan $\overline{Q}_1$, $\overline{Q}_2$- kuchlar aylantiruvchi kuchlar deb ataladilar. Ularni aniqlash formulalaridan ko'rinib turibdiki, aylantiruvchi kuchlarning son qiymatlari burovchi momentlarning modullarini aylanalar radiuslariga bo'linganiga, ya'ni $Q_1 = m_1/r_1 = m_2/r_2$ - ga teng ekan.

### 15§ Yassi kuchlar sistemasini sodda holga keltirish




47 shakl.

12 paragrafda hosil qilingan natijalar albatta tekis kuchlar uchun ham o'rinlidir. Shu sababli tekis kuchlar ham bitta $\overline{R}$-kuchdan iborat bo'lgan bosh vektorga va bitta $\overline{M}_O$ dan iborat bo'lgan bosh momentga ega bo'lishlari mumkin,

hamda bosh vektor va bosh juftlar o'sha kuchlar yotgan tekislikda joylashadilar (47, *a* shakl, bu yerda juft kuch yoysimon strelka orqali ifodalangan).

Bosh vektor - $\overline{R}$ va bosh moment $M_o$ larning qiymatlari (21) va (22) formulalar orqali hisoblanadi. Lekin bosh vektorni 4 paragrafdagi kabi geometrik usul bilan yoki (10) formula orqali analitik usul bilan ham aniqlash mumkin.

Shunday qilib:

$$R_x=\Sigma F_{kx},\ R_y=\Sigma F_{ky},\ M_O=\sum m_O(\overline{F}_k) \qquad (27)$$

Bu tenglamalar sistemasining hamma hadlari faqat algebraik ifodalardan iborat. Ushbu formulalar orqali, muvozanatda bo'lmagan kuchlar sistemasi qaysi guruhlarga ajralishi mumkinligini ko'rib chiqamiz. Natijalarni bosh vektor - $\overline{R}$ va bosh moment $M_o$ - lar yordamida tahlil qilamiz.

1) agar berilgan kuchlar sistemasining bosh vektori $\overline{R}=0$ va bosh momenti $M_o\neq0$ bo'lsa, u holda sistema faqat momenti $M_o$-ga teng bo'lgan bitta juft kuch ta'sirida ekanligini aniqlaymiz. 12 paragrafda aytilganidek bu $\overline{M}_O$-vektor erkin vektor hisoblanib, uni jismning istalgan nuqtasiga qo'yishimiz mumkin.

2) agar berilgan kuchlar sistemasining bosh vektori $\overline{R}\neq0$ bo'lsa, ya'ni u nolga teng bo'lmasa, u holda quyidagi ikki holatdan biri yuz berishi mumkin:

*a*) $\overline{R}\neq0$ va $M_o=0$; u holda jismga faqat bitta kuch, ya'ni O nuqtadan o'tuvchi teng ta'sir etuvchi - $\overline{R}$ kuch ta'sir etayotganligini aniqlaymiz.

b) $\overline{R}\neq0$ va $M_o\neq0$; bunday holda momenti $M_o$ bo'lgan juftni ikkita $\overline{R}'$ va $\overline{R}''$ kuchlardan tashkil topgan juft kuchlar shaklida ifodalaymiz (47, b shakl). shakldan $\overline{R}'=\overline{R}$ va $\overline{R}''=-\overline{R}$ hamda d=OC bo'lganligi uchun,

$$Rd=|M_O| \text{ bo'ladi.} \qquad (28)$$

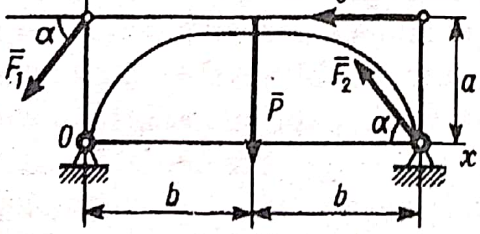
$\overline{R}''$ va $\overline{R}$ kuchlari o'zaro muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasi ekanligi sababli, ularni jismdan olib tashlasak, jismga C nuqtada ta'sir etayotgan faqat bitta $\overline{R}'$ kuchi qoladi. C nuqtaning o'rni quyidagi shartlarni qanoatlantirishi shart: 1) OC=d (OC$\perp\overline{R}$) masofa (28) tenglamani qanoatlantirishi lozim; 2) C nuqtaga qo'yilgan $\overline{R}'$-kuchning O nuqtaga nisbatan olingan momentning ishorasi bosh moment - $\overline{M}_O$ ning, ya'ni $\sum m_O(\overline{F}_k)$ ning ishorasi bilan bir xil bo'lishi shart.

Bunday hisoblash ishlari 17 masalada ko'rib chiqilgan edi.

Shunday qilib, muvozanat holatda bo'lmagan har qanday tekis kuchlar sistemasi bitta teng ta'sir etuvchi kuchga ($\overline{R}\neq0$) yoki bitta juftga (agar $\overline{R}=0$ bo'lga ) keltirilar ekan.

**14 masala.** Agar P=30 N, $F_1=F_2=F_3=20$ N, $a$=0,3 m, b=0,5 m, $\alpha=60°$ bo'lsa, 48 shaklda ko'rsatilgan $\overline{P}$, $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ kuchlar sistemasini O markazga keltirilsin.

Yechish. Ushbu masala berilgan kuchlar sistemasining $R_x$ va $R_y$ - proeksiyalar orqali bosh vektor $\overline{R}$-ni hamda O markazga nisbatan hisoblangan bosh moment $\overline{M}_O$ni aniqlashdan iborat bo'ladi. Oxy koordinata o'qlarni shaklda ko'rsatilgandek qilib o'tkazamiz va (27) formula orqali quyidagi tenglamalar sistemasini yozamiz (momentlarni hisoblash usullarini 14§ dan ko'rib olish mumkin).



48 shakl

$$R_x = \sum F_{kx} = -F_1 cos\alpha - F_2 cos\alpha - F_3$$

$$R_y = \sum F_{ky} = -P - F_1 sin\alpha + F_2 sin\alpha$$

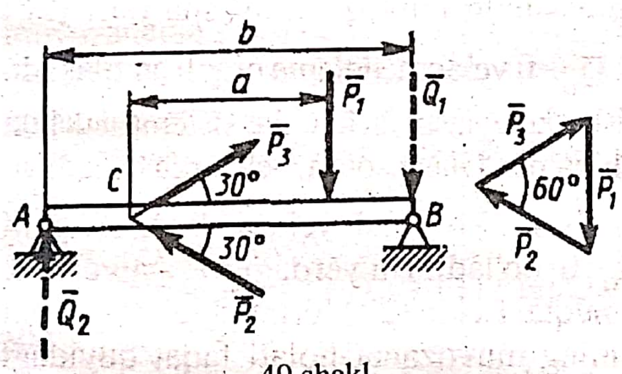
$$M_O = \sum m_O(\overline{F}_k) = -bP + aF_1 cos\alpha + 2bF_2 sin\alpha + aF_3$$

Ushbu tenglamalar sistemasiga tegishli qiymatlarni qo'yib, $R_x$=-40 N, $R_y$=-30 N, $M_O$=11,3 $N \cdot m$ ekanligini aniqlaymiz. Bosh vektorning moduli $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 50$ N-ga teng bo'ladi. Shunday qilib, berilgan kuchlar sistemasining koordinata o'qlardagi proeksiyalari $R_x$=-40 N, $R_y$=-30 N, iborat bo'lib, O markazga qo'yilgan bosh vektor - $\overline{R}$ (R=50N) va momenti $M_O$=11,3 N·m ga teng bo'lgan bitta juft kuchga keltirilar ekan.

**15 masala**. Agar $P_1=P_2=P_3=P$ -ga teng bo'lsa, 49 shaklda tasvirlangan AB balkaga qo'yilgan $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ kuchlar sistemasini sodda holga keltirilsin, hamda A va B tayanchlarga ko'rsatilayotgan bosim kuchlari aniqlansin.

Yechish. $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ - kuchlardan tuzilgan kuch ko'pburchagi yopiq; demak, bosh vektor $\overline{R}$=0. Barcha kuchlarning ixtiyoriy olingan nuqtaga (masalan, C nuqtaga) nisbatan momentlarining yig'indisi -P·$a$ ga teng bo'ladi.

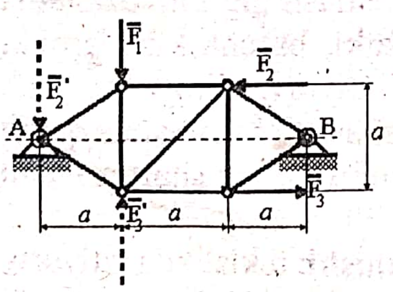
Demak, berilgan kuchlar sistemasi momenti -P·$a$ ga teng bo'lgan, bitta juftga keltirilar ekan. Shu aniqlangan juftni A va B tayanchlarga 15 shaklda ko'rsatilganidek punktirlar orqali tasvirlasak, berilgan $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ kuchlar sistemasi har bir tayanchga $Q_A=Q_B=Pa/b$ miqdordagi kuchlar bilan bosim kuchi ko'rsatar ekan. Lekin bosim kuchlarining yo'nalishlari o'zaro teskari bo'lar ekan.



49 shakl

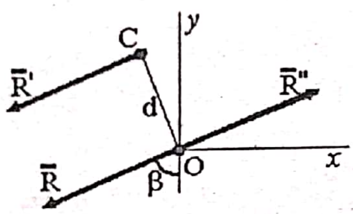
**16 masala**. 50 shakldagi AB fermaga qo'yilgan $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ -kuchlar sistemasi sodda holga keltirilsin, hamda A va B tayanchlarga tushadigan bosim kuchlari aniqlansin. $F_1 = F_2 = F_3 = F$ deb hisoblansin.

Yechish. $\overline{F}_2$ va $\overline{F}_3$ kuchlari juftni tashkil qilganligi sababli, 50 shaklda punktir bilan ko'rsatilgan holatga ko'chiramiz. U holda $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_3$ kuchlar o'zaro muvozanatlashuvchi kuchlar ekanligi uchun uni sistemadan olib tashlasak, jismga ta'sir etayotgan kuchlar bitta teng ta'sir etuvchidan iborat bo'ladi, ya'ni $\overline{R} = \overline{F}_2'$ (son qiymati R=F) bo'ladi.



50 shakl

Bundan, $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ kuchlar sistemasi ta'sirida B tayanchga hech qanday bosim kuchi ko'rsatmas ekan, lekin faqat A tayanchga vertikal yo'nalishda bo'lgan bosim ko'rsatilar ekan.




51 shakl

**17 masala.** 14 masaladagi (48 shakl) kuchlar sistemasi sodda holga keltirilsin.

Yechish. 14 masalaning yechimidan ma'lum bo'lishicha, kuchlar sistemasi O nuqtaga 51 shaklda tasvirlangan yo'nalishdagi bosh vektor $\overline{R}$ -ga va momenti $M_O$=11,3 N·m.-ga teng bo'lgan holga keltirilgan bo'lib, R=50 N va cosβ= $|R_y|$/R=0,6 (demak, β≈53°) -ga teng ekanligini aniqlagan edik. Quyida o'sha yechimni davom ettiramiz. Momenti $M_O$ ga teng bo'lgan juftni 51 shaklda tasvirlangan $\overline{R}'$ va $\overline{R}''$ kuchlardan iborat juft kuchlar bilan almashtiramiz, yo'nalishi bo'yicha $\overline{R}'=\overline{R}$ va $\overline{R}''=-\overline{R}$ bo'lsin. $\overline{R}''$-kuchni O nuqtaga va $\overline{R}'$-kuchni C nuqtaga qo'yamiz.

U holda (28) formulaga asosan, d=OC=$M_O$/R≈0,23 m. O'zaro muvozanatlashuvchi $\overline{R}''$ va $\overline{R}$ kuchlarni tashlab yuborsak, berilgan kuchlar sistemasi, ta'sir chizig'i O nuqtadan d=0,23 m, masofada o'tuvchi bitta teng ta'sir etuvchi $\overline{R}$ ($\overline{R}'=\overline{R}$) bo'lgan kuchga keltiriladi. Ushbu teng ta'sir etuvchi kuch qo'yilgan nuqtaning koordinatasi tegishlicha x=-dcosβ≈-0,14 m, y=d·sinβ≈0,18 m, dan iborat bo'ladi.

## 16§ Tekislikda joylashgan kuchlar sistemasining muvozanati. Parallel kuchlar muvozanati

Ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanatlik shartlari (28) formulada ko'rsatilgandek, ikkita $\overline{R}$=0 va $\overline{M}_O$=0 vektor tenglama orqali aniqlanadi. Quyida shu ikkala vektor tenglamadan tekislikda joylashgan kuchlar sistemasi uchun kelib chiqadigan analitik shartlarni ko'rib chiqamiz. Ular, asosan, uch turda bo'ladilar.

1. **Muvozanatlik shartining asosiy shakli**. Bosh vektor $\overline{R}$=0 bo'lgani uchun, albatta, $R_x$=0 va $R_y$=0, hamda $M_O$=0 bo'ladi. Bu yerdagi $M_O$ - algebraik moment, O - tekislikda olingan ixtiyoriy nuqta. Lekin (27) formuladan ma'lumki tekislikda joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat holati faqat quyidagi algebraik shartlar bajarilgandagina sodir bo'ladi,

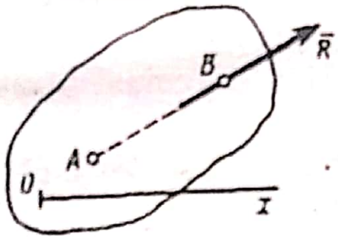
$$\sum F_{kx} = 0; \qquad \sum F_{ky} = 0; \qquad \sum m_O(\overline{F}_k)=0 \qquad (29)$$

(29) formula muvozanatlik shartlarning quyidagi analitik ifodalarini belgilaydi: tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanatda bo'lishining zaruriy va yetarli shartlari shundan iboratki, barcha kuchlarning ikkala (x va y) o'qlarga proeksiyalarining yig'indilari va ixtiyoriy olingan nuqtaga nisbatan momentlarining yig'indilari nolga teng bo'lishi shart. O'z navbatida qattiq jismga qo'yilgan ixtiyoriy tekis kuchlar sistemasining muvozanat shartlari ham shu (29) formula orqali ifodalanadi.

2*. **Muvozanatlik shartining ikkinchi xil ko'rinishi:** tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanatda bo'lishining zaruriy va yetarli shartlari shundan iboratki, barcha kuchlarning ixtiyoriy A va B markazga nisbatan olingan momentlarining yig'indilari va AB chiziqqa perpendikulyar bo'lmagan o'qqa bo'lgan proeksiyalarining yig'indilari nolga teng bo'lishi shart, ya'ni

$$\sum m_A(\overline{F}_k)=0;\ \ \sum m_B(\overline{F}_k)=0\ \ \sum F_{kx}=0; \tag{30}$$

Agarda shu uchala analitik shartlardan birortasi qanoatlanmasa, masalan, $\overline{R}\neq0$ yoki $M_A\neq0$ (yoki $M_B\neq0$) sistemasi muvozanatda bo'lmaydi. Ushbu shartni yetarli ekanligini isbot qilaylik. (30) muvozanat tenglamalar sistemasining faqat ikkitasi, $M_A=0$ va $M_B=0$ qanoatlansin. U holda bunday sistema 15§ ko'rsatib o'tilgandek muvozanatda bo'lmasligi mumkin. Chunki shu A va B nuqtalardan o'tuvchi bo'lgan teng ta'sir etuvchi kuch mavjud bo'lishi mumkin (52 shakl) va uni shu nuqtalarga nisbatan olingan momenti nolga teng bo'ladi, lekin muvozanat holati ta'minlanmaydi. Shu sababli (30) ning uchinchi tenglamasi ham $R_x=\sum F_{kx}=0$; qanoatlanishi shart bo'ladi. Ox o'qi AB chiziqqa perpendikulyar bo'lmaganligi uchun, uchinchi tenglama faqat $\overline{R}\neq0$ bo'lgandagina qanoatlanadi xolos.



52 shakl.

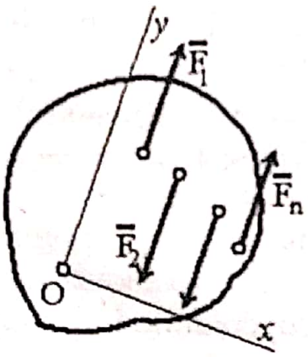
3[13]. **Muvozanatlik shartining uchinchi xil ko'rinishi:** (uchta momentlar haqidagi teorema) tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanatda bo'lishining zaruriy va etarli shartlari shundan iboratki, barcha kuchlarning bir to'g'ri chiziqda yotmagan ixtiyoriy uchta A, B va C markazlarga nisbatan olingan momentlarining yig'indilari nolga teng bo'lishi shart, ya'ni

$$\sum m_A(\overline{F}_k)=0\ \ \sum m_B(\overline{F}_k)=0\ \ \sum m_C(\overline{F}_k)=0 \tag{31}$$

Bularning qanoatlanishi zaruriy shart ekanligi o'rinlidir. Ushbu shartlarning yetarli ekanligini isbotlash uchun shu (31) tenglamalar qanoatlangan holda sistema muvozanatda emas deb faraz qilaylik. U holda sistema teng ta'sir etuvchi vektorga ega bo'lishi shart, ammo bitta teng ta'sir etuvchi vektor bitta to'g'ri chiziqda yotmagan uchta nuqtadan o'tishi aslo mumkin emas, demak ushbu (31) shartlar yetarli ekan.

Yuqoridagilardan ko'rinib turibdiki muvozanatlik shartlari tenglamalari sistemasining uchala ko'rinishi ham uchta tenglamalar sistemalaridan iborat ekan. Lekin (29) tenglamalar sistemasi asosiy hisoblanadi, chunki uni qo'llashda keyingi ikkita ko'rishidagi (30) va (31) tenglamalar uchun qo'yilayotgan qushimcha shartlarning hojati yo'q.

Agar jismga tekislikda joylashgan $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$ kuchlar sistemasidan tashqari, shu tekislikda joylashgan va momentlari $m_1, m_2, .., m_n$ lardan iborat bo'lgan juftlar ta'sir etayotgan bo'lsa, muvozanat tenglamalarini tuzishda juft kuchlarning proeksiyalarini hisoblashning hojati yo'q, chunki ularning ixtiyoriy o'qdagi proeksiyalarining algebraik yig'indisi nolga teng bo'ladi.



53 shakl

Momentlar uchun tuzilgan tenglamalarda esa qaysi nuqtaga nisbatan moment aniqlanishidan qat'iy nazar juftlarning momentlari algebraik ravishda yig'indiga qo'shib

[13] $M_A=0$ bo'lsa, kuchlar sistemasi A nuqtadan o'tuvchi teng ta'sir etuvchiga ega bo'lishi mumkin. $M_B=0$ bo'lsa, B nuqtadan o'tuvchi.

yuboriladi, chunki juftlarning momentlari istalgan nuqta uchun bir xil bo'ladi [19§, (15) formula]. Shunday qilib, agar jismga ixtiyoriy tekis kuchlardan tashqari, juftlar ham ta'sir etsa muvozanatlik shartlarining (29) dagi ifodasi, quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum m_O(\overline{F}_k) + \sum m_i = 0 \tag{32}$$

bu yerda k = 1,2,3,..,n; berilgan kuchlar soni, i = 1,2,3,..,s; berilgan juftlar soni.

(30) va (31) tenglamalar sistemasi ham shunday o'zgarishi mumkin.

*Tekislikda ixtiyoriy joylashgan parallel kuchlar sistemasining muvozanatlik shartlari.* Agar barcha kuchlar o'zaro parallel ravishda yo'nalgan bo'lsa, Ox koordinata o'qini shu kuchlarga perpendikulyar ravishda, Oy o'qiga parallel ravishda yo'naltiriladi (53 shakl). U holda barcha kuchlarning Ox o'qiga proeksiyalari nolga teng bo'ladi va (29) tenglamalar sistemasining birinchi tenglamasi 0=0 dan iborat ayniyatga aylanib qoladi. Shu sababli parallel kuchlar uchun (29) tenglamalar sistemasi ikkita tenglamadan iborat bo'ladi xolos, ya'ni

$$\sum F_{ky} = 0; \qquad \sum m_O(\overline{F}_k) = 0 \tag{33}$$

bu yerdagi Oy - o'qi kuchlarga parallel yo'nalgan bo'lishi shart.

Parallel kuchlar uchun muvozanatlik sharti tenglamalar sistemasining boshqacha ko'rinishi (30) formuladan kelib chiqadi va

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0 \quad \sum m_B(\overline{F}_k) = 0 \tag{34}$$

lekin A va B nuqtalar kuchlarga parallel bo'lgan bir chiziqda joylashmasligi shart.

## 17§ Masalalar yechish

Ushbu bo'limdagi masalalarni yechishda 7§ dagi ko'rsatmalarni esda tutishingiz lozim bo'ladi.

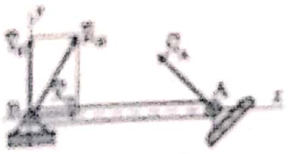
Eng sodda shakldagi tenglamalarni tuzish uchun (agar ular hisoblash ishlarni murakkab bo'lmasligini e'tiborga olgan holda): *a*) kuchlarning proeksiyalari uchun muvozanat tenglamalarini tuzishda, koordinata o'qlaridan birini noma'lumlardan biriga perpendikulyar bo'lgan holda yo'naltirish lozim; b) momentlar uchun tenglama tuzganingizda markazni shunday nuqta tanlangki, u nuqtani iloji boricha ko'proq noma'lum kuchlarning ta'sir chiziqlari kesib o'tsin.

Kuchlarning momentlarini hisoblash mobaynida, ayrim hollarda Varin'on teoremasiga asosan ularni tashkil etuvchi kuchlarga ajratib, so'ngra momentlarining yig'indisini hisoblash tavsiya etiladi. (14§ ga qarang).

Ko'pincha statikaning aksariyat masalalarini echish, tayanch reaksiyalarini aniqlash xususida olib boriladi. Ular asosan balkalarning, ko'priklarning va boshqa inshootlarning tayanchlaridan iborat bo'lishi mumkin. Texnikada ko'p hollarda quyidagi uchta mahkamlanish tayanchlaridan foydalaniladi (3§ da ko'rilgandan tashqari):

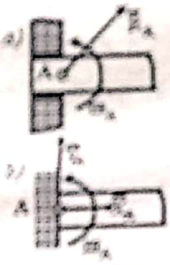
1. *Qo'zg'aluvchan sharnirli tayanch.* (54 shakl. A tayanch). Bu tayanchning $\overline{N}_A$-reaksiya kuchi qo'zg'aluvchan katok (g'ildirak) tayangan yuzaning normali bo'yicha yo'naltirilgan bo'ladi.

2. *Qo'zg'almas sharnirli tayanch.* (54 shakl. B tayanch). Bu tayanchning $\overline{R}_B$ - reaksiya kuchi sharnirning o'qiga qo'yilgan bo'lib, uning yo'nalishi chizma tekisligida ixtiyoriy ravishda yo'nalgan bo'lishi mumkin. Shu sababli masalalarni yechishda $\overline{R}_B$ - vektorni o'rniga, koordinata o'qlari bo'yicha yo'nalgan tashkil etuvchilari $\overline{X}_B$ va $\overline{Y}_B$ lardan foydalaniladi. Agarda masalani yechib $X_B$ va $Y_B$ larning analitik ifodalari aniqlansa, $\overline{R}_B$ - vektorning moduli $R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$ - formula orqali aniqlanadi.



54 shakl

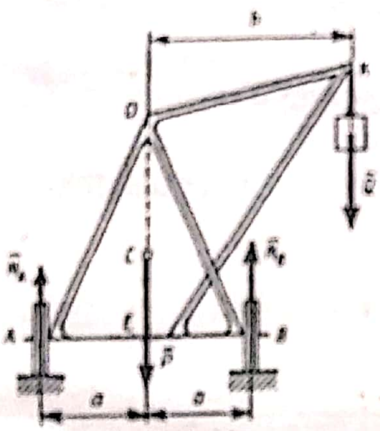
3. *Qistirib mahkamlangan tayanch.* (55, *a* shakl). Balkaning devorga qistirib mahkamlangan chekkasini va devorni bitta qattiq jism deb hisoblab, ularni 55, b shakldagi ko'rsatilgandek tasvirlaymiz. U holda balkaning ko'ndalang kesimi bo'yicha uning qistirib mahkamlangan tomonidan tarqalgan kuchlar (reaksiyalar) ta'sir etadi. Ushbu tarqalgan reaksiya kuchlarni, A nuqtaga qo'yilgan bitta noma'lum reaksiya $\overline{R}_A$-kuchi va noma'lum $m_A$ - momentli juft bilan almashtiriladi (55, *a* shakl).



55 shakl

Reaksiya kuchi $\overline{R}_A$-ni, amalda ko'proq uning tashkil etuvchilari $\overline{X}_A$ va $\overline{Y}_A$ orqali ifodalash ma'qul hisoblanadi (55, b shakl). Shunday qilib, devorga qistirib mahkamlangan balkaning reaksiya kuchlarini, uchta $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ va $m_A$ -larni aniqlash orqali yechiladi.

Boshqa turdagi bog'lanishlarning reaksiya kuchlarini aniqlash haqidagi ko'rsatmalar 3§ da bayon etilgan.



56 shakl.

**18 masala.** 56 shaklda tasvirlangan kranning A va B g'ildiraklarini relsga ko'rsatayotgan bosim kuchini hisoblang. Kranning og'irligi P=40 kN, uning og'irlik markazi DE chiziqda yotadi. Ko'tarilayotgan yukning og'irligi Q=10 kN, kranning uchi b=3,5 m, g'ildiraklar orasidagi masofa AB=2*a*=2,5 m.

Yechish. Avval kranning muvozanatini tekshiraylik. Kranga uning og'irligi $\overline{P}$, yukning og'irligi $\overline{Q}$, va bog'lanish reaksiyalari $\overline{N}_A$ va $\overline{N}_B$ lar ta'sir etmoqda. Barcha kuchlar o'zaro parallel bo'lganliklari uchun (33) muvozanatlik sharti tenglamalaridan foydalanamiz. Ya'ni vertikal yo'nalgan Ay o'qiga kuchlarning proeksiyalarini yig'indisini va A nuqtaga nisbatan kuchlarning momentlarini yig'indisini nolga tenglab,

$$-Pa + N_B \cdot 2a - Q(a+b) = 0$$

$$N_A + N_B - P - Q = 0$$

ushbu tenglamalarni yechib, noma'lum reaksiyalarning qiymatlarini aniqlaymiz,

$$N_A = 0{,}5P - 0{,}5Q(b/a - 1) = 11kN$$

$$N_B = 0{,}5P + 0{,}5Q(b/a + 1) = 39kN$$

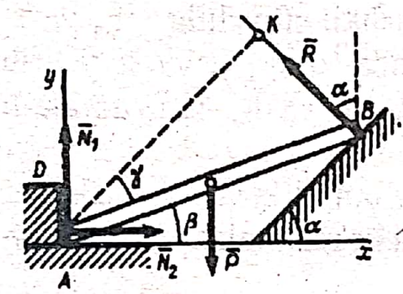
Yechimni tekshirish maqsadida kuchlarning B nuqtaga nisbatan momentlarini yig'indisini nolga tenglaymiz,

$$-N_A\cdot 2a+P\cdot a-Q(b-a)=0$$

$N_A$ -ning yuqorida aniqlangan qiymatini bu tenglamaga qo'ysak tenglama qanoatlanayotganlini ko'rishimiz mumkin. G'ildiraklarning relsga nisbatan ko'rsatayotgan bosim kuchini qiymatlari $N_A$ va $N_B$ lardan iborat bo'lib, pastga yo'nalgan bo'ladi.

Yuqorida aniqlangan yechimdan shuni aniqlash mumkinki, Q=$a$P/(b-$a$)=22,2 kN ga teng bo'lganda $N_A$ -reaksiya kuchining qiymati nolga teng bo'lib, chap g'ildirak relsga bosim kuchi ta'sir etmas ekan. Q -ning qiymatini yana oshirib borsak, kran o'ng g'ildirak atrofida ag'darilib ketar ekan. Muvozanat holatining Q kuchiga bog'liq bo'lgan chegaraviy qiymatini $\sum m_B(\overline{F}_k)=0$ tenglama orqali hisoblash mumkin, bu yerdagi $F_k$ - kranga qo'yilgan kuchlar (ushbu masalada og'irlik kuchlaridan iborat).

**19 masala.** Og'irligi P bo'lgan bir jinsli AB brus A uchi bilan silliq gorizontal tekislikka va D to'siqqa tiralib turibdi. B uchi esa gorizont bilan α- burchak tashkil qilgan qiya tekislikka tayangan holda muvozanatni saqlab turibdi. (57 shakl). Brusning o'zi gorizont bilan β - burchakni tashkil etadi. Brusning D to'siqqa va ikkala tekislikka ko'rsatayotgan bosim kuchi aniqlansin.



57 shakl.

Yechish. AB brusning muvozanat holatini tekshirib ko'raylik. Brusga uning o'rtasiga qo'yilgan og'irlik kuchi P, bog'lanishlarning reaksiyalaridan iborat va tegishli tekisliklarga perpendikulyar (normal) ravishda yo'nalgan $\overline{R}$, $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$ - kuchlari ta'sir etmoqda.

| $\overline{F}_k$ | $\overline{N}_1$ | $\overline{N}_2$ | $\overline{P}$ | $\overline{R}$ |
|---|---|---|---|---|
| $F_{kx}$ | 0 | $N_2$ | 0 | -Rsinα |
| $F_{ky}$ | $N_1$ | 0 | -P | Rcosα |
| $m_A(\overline{F}_k)$ | 0 | 0 | -P$a$cosβ | 2$a$Rcosγ |

Koordinata o'qlarini o'tkazib, (29) formulaga asosan, ikkita noma'lum kuchlar qo'yilgan A nuqtaga nisbatan momentlarning yig'indisidan tashkil topgan muvozanat shartlari tenglamalarini tuzamiz.

Adashmaslikni oldini olish maqsadida har bir kuchning o'qlardagi proeksiyalarini va A nuqtaga nisbatan olingan momentlarining qiymatlarini jadvalga yozib chiqamiz; tenglamalardagi qiymatlar uchun quyidagi belgilashlar kiritamiz: AB=2$a$, ∠KAB=γ (AK - R kuchining A nuqtaga nisbatan yelkasi).

Yuqorida aytilgan muvozanat tenglamalarni yozamiz, ya'ni

$$N_2-R\sin\alpha=0,\qquad N_1-P+R\cos\alpha=0,$$
$$-Pa\cos\beta+2Ra\cos\gamma=0$$

oxirgi tenglamadan,

$$R=(P\cos\beta)/2\cos\gamma$$

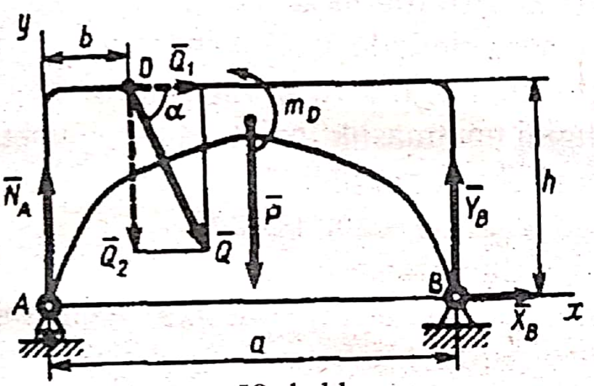
AK - chizig'i qiya tekislikka parallel yo'nalganligi uchun, $\angle KAx=\alpha$; bundan $\gamma=\alpha-\beta$. U holda $R=(P\cos\beta)/2\cos(\alpha-\beta)$. Yuqoridagi 1 va 2 tenglamalrni yechib, $N_1$ va $N_2$ larning qiymatlarini aniqlaymiz:

$$N_1=P\left[1-\frac{\cos\alpha\cos\beta}{2\cos(\alpha-\beta)}\right],\quad N_2=P\frac{\sin\alpha\cos\beta}{2\cos(\alpha-\beta)}$$

tekisliklarga ko'rsatilayotgan bosim kuchlari modul jihatidan shularga teng bo'lib, qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'ladilar.

Masalaning yechimini tekshirish maqsadida, ya'ni $N_1$ va $N_2$ larning qiymatlarning to'g'ri ekanligini tekshirish uchun, $\overline{R}$ va $\overline{N}_1$ vektorlarning ta'sir chiziqlari uchrashgan, $\overline{R}$ va $\overline{N}_2$ vektorlarning ta'sir chiziqlari uchrashgan nuqtalarga nisbatan momentlarning yig'indisidan iborat tenglamlar tuzish lozim bo'ladi.

**20 masala**. Simmetrik arkning (58 shakl) D nuqtasiga qo'yilgan moduli Q=40 kN bo'lgan teng ta'sir etuvchi kuchga keluvchi kuchlar sistemasidan va momenti $m_D$=120 kN·m ga teng bo'lgan juft kuchlardan iborat holda muvozanatda turibdi. Arkning sof og'irligi P=80kN. Agar AB=$a$=10 m, b=2m, h=3m, $\alpha$=60° bo'lsa, qo'zg'almas B va qo'zg'aluvchan A tayanchlarning reaksiya kuchlari aniqlansin.



58 shakl.

Yechish. Avvalo, arkning umumiy muvozanat holatini tekshiramiz. Unga barcha berilgan $\overline{P}$ va $\overline{Q}$ kuchlar, momenti $m_D$-ga teng bo'lgan juft kuch, A nuqtaning tayanch reaksiyasi $\overline{N}_A$ va qo'zg'almas B nuqtaning (qo'zg'almas bog'lanishning reaksiya kuchini 54 shakldagi kabi ikkita tashkil etuvchilarga ajratib yuborildi) reaksiya kuchlari $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$ lar ta'sir etmoqda. Ushbu masalani yechishda muvozanat tenglamalarning (30) formuladagi ko'rinishidan foydalanish maqul hisoblanadi. Buning uchun A va B nuqtalarga nisbatan momentlarning yig'indisini olamiz va Ax o'qiga kuchlarning proeksiyalarini yig'indisini tuzamiz. U holda har bir tenglamada bittadan noma'lumlar ishtirok etgan sistema hosil bo'ladi. $\overline{Q}$ kuchining momentini aniqlash uchun, uni ikkita $\overline{Q}_1$, va $\overline{Q}_2$ dan iborat bo'lgan tashkil etuvchilarga ajratib yuboramiz, ularning modullari tegishlicha $Q_1=Q\cos\alpha$, $Q_2=Q\sin\alpha$ bo'ladi. Varin'on teoremasidan foydalanib, (30) formula ko'rinishidagi muvozanat tenglamalar sistemasini tuzamiz,

$$\sum F_{kx}\equiv X_B+Q\cos\alpha=0 \qquad (a)$$

$$\sum m_A(\overline{F}_k)=Y_Ba-Pa/2-hQ\cos\alpha-bQ\sin\alpha+m_D=0 \qquad (b)$$

$$\sum m_B(\overline{F}_k)\equiv Pa/2-N_Aa-hQ\cos\alpha+(a-b)Q\sin\alpha+m_D=0 \qquad (c)$$

ushbu tenglamalarni noma'lumlarga nisbatan yechib, masalaning javobini yozamiz,

$$X_B = -Q\cos\alpha = -20kN,$$
$$Y_B = P/2 + Q(b\sin\alpha + h\cos\alpha)/a - m_D/a \approx 40{,}9kN,$$
$$N_A = P/2 + Q[(a-b)\sin\alpha - h\cos\alpha]/a + m_D/a \approx 73{,}7kN.$$

$X_B$ -ning qiymati manfiy ishorali bo'lib qoldi. Demak $\overline{X}_B$-vektorning yo'nalishi qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'lishi kerak ekan, buni oldindan ham bilish mumkin edi. B nuqtaning to'liq reaksiyasini aniqlash uchun $\overline{X}_B$ va $\overline{Y}_B$ kuchlarning geometrik yig'indisi orqali aniqlanadi. Moduli $R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} \approx 45{,}5$ kN bo'ladi.

Tekshirish uchun kuchlarni Ay o'qiga bo'lgan proeksiyalarining yig'indisidan iborat bo'lgan muvozanat tenglamasini tuzamiz,

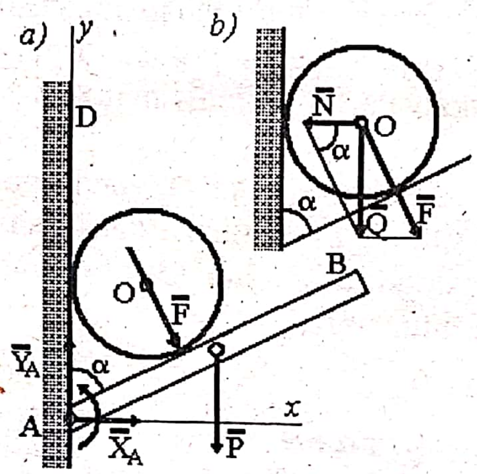
$$\sum F_{ky} = N_A + Y_B - P - Q\sin\alpha = 0 \qquad \text{(d)}$$

Yuqorida hisoblangan $N_A$ va $Y_B$ larning qiymatlarini (d) tenglamaga qo'yib, bu tenglamani qanoatlanayotganligini aniqlashimiz mumkin (qiymatlarni algebraik holda yoki raqamlar bilan qo'yib ko'rish mumkin bo'ladi).

Lekin yechimni (d) formula orqali tekshirganimizda Ay o'qqa perpendikulyar bo'lgan kuchlarning momentlarini to'g'ri ekanligini va momentlarni to'g'ri hisoblanganligini aniqlash mumkin emasligini unutmaslik lozim. Shuning uchun yana qo'shimcha bitta tenglama tuzish lozim bo'ladi, masalan, D nuqtaga nisbatan kuchlarning momentlarini yig'indisini nolga tenglash lozim bo'ladi.

Bundan tashqari, (30) formula asosida muvozanat tenglamalar tuzilganda kuchlarning proeksiyalarini AB o'qqa perpendikulyar bo'lgan o'qqa nisbatan olinmasligi lozim, masalan, bizning misolda Ay -shunday o'qlardan hisoblanadi. Agar biz (*a*), (b), (c) tengalamalar sistemasini o'rniga (b), (c), (d) tuzgan bo'lganimizda, ularda faqat ikkita noma'lum, $N_A$ va $Y_B$ lar qatnashgan bo'lar edi xolos (ya'ni ikkita noma'lumli uchta tenglamalar sistemasi, mavjud bo'lib, ulardan ikkitasi bir-birini tasdiqlovchi bo'lar edi xolos). Natijada noma'lum $X_B$-ning qiymatini aniqlab bo'lmas edi.

**21 masala.** Bir jinsli AB brus, α=60° burchak ostida devorga qistirib o'rnatilgan (59, *a* shakl). Brusning devordan tashqaridagi qismining uzunligi b=0,8m, og'irligi P=100N. ∠DAB ning ichiga og'irligi Q=180N tsilindr joylashtirilgan, u brusning E nuqtasiga taya'nib turadi va AE=*a*=0,3m. Devorning qistirilgan joydagi reaksiyasi aniqlansin.



59 shakl

Yechish. Brusning muvozanat holatini tekshiraylik. Brusga: uning o'rtasiga qo'yilgan og'irlik kuchi $\overline{P}$; brusning E nuqtasiga unga perpendikulyar ravishda ta'sir etayotgan tsilindrning bosim kuchi $\overline{F}$ (bosimni $\overline{Q}$ kuch bilan belgilash mumkin emas, chunki $\overline{Q}$ kuchi tsilindrga qo'yilgan); bog'lanishning $\overline{X}_B$ va $\overline{Y}_B$ dan tashkil topgan reaksiya kuchlari va momenti $m_D$-ga teng bo'lgan juft kuchdan iborat reaksiyasi ta'sir etmoqda (55, b shaklga qarang). Tsilindrning brusga ko'rsatgan bosim kuchini aniqlash uchun, Q -kuchini tsilindrning markaziga qo'yilgan ikkita $\overline{N}$ va $\overline{F}$ lardan iborat bo'lgan, devorga va brusga perpendikulyar ravishda yo'nalgan tashkil etuvchilarga ajratib yuboramiz (59, b shakl). shakldagi parallelogrammdan F=Q/sinα ekanligini aniqlaymiz.

Endi (29) formulaga asosan, aniqrog'i (32) muvozanat tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$\sum F_{kx} \equiv X_A + F\cos\alpha = 0, \qquad \sum F_{ky} \equiv Y_A - F\sin\alpha - P = 0,$$

$$\sum m_A(\overline{F}_k) \equiv -Fa - P(b/2)\sin\alpha + m_A = 0.$$

F -kuchining yuqorida aniqlangan qiymatini bu tenglamalar sistemasiga qo'ysak,

$$X_A + Qctg\alpha = 0,\ Y_A - Q - P = 0,$$
$$m_A - Qa/sin\alpha - P(b/2)sin\alpha = 0,$$

ushbu tenglamalarni noma'lum qiymatlarga nisbatan echib:

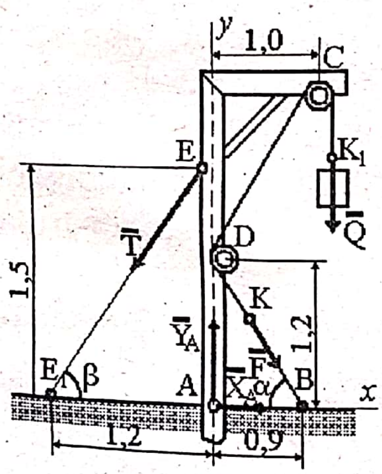
$$X_A = -Qctg\alpha = -103{,}8N, \qquad Y_A = P + Q = 280N,$$

$$m_A = Qa/\sin\alpha + P(b/2)\sin\alpha = 96{,}9N\cdot m.$$

Devorning reaksiyasi $X_A$, $Y_A$ va $m_A$ lardan tashkil topgan bo'ladi.

Endi ushbu masalani yechib ko'rsatishdan kelib chiqqan asosiy maqsad ustida to'xtalib, shuni ta'kidlamoqchimizki, muvozanat tenglamalari tuzilganda, qaysi jismning muvozanati tekshirilayotgan bo'lsa, faqat bevosita shu jismga qo'yilgan kuchlar ishtirok etishlari kerak, xolos.

**22 masala**. To'sinli ustunga (60 shakl) ikkita C va D bloklar mahkamlangan bo'lib, ularning gardishiga arqon orqali og'irligi Q=240 N bo'lgan yuk osib qo'yilgan. Arqonning pastki uchi yerdagi B nuqtaga mahkamlangan. Ustunni vertikal holda ushlab turish uchun, uni $EE_1$ tros bilan tortib qo'yilgan. Ustun va to'sinning og'irligini hamda bloklardagi ishqalanish kuchlarni e'tiborga olmagan holda $EE_1$ tortmadagi zo'riqishni va ustunning erga mahkamlangan joydagi reaksiyalarni aniqlansin (ustunning erga qo'yilgan A nuqtadagi ostki qismini sharnir kabi aylanishi mumkin deb hisoblansin). Barcha o'lchamlar chizmada (metrlarda) ko'rsatilgan. Bloklarning razmerlari hisobga olinmasin.



60 shakl

Yechish. Konstruksiyani butunligicha, ya'ni to'sin, bloklar va arqonlarning blokka tegib turgan qismlari bilan birgalikdagi muvozanatini tekshirib chiqamiz (9 masalaga qarang). Konstruksiyaga quyidagi tashqi kuchlar ta'sir etmoqda: $K_1$ nuqtaga qo'yilgan $\overline{Q}$ kuch, K nuqtaga qo'yilgan arqonning tortish kuchi - $\overline{F}$ va bog'lanish reaksiyalari $\overline{T}$, $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$. Ichki kuchlar tenglamalarda qatnashmaganligi sababli ularni chizmada tasvirlamadik. Bloklardagi ishqalanish kuchlarni hisobga olmasak, arqonning hamma nuqtalarida bir xil taranglik kuchi mavjud bo'ladi, ya'ni F=Q.

Konstruksiyaga bevosita ta'sir etuvchi kuchlar ishtirokida, uning (29) formulaga asosan muvozanat shartlaridan kelib chiqadigan tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$\sum F_{kx} = F\cos\alpha - T\cos\beta + X_A = 0$$

$$\sum F_{ky} = -Q - F\sin\alpha - T\sin\beta + Y_A = 0$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = -Q\cdot 1 - F\cdot 0{,}9\sin\alpha + T\cdot 1{,}2\sin\beta = 0$$

$AEE_1$ va ADB to'g'ri burchakli to'rtburchaklardan ko'rinib turibdiki, $EE_1$=2,0 m, DB=1,5m shunga ko'ra $\sin\alpha=\sin\beta=0{,}8$; $\cos\alpha=\cos\beta=0{,}6$. Demak, ushbu masalada $\alpha=\beta$ va F=Q. Bu aniqlangan qiymatlarni yuqoridagi muvozanat tenglamalariga qo'yib chiqsak, ular quyidagi ko'rinishga keladilar:

$$0{,}6Q - 0{,}6T + X_A = 0 \qquad -Q-0{,}8Q-0{,}8T+Y_A = 0$$

$$-1{,}0\cdot Q - 0{,}72Q + 0{,}96T = 0$$

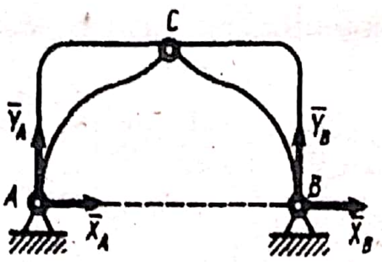
Ushbu tenglamalarni noma'lum qiymatlarga nisbatan yechib, ularning son qiymatlarini aniqlaymiz, T=430 N, $X_A$=114 N, $Y_A$=776 N.

## 18§ Qo'shma konstruksiyalarning muvozanati

Injenerlik inshootlarni statik hisoblash ishlari ko'p hollarda turli xil bog'lanishlar orqali bir-birlari bilan birlashtirilgan jismlar sistemasining qo'shma konstruksiyalarni muvozanatini tekshirishga keltiriladi. Bunday konstruksiyaning bir qismini ikkinchi qismi bilan bog'lovchi jismlarni ichki bog'lanishlar deb ataladi. Konstruksiyani shu konstruksiya tarkibiga kirmagan boshqa jismlar bilan bog'lagan jismlarni (masalan, tayanchlar bilan) tashqi bog'lanishlar deb ataladi.

Agar tashqi bog'lanishlar (tayanchlarni) olib tashlangandan keyin konstruksiya qattiq (yaxlit, ajralmaydigan) holda bo'lsa, bunday konstruksiyalar uchun qattiq jism statikasi masalalarini yechish kabi hisoblash ishlarini olib boraveriladi. Bunday misollar 20 va 22 masalalarda ko'rib o'tilgan (58 va 60 shakl).

Ammo amalda shunday injenerlik konstruksiyalari ham uchraydiki, ulardagi tashqi bog'lanishlarni (tayanchlarni) olib tashlansa, ular qattiq (yaxlitlik) holatini yo'qotib, shakli o'zgaruvchan (bo'laklarga ajraluvchan) bo'lgan konstruksiyaga aylanib qoladilar. Bunday konstruksiyalarga uch sharnirli arka (61 shakl) misol bo'la oladi. Agar A va B tayanchlar olib tashlansa, ark o'z qattiqligini yo'qotadi, ya'ni uning qismlari C sharnir atrofida aylanma harakat qilishlari mumkin.



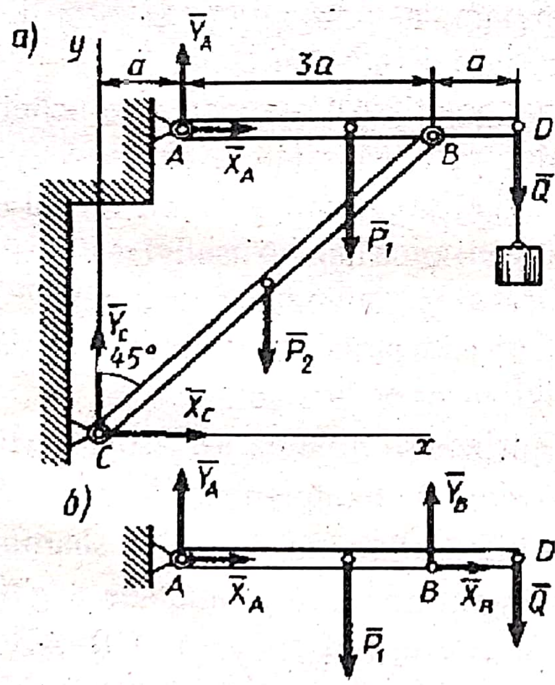
61 shakl.

Statikaning qotishlik prinsipiga asosan, shu sistemaga qo'yilgan kuchlar sistemasi, qattiq jismning muvozanat shartlarini qanoatlantirishi lozim. Lekin bu shartlar faqat zaruriy bo'ladi xolos va ko'p hollarda yetarli bo'lmaydi, shu sababli ular orqali barcha noma'lumlarni aniqlashni iloji bo'lmaydi. Bunday masalalarni yechganimizda qo'shimcha ravishda shu konstruksiyaning birorta yoki bir nechta qismlarining alohida holatdagi muvozanatlik shartidan kelib chiqadigan tenglamalar sistemasi tuzish lozim bo'ladi.

Masalan, uch sharnirli (61 shakl) arkning muvozanatlik shartini tuzganimizda, to'rtta $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{X}_B$ va $\overline{Y}_B$ noma'lumlardan iborat bo'lgan uchta tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Lekin konstruksiyaning birorta qismini, masalan, chap qismini (yoki o'ng qismini) muvozanatlik shartidan kelib chiqadigan shartidan yana qo'shimcha uchta tenglamalar sistemasini tuza olamiz, ammo ularda qo'shimcha ravishda shaklda ko'rsatilmagan yana ikkita $\overline{X}_C, \overline{Y}_C$ noma'lumlar paydo bo'ladi. Shu oltita tenglamalar sistemasini birgalikda yechish orqali oltita noma'lumlarni aniqlash mumkin bo'ladi (24 masalaga qarang).

Masalani yechishning boshqa usulida, konstruksiyani boshidanoq alohida qismlarga ajratib olinadi va har bir qismi uchun alohida muvozanatlik sharti tenglamalari sistemalari tuziladi (24 masalaga qarang). Ammo ichki bog'lanishlarning reaksiya kuchlari, juft ko'rinishda ishtirok etib, ularning modullari o'zaro teng bo'ladi va yo'nalishlari esa qarama-qarshi bo'ladi deb hisoblanadi. n -ta qismdan tashkil topgan konstruksiyaning har bir alohida qismiga tegishlicha bo'lgan tekislikda joylashgan ixtiyoriy kuchlar sistemasi ta'sir qilganligini e'tiborga olgan holda 3n -ta tenglamalar sistemasini tuzish mumkin bo'ladi va ulardan 3n-ta noma'lumlar aniqlaniladi (boshqa kuchlar sistemasida tenglamalar soni boshqacha bo'lishi mumkin). Agarda berilgan konstruksiyadagi bog'lanishlar reaksiyalari soni, tenglamalar sonidan ortiq bo'lsa, u holda bunday konstruksiyalar statik noaniq masalalar deb ataladilar (19§ ga q.).

**23 masala.** Gorizontal joylashgan AD va qiya BC bruslardan tashkil topgan kronshteynning D uchiga og'irligi Q=300 N yuk osib qo'yilgan. AD brusning og'irligi $P_1$=150N bo'lib, A uchi bilan sharnir orqali devorga biriktirilgan, og'irligi $P_2$=120 N bo'lgan CB tirgak C nuqtada devorga sharnir orqali mahkamlangan, bir-birlari bilan B nuqtada sharnir orqali biriktirilganlar (barcha o'lchamlar shaklda ko'rsatilgan). AD brus va CB tirgakni bir jinsli deb hisoblab, A va C nuqtalardagi bog'lanishlarning reaksiyalari aniqlansin.



62 shakl.

Yech ish. Avvalo kronshteynning yaxlit holatining muvozanatini olib ko'raylik. Unga quyidagi tashqi kuchlar ta'sir etmoqda: berilgan kuchlar $\overline{P}_1, \overline{P}_2$ va $\overline{Q}$ bog'lanishlarning reaksiyalaridan iborat bo'lgan $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{X}_C, \overline{Y}_C$ kuchlar.

Agar konstruksiyani A va C bog'lanishlardan ozod qilsak, u qattiqligini yo'qotadi, (ya'ni uning qismlari B nuqtadagi sharnir atrofida aylanma harakat qilishlari mumkin). Lekin statikaning qotishlik prinsipiga asosan, ular o'zining muvozanatini saqlaydilar. Shu shartlar asosida quyidagi tenglamalarni tuzamiz,

$$\sum F_{kx} \equiv X_A + X_C = 0,$$

$$\sum F_{ky} \equiv Y_A + Y_C - P_1 - P_2 - Q = 0,$$

$$\sum m_A(\overline{F}_k) \equiv X_C \cdot 4a - Y_C a - P_1 \cdot 2a - P_2 a - Q \cdot 4a = 0$$

Tuzilgan yuqoridagi uchta tenglamalar sistemasida to'rtta $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{X}_C, \overline{Y}_C$ noma'lumlar ishtirok etmoqda.

Bu masalani yechish uchun qo'shimcha ravishda AD brusning muvozanatlik shartini ko'rib chiqamiz (62, b shakl). Unga: $\overline{P}_1, \overline{Q}$ tashqi kuchlar, $\overline{X}_A, \overline{Y}_A$ reaksiya kuchlari va AD brus uchun tashqi bo'lgan $\overline{X}_B, \overline{Y}_B$ reaksiya kuchlaridan iborat kuchlar sistemasi ta'sir etmoqda. Yetishmagan to'rtinchi tenglamaning o'rniga AD brusga qo'yilgan kuchlarning B markazga nisbatan olingan momentlarini yig'indisini nolga tenglab, qo'shimcha tenglama tuzamiz (chunki, bunday tenglamada $\overline{X}_B, \overline{Y}_B$- dan iborat bo'lgan yangi noma'lumlar qatnashmaydi):

$$\sum m_B(\overline{F}_k) \equiv -Y_A \cdot 3a + P_1 a - Qa = 0.$$

Hosil bo'lgan to'rtta tenglamalar sistemasini noma'lum qiymatlarga (oxirgi tenglamadan boshlash kerak) nisbatan yechib, ularni aniqlaymiz,

$$Y_A = (P_1 - Q)/3 = -50N, \qquad Y_C = 2P_1/3 + P_2 + 4Q/3 = 620N,$$

$$X_C = 2P_1/3 + P_2/2 + 4Q/3 = 560N, \qquad X_A = -X_C = -560N$$

Olingan natijalardan ko'rinib turibdiki, $\overline{X}_A$ va $\overline{Y}_A$-larning yo'nalishlari chizmada ko'rsatilganga teskari yo'nalishda bo'lar ekan. Agar B nuqtaning reaksiya kuchini aniqlash zarur bo'lsa, AD brusga ta'sir etuvchi kuchlarni x va y o'qlardagi proeksiyalardan iborat bo'lgan tenglamalar yordamida aniqlaymiz va ular $X_B=-X_A$, $Y_B=P_1+Q-Y_A=500$ N. qiymatlarga teng bo'lar ekan.

Statika masalalarini yechishda muvozanat holati ko'rilayotgan jism uchun barcha tenglamalar sistemasini tuzishning hojati yo'q. Masalan, ayrim reaksiya kuchlarini aniqlash zarur bo'lgan hollarda, tenglamani shunday tuzish lozimki, iloji bo'lsa o'sha tenglamada faqat bitta izlanayotgan noma'lum bo'lishligiga intilish kerak. Masalan, ushbu masalada ham AD brusning muvozanat tenglamasini tuzishda B markazga nisbatan momentlar tenglamasini tanlaganligimiz natijasida faqat bitta noma'lum, ya'ni $\overline{Y}_A$-ishtirok etganligi misol bo'la oladi.

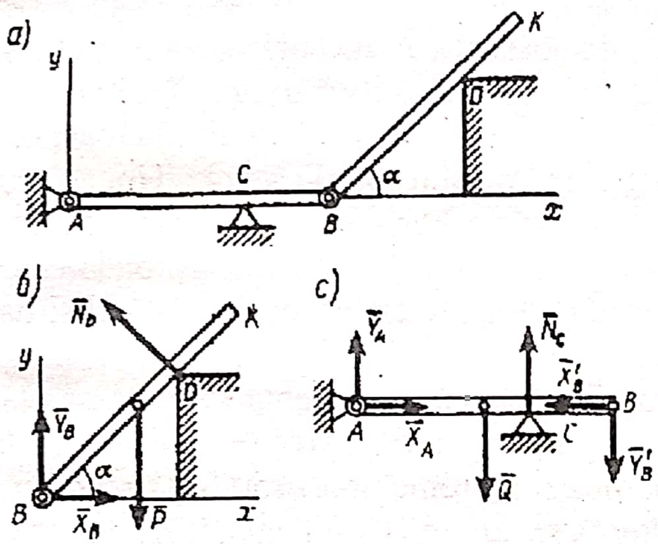
**24 masala.** Og'irligi Q=200N bo'lgan gorizontal holatda joylashgan AB balka, o'zining A uchi bilan devorga sharnir orqali mahkamlangan, C nuqtasi esa uchlik qirraga taya'nib turibdi (63, *a* shakl). Balkaning B uchiga sharnir orqali og'irligi P=400 N bo'lgan BK brus ulangan bo'lib, u D nuqtada to'g'ri burchakli qirraga tayangan holda muvozanat saqlab turibdi. Bu yerda CB=AB/3, DK=BK/3, burchak $\alpha$=45° ga teng. Balka va brusni bir jinsli deb hisoblab, tayanch reaksiyalari aniqlansin.

Yechish. Konstruksiyani B nuqtadan ikkita qismga, AB balkaga va BK brusga ajratib yuboramiz. BK brusga (63 b shakl) tashqi kuch $\overline{P}$ va bog'lanishlarning reaksiya kuchlari, $\overline{X}_B, \overline{Y}_B$ lar ta'sir etmoqda. BK=$a$ belgilash kiritib, brus uchun (29) formulaga asosan muvozanat tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$\sum F_{kx} = X_B - N_D \sin\alpha = 0,$$
$$\sum F_{ky} = Y_B - P + N_D \cos\alpha = 0,$$
$$\sum m_B(\overline{F}_k) = N_D \cdot 2a/3 - P(a/2)\cos\alpha = 0.$$

Ushbu tenglamalarni noma'lum qiymatlarga nisbatan yechib, quyidagilarni aniqlaymiz:

$$N_D = (3P/4)\cos\alpha = 212N,$$
$$X_B = (3P/8)\sin 2\alpha = 150N,$$
$$Y_B = P - (3P/4)\cos^2\alpha = 250N.$$



63 shakl.

AB balkaga: og'irlik kuchi - $\overline{Q}$, tashqi bog'lanishlarning $\overline{N}_C, \overline{X}_A, \overline{Y}_A$ reaksiya kuchlari va B nuqtadagi sharnir orqali uzatiladigan BK brusning $\overline{X}'_B, \overline{Y}'_B$ bosim kuchlari ta'sir etadi (63, b shakl). Ta'sir va aks ta'sir haqidagi qonun (aksioma)ga asosan $\overline{X}'_B, \overline{Y}'_B$ kuchlar $\overline{X}_B, \overline{Y}_B$ kuchlarga qarama-qarshi yo'nalgan bo'lib, ularning modullari o'zaro teng bo'ladi, ya'ni $X'_B=X_B$, $Y'_B=Y_B$ bo'ladi.

AB=b belgilash kiritib, balkaga ta'sir etayotgan kuchlar sistemasi uchun (30) formulaga asosan muvozanat tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$\sum F_{kx} = X_A - X'_B = 0,$$
$$\sum m_A(\overline{F}_k) = -bY'_B + N_C \cdot 2b/3 - Q \cdot b/2 = 0,$$
$$\sum m_C(\overline{F}_k) = -Y_A \cdot 2b/3 + Q \cdot b/6 - Y'_B \cdot b/3 = 0.$$

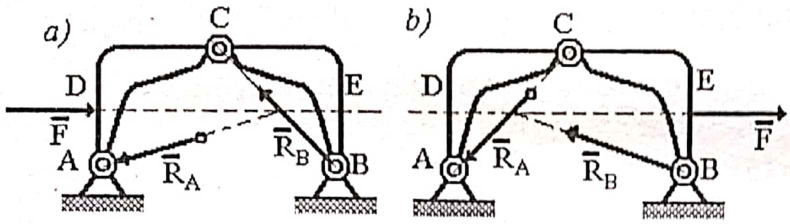
Ushbu tenglamalardagi $X'_B=X_B$, $Y'_B=Y_B$ qiymatlarni e'tiborga olib, ularni noma'lumlarga nisbatan yechsak,

$$X_A = X_B = 150N,$$
$$Y_A = Q/4 - Y_B/2 = -75N,$$
$$N_C = 3Q/4 + 3Y_B/2 = 525N.$$

Olingan natijalar shuni ko'rsatib turibdiki, $\overline{Y}_A$ dan tashqari barcha reaksiya kuchlari to'g'ri yo'naltirilgan, $\overline{Y}_A$-ning reaksiyasi pastga yo'nalishi lozim ekan (63 shakl).

Statika masalalarini yechishda: agar bitta jismning boshqa jismga bosimi $\overline{R}$ yoki uning tashkil etuvchi, $\overline{X}, \overline{Y}$-kuchlari orqali tasvirlangan bo'lsa, ta'sir va aks ta'sir qonuniga asosan, ikkinchi jismning birinchi jismga aks ta'siri ham o'z navbatida $\overline{R}'$ yoki uning tashkil etuvchilari ham $\overline{Y}'$ va $\overline{X}'$ bilan belgilanib, yo'nalishlari esa ta'sir kuchlarga qarama-qarshi yo'nalishlarda belgilanishlari lozim. (Ularning modullari esa o'zaro teng, ya'ni R=R', X=X', Y=Y' bo'ladilar).

**25 masala.** Uch sharnirli arkaga (64, *a* shakl) gorizontal yo'nalishda bo'lgan $\overline{F}$ kuchi ta'sir etmoqda. A va B tayanchlardagi reaksiyalarni aniqlashda $\overline{F}$ kuchni o'z ta'sir chizig'i bo'ylab E nuqtaga ko'chirish mumkin emasligi isbotlansin.



64 shakl.

Yechish. Arkni tashqi bog'lanishlardan (A va B tayanchlardan) ozod qilinganda, shaklan o'zgaruvchan konstruksiya hosil bo'ladi, shu sababli uni absolyut qattiq jism deb qabul qilish mumkin emas. Demak, A va B tayanchlarning reaksiyalarini aniqlashda, $\overline{F}$ kuchni E nuqtaga ko'chirish mumkin emas, chunki E nuqta konstruksiyaning boshqa qismiga tegishlidir.

Bunday cheklanishning o'rinli ekanligini isbotlash uchun, ushbu masalani yechish lozim bo'ladi. Avvalo, arkning o'ng yarmini olib ko'ramiz. Unga faqat ikkita, B va C sharnirlardagi $\overline{R}_B$ va $\overline{R}_C$ reaksiya kuchlari ta'sir etmoqda ($\overline{R}_C$-kuch shaklda tasvirlanmagan). Muvozanat holatda bo'lishi uchun ushbu kuchlar bitta to'g'ri chiziqda (ya'ni BC chiziqda) yotib qarama-qarshi yo'nalishda, bo'lishlari kerak. Shu sababli $\overline{R}_B$ -kuchi ham BC chiziqda yotishi kerak.

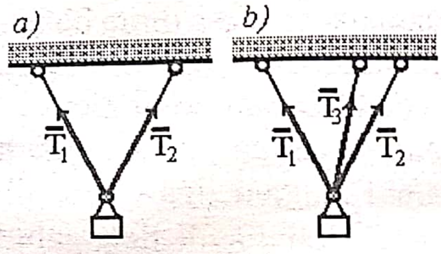
Endi arkni butunicha olib ko'raylik. Arkaga jami uchta kuch ta'sir etar ekan: berilgan kuch $\overline{F}$, tayanch reaksiyasi $\overline{R}_B$ (uning yo'nalishini yuqorida aniqladik) va $\overline{R}_A$ kuchi. Uch kuch haqidagi teoremaga asosan (6§) agar jism muvozanatda bo'lsa uchala kuchlarning ta'sir chiziqlari bir nuqtadan o'tishlari shart. Shu sababli $\overline{R}_A$ -kuchning yo'nalishini aniqlash mumkin bo'ladi. $\overline{R}_A$ va $\overline{R}_B$ kuchlarning modullarini kuch uchburchagi orqali aniqlash mumkin.

Agar $\overline{F}$ kuchni E nuqtaga ko'chirib qo'yilsa va yuqoridagi kabi fikr yuritib, kerakli chizmalarni qursak (64, b shakl), ma'lum bo'ladiki, bunday holda A va B tayanchlarning reaksiyalari, ya'ni $\overline{R}_A$ va $\overline{R}_B$ lar ham yo'nalishlari ham, modullari ham mutloq boshqa qiymatlarga ega bo'ladi, demak, $\overline{F}$ kuchni o'z ta'sir chizig'i bo'ylab ko'chirish mumkin emas ekanligi isbotlandi.

## 19§ Statik aniq va statik noaniq jismlar sistemasi

Statika masalalarini yechishda bog'lanishlar reaksiyalari oldindan noma'lum deb hisoblanadi; ularning soni bog'lanishlarning soni va ularning turlariga bog'liq bo'ladi. Shu bog'lanishlar reaksiyalari qatnashgan va ularni aniqlash uchun tuzilgan tenglamalar sistemasi, amalda muvozanatlik sharti tenglamalari deb ataladilar. Lekin statikaning bunday masalalari yechimga ega bo'lishlari uchun, tuzilgan tenglamalarning soni, shu tenglamalarda ishtirok etgan noma'lumlarning soniga teng bo'lishi shart.

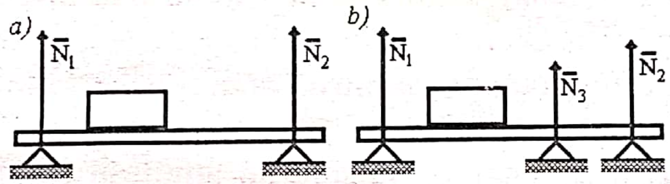
Muvozanat sharti asosida tuzilgan tenglamalar soni bog'lanishlarning noma'lum reaksiyalari soniga to'g'ri kelsa, bunday masalalar statik aniq masalalar deb ataladi, shu shartlarni qanoatlantiradigan konstruksiyalar, qurilmalar sistemasi statik aniq konstruksiyalar, inshootlar va qurilmalar deb ataladi.



65 shakl.

Muvozanat shartlari asosida tuzilgan tenglamalar soni bog'lanishlarning noma'lum reaksiyalari sonidan kam bo'lsa, bunday masalalar statik noaniq masalalar deb ataladi, shu shartlarni qanoatlantirmaydigan konstruksiyalar, qurilmalar sistemasi statik noaniq konstruksiyalar, inshootlar va qurilmalar deb ataladi.

Masalan, ikkita trosga osib qo'yilan yukdan iborat konstruksiya statik aniq hisoblanadi (65, *a* shakl), chunki ikkita bog'lanishlarning noma'lum $T_1$, $T_2$- reaksiyalari, uchrashuvchi kuchlarning muvozanatlik sharti uchun tuzilgan ikkita tenglamaga (12 formulaga) to'g'ri keladi. Bir tekislikda joylashgan uchta trosning bir nuqtada tutashgan nuqtasiga osib qo'yilgan yukdan iborat konstruksiya (65, b shakl) statik noaniq deb ataladi, chunki tekislikda uchrashuvchi kuchlarning muvozanatlik shartining tenglamalar soni (12 formulaga q.)ikkita, bog'lanishlar reaksiyalari soni esa uchta $T_1$, $T_2$, $T_3$. Demak, noma'lumlarni aniqlab bo'lmaydi.

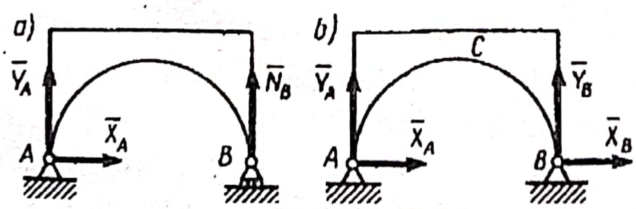


66 shakl.

Xuddi shunga o'xshash masalani ikkita tayanchga o'rnatilgan gorizontal balka misolida ham uchratish mumkin (66,*a* shakl). Agar tayanchlar soni ikkita bo'lsa, reaksiya kuchlari ham ikkita bo'ladi, natijada masala statik aniq hisoblanadi. Agar tayanchlar soni uchta bo'lsa (66, b shakl) unday masala statik noaniq deb ataladi, chunki bunday masalani statika qismida yechib bo'lmaydi.

67, *a* shaklda tasvirlangan arkani olib ko'raylik. Bu konstruksiya bitta qo'zg'almas A va qo'zg'aluvchan (katok-g'ildirak) B tayanchlardan iborat bog'lanishlarga o'rnatilgan. Bunday ark statik aniq hisoblanadi. Chunki bu konstruksiyada jami bo'lib uchta noma'lum $X_A$, $Y_A$, $N_B$ reaksiya kuchlari mavjud bo'lib, ular tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi uchun (29 formula) tuzilgan uchta muvozanat tenglamalari soniga to'g'ri keladi. Agarda B nuqtada ham qo'zg'almas tayanch bo'lsa (67, b shakl), u holda noma'lum reaksiyalar soni to'rtta bo'ladi ($X_A$, $Y_A$, $X_B$, $Y_B$,). Natijada noma'lumlar soni tenglamalar sonidan ortib ketadi va ark statik noaniq bo'lib qoladi.

Lekin 61 shakldagi uch sharnirli ark statik aniq bo'ladi, chunki uni C nuqtada ikki qismga ajratib, jami oltita tenglamalar olishimiz mumkin, ajratilganda yana ikkita noma'lumlar ($X_C$ va $Y_C$) qo'shilib, noma'lumlar soni tenglamalar soniga to'g'ri keladi (har bir



67 shakl

qismi uchun uchtadan tenglama tuzish mumkin). 67, b shakldagi ark uchun bu amallarni bajarib bo'lmaydi. Chunki bu arkani C nuqtadan ikkiga ajratsak, bu nuqtada ikkita reaksiya $\overline{X}_C, \overline{Y}_C$ kuchlari mavjud bo'lib, yana $m_C$ -momentli juft kuch paydo bo'ladi (20§, 26 masalaga qarang). Natijada noma'lum reaksiyalar soni ettita bo'ladi ($X_A$, $Y_A$, $X_B$, $Y_B$, $X_C$, $Y_C$, $m_C$), tenglamalar soni esa oltita bo'lib, bitta noma'lum ortiq holda bo'ladi, ya'ni statik noaniq konstruksiya hisoblanadi.

Statik noaniqlik, ortiqcha bog'lanishlar qo'yilishi orqali sodir bo'ladi. Masalan, 66 shakldagi balkaning muvozanatini saqlash uchun ikkita tayanch yetarli bo'lib, uchinchi tayanchni keragi yo'q (chunki balkani ilgari kelishib olganimizday, absolyut qattiq, egilmaydi, deformasiyalanmaydi deb qabul qilganmiz). Albatta, statik noaniq masalalarning ham yechimi bor, lekin bunday masalalar "Materiallar qarshiligi" fanida ko'rib o'tiladi.

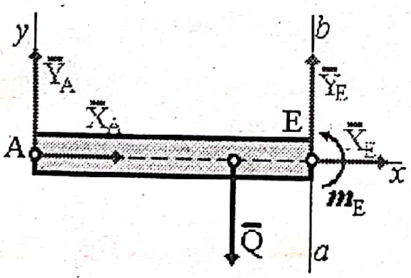
## 20§ Ichki zo'riqishlarni aniqlash

Berilgan konstruksiyaning (balka, arka va b.) ixtiyoriy ko'ndalang kesimidagi zo'riqishi deb, shu konsruksiya qismlarining bir-birlariga nisbatan kesilgan joydagi ta'sir kuchlariga aytiladi. Ichki zo'riqishlarni hisoblash usullari, qo'shma konstruksiyalarning muvozanatlik shartlariga oid bo'lgan masalalarga o'xshaydi. Avvalo jism (konstruksiya)ning butunicha muvozanatlik shartlarini tekshirib ko'ramiz va unga qo'yilgan tashqi bog'lanishlarning reaksiya kuchlarini aniqlaymiz. So'ngra jismni qaysi joyidagi ichki zo'riqishlarini aniqlash zarur bo'lsa, o'sha joydan kesib, jismni ikkiga bo'lib yuboramiz va ulardan birorta qismi uchun muvozanatlik shartlari tenglamalari tuzamiz.

Agar jismga ta'sir etayotgan kuchlar sistemasi tekislikda joylashgan bo'lsa, u holda jismning tashlab yuborilgan qismining ta'sirini kesim bo'yicha tarqalgan tekis kuchlar sistemasi bilan almashtiriladi: bunday kuchlar, jismni qistirib mahkamlangandagi bog'lanishlar (55 shaklga qarang) o'rniga qo'yiladigan reaksiya kuchlari, qiymatlari noma'lum bo'lgan ikkita o'qlar bo'yicha $\overline{X}$, $\overline{Y}$ reaksiyalardan iborat ichki kuchlar va momenti m-ga teng bo'lgan juft kuchlar bilan almashtiriladi. Bunday yechim 26 masalada ko'rib o'tilgan.

**26 masala.** Uzunligi 1 m bo'lgan AB balkaning (63 shakl, 24 masalaga q.) A uchidan AE=0,6 m masofada joylashgan ko'ndalang kesimdagi ichki zo'riqishlar aniqlansin (E nuqta C tayanchning chap tarafida joylashgan).

E ch i sh. Balka uchun tayanch C, hamda A va B sharnirlar tashqi bog'lanishlar hisoblanadi. Shu tashqi bog'lanishlar reaksiyalarining qiymatlari 24 masalada aniqlangan. Balkani ko'rsatilgan joyidan *ab* kesma bilan kesib yuboramiz va uning chap tomonini muvozanatini tekshiramiz (68 shakl). Yuqorida aytilgan qoidaga asosan, tashlab yuborilgan qismning ta'sirini E nuqtaga qo'yilgan ikkita $\overline{X}_E, \overline{Y}_E$ kuchlar va $m_E$



68 shakl.

momentli juft bilan almashtiramiz. Balkaning shu qismiga $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{Q}, \overline{X}_E, \overline{Y}_E$ kuchlar va $m_E$ momentli juft kuch ta'sir etmoqda. (32) formulaga asosan muvozanatlik sharti tenglamalarini yozamiz:

$$\sum F_{kx} = X_A + X_E = 0,$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + Y_E - Q = 0,$$

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = m_E + 0{,}6Y_E - 0{,}5Q = 0.$$

24 masalada aniqlangan Q=200 N, $X_A$=150 N, $Y_A$=-75 N qiymatlarni bu tenglamalarga qo'ysak, $X_E$=-150 N, $Y_E$=275 N, $m_E$=-65 Nm, ekanligini aniqlaymiz.

Shunday qilib, balkaning *ab* kesmadan chap tarafda joylashgan kesimga: 1) $\overline{X}_E$ dan iborat bo'lgan balkani siquvchi kuch; 2) *a*b kesmaning shu kesim yuzasi bo'yicha surishga intilayotgan va balkaga ko'ndalang yo'nalgan $\overline{Y}_E$ - kuch; 3) momenti $m_E$-ga teng bo'lgan va eguvchi moment deb ataladigan juftdan iborat ekan; Oxirgi juft kuch ta'sirida balkaning yuqorigi yuzasida joylashgan tolalar cho'zilmoqda, pastki yuzasidagi tolalar siqilmoqda.

## 21§ Tarqalgan (yoyilgan) kuchlar

Aksariyat injenerlik hisoblash ishlarida birorta yuza bo'ylab ma'lum qonuniyat bo'yicha tarqalgan yuklarni uchratish mumkin. Bir tekislikda joylashgan shunday yuklardan ba'zilarini ko'rib chiqamiz.

Tekislikda tarqalib joylashgan yuklar intensivligi bilan xarakterlanadilar, ya'ni har birlik masofaga tushayotgan kuch bilan xarakterlanadi. Intensivlik Nyutonni (kuchni) masofaga (uzunlikka) bo'lgan nisbati (N/m) bilan o'lchanadi.

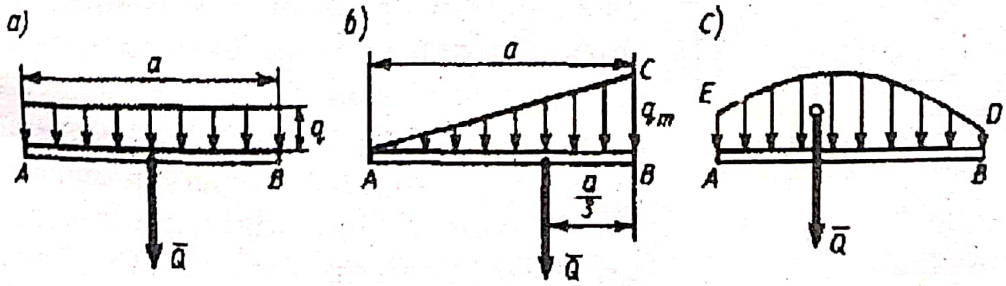
1) *Ma'lum kesmada teng tarqalgan kuchlar*. (69, *a* shakl). Bunday kuchlar sistemasi uchun intensivlik **q** o'zgarmas qiymatga ega bo'ladi. Statik hisoblash ishlarida bunday kuchlar sistemasini teng ta'sir etuvchi Q kuch bilan almashtiriladi.

Bu kuchning modulini

$$Q = a \cdot q \tag{35}$$

formula orqali aniqlanadi va shu Q -kuchni AB kesmaning o'rtasiga qo'yiladi.

2) *Ma'lum kesmada chiziqli qonun bilan tarqalgan o'zgaruvchi kuchlar*. (69, b shakl). Bunga suvning plotina devoriga ko'rsatadigan bosim kuchi misol bo'lishi mumkin. Suvning bosim kuchini maksimumi suvning ostki yuzasida, minimumi (nol qiymati) suvning sathida bo'ladi.

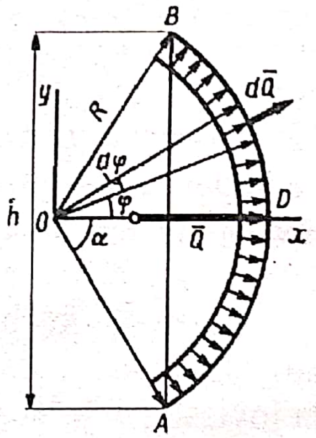



69 shakl

Bunday kuchlar sistemasi uchun intensivlik **q** o'zgaruvchan qiymatga ega bo'lib, noldan maksimumgacha $\mathbf{q_m}$ o'zgaradi. Statik hisoblash ishlarida bunday kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi Q -ning qiymatini, bir jinsli ABC uchburchakli plastinaning og'irlik markazini aniqlash kabi hisoblanadi.

Bu kuch moduli bo'yicha,

$$Q=a\cdot q_m/2 \tag{36}$$



70 shakl.

formula orqali aniqlanib, Q kuch ABC uchburchakning maksimum tomonidan $a/3$ masofada qo'yiladi (§35 2p. ga qaralsin).

3) *Ma'lum kesmada ixtiyoriy qonun bilan tarqalgan o'zgaruvchi kuchlar*. (69, b shakl). Bunday kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi Q kuchning moduli shu ABDE figuraning yuzasiga bog'liq bo'lib, uning ta'sir chizig'i og'irlik markazini kesib o'tadi. (og'irlik markazini qanday qilib aniqlash §33 da ko'rib o'tiladi).

4) *Aylananing yoyi bo'ylab bir xilda tarqalgan kuchlar*. (70 shakl). Bunday kuchlarga tsilindrsimon idishlarga quyilgan suyuqliklarning yon devorlariga ko'rsatadigan gidrostatik bosim kuchi misol bo'la oladi.

Agar yoyning radiusi R va $\angle BOD=\angle AOD=\alpha$ bo'lsin. OD - simmetriya o'qi bo'lib, Ox o'qi shu o'q bo'ylab yo'nalgan bo'lsin. Yoyga ta'sir qilayotgan uchrashuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi $\overline{Q}$, albatta, shu simmetriya o'qi Ox bo'ylab yo'nalgan bo'ladi. Uning moduli $Q=Q_x$.

Teng ta'sir etuvchi Q kuchning son qiymatini aniqlash uchun, yoyda kichkina element tanlab olamiz, uning o'rni $\varphi$ burchak orqali belgilanadi, elementar yuzachaning uzunligi $ds=Rd\varphi$ bo'ladi. Shu elementar yuzachaga ta'sir qilayotgan kuchning miqdori $dQ=qds=qRd\varphi$ -ga teng bo'lib, uning Ox o'qidagi proeksiyasi $dQ_x=dQ\cdot\cos\varphi=qR\cos\varphi\cdot d\varphi$ bo'ladi. $\overline{Q}$ kuchning moduli

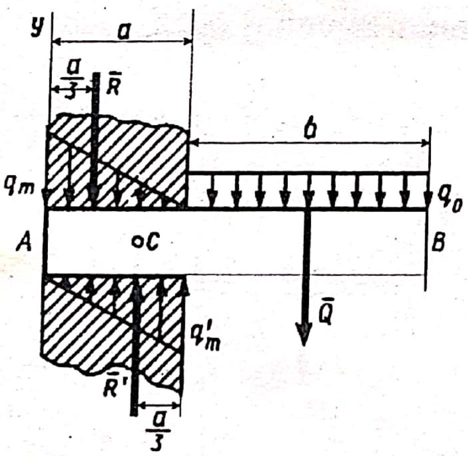
$$Q_x=\int_{-\alpha}^{\alpha} dQ=qR\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi\cdot d\varphi=2qR\sin\alpha$$

70 shakldan ko'rinib turibdiki, $R\sin\alpha=AB/2$ bo'lgani uchun $Q_x=Q$ va

$$Q=qh \tag{37}$$

bu yerda h=AB, AB yoyni tortib turuvchi vatarning uzunligi; q-yukning intensivligi.

**27 masala.** O'lchamlari shaklda ko'rsatilgan AB konsol balkaga intensivli $q_o$ (N/m) bo'lgan teng tarqalgan kuchlar sistemasi ta'sir etadi (71 shakl). Balkaning devorga qistirib mahkamlangan qismiga chiziqli qonun bo'yicha tarqalgan kuchlar ta'sir qiladi. Agar $b=na$ ga teng bo'lsa, balkaning og'irligini hisobga olmagan holda intensivlikning $q_m$ va $q'_m$ maksimal qiymatlari aniqlansin.



71 shakl.

Yechish. Yuqoridagi qoidalarga asosan, tarqalgan kuchlarni, (35) va (36) formulalarga asosan, ularning teng ta'sir etuvchilari $\overline{Q}$, $\overline{R}$ va $\overline{R'}$

bilan almashtiramiz; $Q=q_o b$, $R=0,5aq_m$, $R'=0,5aq'_m$ va (33) formulaga asosan muvozanat tenglamalar sistemasini tuzamiz, chunki balkaga faqat parallel kuchlar sistemasi ta'sir etmoqda

$$\sum F_{ky} = Q + R - R' = 0,$$

$$\sum m_C(\overline{F}_k) = Ra/3 - Q(b/2 + a/3) = 0.$$

Q, R va R' larning son qiymatlarini bu tenglamalarga keltirib qo'ysak va ularni izlanayotgan noma'lumlarga nisbatan yechib, kerakli natijalarni aniqlaymiz,

$$q_m=(3n^2+2n)q_o \quad \text{va} \quad q'_m=(3n^2+4n)q_o$$

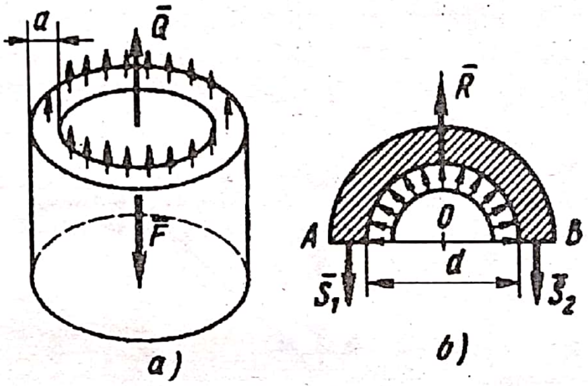
Masalan, agar n=2 bo'lsa, $q_m=16q_o$; $q'_m=20q_o$; agar n=4 bo'lsa $q_m=56q_o$; $q'_m=64q_o$; bo'ladi.

**28 masala.** Balandligi H, ichki diametri d, bo'lgan tsilindrik ballon pH/m² bosim ostidagi gaz bilan to'ldirilgan. Tsilindrsimon ballon devorining qalinligi *a* - ga teng. Ballon devorlarining: 1) uzunasi va 2) ko'ndalang kesimi bo'yicha (kuchlanish - cho'zuvchi kuchni kesimning yuzasiga nisbatidan iborat) ta'sir qiladigan kuchlanishlar aniqlansin.

Yechish. 1) Tsilindrni o'qiga perpendikulyar bo'lgan tekislik bilan kesib, uni ikki qismga ajratib yuboramiz va ulardan birining muvozanatini ko'rib chiqamiz (72, *a* shakl). Bu qismiga tsilindrning o'qi bo'ylab yo'nalgan: ostiga tushayotgan bosim kuchi $F=(\pi d^2/4)\cdot p$ va (tashlab yuborilgan qismining) kesim yuzasi bo'yicha tarqalgan kuchlarning teng ta'sir etuvchisi $\overline{Q}$ - lardan tashkil topgan kuchlar sistemasi ta'sir etadi. Agar muvozanatlik saqlansa $Q=F=p\cdot\pi d^2/4$ bo'ladi.

Tsilindrning ko'ndalang kesim yuzasini taxminan $\pi da$ ga teng deb qabul qilib, cho'zuvchi $\sigma_1$ kuchlanishning qiymatini aniqlaymiz

$$\sigma_1=Q/\pi da=(d/4a)p$$



72 shakl.

2) Endi tsilindrni uning o'qidan o'tuvchi tekislik bilan kesib, ikkita bo'lakka ajratib yuboramiz va uning bitta qismining muvozanatini tekshirib ko'ramiz (shakl 72, b). Kuchlar sistemasi yuqoridagilardan iborat bo'ladi. Tsilindrning yarim qismiga: *a*) yarim aylana yoy bo'yicha intensivligi q=pH dan iborat bo'lgan tarqalgan kuchlar ta'sir etadi; (37) formulaga asosan, ularning teng ta'sir etuvchisi R=qd=pHd bo'ladi; b) kesimlar bo'yicha tarqalgan (tashlab yuborilgan qismining ta'sir) kuchlarining teng ta'sir etuvchilarini $\overline{S}_1$ va $\overline{S}_2$ -lar orqali belgilaymiz, ular simmetrik holda ekanliklari sababli $S_1=S_2=S$ bo'ladi.

Muvozanatlik shartiga asosan $S_1+S_2=R$, bundan S=pHd/2. Tarqalgan kuchlar ta'siridagi kesim yuzasi $a\cdot$H-ga teng bo'lgani uchun (tsilindr asosining kesim yuzasi hisobga olinmagan) cho'zuvchi kuchlar ta'siridagi kuchlanish

$$\sigma_2=S/aH=(d/2a)p$$

Ko'rinib turibdiki, ko'ndalang kesimdagi cho'zuvchi kuchlanishlarning miqdori, bo'yiga bo'lgan kuchlanishlardan ikki marta ortiq bo'lar ekan.

## 22§ Tekis fermalarni hisoblash.

Qo'shma konstruksiyalarning muvozanatlik shartiga oid masalalarga fermalarni hisoblash misol bo'ladi. Bir-birlari bilan sharnirlar yordamida biriktirilgan, to'g'ri chiziqli sterjenlardan tashkil topgan qattiq konstruksiyaga Ferma deb ataladi. Agar fermaning barcha sterjenlari bir tekislikda joylashgan bo'lsa, bunday fermalar tekis fermalar deb ataladi.

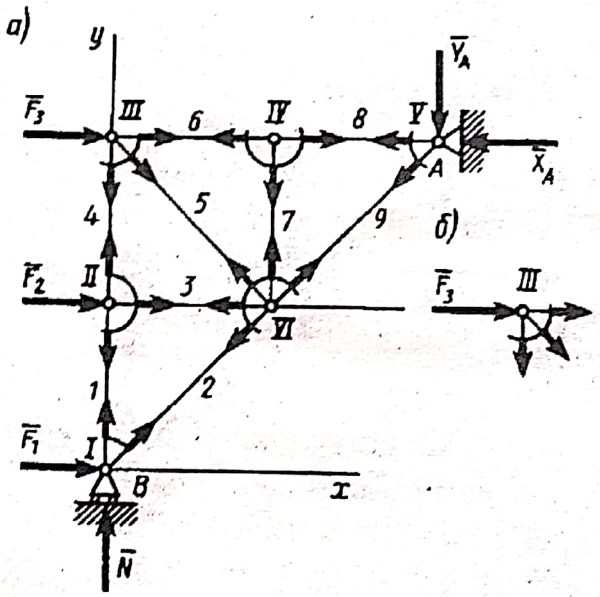
Barcha yuklar va tashqi kuchlar faqat fermaning tugunlariga qo'yilishi shart. Fermani hisoblashda, tugunlardagi ishqalanish kuchlarini va sterjenlarning og'irligini (fermaga qo'yilgan yukka nisbatan kichkina ekanligi sababli) e'tiborga olinmaydi yoki uni tugunlardagi yuklarga qo'shib yuboriladi. U holda har bir sterjenga ularning oxirlariga qo'yilgan ikkita kuchlar ta'sir etadi xolos, agar ular muvozanatda bo'lishsa, bu kuchlar faqat sterjenlar bo'ylab yo'nalgan bo'ladi. Shu sababli aytish mumkinki, sterjenlar faqat cho'zilishga yoki siqilishga ishlaydilar, xolos.

Biz faqat uchburchaklardan tashkil topgan, ortiqcha sterjeni bo'lmagan qattiq tekis fermalarni hisoblash bilan shug'ullanamiz. Bunday fermalardagi sterjenlar soni bilan tugunlar soni orasidagi bog'lanishlik

$$k=2n-3 \tag{38}$$

formula orqali aniqlanadi. Haqiqatdan ham, uchta sterjendan tashkil topgan qattiq (geometrik shakli o'zgarmaydigan) uchburchakdan iborat bo'lgan ferma, ya'ni eng oddiy fermani olib ko'raylik. Unda uchta sterjen va uchta tugun mavjud bo'lib, (38) tenglikni qanoatlantiradi. (masalan, 74 shakldagi ABD uchburchak 1,2.3 dan iborat uchta sterjendan tashkil topgan).

Har bir qo'shimcha tugun qo'shilganda unga qo'shimcha ravishda albatta ikkita sterjen qo'shiladi. (Masalan, 74 shakldagi fermada, C tugun 4,5 sterjenlar orqali biriktirilgan. E tugun 6,7 sterjenlar orqali va shu kabi..); demak, keyingi qo'shiladigan har bir (n-3)tugun uchun, qo'shimcha 2(n-3) ta sterjen qo'shish shart bo'ladi. Natijada fermaning sterjenlari soni $k=3+2(n-3)=2n-3$ bo'ladi. Bundan kam sterjenlar ishtirokidagi ferma qattiq bo'lmaydi, bundan ortiq sterjenga ega bo'lsa, ular statik noaniq fermalar deb ataladi.



73 shakl.

Fermalarni hisoblash, ularga qo'yilgan tayanchlardagi reaksiya kuchlarini aniqlash va ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni aniqlashdan iborat bo'ladi.

Tayanch reaksiyalarini aniqlashda fermani qattiq bir jism deb qabul qilinadi va (17 paragrafga qarang) va statikaning oddiy masalasi kabi yechiladi. Shu sababli, quyida faqat ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni aniqlash bilan shug'ullanamiz.

*Tugunlarni kesish usuli.* Agarda fermaning hamma sterjenlarining zo'riqishlarini aniqlash zarur bo'lgan hollarda, tugunlarni kesish usuli qulay hisoblanadi. Bu usul bilan masalani yechishda, har bir tugun uchun muvozanatlik shartlari tuziladi. Fermalarni hisoblash yo'llarini konkret (aniq bir) misol yordamida bayon qilamiz.

73, *a* shakldagi bir nechta teng yonli uchburchaklardan tashkil topgan ferma sterjenlaridagi zo'riqishlari aniqlansin. Fermaning tugunlariga qo'yilgan kuchlar o'zaro parallel va teng bo'lib, ular $F_1=F_2=F_3=F=20$ kN dan iborat bo'lsin. Ushbu fermada n=6 - ta tugun va k=9 - ta sterjenlar bor. Demak, (38) formula o'rinli bo'lib, statik aniq fermadan iborat ekan. Fermani bitta oddiy yaxlit qattiq jism deb hisoblab, (29) formulaga asosan muvozanat shartlaridan kelib chiqadigan tenglamalar sistemasini yozamiz va ularni tegishli noma'lumlarga nisbatan yechib, ularning son qiymatlarini aniqlaymiz,

$$X_A=3F=60\text{ kN},\quad Y_A=N=3F/2=30\text{ kN}.$$

Endi ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarini aniqlashga o'tamiz. Buning uchun, ferma tugunlarini rim raqamlari bilan, sterjenlarni arab raqamlari bilan belgilab chiqamiz. Izlanayotgan zo'riqishlarni $S_1$ (1 sterjen uchun), $S_2$ (2 sterjen uchun) va shu tarzda davom ettirib belgilaymiz. Xayolan har bir tugunni sterjenlardan kesib-ajratib olamiz. Tashlab yuborilgan sterjenlarni o'rniga, ularning yo'nalishlari bo'yicha $S_1, S_2,\ldots, S_n$ noma'lum zo'riqishlardan iborat bo'lgan kuch vektorlarni yo'naltiramiz.

Hamma zo'riqishlarni tugunlardan boshlab sterjenlar bo'ylab yo'naltirib (73, *a* shakl) chiqamiz. Sterjenlarning zo'riqishlarini bunday yo'naltirilishi ularni cho'zilishga ishlayotgan ekanliklarini ko'rsatadi. (73, *a* shakl. hamma tugunlarni 73, b shaklda III tugun uchun ko'rsatilgandek qilib, alohida chizib olish lozim bo'ladi). Agarda hisoblashlar natijasida birorta sterjenning zo'riqishi manfiy ishorali bo'lsa, o'sha sterjen siqilayotgan ekanligini[14] ko'rsatadi. Sterjenlar bo'yicha yo'nalgan kuchlarni harflar bilan (73 shakl) belgilamaymiz, chunki birinchi sterjen bo'ylab yo'nalgan kuch $S_1$, ikkinchi sterjen bo'ylab yo'nalgan kuch $S_2$ ekanligi yuqorida aytib o'tilgan.

So'ngra har bir tugunning muvozanatlik shartidan kelib chiqadigan (12 formula) tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$\sum F_{kx}=0 \qquad \sum F_{ky}=0$$

Masalani yechishni I tugundan boshlaymiz, chunki bu tugunda faqat ikkita sterjen kesishmoqda, tenglamalar sistemasi ikkita bo'lganligi sababli, har-bir tugundagi noma'lumlar soni ikkitadan oshmasligi lozim.

I tugun uchun muvozanat tenglamalarini quyidagicha tuzamiz:

$$F_1+S_2\cos 45^0=0 \qquad N+S_1+S_2\sin 45^0=0$$

bu tenglamalardan noma'lumlarning son qiymatlarini aniqlaymiz,

$$S_2=-F\sqrt{2}=-28{,}2\text{kN},\quad S_1=-N-S_2\sqrt{2}/2=-F/2=-10\text{kN}.$$

Endi II tugun uchun muvozanatlik sharti tenglamalar sistemasini yozamiz, chunki $S_1$ -ning son qiymati ma'lum bo'lgani uchun II tugunda faqat 2 ta noma'lum zo'riqish bor, xolos.

[14] Shu sababli, qaysi usulni qo'llanilshidan qat'iy nazar, cho'zilanayotgan kuchlanishlar '+' ishora bilan, siqilanayotgan kuchlanishlar '-' ishora bilan belgilanish qabul qilingan.

$$\sum F_{kx} = S_3 + F_2 = 0 \qquad \sum F_{ky} = S_4 - S_1 = 0$$

ushbu tenglamalardan $S_3$ va $S_4$ noma'lum zo'riqishlarning qiymatlarini aniqlaymiz

$$S_3=-F_2=-20kN; \quad S_4=S_1=-10kN;$$

$S_4$ -zo'riqishning qiymati aniqlanganligi sababli III tugunning muvozanat tenglamalarini tuzamiz

$$\sum F_{kx} = S_6 + F_3 + S_5 \cos 45^0 = 0 \qquad \sum F_{ky} = -S_4 - S_5 \sin 45^0 = 0$$

bu tenglamalar orqali, $S_5$ va $S_6$ zo'riqishlarni aniqlaymiz

$$S_5 = -S_4\sqrt{2} = 14,1kN, \quad S_6 = S_8 = -30kN,$$

shu kabi davom ettirib, IV tugunning muvozanat tenglamasini tuzamiz va undan $S_7$ va $S_8$ zo'riqishlarni aniqlaymiz, ya'ni $S_7=0$; $S_8=-30$ kN;

Eng so'ngida $S_9$ -zo'riqishni aniqlash uchun, B - tugunning muvozanatlik sharti tenglamasidan birini, ya'ni By o'qiga proeksiyasini tuzamiz

$$Y_A + S_9 \cos 45^o = 0 \quad \text{bundan} \quad S_9 = -30\sqrt{2} = -42,3kN;$$

B tugun uchun ikkinchi tenglamaning zaruriyati yo'q, chunki hamma noma'lumlar aniqlandi, lekin yechimni tekshirish uchun, uni tuzish mumkin. Xuddi shu kabi VI tugun uchun ham muvozanat shartlaridan kelib chiqadigan tenglamalarni tuzib, yechimni tekshirishimiz mumkin. Demak, uchta ortiqcha tenglama borligini ko'rdik, lekin biz ularni o'rniga ferma uchun tuzilgan muvozanat tenglamalaridan foydalanib, uchta N, $X_A$, $Y_A$ - noma'lumlarni aniqlagan edik.

Aniqlangan zo'riqishlarning qiymatlarini maxsus jadvalga yozib chiqamiz,

| sterjen № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zo‘riqish, kN. | -10 | -28,2 | -20 | -10 | +14,1 | -30 | 0 | -30 | -42,3 |

Natijalar shuni ko'rsatib turibdiki, 5 sterjen cho'zilishga ishlamoqda, 7 sterjenda zo'riqish yo'q (nol sterjen), qolgan sterjenlarning hammasi siqilishga ishlashini aniqladik.

Fermada 7 kabi nol sterjenlarning borligini, masalani yechmasdan ham aniqlash mumkin: agar tashqi kuch qo'yilmagan tugunda faqat uchta sterjenlar tutashib, ulardan ikkitasi bir to'g'ri chiziqda yotsa, uchinchi sterjendagi zo'riqish albatta nolga teng bo'ladi. Bunday bo'lishiga sabab shuki, bir to'g'ri chiziqda joylashgan ikkita sterjenga perpendikulyar bo'lgan o'qqa tuzilgan muvozanat tenglamasidan kelib chiqadi.

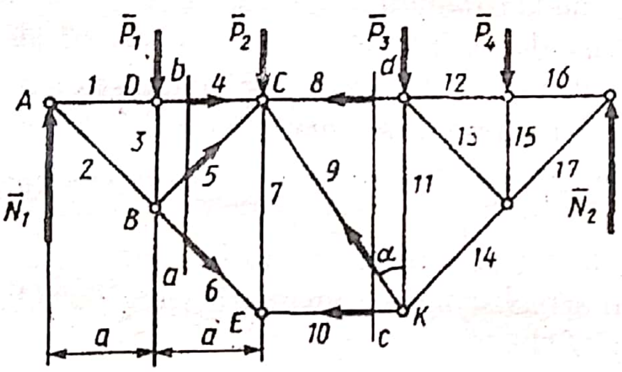
Masalan, 74 shaklda tasvirlangan fermada, agar $\overline{P_4}$ -kuch bo'lmaganda 15 sterjen va o'z navbatida 13 sterjenlar nol sterjenlar bo'lar edi. $\overline{P_4}$ - kuch borligi sababli birorta sterjenning zo'riqishi nolga teng bo'lmaydi. Agar birorta tugunda uchta noma'lum zo'riqishlar uchrasa, bunday hollarda kesimlar usulidan foydalaniladi.

**Kesimlar usuli (Ritter usuli).**

Bu usul orqali asosan fermaning alohida bitta sterjenining zo'riqishini aniqlash kerak bo'lgan hollarda, yoki yechimni tekshirish kerak bo'lgan hollarda qo'llaniladi. Bu usulning mohiyati shundan iboratki, fermani uchta sterjenlar orqali bog'langan joyidan kesib, uni ikki qismga ajratib yuboriladi. Har bir qismining muvozanat shartidan kelib chiqadigan tenglamalar sistemasi tuzilib, kesilgan sterjenlarning ikkitasi (yoki bittasini) noma'lum zo'riqishlarining qiymatlari aniqlanadi.

Tashlab yuborilgan qismining o'rniga kesilgan sterjenlar bo'ylab yo'nalgan kuchlar qo'yiladi, bunday yo'nalishdagi zo'riqishlar kesilgan sterjenlarni (tugunlarni kesish usulidagi kabi) cho'zilayotgan ekanliklarini bildiradi. So'ngra (31) yoki (30) formulalar orqali muvozanatlik tenglamalari tuziladi. Tenglamalarni tuzishda shunga alohida e'tibor berish lozimki, iloji boricha har bir tenglamada faqat bittadan noma'lum bo'lishligiga intilish kerak.

**Misol.** 74 shaklda tasvirlangan fermadagi 6 sterjenning zo'riqishini aniqlash lozim bo'lsin. Fermaga qo'yilgan $P_1=P_2=P_3=P_4=20$ kN tashqi kuchlar o'zaro parallel bo'lib, vertikal holda yo'nalgan bo'lsinlar va tayanchlardagi reaksiya kuchlari $N_1=N_2=40$ kN ga teng bo'lsin. Fermani 4,5,6 sterjenlarini kesib o'tuvchi *ab* kesma o'tkazamiz va uning chap qismini qoldirib, o'ng qismini tashlab yuboramiz. Tashlab yuborilgan qismi o'rniga kesilgan 4,5 va 6 sterjenlar bo'ylab yo'nalgan zo'riqishlarni qo'yamiz, hamda shu chap qismining muvozanat shartidan kelib chiqadigan tenglamalar sistemasini tuzamiz. 6 sterjenning zo'riqishini aniqlash uchun 4 va 5 sterjenlarning uchrashadigan C nuqtaga nisbatan momentlar tenglamasini tuzamiz. AD=DC=$a$ va BC⊥BE ekanligini e'tiborga olsak,




74 shakl

$$-N_1 \cdot 2a + P_1 \cdot a + S_6 \cdot CB = 0$$

bundan $S_6$ ning son qiymatini aniqlaymiz. CB yelkaning qiymatini sterjenlarning o'lchamlaridan kelib chiqadigan tengliklar orqali aniqlaymiz.

Ushbu misolda ∠ABC=90° va

$$CB = a\sqrt{2}; \ S_6 = 30\sqrt{2} = 42{,}3kN;$$

demak, 6 sterjen 42,3 kN kuch ta'sirida cho'zilmoqda.

5 va 6 sterjenlardagi zo'riqishlarning qiymatlarini aniqlash uchun, B markazga (5 va 6 sterjenlarning uchrashuvchi nuqtasi) nisbatan va A markazga (4 va 6 sterjenlarning uchrashuvchi nuqtasi) nisbatan momentlar tenglamasini tuzish lozim bo'ladi.

9 sterjenning zo'riqishini aniqlash uchun, 8, 9, 10 sterjenlarni kesib o'tuvchi *dc* kesmasini o'tkazamiz va fermaning o'ng tomoni uchun muvozanat shartlaridan kelib chiqadigan tenglamalar sistemasini tuzamiz Buning uchun 8 va 10 sterjenlarga perpendikulyar bo'lgan o'qqa, kuchlar proeksiyalarining muvozanat tenglamasini tuzamiz,

$$S_9\cos\alpha - P_3 - P_4 + N_2 = 0$$

bu tenglamadan $S_9$ ni aniqlaymiz. 8 va 10 sterjenlarning zo'riqishlarini aniqlash uchun, K va C nuqtalarga nisbatan momentlar tenglamasini tuzish lozim bo'ladi.

# VI BOB
# ISHQALANISH

## 23§ Sirpanib ishqalanish qonunlari

Tajribalardan shu narsa aniqlandiki, bir jismning sirti bo'ylab ikkinchi jismni sirpantirsak, sirpanuvchi yuzalar orasida sirpanish yo'nalishiga teskari bo'lgan qarshilik kuchlari paydo bo'lar ekan, bog'lanishning bunday reaksiya kuchini sirpanib ishqalanish kuchi deb ataladi.

Ishqalanish kuchining paydo bo'lishiga asosiy sabablardan biri, ishqalanuvchi sirtlarning g'adir-budurligi bo'lsa, ikkinchisi sirpanuvchi yuzalarning bir-birlariga yopishqoqligi bo'ladi. Ishqalanish hodisasi, umuman olganda murakkab fiziko-mexanik muammolardan biri hisoblanib, ularning mukammal nazariyasini nazariy mexanika fanidan tashqari, alohida o'rganiladi.

Injenerlik hisoblash ishlarida, asosan tajribalar orqali aniqlangan qonuniyatlar asosida hisoblash ishlari olib boriladi va ular yordamida yetarli darajadagi aniqlikda yechimlar olish mumkin. Muvozanat holatdagi ishqalanishning qonuniyatlari, quyidagicha ta'riflanadi:

1. Bir jismni ikkinchi jismning sirti ustida surib harakatlantirmoqchi bo'lsak, ishqalanish kuchi (yoki yopishqoqlik kuchi) paydo bo'ladi, uning qiymati noldan boshlab, chegaraviy ishqalanish kuchi $F_{cheg}$ miqdorigacha o'zgarib borishi mumkin.

Paydo bo'lgan ishqalanish kuchining yo'nalishi doimo harakat yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda bo'ladi.

2. Chegaraviy ishqalanish kuchining son qiymati statik ishqalanish koeffitsientning normal bosimga yoki normal reaksiyaga ko'paytmasiga teng bo'ladi:

$$F_{cheg}=f_0 N \qquad (39)$$

Statik ishqalanish koeffitsienti-$f_0$, o'lchovsiz qiymat; uning qiymati tajribalar orqali aniqlanadi va u sirpanuvchi jismlarning materialiga, hamda ularning sirtlarining holatiga (ishlanish xarakteriga, temperaturasiga, namligiga va h.k.) bog'liq bo'ladi.

3. Chegaraviy ishqalanish kuchining miqdori ishqalanuvchi sirtlarning yuzalarini katta-kichikligiga unchalik bog'liq emas.

Yuqoridagi ikki qonuniyatdan shuni aniqlaymizki, agar sirpanuvchi jismlar siljimagan bo'lsa, ishqalanish kuchining miqdori chegaraviy qiymatdan kichkina ekan, ya'ni

$$F \le F_{cheg} \text{ yoki } F \le f_0 N \qquad (40)$$

Shuni ta'kidlash lozimki, harakat boshlanmasdan oldingi ishqalanish kuchi (40) tengsizlik orqali aniqlanib, uning qiymati noldan boshlab to $F_{cheg}$ qiymatgacha har qanday sondan iborat bo'lishi mumkin. Uning aniq qiymatini (25§ dagi) tegishli masalani yechish orqali hisoblanadi. Chegaraviy ishqalanish kuchi paydo bo'lgandan keyin, ozgina kuch ham uni muvozantdan chiqarib yuboradi va sirpanma harakat boshlanadi. Chegaraviy ishqalanish kuchi $F_{cheg}$ ta'siridagi muvozanat holat, chegaraviy muvozanat deb ataladi.

Quyida ba'zi materiallardan tayyorlangan sirtlar uchun ishqalanish koeffitsientining $f_0$ qiymatlarini keltiramiz: yog'och bilan yog'och sirt uchun 0,4 - 0,7; metall sirt bilan metall sirt uchun 0,15 - 0,25; po'lat muzning ustida sirpansa 0,027.

Bu haqdagi mukammal ma'lumotlarni maxsus spravochniklardan aniqlash mumkin.

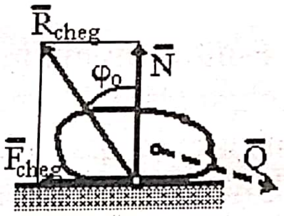
Yuqorida aytilgan qoidalar faqat muvozanat holati saqlangandagi ishqalanishga o'rinli xolos. Sirpanib harakatlanish davrida ishqalanish kuchi, har doim harakatga teskari tomonga yo'nalgan bo'lib, uning miqdori dinamik ishqalanish koeffitsientini normal bosimga[15] ko'paytmasiga teng, yani

$$F=fN$$

Dinamik ishqalanish koeffitsienti - $f$, ham o'lchovsiz qiymat bo'lib, uning miqdori tajribalar orqali aniqlanadi. Dinamik ishqalanish koeffitsienti - $f$ning son qiymati, nafaqat ishqalanuvchi yuzalarning materialiga, silliqligiga bog'liq, u sirpanish tezligiga ham bog'liq bo'ladi. Ko'p hollarda tezlik ortgan sari - $f$ ning qiymati sezilarli darajada kamayadi va ma'lum qiymatdan boshlab o'zgarmay qoladi.

## 24§ G'adir-budur yuzali bog'lanishlarning reaksiyalari. Ishqalanish burchagi

Real (g'adir-budur) bog'lanishlarning reaksiyasi ikkita vektorlarning yig'indisidan, ya'ni: normal reaksiya - $\overline{N}$ va unga perpendikulyar ravishda yo'nalgan ishqalanish kuchi - $\overline{F}$ lardan iborat bo'ladi. Shu sababli real bog'lanishlarning to'liq reaksiyasi - $\overline{R}$, yuzaning normalidan ma'lum burchak ostida yo'nalgan bo'ladi.



75 shakl

Ishqalanish kuchining qiymati noldan to $F_{cheg}$ (chegaraviy qiymat)gacha o'zgarganda, to'liq reaksiya vektori ham $\overline{N}$-dan to $\overline{R}_{cheg}$ qiymatigacha o'zgaradi va uning normal bilan tashkil qilgan burchagi ham tegishli chegaraviy - $\varphi_o$ qiymatgacha ortib boradi (75 shakl). $\varphi_o$-ning eng katta chegaraviy qiymati, ya'ni g'adir-budur sirt reaksiyasi bilan yuzaning normali orasidagi burchagi ishqalanish burchagi deb ataladi.

Shakldan ko'rinib turibdiki,

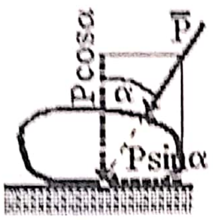
$$tg\varphi_o=F_{cheg}/N$$

Lekin $F_{cheg}=f_0N$ bo'lgani uchun, ishqalanish koeffisienti bilan, ishqalanish burchagi orasidagi bog'liqligini aniqlaymiz:

$$tg\varphi_o=f_0 \qquad (41)$$

Muvozanat holatda sirtning to'liq reaksiya kuchi $\overline{R}$, suruvchi (qo zg'atuvchi) tashqi kuchning miqdoriga bog'liq ravishda shu burchakr ing ichida turli qiymatlarni qabul qilishi mumkin. Muvozanat holati chegaraviy qiymatga yetganda, to'liq reaksiya kuchi normal bilan $\varphi_o$ burchakni tashkil etadi (75 shakl).

[15] Quruq ishqalanish uchun (39), (40) formulalar kabi o'rinli hsioblanadi. Agar ishqalanuvchi jism sirtlarining orasida suyuq moy bo'lsa, bunday masalalar yog'lashning gidrodinamik nazariyasi fanida maxsus holda ko'rib o'tiladi.



76 shakl

Agar jismni g'adir-budur yuzaga qo'yib, unga normal bilan $\alpha$ burchak tashkil qiluvchi $\overline{P}$-kuch bilan ta'sir qilsak (76 shakl), jism siljimasligi ham mumkin. Uning siljishi uchun suruvchi kuchning harakat o'qidagi proeksiyasi - Psinα chegaraviy ishqalanish kuchi $F_{cheg}=f_0 P\cos\alpha$ dan katta bo'lishligi shart (bu yerda $N=P\cos\alpha$ va og'irlik kuchi e'tiborga olinmagan).

Lekin $P\sin\alpha > f_0 P\cos\alpha$ tengsizlik qanoatlanishi uchun, ($f_0=tg\varphi_0$ ekanligini e'tiborga olcak) $tg\alpha > tg\varphi_0$ bo'lishi kerak, yani $\alpha>\varphi_0$. Demak, agar $\alpha<\varphi_0$ bo'lsa, jismga ta'sir etuvchi kuch qanday katta bo'lishidan qat'iy nazar u sirpanmas ekan. Shu sababli, jismlarning o'z-o'zidan tormozlanib, yoki tiqilib qolish hodisalari sodir bo'ladi.

## 25§ Ishqalanish kuchi ta'siridagi muvozanatlik

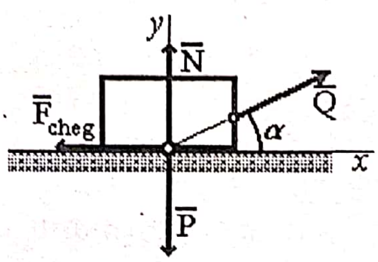
Ishqalanish kuchi ta'siridagi jismlarning muvozanatlik shartini tekshirishda barcha ishqalanish kuchlarni chegaraviy qiymati $F_{cheg}$ bo'yicha qabul qilinadi.

Masalalar analitik usulda yechilganda, g'adir-budur yuzali bog'lanishlarning reaksiyasini ikkita tashkil etuvchi $\overline{N}$ va $\overline{R}_{cheg}$ lardan iborat deb hisoblanadi. So'ngra statikaning oddiy masalalari kabi muvozanat tenglamalari tuziladi va bu tenglamalarga qo'shimcha ravishda $F_{cheg}=f_0 N$ (39) tenglama qo'shiladi. Hosil bo'lgan tenglamalar sistemasidan noma'lum kattaliklar aniqlanadi.

Agar masalada ishqalanish kuchining istalgan qiymatlarida, yani $F< F_{cheg}$ bo'lganda ham muvozanat holatni ta'minlash so'raladigan bo'lsa, unday masalani ham yechish mumkin, buning uchun statik ishqalanish koeffitsienti $f_0$-ni nolga teng qiymatlarda olish lozim[16].

Agarda masalalarning shartlarida ishqalanish kuchi F-ning qiymatini aniqlash lozim bo'lsa, ya'ni muvozanat holati chegaraviy bo'lgandagi F-ning qiymatini ($F\neq F_{cheg}$, 23§ da ko'rsatilgandek, bu F kuchni noma'lumlar qatorida hisoblab) tegishli muvozanat tenglamalari orqali aniqlash mumkin (29 masalaning ikkinchi qismiga va 130§ dagi 151, 152 masalalarga q.).

Agar masala geometrik yo'l bilan yechilsa, g'adir-budur yuzali bog'lanishning reaksiyasini bitta $\overline{R}$ kuchi bilan tasvirlanadi va chegaraviy holatda u normal bilan $\varphi_0$ burchak tashkil qiladi.



77 shakl

**29 masala.** Og'irligi P=10N bo'lgan yuk gorizontal tekislikda yotadi (77 shakl). Agar yukning tekislik ustidagi statik ishqalanish koeffitsienti $f$=0,6 va shu yukka gorizontga α=30° burchak ostida yo'nalgan $\overline{Q}$ kuch qo'yilgan bo'lsa, uni siljitish uchun kerak bo'lgan kuchning son qiymati aniqlansin.

Yechish. Yukning chegaraviy muvozanat holatini tekshiramiz. Chegaraviy muvozanat holatda yukka

---

[16] Haqiqatdan ham, agar muvozanat chegaraviy bo'lsa, ishqalanish kuchi $F=F_{cheg}=f_0 N$. Qolgan barcha muvozanat holatlarda $F<f_0 N$ bo'ladi. shu sababli, har bir shunday holatlarda $F=k\cdot N$-deb hisoblash mumkin, bu yerda $k<f_0$. Agar k=0 (yoki $f_0$=0) bo'lsa, bog'lanish o'ta silliq yoki ideal bo'lgan holatdagi muvozanat sodir bo'ladi.

quyidagi $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{N}$ va $\overline{F}_{cheg}$ kuchlar ta'sir etmoqda, x va y o'qlarga kuchlarni proeksiyalab, muvozanat tenglamalarni tuzamiz:

$$Q\cos\alpha - F_{cheg} = 0$$

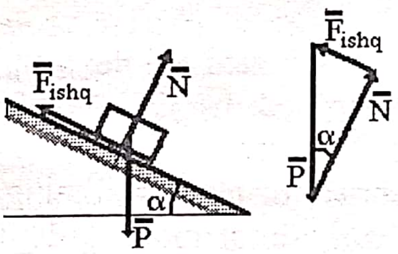
$$N + Q\sin\alpha - P = 0$$

Oxirgi tenglamadan $N=P-Q\sin\alpha$, hamda $F_{cheg}=f_0N=f_0(P-Q\sin\alpha)$ - larni birinchi tenglamaga qo'ysak,

$$Q = \frac{f_0 P}{\cos\alpha + f_0\sin\alpha} \approx 5{,}2N;$$

Agar yukka Q=4 N dan kam bo'lgan kuchni qo'ysak, u holda suruvchi kuchning qiymati $Q'\cos 30^\circ = 2\sqrt{3} = 3{,}46N;$ bo'ladi; chegaraviy ishqalanish kuchining qiymati esa $F_{cheg}=f_0(P-Q'\sin 30^0)=4.8N$ ga teng bo'ladi. Demak, yuk siljimaydi. Hamda yukni muvozanat holatda ushlab turuvchi ishqalanish kuchining miqdori chegaraviy ishqalanish kuchi $\overline{F}_{cheg}$ ga teng bo'lmasdan, birinchi tenglama orqali aniqlanadi ($F=Q\cos 30^0=3{,}46$ N).

Shuni ta'kidlash lozimki, barcha masalalarni yechishda ishqalanish kuchini chegaraviy qiymati orqali, ya'ni $F_{cheg}=f_0N$ formula yordamida aniqlash lozim. Normal bosim N-ning qiymatini normal o'qqa bo'lgan muvozanat tenglamalari orqali aniqlaymiz. Bunday masalalarni yechishda aksariyat xatolik shundan iborat bo'ladiki, ko'pchilik talabalar ishqalanish kuchini $F_{cheg}=f_0P$ deb hisoblaydilar, ya'ni normal bosim bilan og'irlik kuchini aralashtirib yuboradilar, aslida esa har doim ham og'irlik kuchi -P normal bosim N-ga teng bo'lavermaydi.



78 shakl

**30 masala.** Agar statik ishqalanish koeffitsienti $f_0$, gorizont bilan α burchak tashkil etgan bo'lsa, shu qiya tekislik ustida joylashgan yuk, α-burchakning qaysi qiymatlarigacha muvozanatda bo'lishi mumkinligi aniqlansin.

Yechish. Avvalo muvozanat holatdagi qiyalikning α burchagini $\alpha_{cheg}$ chegaraviy qiymatlarini aniqlaymiz. Bu holatda (78 shakl) yukka: og'irlik kuchi $\overline{P}$, normal reaksiya $\overline{P}$ va chegaraviy ishqalanish kuchi $\overline{F}_{cheg}$ ta'sir etadi. Jismga qo'yilgan kuchlardan kuch uchburchagini quramiz va u orqali chegaraviy ishqalanish kuchi $F_{cheg}=Ntg\alpha_{cheg}$ ni aniqlaymiz. Lekin $F_{cheg}=f_0N$ ekanligidan foydalanib

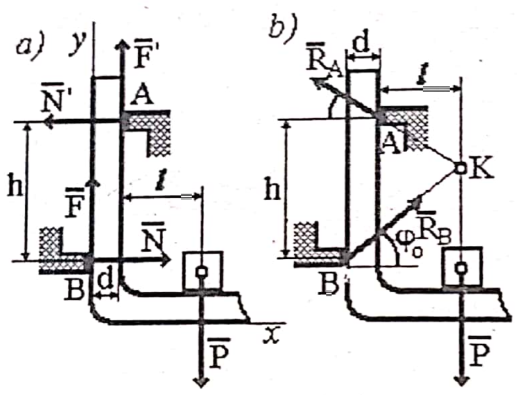
$$tg\alpha=f_0 \qquad (a)$$

-ni aniqlaymiz. Ushbu tenglamadagi ishqalanish koeffitsienti kichraytirilsa, $\alpha_{cheg}$- ham kamayadi. Bundan quyidagi xulosani chiqaramiz: muvozanat holati faqat $\alpha<\alpha_{cheg}$ tengsizlik bajarilguncha davom etadi. Bir so'z bilan aytganda, muvozanatlikni saqlash uchun α burchagining qiymati

$$tg\alpha \le f_0 \text{ bundan } \alpha \le arctg(f_0) \qquad (b)$$

bo'lar ekan.

(41) formula $tg\varphi_o=f_0$ ga asosan, (b) formuladan $\alpha_{cheg}=\varphi_0$ ekanligini aniqlaymiz, ya'ni, yukning muvozanat holatdagi eng katta qiyalik burchagi ishqalanish burchagiga teng bo'lishi shart ekan.



79 shakl

**31 masala.** To'g'ri burchak ostida egilgan brus, o'zining vertikal qismi bilan devorning A va B bo'rtiqlariga tayangan holda muvozanat holatini saqlab turmoqda (79, *a* shakl), bo'rtiq nuqtalar orasidagi masofa AB=h-ga teng. Brusning xususiy og'irligini hisobga olmagan holda, uning gorizontal qismiga qo'yilgan yuk ta'sirida, brusning eni d-ning qanday qiymatlarida u muvozanat holatini saqlab tura olishi aniqlansin. Brus bilan bo'rtiqlar orasidagi ishqalanish koeffitsienti $f_0$ ga teng.

Yechish: Yukning og'irligini P bilan belgilaymiz, uning devorgacha bo'lgan masofasini *l*-harfi bilan belgilaymiz. Brusning chegaraviy muvozanatidagi masofasi $d=d_{cheg}$-ni aniqlaymiz. Brusga $\overline{N}, \overline{P}, \overline{N}, \overline{F}, \overline{N}', \overline{F}'$ -kuchlar ta'sir etmoqda, bu yerda $\overline{F}$, $\overline{F}'$-chegaraviy ishqalanish kuchlari. (29) formulaga asosan va A markazga nisbatan olingan momentlardan iborat bo'lgan tenglamalar sistemasini tuzamiz.

$$N-N'=0;\ F+F'-P=0;\ Nh-Fd_{cheg}-Pl=0$$

bu yerda $F=f_0N$; $F'=f_0N'$;

Birinchi va ikkinchi tenglamalar orqali N=N', $P=2f_0\cdot N$ larni aniqlaymiz. Bularni muvozanat tenglamalarning uchinchisiga keltirib qo'ysak, $h-f_0d_{cheg}-2f_0l=0$ bundan $d_{cheg}=h/f_0-2l$.

Oxirgi javobdagi $f_0$-ning qiymatini nolga tenglashtirib olsak, tenglikning o'ng tomoni cheksizlikka teng bo'ladi. Demak, muvozanat holat faqat $d>d_{cheg}$ bo'lgandagina bo'lar ekan xolos va $d_{cheg}$-ning eng katta qiymatiga $l=0$ bo'lganda erishilar ekan. Demak brus, $d\geq h/f_0$ tengsizlik bajarilganda ($l>0$) yukning ixtiyoriy holatida ham muvozanatda bo'lar ekan. Qanchalik ishqalanish kuchi kichkina bo'lsa, d-shuncha katta bo'lishi kerak ekan. Ishqalanish kuchi yo'q bo'lsa ($f_0=0$) muvozanat holati hech qachon mumkin bo'lmas ekan, chunki $d=\infty$ bo'lishi lozim, bu esa aslo mumkin emas.

Masalaning geometrik yechimini ham ko'rib chiqaylik. Masalani bunday usulda yechishda A va B nuqtalardagi normal reaksiya va ishqalanish kuchlarini geometrik yig'indisini, ya'ni $\overline{R}_A$, $\overline{R}_B$ tegishli nuqtalarga qo'yamiz, ular devorning normali bilan chegaraviy ishqalanish burchagi $\varphi_0$ - ga teng burchak ostida yo'naladi (79, b shakl). U holda brusga faqat uchta $\overline{R}_A$, $\overline{R}_B$, $\overline{P}$ kuchlar ta'sir etadi. Agar brus muvozanatda bo'lsa, bu kuchlarning ta'sir chiziqlari bir nuqtada uchrashishlari shart, bu K nuqtadan iborat bo'lib, u nuqtada $\overline{R}_A$ va $\overline{R}_B$ kuchlarning ta'sir chiziqlari uchrashadilar, demak, yukning og'irlik kuchi $\overline{P}$ ning ta'sir chizig'i ham shu nuqtadan o'tishi shart.

Bundan quyidagi (79, b shakl) tenglikni yozamiz,

$$h=(l+d_{cheg})tg\varphi_0+ltg\varphi_0$$

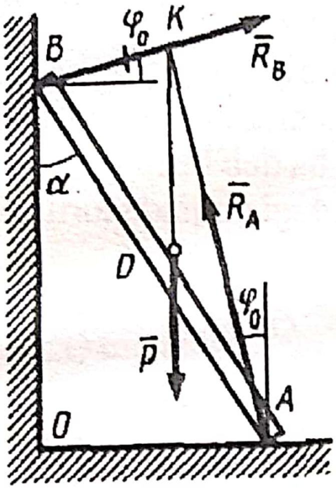
yoki (41) formulaga $tg\varphi_0=f_0$ asosan

$$h=(2l+d_{cheg})f_0$$

bo'ladi. Natijada $d_{cheg}$ ning qiymati, yuqorida aniqlangan yechim bilan bir xil bo'ladi.

Ushbu masala o'z o'zidan tormozlanish hodisasiga misol bo'lishi ko'rinib turibdi.

**32 masala.** AB narvonning og'irligini hisobga olmagan holda, $\alpha$ burchakning qaysi qiymatlarida, uning ustidagi odam narvonning eng yuqori B nuqtasiga ko'tarila olishligi aniqlansin (80 shakl). Narvonning devor va pol sirti orasidagi ishqalanish burchagi $\varphi_0$-ga teng.



80 shakl

Yechish: Narvonning chegaraviy muvozanat holatini aniqlab chiqamiz, buning uchun masalani yechishda geometrik usuldan foydalanamiz. Chegaraviy muvozanat holatda narvonga devor va polning reaksiya kuchlari $\overline{R}_A$ va $\overline{R}_B$ lar va odamning og'irlik kuchi - $\overline{P}$ ta'sir etmoqda. A va B nuqtadagi reaksiya kuchlarining ta'sir chiziqlari A va B nuqtalardagi normal bilan $\varphi_0$ burchak tashkil qilib yo'naladi. Shu ikkala $\overline{R}_A$ va $\overline{R}_B$ vektorlarning ta'sir chiziqlari K nuqtada uchrashadi. Demak, narvon muvozanatda bo'lishi uchun odamning og'irlik kuchi $\overline{P}$ ning ta'sir chizig'i ham shu nuqtani kesib o'tishi shart. Shu sababli odam narvonning shaklda ko'rsatilgan D - nuqtasidan yuqoriga ko'tarila olmaydi. Odam narvonning eng yuqoridagi B nuqtasiga ko'tarila olishligi uchun $\overline{R}_A$ va $\overline{R}_B$ vektorlarning ta'sir chiziqlari BO chiziqda uchrashishlari shart, bu esa $\overline{R}_A$ kuchining ta'sir chizig'i AB narvon bo'ylab yo'nalgandagina sodir bo'ladi, yani burchak $\alpha<\varphi_0$ bo'lishi kerak.

Demak, odam narvonning eng baland nuqtasiga ko'tarilishi uchun, $\alpha$ burchak ishqalanish burchagidan kichik bo'lgan qiymatlardagina sodir bo'lishi mumkin xolos ekan. Devor bilan narvon orasidagi ishqalanish kuchining ahamiyati yo'q ekan, u hatto silliq bo'lsa ham bo'laveradi.

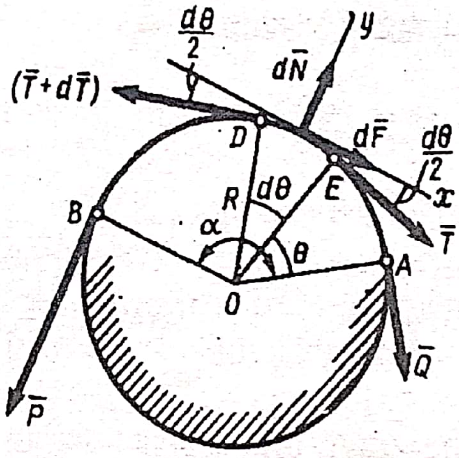
## 26§ Ipning tsilindrik sirt ustidagi ishqalanishi

Tsilindrik valniing sirtiga tashlab qo'yilgan ipning bir uchiga (81 shakl) $\overline{P}$ kuch qo'yilgan. Agar ip bilan tsilindrning sirti orasidagi ishqalanish koeffitsienti $f_0$ bo'lsa, markaziy burchak AOB ga teng bo'lgan yoy sirtidagi ipni muvozanatda ushlab turishi uchun uning ikkinchi uchiga qo'yilishi zarur bo'lgan $\overline{Q}$ kuchning minimal qiymati aniqlansin.

Masalani yechish uchun ipning uzunligi $dl=R\cdot d\theta$ bo'lgan DE elementining muvozanat holatini ko'rib chiqaylik, bu yerda R - valning radiusi. Ipning D va E nuqtalaridagi tortilish kuchlarining farqi dT, ishqalanish kuchi $dF=f_0dN$ (dN-tsilindrik sirtning normal reaksiyasi) hisobiga Q ning eng kichkina qiymatida ip muvozanatda bo'ladi, Demak

$$dT=f_0dN$$

dN-ning qiymatini aniqlash uchun kuchlar sistemasini y - o'qiga




81 shakl.

proeksiyalarini nolga tenglaymiz. Sinusning kichkina qiymatlarida u burchakka teng (ya'ni $\sin d\theta = d\theta$) ekanligini e'tiborga olib, hamda $dT \cdot d\theta = 0$ bo'lganligi uchun quyidagini yozamiz,

$$dN = T\sin(d\theta/2) + (T+dT)\sin(d\theta/2) = 2Td\theta/2 = Td\theta$$

bu qiymatni yuqoridagi tenglamaga qo'ysak,

$$dT = f_0 T d\theta$$

tenglamani ikkala tomonini T - ga bo'lib yuborsak va θ-ning o'zgarishi 0 dan α gacha, T ning o'zgarishi Q dan P gacha deb hisoblab, aniq integral olsak (θ=0 bo'lgandagi nuqtada tortilish kuchi Q, θ=α bo'lganda P bo'ladi):

$$\int_Q^P \frac{dT}{T} = f_0 \int_0^\alpha d\theta \quad \text{bundan} \quad \ln\frac{P}{Q} = f_0\alpha$$

bundan

$$\frac{P}{Q} = e^{f_0\alpha} \quad \text{yoki} \quad Q = Pe^{-f_0\alpha} \qquad (42)$$

bo'ladi. Bundan ko'rinib turibdiki, izlanayotgan Q kuchning son qiymati faqat, ishqalanish koeffitsientiga va markaziy burchakning kattaligiga bog'liq ekan xolos.

Agar ishqalanish yo'q bo'lsa ($f_0$=0), Q=P bo'ladi. Eng muhimi, shu narsa aniqlandiki, ishqalanish koeffitsienti saqlangan holda ipni valga o'rab borib, ya'ni markaziy burchakning qiymatini orttira borib, Q kuchining istalgancha kichkina qiymatidagi muvozanat holatni ta'minlash mumkin ekan, bu haqda 1 jadvalga qarang.

**1-Jadval.** $f_0$=0,5 bo'lganda arqonni yog'och ustunga o'ralgandagi Q/P ning qiymatlari.

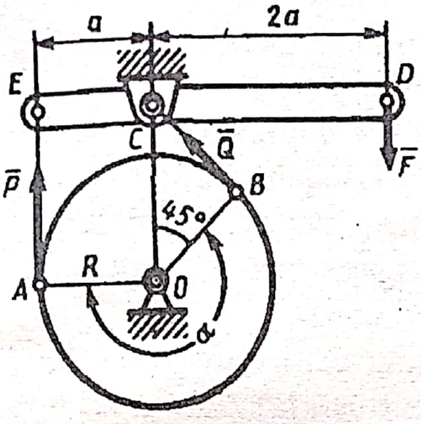
| Aylanishlar soni | α | $Q/P = e^{-f_0\alpha}$ |
|---|---|---|
| 0,5 aylanish.... | π | 0,238 |
| 1 aylanish......... | 2π | 0,043 |
| 1,5 aylanish....... | 3π | 0,009 |
| 2 aylanish....... | 4π | 0,002 |

Masalan, (1 jadval), 1000 N li tortilish kuchini 2N kuch bilan muvozanatlashtirish mumkin ekan, buning uchun arqonni yog'och valning atrofida atigi ikki marta aylantirib o'rab chiqish kifoya ekan.

(42) formula orqali, sirpanmay aylanma harakat qilayotgan tasmali uzatmalarning (yetaklovchi) R va (yetaklanuvchi) Q tomonlaridagi tortilish kuchlarni aniqlash mumkin. Masalan, markaziy burchak α=π bo'lganda, qayishdan iborat bo'lgan tasma cho'yan shkivning sirtida aylanma harakat qilsa, $f_0$=0,3, Q/R ning qiymati

$$\frac{Q}{P} = e^{-0,3\pi} \approx 0,4$$

bo'ladi.




82 shakl.

**33 masala.** Lentali tormozning DE richagiga (82 shakl) $\overline{F}$-kuch qo'yilgan bo'lsin. Agar CD=2CE va lentaning shkivga ishqalanish koeffitsienti $f_0$=0,5 bo'lsa, radiusi R ga teng bo'lgan shkiv qo'yilishi kerak bo'lgan tormozlovchi M momentning qiymati aniqlansin.

Yechish. AB lenta yopishgan shkivning A nuqtasiga P=2F bo'lgan P kuchi va B nuqtasiga (42) formula orqali hisoblangan Q kuchi qo'yilgan bo'lsin. Ushbu masalada $f_0$=0,5 va $\alpha=5\pi/4=3{,}93$ rad. Demak,

$$Q = 2Fe^{-f_0\alpha} = 2Fe^{-\frac{5\pi}{8}} \approx 0{,}28F$$

Izlanayotgan momentning qiymati,

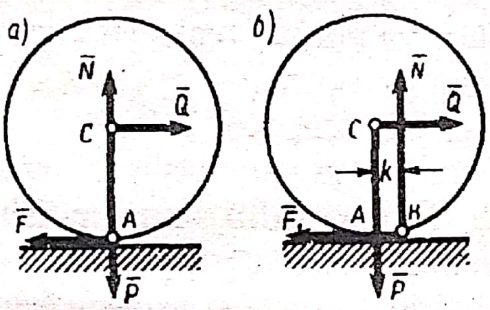
$$M_t=(P-Q)R=1{,}72F\cdot R$$

Qanchalik Q kuchi kichkina bo'lsa va qanchalik ishqalanish koeffitsienti $f_o$ va burchak $\alpha$-katta bo'lsa, shunchalik tormozlash momenti katta bo'ladi.

## 27§ Dumalab ishqalanish

Bir jismning ustida, ikkinchi bir jism dumalab harakatlanishiga qarshi bo'lgan kuch, dumalab ishqalanish qarshilik kuchi deb ataladi.

Radiusi R-ga teng bo'lgan tsilindrik g'ildirak, g'adir-budur gorizontal tekislik ustida to'xtab turgan bo'lsin. G'ildirakning markaziga (83, *a* shakl) $F_{cheg}$ dan kichikroq miqdordagi $\overline{Q}$ kuchni qo'yaylik. U holda A nuqtada son qiymati $\overline{Q}$-ga teng bo'lgan ishqalanish kuchi $\overline{F}$- paydo bo'lib, g'ildirakni tekislik ustida sirpanishiga qarshilik ko'rsatadi. Agar normal reaksiya kuchi - $\overline{N}$ - ni ham A nuqtaga qo'yilgan deb hisoblasak, u kuch og'irlik kuchi P bilan o'zaro muvozanatlashib qoladi. $\overline{Q}$ va $\overline{F}$ kuchlari esa g'ildirakni aylantiruvchi juft kuchlarga aylanib qoladi. shakldan ko'rinib turganidek, bunday holatda har qanday kichkina Q kuch ham g'ildirakni aylantira olishi mumkin bo'ladi.




83 shakl.

Tajribalar shuni ko'rsatdiki, bunday holat aslo ro'y bermas ekan. Buning sababi shundaki, g'ildirak bilan tekislik deformatsiyalanishi oqibatida bir nuqtada emas, balki ma'lum AB yuzacha orqali tutashadilar (83, b shakl). Q kuchning ta'sirida A nuqtadagi bosim kuchi kamayib, B nuqtadagi bosim ortib boradi. Natijada tekislikning reaksiya kuchi N yo'nalishi o'zgarmagan holda u o'ziga parallel ravishda harakat tomonga qarab siljiy boshlaydi.

$\overline{Q}$-ning qiymati ortib borgan sari siljish orta boradi va nihoyat tegishli k - masofaga yetadi va g'ildirak aylana boshlaydi.

Shunday qilib, chegaraviy holatda g'ildirakka ikkita juft kuch ta'sir qiladi, ularning birinchisi $\overline{Q}_{cheg}$, $\overline{F}$ bo'lib uning momenti $R\cdot Q_{cheg}$, ikkinchisi esa muvozanatlovchi $\overline{N}$, $\overline{P}$ juft bo'lib, uning momenti N·k-ga teng. Aylantiruvchi va qarshilik qiluvchi momentlar, chegaraviy holatda o'zaro teng bo'ladi, ya'ni $Q_{cheg}\cdot R=N\cdot k$ yoki

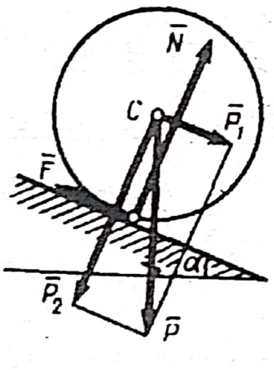
$$Q_{cheg} = kN/R \tag{43}$$

$Q<Q_{cheg}$ qanoatlansa g'ildirak muvozanat holatda bo'ladi; $Q>Q_{cheg}$ bo'lgandan keyin g'ildirak aylana boshlaydi.

(43) formula chiziqli funksiyadan iborat bo'lib, k - dumalab ishqalanish koeffitsienti deb ataladi. Uning o'lchov birligi - sm. Dumalab ishqalanish koeffitsienti dumalovchi sirtlarni materialiga bog'liq bo'lib, uning qiymati tajriba orqali aniqlanadi. Quyida ba'zi-bir ko'p uchraydigan materiallardan tayyorlangan sirtlar uchun dumalab ishqalanish koeffitsientining qiymatlarini (sm-larda.) keltiramiz:

" Yog'och ustida yog'och aylansa..............................................0,05÷0,08
" Yumshoq po'lat po'lat ustida (po'lat g'ildirak rels ustida)...............0,005
" Toblangan po'lat po'lat ustida (sharikli podshipnik)........................0,001

Bu formuladagi k/R nisbat, ko'pchilik materiallar uchun statik ishqalanish koeffitsient $f_0$ - dan bir muncha kichkina bo'ladi. Shu sababli texnikada, iloji bo'lgan hollarda sirpanishni dumalash bilan almashtirishga intiladilar (masalan, g'ildirak, sharik podshipniklar va boshqalar).



84 shakl.

**34 masala.** Agar radiusi R ga teng bo'lgan tsilindrning dumalab ishqalanish koeffitsienti k bo'lsa, u qanday $\alpha$ - burchakli qiya tekislik ustida, dumalanmasdan muvozanat holatini ushlab tura oladi (84 shakl).

Yechish. Avvalo muvozanatning chegaraviy $\alpha=\alpha_1$ qiymatini aniqlaylik. Tsilindrning og'irlik kuchini $\overline{P}$-ni $\overline{P_1}$ va $\overline{P_2}$ tashkil etuvchilarga ajrataylik (84 shakl). U holda suruvchi kuchning qiymati $Q_{cheg}=P_1=P\sin\alpha_1$ va normal reaksiya kuchi $N=P_2=P\cos\alpha_1$ bo'ladi. (43) formulaga asosan,

$$P\sin\alpha_1=(k/R)P\cos\alpha_1 \quad \text{yoki} \quad \mathrm{tg}\,\alpha_1=k/R \text{ bo'ladi.}$$

Dumalab ishqalanish koeffitsientining qiymati nolga yaqinlashgan sari, $\alpha_1$-ning qiymati ham nolga yaqinlashib boradi. Xulosa qilib shuni aytish mumkinki, $\alpha<\alpha_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\alpha$-ning har qanday qiymatlarida muvozanat saqlanib turadi. Olingan natijadagi oxirgi formulaga asosan, har qanday jismning dumalab ishqalanish koeffitsienti $k$-ni burchak $\alpha_1$- orqali aniqlash mumkin.

Eslatma: Agar tsilindrning tekislikka nisbatan sirpanib ishqalanish koeffitsienti $f_0>\mathrm{tg}\,\alpha_1$ (25§ dagi 30 masalaga qarang) bo'lsa, yani $f_0>k/R$ bo'lgan holatda ham muvozanat saqlanishi mumkin. Lekin $f_0<k/R$ bo'lsa, $\alpha=\alpha_1$ bo'lganda tsilindr muvozanatda bo'lmaydi, balki tekislik ustida dumalay boshlaydi.

## VII BOB
## FAZOVIY KUCHLAR SISTEMASI

### 28§ Kuchning o'qqa nisbatan momenti. Bosh vektor va bosh momentni aniqlash.

Yuqoridagi 8§-da kuchning O markazga nisbatan momenti haqida tushuncha berilgan edi. U $\overline{m}_o(\overline{F})$-dan iborat vektor bo'lib (85 shakl), OAB tekislikka perpendikulyar yo'nalgan bo'ladi va uning moduli (13) formula orqali aniqlanadi,

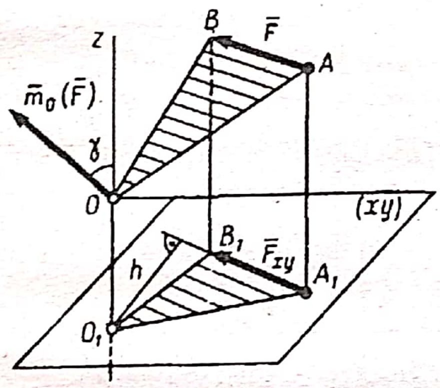
$$\left|\overline{m}_0(\overline{F})\right| = 2 \cdot \Delta S_{OAB}$$

bu yerdagi $S_{\Delta OAB}$ - OAB uchburchakning yuzasi. Biz yuqorida kuchni o'qlarga qanday proeksiyalagan bo'lsak, $\overline{m}_o(\overline{F})$-vektor ham koordinata o'qlariga shu kabi proeksiyalanadi.

$\overline{F}$ kuchning O markazga nisbatan momentining, ya'ni $\overline{m}_o(\overline{F})$-vektorning O markazdan o'tuvchi ixtiyoriy Oz o'qqa proeksiyasi yoki $\overline{F}$ kuchning Oz- o'qqa nisbatan momenti quyidagicha yoziladi,

$$m_z(\overline{F}) = \left|\overline{m}_o(\overline{F})\right|_z \text{ yoki } m_z(\overline{F}) = \left|\overline{m}_o(\overline{F})\right| \cos\gamma \qquad (44)$$

bu yerda $\overline{m}_o(\overline{F})$ - $\overline{F}$ kuchning z - o'qiga nisbatan momenti; γ-Oz o'q bilan $\overline{m}_o(\overline{F})$-vektor orasidagi burchak. Yuqoridagi ta'rifdan kelib chiqadiki, $m_z(\overline{F})$- algebraik kattalik bo'lib, ixtiyoriy vektorning proeksiyasi qanday aniqlansa, uning ishorasi ham shunday aniqlanadi; masalan, 85 shaklda $m_z(\overline{F})>0$;



85 shakl.

$\overline{F}$ kuchning O markazga nisbatan momenti $m_z(\overline{F})$-ning boshqacha ifodasi ham bo'lib, u quyidagicha aniqlanadi. Buning uchun z - o'qning ixtiyoriy O nuqtasidan unga perpendikulyar bo'lgan xy tekislik o'tkazamiz (85 shakl) va OAB uchburchakni shu tekislikka proeksiyalaymiz. Lekin $\overline{m}_o(\overline{F})$-vektor OAB tekislikka perpendikulyar ravishda yo'nalganligi uchun, z - o'qi $O_1A_1B_1$ tekisligiga perpendikulyar yo'nalgan bo'ladi. U holda γ - burchagi ikkala tekisliklarning normallari orasidagi burchak bo'lganligi sababli, shu tekisliklar orasidagi burchakdan iborat ekanligi isbotlandi. Demak, (44) tenglamadan

$$2\cdot\Delta O_1A_1B_1 = 2\cdot\Delta OAB\cdot\cos\gamma = \left|\overline{m}_o(\overline{F})\right| \cos\gamma = m_z(\overline{F})$$

Lekin 85 shakldan ko'rinib turibdiki, $\Delta O_1A_1B_1$ ning $A_1B_1$ tomoni -vektorning xy o'qidagi proeksiyasidan iborat ekan, ya'ni $\overline{F}_{xy}$, (5§ ni qarang). U holda,

$$2\cdot\Delta O_1A_1B_1 = F_{xy}h = \left|m_{01}(\overline{F}_{xy})\right|,$$

bu yerda $-m_{01}(\overline{F}_{xy})$, $\overline{F}_{xy}$-vektorning $O_1$ markazga nisbatan momentning algebraik ifodasi. Yuqoridagilarga asosan (ishoralarni e'tiborga olgan holda), quyidagilarni yozamiz

$$m_z(\overline{F}) = m_{01}(\overline{F}_{xy}), \text{ yoki } m_z(\overline{F}) = \pm F_{xy}h \qquad (45)$$

shunday qilib, $\overline{F}$-kuchining z -o'qiga nisbatan momenti, kuchning z - o'qiga perpendikulyar bo'lgan tekislikdagi proeksiyasini, shu tekislikni kesib o'tgan z-o'qining $O_1$ nuqtasiga nisbatan olingan momentning algebraik qiymatiga teng ekan. Bu ifoda, kuchning o'qqa nisbatan momentining ikkinchi ko'rinishi hisoblanadi.

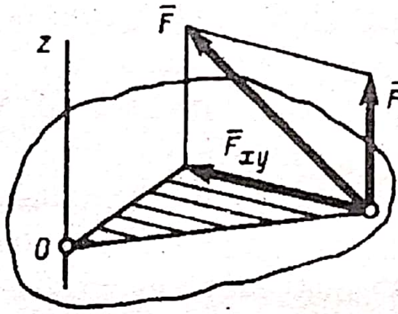
Agar kuchning tekislikdagi proeksiyasi musbat bo'lsa $m_z(\overline{F})>0$ bo'ladi (85 shaklga q, agar $\overline{F}$-kuchning yo'nalishini qarama-qarshi tomonga yo'naltirsak $m_z(\overline{F})<0$ bo'ladi). Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi: agar o'qning musbat uchidan qaraganimizda kuch shu o'q atrofida soat strelkasi yo'nalishiga teskari yo'nalishda bo'lsa, kuchning o'qqa nisbatan momenti musbat bo'ladi, aks holda manfiy bo'ladi.

85 shakldan ko'rinib turibdiki agar O nuqtaning z - o'qidagi o'rnini o'zgartirsak, $\overline{F}$-kuchning O nuqtaga nibatan momentining vektori $\overline{m}_o(\overline{F})$ - o'z yo'nalishini ham, uning son qiymati ham o'zgarib ketadi, lekin $\Delta O_1A_1B_1$-ning yuzasi va $m_z(\overline{F})$ o'zgarmay qolaveradi.

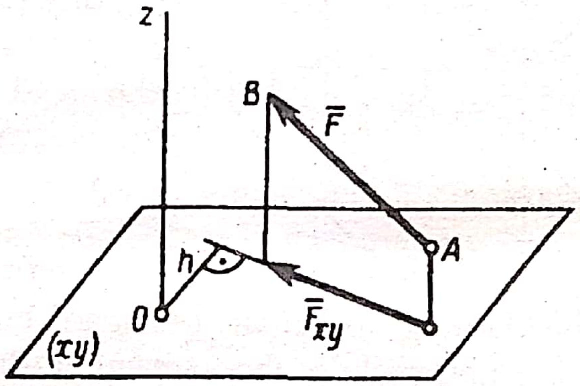
Buning sababi shuki, $m_z(\overline{F})$-qiymat $\overline{F}$-kuchning z - o'qi atrofidagi aylanishidagi samarani belgilaydi. Haqiqatdan ham agar $\overline{F}$-kuchni ikkita tashkil etuvchilarga ajratsak, ya'ni $\overline{F}_{xy}$ va $\overline{F}_z$ - ga ajratsak (86 shakl), u holda faqat $\overline{F}_{xy}$-tashkil etuvchisigina jismni z - o'qi atrofida aylatirishda ishtirok etadi xolos. (45) formulaga asosan uning burishdagi samarasi $m_z(\overline{F})$-qiymat orqali aniqlanadi. $\overline{F}_z$ - dan iborat ikkinchi tashkil etuvchisi, o'q atrofida burashda ishtirok etmaydi (u faqat z -o'qi bo'ylab jismni surishi mumkin xolos).

Kuchni z - o'qiga nisbatan momentini (45) formula orqali hisoblash yo'llarini ko'rib o'tamiz, buning uchun:

1. z - o'qiga perpendikulyar bo'lgan xy tekislik o'tkazamiz (ixtiyoriy joyda);
2. $\overline{F}$-kuchni shu tekislikka proeksiyalab, $\overline{F}_{xy}$- qiymatni aniqlaymiz;
3. o'q bilan tekislikning kesishgan nuqtasidan (87 shaklda O nuqtadan) $\overline{F}_{xy}$-vektorning ta'sir chizig'iga perpendikulyar o'tkazib, uning yelkasi h - ni aniqlaymiz:



86 shakl



87 shakl

4. $\overline{F}_{xy}$ - ning modulini yelkaga ko'paytmasini, ya'ni $F_{xy}\cdot h$ -ni hisoblaymiz;
5. Hisoblangan momentning ishorasini aniqlaymiz;

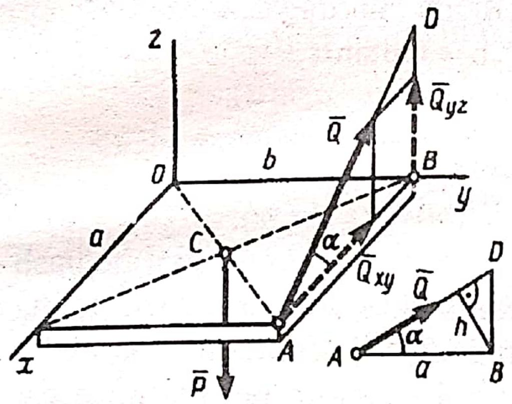
O'qqa nisbatan momentlarni hisoblashda, quyidagi xususiy hollarni ko'rib o'tish lozim bo'ladi:

1) agar kuch o'qqa parallel yo'nalgan bo'lsa, uning shu o'qqa nisbatan momenti nolga teng bo'ladi (chunki $\overline{F}_{xy}=0$);

2) agar kuchning ta'sir chizig'i o'qni kesib o'tsa, uning shu o'qqa nisbatan momenti nolga teng bo'ladi (chunki h=0);

Yuqoridagi 1)va 2) qoidalardan quyidagi xulosa kelib chiqadi: agar kuch va o'q bir tekislikda joylashgan bo'lsa, kuchning shu o'qqa nisbatan momenti nolga teng bo'ladi;

1) Agar kuch o'qqa perpendikulyar bo'lgan tekislikda joylashgan bo'lsa, uni shu o'qqa nisbatan momenti kuchning modulini o'q bilan kuchning ta'sir chizig'i orasidagi eng qisqa masofaga ko'paytmasining tegishli ishorasi bilan olinganiga teng bo'ladi va (45) formula orqali aniqlanib $F_{xy}$ - ni o'rniga F -qo'yiladi.




88 shakl.

**35 masala.** 88 shaklda tasvirlangan gorizontal plitaga ta'sir etayotgan $\overline{P}$ va $\overline{Q}$ kuchlarning x, y va z o'qlarga nisbatan momentlari aniqlansin.

Yechish. $\overline{P}$-kuchi z -o'qiga parallel, ya'ni x va y o'qlarga perpendikulyar bo'lib, ulardan tegishlicha b/2 va $a$/2 masofalarda joylashgan. Tegishli ishoralarni qo'ygan holda, $\overline{P}$-kuchining o'qlarga nisbatan momentlarini yozamiz

$$m_x(\overline{P})=-Pb/2,\ m_y(\overline{P})=Pa/2,\ m_z(\overline{P})=0$$

2. $m_x(\overline{Q})$ - hisoblash uchun $\overline{Q}_{yz}$-kuchni yz - tekislikka proeksiyalaymiz; u holda $Q_{yz}$=Qsinα bo'ladi.

$\overline{Q}_{yz}$-kuchning O nuqtaga nisbatan yelkasi b - ga teng va $x$ o'qning uchidan qaralganda kuch soat strelkasiga qarama-qarshi yo'nalishida bo'ladi; demak $m_x(\overline{Q})$=bQsinα musbat bo'ladi.

Endi $m_y(\overline{Q})$ ni aniqlaymiz. $\overline{Q}$-kuchi y -o'qiga perpendikulyar bo'lgan ABD tekisligida joylashgan bo'lib, B nuqtada kesishadi. Demak $Q_{xz}$=Q bo'ladi. B nuqtadan $\overline{Q}$-kuchining ta'sir chizig'iga perpendikulyar o'tkazib (88 shaklning o'ng tomonidagi qo'shimcha chizmaga qarang), kuchni Oy o'qqa nisbatan yelkasi h=$a$sinα ekanligini aniqlaymiz. Vektorning aylanish yo'nalishini e'tiborga olgan holda,

$$m_y(\overline{Q})=-Qh=-Qa\sin\alpha$$

aniqlaymiz.

$\overline{Q}$-kuchning z -o'qiga bo'lgan momenti $m_z(\overline{Q})$-ni aniqlash uchun, uni xy tekisligiga proeksiyalaymiz va $Q_{xy}$=Qcosα -ni hisoblaymiz.Uning O nuqtaga nisbatan elkasi b -ga teng bo'lgani uchun, momentning ishorasini e'tiborga olib

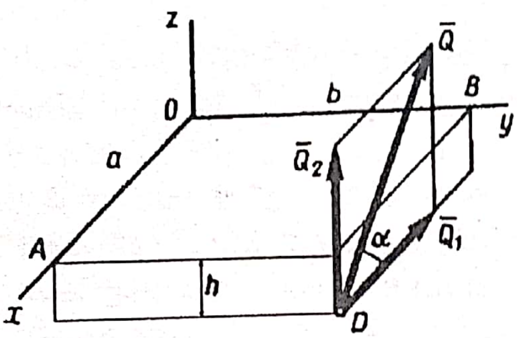
$$m_z(\overline{Q})=bQ\cos\alpha$$

ekanligini aniqlaymiz.

*O'qqa nisbatan kuch momenti uchun Varin'on teoremasi.* Agarda 23§ -dagi (24) vektor tenglikning ikkala qismini O nuqtadan o'tuvchi birorta z o'qiga proeksiyalasak, (44) formulaga asosan,

$$m_z(\overline{R})=\sum m_z(\overline{F}_k) \qquad (46)$$

ekanligini isbot qilamiz. Demak, teng ta'sir etuvchi vektorning momenti haqidagi Varin'on teoremasi, ixtiyoriy o'qqa nisbatan olingan momentlar uchun ham o'rinli ekan. Ushbu teorema koordinata o'qlariga nisbatan momentlar olishda yaxshi qulayliklar beradi, bu holda kuchlarni o'qlarga proeksiyalarini aniqlab so'ngra ularni o'qlarga nisbatan momentlarining yig'indilari olinadi.




89 shakl.

**36 masala.** Plitaning D nuqtasiga qo'yilgan $\overline{Q}$-kuchning x, y va z -o'qlarga nisbatan momentlari aniqlansin (89 shakl). OA=$a$, OB=b, plitaning qalinligi -h; α- bo'rchak ma'lum bo'lsin;

Yechish: $\overline{Q}$-kuchni x va z o'qlarga parallel bo'lgan $\overline{Q_1}$ va $\overline{Q_2}$ lardan iborat ikkita tashkil etuvchilarga ajratib yuboramiz. Ularning modullari $Q_1$=Qcosα va $Q_2$=Qsinα, va Varin'on teoremasini qo'llab, ularning momentlarini yozamiz,

$$m_x(\overline{Q}) = m_x(\overline{Q}_1) + m_x(\overline{Q}_2) = Q_2 b = Qb\sin\alpha,$$

$$m_y(Q) = m_y(Q_1) + m_y(Q_2) = Q_1 h - Q_2 a = Q(h\cos\alpha - a\sin\alpha),$$

$$m_z(Q) = m_z(Q_1) + m_z(Q_2) = Q_1 b = Qb\cos\alpha$$

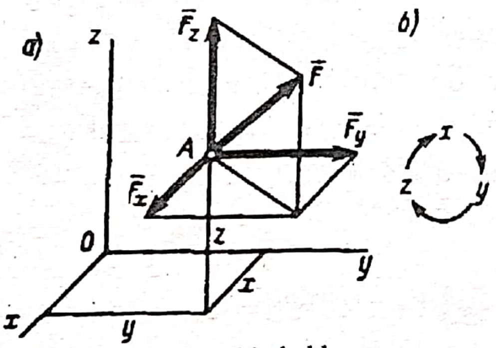
chunki

$$m_z(\overline{Q_1})=0;\ (\overline{Q_1} \,||\, Ox) \text{ va } m_z(\overline{Q_2})=0;\ (\overline{Q_2} \,||\, Oz).$$

Yuqoridagi hisoblashlardan ma'lum bo'ldiki Varin'on teoremasini qo'llash orqali o'qqa nisbatan momentlarni hisoblash juda sodda ekan (masalan, uning yordamida $\overline{Q}$-kuchning momenti osongina aniqlandi). Shu sababli, masalalar yechishda undan keng foydalanish tavsiya etiladi. Ma'lum darajada tajriba orttirilgandan keyin o'rtadagi hisoblash ishlarini tashlab yuborib, birdaniga oxirgi natijani olish mumkin; masalan, $m_z(\overline{Q})$=bQsinα ekanligi o'z o'zidan ko'rinib turibdi.

*Kuchni koordinata o'qlariga nisbatan momentlarining analitik ifodalari.* A nuqtaga qo'yilgan $\overline{F}$ - kuchni koordinata o'qlariga parallel bo'lgan $\overline{F}_x, \overline{F}_y, \overline{F}_z$ tashkil etuvchilarga ajratib yuboraylik (90, *a* shakl). U holda Varin'on teoremasiga asosan,

$$m_x(\overline{F})=m_x(\overline{F}_x)+m_x(\overline{F}_y)+m_x(\overline{F}_z)$$




90 shakl.

Lekin $\overline{F}_x$-kuchi *x* o'qiga parallel bo'lganligi va $\overline{F}_y$, $\overline{F}_z$ lar unga perpendikulyar bo'lganligi uchun, ishoralarni e'tiborga olib, yozamiz: $m_x(\overline{F}_x)=0$ $m_x(\overline{F}_y)=-z\cdot F_y$, $m_x(\overline{F})=y\cdot F_z$ va natijada $m_x(\overline{F})=y\cdot F_z - z\cdot F_y$ ekanligini aniqlaymiz. Bunday hisoblashlarni boshqa y va z o'qlarga ham qo'llab, oxirgi natijalarni olamiz:

$$m_x = (\overline{F}) == yF_z - zF_y,$$

$$m_y = (\overline{F}) == zF_x - xF_z, \qquad (47)$$

$$m_z = (\overline{F}) == xF_y - yF_x,$$

(47) formula orqali kuchning koordinata o'qlariga nisbatan momentlarining analitik ifodasi hisoblanadi. Ushbu formulalar orqali kuchning proeksiyalari va ularni qo'yilgan nuqtalarining koordinatalariga bog'liq ravishda ularning momentlarini aniqlashimiz mumkin. Shuni alohida ta'kidlash lozimki, (47) formulaning keyingi har bir formulasi, oldingisidan harf va indekslarning aylanib kelishligidan ham aniqlash mumkin, ya'ni x-ni y-ga, y-ni z-ga va z-ni x-ga va h.k. (90, b shakl).

(47) formulaning o'ng tomonlari $\overline{m}_o(\overline{F})$- vektorning koordinata o'qlaridagi

proeksiyalaridan iborat ekanligini hisobga olsak (O nuqta koordinata boshi), u holda shu formulalar yordamida $\overline{m}_o(\overline{F})$-vektorning modulini aniqlash mumkin,

$$|\overline{m}_o(\overline{F})| = \sqrt{[m_x(\overline{F})]^2 + [m_y(\overline{F})]^2 + [m_z(\overline{F})]^2} \qquad (48)$$

**37 masala**. Analitik formulalardan foydalanib, 89 shaklda ko'rsatilgan $\overline{Q}$ -kuchning x, y va z -o'qlarga va O nuqtaga nisbatan momentlari hisoblansin.

Yechish. $\overline{Q}$ -kuch, koordinatalari x=$a$, y=b, z=-h bo'lgan D nuqtaga qo'yilgan. Uning koordinata o'qlaridagi proeksiyalari:

$$Q_x=-Q\cos\alpha, \; Q_y=0, \; Q_z=Q\sin\alpha;$$

Bu qiymatlarni (47) formulaga qo'ysak, 36 masaladagi javoblarni olamiz. (48) formula orqali O nuqtaga nisbatan momentlarni hisoblaymiz,

$$|\overline{m}_O(\overline{Q})| = Q\sqrt{b^2 + (h\cos\alpha - a\sin\alpha)^2}$$

*Kuchlar sistemasining bosh vektori va bosh momentini hisoblash.* Ixtiyoriy kuchlar sistemasining bosh vektori - $\overline{R}$ va bosh momenti - $\overline{M}_O$ larni, ya'ni $\overline{R}=\Sigma\overline{F}_k$ va $\overline{M}_O=\Sigma\overline{m}_o(\overline{F}_k)$ -lar 12§-dagi (21) va (22) formulalar orqali aniqlanadi.

Quyida bu qiymatlarning, ya'ni bosh vektor - $\overline{R}$ va bosh moment - $\overline{M}_O$ larni hisoblashning analitik usulini ko'rib chiqamiz.

5§-dan $R_x$, $R_y$, $R_z$ larning qiymatlarini aniiqlaylik. $\overline{M}_O$-vektorning koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini $M_x$, $M_y$, $M_z$ lar orqali belgilaymiz. Vektorlarning yig'indilarini proeksiyalari haqidagi teoremaga asosan,

$M_x=\Sigma[\overline{m}_o(\overline{F}_k)]_x$ va (44) tenglikka asosan $M_x=\Sigma m_x(\overline{F}_k)$. $M_y$ va $M_z$ -lar ham shu singari aniqlanadi.

Bosh vektor - $\overline{R}$ ning va bosh moment $\overline{M}_O$-ning koordinata o'qladagi proeksiyalari quyidagicha aniqlanadi:

$$R_x=\Sigma F_{kx}; \quad R_y=\Sigma F_{ky}; \quad R_z=\Sigma F_{kz}; \qquad (49)$$

$$M_x=\Sigma m_x(\overline{F}_k); \; M_y=\Sigma m_y(\overline{F}_k); \; M_z=\Sigma m_z(\overline{F}_k) \qquad (50)$$

12§ -da ta'kidlanganidek, agar ikkita kuchlar sistemasining bosh vektori - $\overline{R}$ va bosh momenti - $\overline{M}_O$ lari bir biriga o'zaro teng bo'lsa, bunday kuchlar sistemasi *ekvivalent* deb ataladi. Demak, qattiq jismga ta'sir etayotgan ixtiyoriy kuchlar sistemasini berilishi (yoki ularni aniqlash) uchun, ularning bosh vektori va biror nuqtaga nisbatan olingan bosh momentini berish kifoya ekan. Ya'ni (49) va (50) tenglamalarning o'ng taraflarini berish kifoya ekan (agar kuchlar sistemasi tekislikda joylashgan bo'lsa, 15§-da ko'rilgandek, (27) formuladagi uchta tenglama kifoya qilar ekan).

Bu qoidadan amalda ko'p foydalaniladi. Masalan, samolyot, avtomobil, raketa va boshqalarga ta'sir etuvchi aerodinamik kuchni berishda (yoki uni aniqlashda), yoki konstruksiyalarning ichki zo'riqishlarini aniqlashda (20§-dagi 26 masalaga q.).

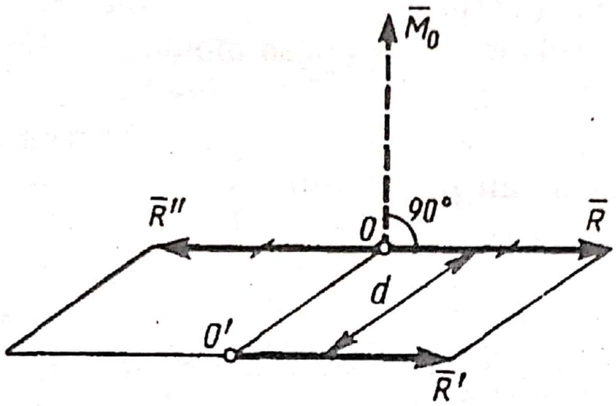
## 29§*. Fazoviy kuchlar sistemasini sodda holga keltirish.

12§-da ko'rsatilgandek, ixtiyoriy kuchlar sistemasini birorta O nuqtaga qo'yilgan bosh vektor $\overline{R}$-ga teng bo'lgan kuch va bosh moment $\overline{M}_O$- ga teng bo'lgan juftga keltirish mumkin ekan (40, b shakl). Quyida muvozanat holatda bo'lmagan kuchlar sistemasini sodda holdagi ko'rinishini aniqlab chiqamiz. Olinadigan natija shu kuchlar sistemasining $\overline{R}$ va $\overline{M}_O$-qiymatlariga bog'liq bo'ladi.

1. Agar berilgan kuchlar sistemasining bosh vektori $\overline{R}=0$ va bosh momenti $\overline{M}_O \neq 0$ bo'lsa, u holda kuchlar sistemasi, momenti $\overline{M}_O$-ga teng bo'lgan bitta juftga keltiriladi va uning qiymati (50) formula orqali aniqlanadi. Bunday holda 12§-da aytib o'tilgandek moment $\overline{M}_O$-ning qiymati O markazning o'rniga bog'liq emas.

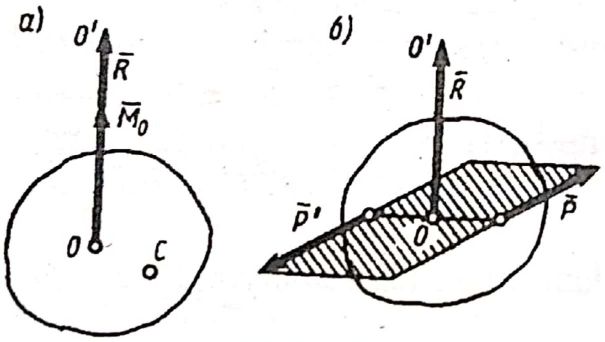
2. Agar berilgan kuchlar sistemasining bosh vektori $\overline{R} \neq 0$ va bosh momenti $\overline{M}_O=0$ bo'lsa, bunday kuchlar sistemasi bitta teng ta'sir etuvchi kuchga keltiriladi. Uning son qiymati (49) formuladan aniqlanadi

3. Agar berilgan kuchlar sistemasining bosh vektori $\overline{R} \neq 0$ va bosh momenti $\overline{M}_O \neq 0$ bo'lsa, hamda $\overline{R} \perp \overline{M}_O$ bo'lsa, u holda bu sistema, O nuqtadan o'tmaydigan bitta teng ta'sir etuvchi $\overline{R}$-kuchga keltiriladi.



91 shakl

Agar $\overline{R} \perp \overline{M}_O$ bo'lsa, $\overline{M}_O$- momentni tasvirlovchi juft kuch va bosh vektor bitta tekislikda joylashadilar (91 shakl). U holda juftni $\overline{R}', \overline{R}''$ lardan iborat ikkita kuch bilan almashtirib, ularning modullarini bosh vektorning moduliga teng qilib (R=R') tanlab olamiz va 91 shaklda ko'rsatilgandek joylashtiramiz. U holda shaklda ko'rinib turgandek $\overline{R}$ va $\overline{R}''$ kuchlari o'zaro muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasini tashkil etadi, shu sababli ularni sistemadan olib tashlasak, sistema bitta teng ta'sir etuvchi $\overline{R}'=\overline{R}$ kuchga keltiriladi. Lekin, uning ta'sir chizig'i bosh vektor $\overline{R}$-ga parallel ravishda yo'nalgan bo'lib O' nuqtadan o'tadi (15§-dagi 2p., b ga q.). OO' masofa (OO'$\perp \overline{R}$) (28) formula orqali aniqlanadi, ya'ni d=OO' bo'ladi.



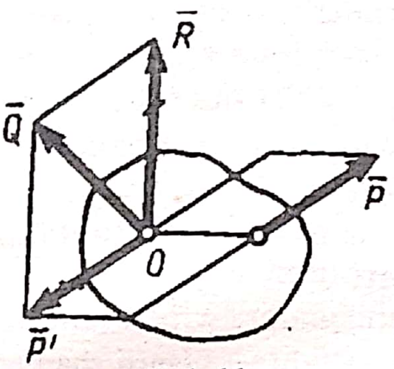
92 shakl

Demak, xususiy holda bosh vektori $\overline{R} \neq 0$ bo'lgan ixtiyoriy parallel kuchlar sistemasini yoki bir tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini har doim bitta teng ta'sir etuvchi kuchga keltirish mumkin ekan.

4. Agar berilgan kuchlar sistemasining bosh vektori $\overline{R} \neq 0$ va bosh momenti $\overline{M}_O \neq 0$ bo'lib, ularning ta'sir chiziqlari bir to'g'ri chiziqda joylashgan bo'lsa (92, *a* shakl). U holda berilgan kuchlar sistemasini bitta vektorga va shu vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislikda joylashgan bitta juftga keltirish mumkin (92, b shakl). Kuchning va juftning o'zaro bunday joylashish holati dinamik vint deb ataladi, bosh vektor - $\overline{R}$ bo'yicha yo'nalgan o'q, vint o'qi deb ataladi. Bunday kuchlar sistemasining eng sodda holi shundan iborat bo'ladi xolos.

Masalan, keltirish markazini boshqa C nuqtada tanlab olaylik (92, *a* shakl), u holda vektor $\overline{M}_O$-ni erkin vektor ekanligi uchun C nuqtaga ko'chiramiz. $\overline{R}$ -

vektorni C nuqtaga ko'chirishda (11§-ga q.) sistemaga $\overline{R}$-ga perpendikulyar tekislikda joylashgan va momenti $\overline{M}'_C=\overline{m}_c(\overline{R})$ -ga teng bo'lgan bitta juftni qo'shamiz. Natijada $\overline{M}_C=\overline{M}_O+\overline{M}'_C$ bo'lib, uning momenti $\overline{M}_O$-dan katta bo'ladi; shunday qilib, sistema O nuqtaga keltirilganda eng kichik momentli juft kuchi bo'ladi. Bunday kuchlar sistemasini bitta juftga yoki bitta kuchga aslo keltirib bo'lmaydi.



93 shakl.

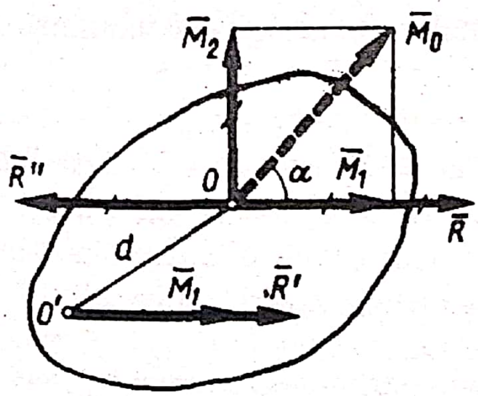
Mabodo juftni tashkil qiluvchi kuchlarning bittasini, masalan, $\overline{P}'$-ni bosh vektor $\overline{R}$ bilan qo'shsak, u holda bari bir sistema ikkita ayqash (93 shakl), ya'ni bir tekislikda yotmagan ikkita $\overline{P}'$ va $\overline{Q}$ kuchlardan iborat bo'ladi. Hosil bo'lgan kuchlar sistemasi dinamik vintga ekvivalent bo'lganligi uchun, ular ham teng ta'sir etuvchiga ega bo'lmaydi.

5. Agar berilgan kuchlar sistemasining bosh vektori $\overline{R}\neq 0$ va bosh momenti $\overline{M}_O\neq 0$ bo'lib, ularning ta'sir chiziqlari o'zaro parallel ham, o'zaro perpendikulyar ham bo'lmasa, u holda bunday kuchlar sistemasi ham dinamik vintga keladi, lekin vint o'qi O nuqtadan o'tmaydi.

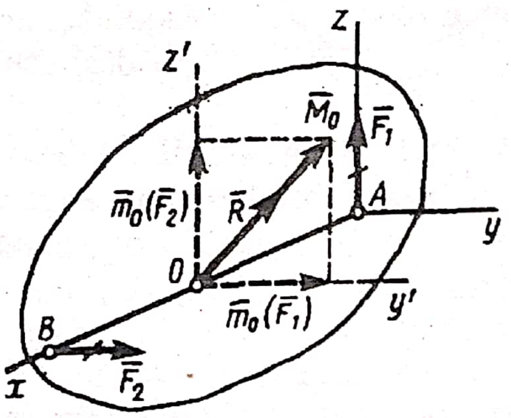
Buni isbot qilish uchun, $\overline{M}_O$-vektorni o'zaro perpendikulyar yo'nalgan $\overline{M}_1$ va $\overline{M}_2$ vektorlarga ajratib yuboramiz. Ulardan biri $\overline{M}_1$ bosh vektor bilan bir to'g'ri chiziqda yotsin, ikkinchisi esa unga perpendikulyar ravishda yo'nalgan bo'lsin (94 shakl). Ularning modullari tegishlicha $M_1=M_0\cos\alpha$, $M_2=M_0\sin\alpha$; bu yerdagi $\alpha$-burchagi, $\overline{R}$ va $\overline{M}_O$-vektorlar orasidagi burchakdan iborat. Momenti $M_2(\overline{R}\perp\overline{M}_2)$ bo'lgan juftni va $\overline{R}$-kuchni 91 shakldagi kabi bitta $\overline{R}'$ - kuch bilan almashtiramiz. U holda berilgan kuchlar sistemasi bitta $\overline{R}'=\overline{R}$ kuch va $\overline{M}_1$- momentga ekvivalent bo'lib, $\overline{R}$-ga parallel yo'nalgan juft bilan almashtiriladi. Lekin $\overline{M}_1$-juft erkin bo'lganligi uchun uni O' nuqtaga keltirib qo'yamiz. Natijada bu kuchlar sistemasi ham dinamik vintga keltirildi, lekin vint o'qi boshqa, ya'ni O' nuqtadan o'tadi.

**38 masala.** Modullari $F_1=F_2=F$ ga teng va AB=2$a$ bo'lgan, 6 shakldagi $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlarni sodda holga keltirilsin.

Yechish. $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlarni AB kesmaning o'rtasida joylashgan O markazga keltiramiz (95 shakl). Sistemaning bosh vektori $\overline{R}=\overline{F}_1+\overline{F}_2$ -ga teng bo'lib, y'Oz' burchakning bissektrisasi bo'ylab yo'naladi va uning moduli $R=F\sqrt{2}$ bo'ladi. Sistemaning bosh momenti $\overline{M}_O=\overline{m}_O(\overline{F}_1)+\overline{m}_O(\overline{F}_2)$-ga teng bo'lib, $\overline{m}_0(\overline{F}_1)$ vektori y'



94 shakl



95 shakl

-o'qi bo'ylab yo'nalgan, $\overline{m}_0(\overline{F}_2)$ vektori z' -o'qi bo'ylab yo'nalgan va ikkalasining modullari o'zaro teng, ya'ni F$a$ ga teng. Shu sababli, bosh momentning qiymati (moduli) $M_O = Fa\sqrt{2}$ bo'lib, bu $\overline{M}_O$ vektor ham y'Oz' burchakning bissektrissasi bo'ylab yo'naladi. Shu sababli, $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlardan tashkil topgan kuchlar sistemasi dinamik vintga keltirilar ekan va 2§-da ko'rsatilgandek teng ta'sir etuvchiga ega emas ekan.

## 30§ Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanati. Kuchlarning parallellik holati

Muvozanatdagi har qanday kuchlar sistemasining zaruriy va yetarli shartlari $\overline{R}$=0; va $\overline{M}_O$=0 dan iborat bo'ladi (13§ ga q.). Lekin $\overline{R}$ va $\overline{M}_O$ - vektorlari nolga teng bo'lishi uchun albatta $R_x=R_y=R_z=0$ va $M_x=M_y=M_z=0$ bo'lishi shart, ya'ni jismga ta'sir etuvchi kuchlar sistemasi (49) va (50) tenglamalar sistemasini qanoatlantirishi shart:

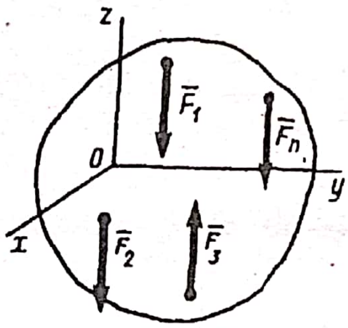
$$\Sigma F_{xk}=0; \quad \Sigma F_{ky}=0; \quad \Sigma F_{kz}=0;$$
$$\Sigma m_x(\overline{F}_k)=0; \ \Sigma m_y(\overline{F}_k)=0; \ \Sigma m_z(\overline{F}_k)=0 \qquad (51)$$

Shunday qilib, fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun, berilgan kuchlarning uchta koordinata o'qlarining har biridagi proeksiyalarining yig'indisi va shu kuchlarning har bir o'qqa nisbatan olingan momentlarining yig'indilari nolga teng[17] bo'lishi zaruriy va yetarli shart ekan.

O'z navbatida (51) tenglamalar sistemasi, fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi ta'siridagi qattiq jismning muvozanatlik shartlari tenglamalaridan iboratdir.

Agar qattiq jismga kuchlardan tashqari, momenti $\overline{m}$-ga teng bo'lgan juft qo'yilgan bo'lsa, (51) tenglamalar sistemasining birinchi uchtasi o'zgarmaydi (chunki juft kuchlarning ixtiyoriy o'qqa nisbatan momentlarining yig'indilari nolga teng bo'ladi), keyingi uchtasi quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\Sigma m_x(\overline{F}_k)+m_x=0; \ \Sigma m_y(\overline{F}_k)+m_y=0; \ \Sigma m_z(\overline{F}_k)+m_z=0 \qquad (52)$$



96 shakl.

*Kuchlarning parallellik holati.* Agar jismga ta'sir etuvchi kuchlar o'zaro parallel holda joylashgan bo'lsa, birorta koordinata o'qini, masalan, z - o'qni shu kuchlarga parallel qilib yo'naltiramiz (96 shakl). U holda har bir kuchning x va y o'qlaridagi proeksiyalari va barcha kuchlarning z - o'qiga nisbatan momentlari nolga teng bo'ladi. Shu sababli yuqoridagi oltita tenglamalardan iborat bo'lgan (51) sistema quyidagi uchta tenglamalar sitemasiga aylanib qoladi:

$$\Sigma F_{kz}=0; \ \Sigma m_x(\overline{F}_k)=0; \ \Sigma m_y(\overline{F}_k)=0 \qquad (53)$$

Qolgan tenglamalar 0=0 dan iborat bo'lgan ayniyatlarga aylanib qoladi.

Demak, fazoda joylashgan parallel kuchlar sistemasining muvozanatda bo'lishi uchun, barcha kuchlarni ularga parallel bo'lgan o'qlarga proeksiyalarining yig'indisi va barcha kuchlarni ularga perpendikulyar joylashgan ixtiyoriy ikkita o'qlarga nisbatan olingan momentlarining yig'indilari nolga teng bo'lishi zaruriy va yetarli shart ekan.

[17] (51) shartga oid tenglamalarni tuzishda, mabodo kerak bo'lsa, proeksiyalarni hisoblashda bitta koordinatalardan foydalanish, momentlarni hisoblashda esa boshqa koordinatalardan foydalanish ham mumkin.

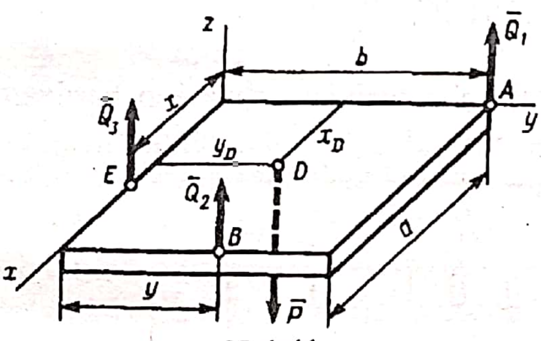
**Masalalar yechish**. Bunday masalalarning yechish tartibi, xuddi tekislikda joylashgan kuchlar sistemasidagiga o'xshaydi. Birorta jismni muvozanat holatini aniqlab, unga ta'sir etayotgan barcha tashqi kuchlarni (berilgan va noma'lum reaksiya kuchlarini) vektor shaklida ifodalaymiz va muvozanat shartlaridan kelib chiqadigan tenglamalar sistemasini tuzamiz. Hosil bo'lgan tenglamalar sistemasidan noma'lumlarning qiymatlarini aniqlaymiz.

Tenglamalar sistemasini soddaroq holda tuzish uchun, o'qlarni shunday qilib yo'naltirish kerakki, iloji boricha ko'proq kuchlarni kesib o'tsin yoki ularga perpendikulyar holda joylashgan bo'lsin (shunday qilinsa hisoblash ishlari osonlashadi va momentlarni aniqlash ham soddalashadi).

Tekislikda joylashgan kuchlar sistemasidan farqli joyi shundaki, bu yerda qo'shimcha ravishda o'qlarga nisbatan momentlarni hisoblashga to'g'ri keladi.

Agar birorta kuchning qaysidir o'qqa nisbatan momentlarini aniqlash murakkab bo'lsa, qo'shimcha ravishda shu o'qlarga nisbatan perpendikulyar tekislikka kuchlarning proeksiyalarini tushirib, hisoblash ishlarini oydinlashtirish lozim bo'ladi.

Agar kuchlarning momentlarini aniqlash ishlarida, kuchlarning tekislikka bo'lgan proeksiyalarini yoki ularning yelkalarini aniqlash qiyinlashsa, ularni ikkita o'zaro perpendikulyar bo'lgan tashkil etuvchilarga ajratib olib (ulardan birini albatta birorta koordinata o'qiga parallel holda tanlash lozim), so'ngra Varin'on teoremasidan foydalanish tavsiya qilinadi. Kerak bo'lgan hollarda (47) formula orqali analitik usuldan foydalanish ham masalani yechishni soddalashtiradi, masalan, 37 masalaga qarang.



97 shakl

**39 masala.** Tomonlari $a$ va b lardan iborat bo'lgan to'g'ri to'rtburchakli plitaga yuk qo'yilgan. Yuk bilan plitaning og'irlik markazi koordinatalari $x_D$ va $y_D$ bo'lgan D nuqtada joylashgan (97 shakl). Plitani uchta ishchi ko'tarib turmoqda, ulardan bir kishi plitaning A nuqtasidan ko'tarib turibdi. Hamma ishchilarga bir xil og'irlik kuchi ta'sir qilishi uchun, boshqa ikkita ishchilar plitaning qaysi B va E nuqtalaridan ko'tarishlari lozim ekanligi aniqlansin.

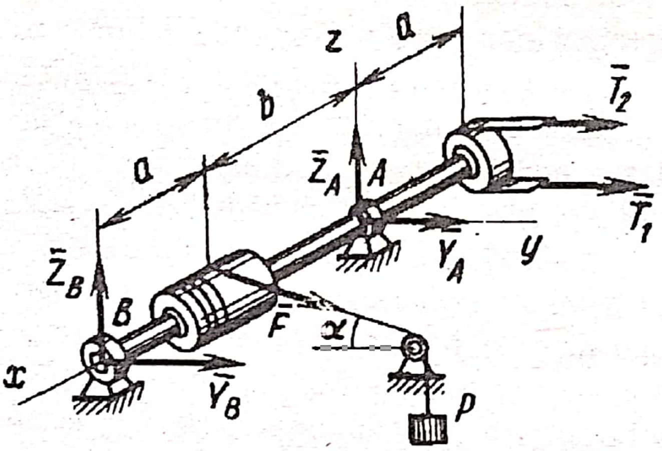
Yechish. Plita to'rtta $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$, $\bar{Q}_3$ va $\bar{P}$ dan iborat o'zaro parallel bo'lgan kuchlar ta'sirida muvozanat holatni saqlab turibdi. Plitani gorizontal holatda deb hisoblab, berilgan kuchlar sistemasi uchun (53) formulaga asosan, muvozanatlik shartlari tenglamalar sistemasini tuzamiz 97 shakl:

$$Q_1b+Q_2y-Py_D=0 \quad -Q_2a-Q_3x+Px_D=0 \quad Q_1+Q_2+Q_3-P=0$$

Masalaning shartiga ko'ra $Q_1=Q_2=Q_3=Q$. Shunga asosan oxirgi tenglamadan $P=3Q$ bo'ladi. Aniqlangan P -ning qiymatini birinchi va ikkinchi tenglamalarga qo'yib, noma'lumlarni aniqlaymiz, $x=3x_D-a$, $y=3y_D-b$.

Masala faqat $a/3\leq x_D\leq 2a/3$, $b/3\leq y_D\leq 2b/3$ bo'lgandagina yechimga ega bo'ladi. Agar $x_D=a/3$, $y_D=b/3$ bo'lsa $x=y=0$, agar $x_D=2a/3$, $y_D=2b/3$ bo'lsa $x=a$, $y=b$ bo'ladi. Agar D nuqta plitaning markazida bo'lsa, $x=a/2$, $y=b/2$ bo'ladi.

**40 masala**. A va B podshipniklarga o'rnatilgan gorizontal valning o'qiga perpendikulyar holda radiusi $r_1$=20 sm -li shkiv va radiusi $r_2$=15 sm-li baraban o'rnatilgan. Val shkivga o'ralgan remen orqali aylanma harakatga keltiriladi; barabanga o'ralgan arqon orqali o'zgarmas tezlik bilan P=540 N og'irlikdagi yuk yuqoriga ko'tarilmoqda. Valning, barabanning va shkivning xususiy og'irligini e'tiborga olmagan holda, A va B podshipniklarning reaksiya kuchlarini, hamda yetaklovchi tasmaning tortilish kuchini aniqlang. Yetaklovchi remenning yetaklovchi tortilish kuchi $T_1$, yetaklanuvchi tortilish kuchi $T_2$ - dan ikki marta katta deb hisoblansin. Bu yerda $a$=40 sm, b=60 sm va $\alpha$=30°.



98 shakl

Yechish. O'zgarmas tezlik bilan harakatlanayotgan valga ta'sir qilayotgan kuchlar sistemasi uchun (51) formuladagi muvozanatlik shartlaridagi tenglamalar sistemasini qo'llash mumkin ekanligi 136§-da isbot qilingan.

Koordinata o'qlarini o'tkazamiz (98 shakl) va valga ta'sir qilayotgan kuchlarni vektor shaklda tasvirlaymiz: arqonning tortilish kuchi moduli bo'yicha R-ga teng, remenning tortilish kuchi $\overline{T}_1$ va $\overline{T}_2$; va podshipniklarning reaksiyalari $\overline{Z}_A$, $\overline{Y}_A$ va $\overline{Z}_B$, $\overline{Y}_B$ dan iborat kuchlar ta'sir qilmoqda.

(51) formulaga asosan, muvozanat tenglamalar sitemasini tuzish uchun, berilgan kuchlarning proeksiyalari va momentlarini[18] maxsus jadvalga yozib chiqamiz:

| $\overline{F}_k$ | $\overline{F}$ | $\overline{T}_1$ | $\overline{T}_2$ | $\overline{R}_A$ | $\overline{R}_B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_{kx}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $F_{ky}$ | $F\cos\alpha$ | $T_1$ | $T_2$ | $Y_A$ | $Y_B$ |
| $F_{kz}$ | $-F\sin\alpha$ | 0 | 0 | $Z_A$ | $Z_B$ |
| $m_x(\overline{F}_k)$ | $-Fr_2$ | $T_1r_1$ | $-T_2r_1$ | 0 | 0 |
| $m_y(\overline{F}_k)$ | $F\cdot b\cdot\sin\alpha$ | 0 | 0 | 0 | $-Z_B(a+b)$ |
| $m_z(\overline{F}_k)$ | $F\cdot b\cdot\cos\alpha$ | $-T_1a$ | $-T_2a$ | 0 | $Y_B(a+b)$ |

Jadvaldagi qiymatlardan foydalanib, (51) muvozanat tenglamalar sistemasini yozib chiqamiz,

[18] Ayniqsa ushbu qismdagi masalalarni yechishda, jadvalni oldindan to'ldirib olish katta osonlik keltiradi. Jadval ustunlar bo'yicha to'ldiriladi, yani avval $\overline{F}$ kuchning proeksiyalari va momentlari hisoblanib jadvalga yoziladi, so'ngra $\overline{T}_1$ kuchni va h.k.. Shunday qilib, hamma diqqatni birinchi kuchga qaratish lozim, undan keyin ikkinchi kuchga va h.k.. Agarda (51) tenglamani to'g'ridan to'g'ri tuzmoqchi bo'lsangiz, har bir kuchga oid hisoblash ishlarini olti martadan bajarishga to'g'ri keladi; hamda u yoki bu kuchga doir hisoblashlarni esdan chiqarib qoldirish hollari ko'p uchraydi.

$$Pcos\alpha+T_1+T_2+Y_A+Y_B=0, \qquad (I)$$
$$-Psin\alpha+Z_A+Z_B=0 \qquad (II)$$
$$-r_2 \cdot P+ r_1 \cdot T_1- r_1 \cdot T_2=0 \qquad (III)$$
$$bPsin\alpha-(a+b)Z_B=0 \qquad (IV)$$
$$bPcos\alpha-aT_1-aT_2+(a+b)Y_B=0 \qquad (V)$$

$T_1=2T_2$ ekanligini hisobga olib (III) va (IV) tenglamalar orqali,

$$T_2=r_2P/r_1=405\ N,\ Z_B=(bPsin\alpha)/(a+b)=162N$$

So'ngra (V) tenglamadan,

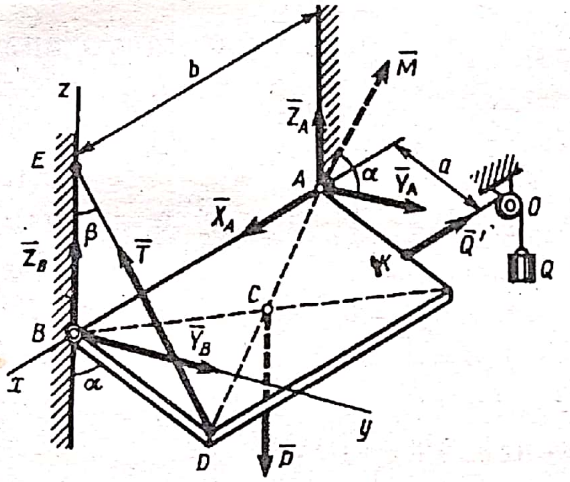
$$Y_B=(3aT_2-bPcos\alpha)/(a+b)\approx 205N.$$

Aniqlangan qiymatlarni qolgan tenglamlarga qo'yib,

$$Y_A=-Pcos\alpha-3T_2-Y_B=-1890N. \quad Z_A=Psin\alpha-Z_B=108N.$$

larni aniqlaymiz. Nihoyat:

$$T_1=810N,\ Y_A=-1890N,\ Z_A=108N,\ Y_B=205N,\ Z_B=162N.$$

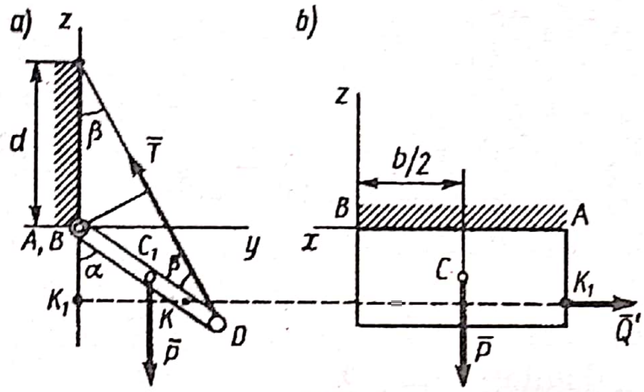


99 shakl.

**41 masala**. Og'irligi P=120N bo'lgan to'g'ri to'rtburchakli plita, vertikal bilan $\alpha=60°$ burchak tashkil qilgan holda gorizontal holdagi AB o'qqa mahkamlangan. A nuqtada tovonsimon podshipnikka, B nuqtada esa tsilindrik podshipnikka mahkamlangan (99 shakl). Qopqoq DE arqon bilan devorga tortib qo'yilgan va O blokning ustidan oshirib tashlangan ip orqali og'irligi Q=200N yuk bilan tortib qo'yilgan. (KO chiziq AB ga parallel). BD=BE, AK=$a$=0,4m AB=b=1m. A va B podshipniklarning reaksiya kuchlari va DE arqonning tortilish kuchi aniqlansin.

Yechish. Qopqoqning muvozanatini tekshiramiz. B nuqtani koordinata boshi deb tanlab olib koordinata o'qlarini o'tkazamiz (arqonning tortilish kuchi, z va y o'qlarni kesib o'tadi, natijada uning shu o'qlarga nisbatan momentlari nolga teng bo'ladi va tenglama soddalashadi). So'ngra qopqoqqa ta'sir etuvchi barcha aktiv va reaksiya kuchlarni vektor shaklida ifodalab chizmaga qo'yib chiqamiz; qopqoqning markaziga qo'yilgan og'irlik kuchi $\overline{P}$; moduli Q-ga teng bo'lgan $\overline{Q}$ kuchi; arqonning tortilish kuchi $\overline{T}$; va podshipniklarning reaksiya kuchlari $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$ va $\overline{Y}_B$, $\overline{Z}_B$ (99 shakl). (Punktir bilan chizilgan $\overline{M}$ vektor ushbu masalaga taalluqli emas). Muvozanat tenglamalarini tuzish uchun α- burchak (shaklga qarang)ni kirgizamiz va BD=BE=d deb belgilaymiz. Momentlarni hisoblash uchun 100, $a$, b shakldagi qo'shimcha chizmalar tasvirlangan.

100, $a$ shaklda jismni x o'qining musbat tomonidan qaralgandagi Byz tekislikdagi proeksiyasi tasvirlangan. Ushbu chizma yordamida va kuchlarning x o'qiga nisbatan momentlarini hisoblash ishlari oydinlashadi. Bu shakldan ko'rinib turibdiki, $\overline{P}$ va $\overline{T}$ kuchlarning yz tekislikdagi proeksiyalari (tekislik $x$ o'qiga perpendikulyar) shu kuchlarning o'zlariga teng bo'ladi; $\overline{P}$ kuchining B nuqtaga nisbatan yelkasi esa $BC_1 \cdot sin\alpha=(d/2)sin\alpha$; $\overline{T}$ kuchining shu nuqtaga nisbatan yelkasi BD $sin\beta=dsin\beta$.




100 shakl.

100, b shaklda jismning Bxz tekislikdagi proeksiyasi, ya'ni y o'qining musbat uchidan qaralgandagi ko'rinishi tasvirlangan. Ushbu chizma (100, *a* shakl bilan birgalikda) $\overline{P}$ va $\overline{Q}'$ kuchlarining y o'qiga nisbatan momentlarini hisoblash ishlarini soddalashtiradi.

Ko'rinib turibdiki, $\overline{P}$ va $\overline{Q}'$ kuchlarning xz tekisligiga bo'lgan proektsiyalari o'z qiymatlariga teng ekan. $\overline{P}$ kuchining B nuqtaga nisbatan yelkasi AB/2=b/2; (100, *a* shakl) $\overline{Q}'$ kuchining shu nuqtaga nisbatan yelkasi - $AK_1$, ya'ni $AK\cdot\cos\alpha$ yoki $a\cdot\cos\alpha$.

Q'=Q ekanligini e'tiborga olib, (51) formulaga asosan, muvozanat tenglamalarni tuzamiz:

$$\Sigma F_{kx}=-Q+X_A=0, \qquad (I)$$
$$\Sigma F_{ky}=-T\sin\beta+Y_A+Y_B=0, \qquad (II)$$
$$\Sigma F_{kz}=-P+T\cos\beta+Z_A+Z_B=0, \qquad (III)$$
$$\sum m_x(\overline{F}_k)=-(Pd/2)\sin\alpha+Td\sin\beta=0, \qquad (IV)$$
$$\sum m_y(\overline{F}_k)=-Pb/2+Qa\cos\alpha+Z_Ab=0, \qquad (V)$$
$$\sum m_z(\overline{F}_k)=Qa\sin\alpha-Y_Ab=0, \qquad (VI)$$

$\beta=\alpha/2=30°$ ekanligini e'tiborga olib, (I), (IV), (V) , (VI) lardan:

$$X_A=Q=200N, \quad T=(P\sin\alpha)/2\sin\beta\approx104N.$$
$$Z_A=P/2-(Qa\cos\alpha)/b=20N, \quad Y_A=(Qa\sin\alpha)/b\approx69N.$$

Ushbu qiymatlarni (II) va (III) tenglamalarga qo'yib,

$$Y_B=T\sin\beta-Y_A=-17N, \quad Z_B=P-T\cos\beta-Z_A=10N$$

Nihoyat,

$$T\approx104N, \quad X_A=200N, \quad Y_A\approx69N, \quad Z_A=20N,$$
$$Y_B=-17N, \quad Z_B=10N,$$

larni aniqlaymiz.

**42 masala.** Yuqoridagi 41 masalada qopqoqqa qo'shimcha ravishda momenti M=120N· m bo'lgan va qopqoqning tekisligida ta'sir etuvchi juft kuch qo'yilgan bo'lsin; juftning yo'nalishi (qopqoqning ustidan qaralganda) soat strelkasiga teskari yo'nalishda bo'lgan (99 shakl) holda, masala yechilsin.

Yechish. Qopqoqqa qo'shimcha ravishda, uning tekisligiga perpendikulyar bo'lgan $\overline{M}_O$ vektor qo'yamiz, bu vektor erkin bo'lganligi uchun, uni qopqoqning ixtiyoriy nuqtasiga qo'yishimiz mumkin, masalan, A nuqtasiga. Ushbu momentning koordinata o'qlaridagi proeksiyalari: $M_x=0$, $M_y=M\cos\alpha$, $M_z=M\sin\alpha$ bo'ladi. Endi (52) formulaga asosan, muvozanat tenglamasini tuzamiz. Yuqoridagi (I)-(IV) tenglamalar o'zgarishsiz qoladi, oxirgi ikkita tenglama quyidagicha o'zgaradi,

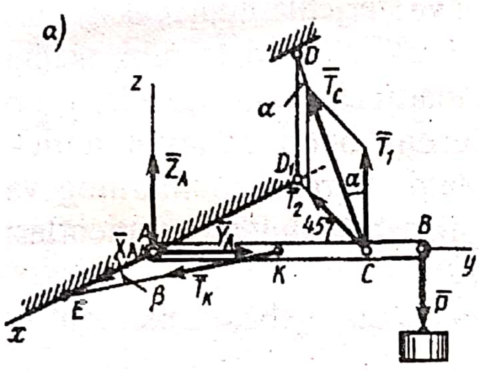
$$-Pb/2+Z_Ab+Qa\cos\alpha+M\cos\alpha=0 \qquad (V')$$
$$-Y_Bb+Qa\sin\alpha+M\sin\alpha=0 \qquad (VI')$$

Shuni ta'kidlash lozimki, ushbu natijani (52) formulasiz ham aniqlash mumkin, masalan, qo'shilgan juftni AB va KO chiziqlari bo'yicha yo'nalgan ikkita kuch bilan almashtirib (kuchlarning modullari M/$a$ -ga teng bo'lishi lozim), so'ngra oddiy muvozanat tenglamasini tuzish orqali yechish mumkin.

Hosil bo'lgan (I)-(IV), (V'), (VI') tenglamalar sistemasini yechib, noma'lumlarni aniqlaymiz. Bu yerda 41 masaladan farqi shundaki barcha formulalardagi Q$a$ -ni o'rniga Q$a$+M qiymatni qo'yishimiz lozim bo'ladi. Natijada

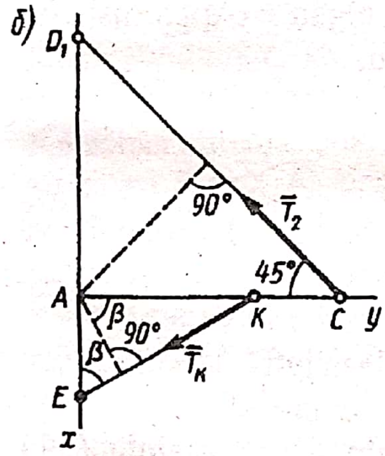
$$T\approx 104 \text{ N}, X_A=200 \text{ N}, Y_A\approx 173 \text{ N}, Z_A=-40 \text{ N}, Y_B=-121\text{N}, Z_B=70\text{N}.$$

**43 masala.** AB gorizontal sterjen, A nuqtada sferik sharnir orqali bog'lanib, KE va CD arqonlar yordamida devorga perpendikulyar holatda mahkamlab qo'yilgan (101, $a$ shakl). Sterjenning B uchiga og'irligi P=36N bo'lgan yuk osib qo'yilgan. Agar AB=$a$=0,8 m, AC=AD$_1$=b=0,6 m, AK=$a$/2, $\alpha$=30°, $\beta$=60° bo'lsa, A sharnirning va arqonlarning reaksiya kuchlari aniqlansin.



101 $a$ shakl

Yechish. Sterjenning muvozanat holatini tekshiramiz. Unga yukning og'irlik kuchi $\bar{P}$, arqonlarning tortilish kuchlari $\bar{T}_k$, $\bar{T}_C$ va A sharnirdagi reaksiya kuchlari $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$ ta'sir etmoqda. Koordinata o'qlarini o'tkazamiz va (51) formula yordamida muvozanat tenglamalarini tuzamiz. $\bar{T}_C$-kuchning proeksiyalari va momentlarini aniqlash uchun, uni ikkita $\bar{T}_1$ va $\bar{T}_2$ ($T_1=T_C\cos\alpha$, $T_2=T_C\cdot\sin\alpha$) lardan iborat bo'lgan tashkil etuvchilarga ajratib yuboramiz. Varin'on[19] teoremasidan $m_x(\bar{T}_C)=m_x(\bar{T}_1)$ bo'ladi, chunki $m_x(\bar{T}_2)=0$, hamda $m_z(\bar{T}_C)=m_z(\bar{T}_2)$, chunki $m_z(\bar{T}_1)=0$. Kuchlarning momentlarini hisoblash ishlarini oydinlashtirish uchun qo'shimcha (101, b) shakl chizamiz, unda konstruksiyani $Axy$ tekislikdagi proeksiyasi tasvirlangan.



101 $b$ shakl

Endi (51) formulaga asosan muvozanat tenglamalarini tuzamiz. Shuni ta'kidlash lozimki, barcha kuchlar y -o'qini kesib o'tadi, shu sababli ularni shu o'qqa nisbatan momentlari nolga teng bo'ladi, natijada tenglamalar soni 5 - tadan iborat bo'ladi xolos:

$$\Sigma F_{kx}=T_K\cos\beta-T_2\sin45°+X_A=0,$$
$$\Sigma F_{ky}=-T_K\sin\beta-T_2\cos45°+Y_A=0,$$
$$\Sigma F_{kz}=T_1+Z_A-P=0,\quad \Sigma m_x(\bar{F}_k)=T_1 b-Pa=0,$$
$$\Sigma m_z(\bar{F}_k)=-(T_k a/2)\cos\beta+T_2 b\sin45°=0,$$

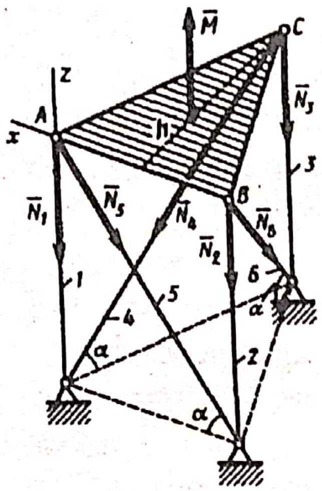
$T_1$ va $T_2$ larni ularning qiymatlari bilan almashtirsak,

$$T_K\cos\beta-T_C\sin\alpha\cdot\sin45°+X_A=0,$$
$$-T_K\sin\beta-T_C\sin\alpha\cdot\cos45°+Y_A=0,$$

[19] Ko'p hollarda $\bar{T}_C$ kuch bilan A$yz$ tekislik orasidagi burchak 45° ga teng emasligiga e'tibor berilmaydi, natijada xatolikka yo'l qo'yiladi., shuning uchun, masalan, (45) formula yordamida $m_x(\bar{T}_C)$-ni hisoblashdan oldin shu burchakni aniqlab olish kerak, yoki boshqa yo'l bilan $\bar{T}_C$-ning A$yz$ tekislikdagi proeksiyasini aniqlab olish kerak. Bu usul hisoblashlarni murakkablashtiradi $\bar{T}_C$-kuchning A$yz$ tekislikdagi proeksiyasi emas). Varin'on teoremasi orqali $m_x(\bar{T}_C)$-ni hisoblash juda soddalashadi.

$$-P+T_C\cos\alpha+Z_A=0,\ -Pa+T_C b\cos\alpha=0,$$
$$-(T_K a/2)\cos\beta+T_C b\sin\alpha\cdot\sin45^\circ=0,$$

Hosil bo'lgan tenglamalar sistemasini yechib, noma'lumlarning qiymatlarini aniqlaymiz. $T_C\approx55{,}4$ N, $T_K\approx58{,}8$ N, $X_A\approx-9{,}8$ N, $Y_A\approx70{,}5$ N, $Z_A=-12$ N. $\overline{X}_A$ va $\overline{Z}_A$ larning yo'nalishlari shaklda ko'rsatilganga teskari ekan.



102 shakl.

**44 masala**. Tomonlari $a$-ga teng bo'lgan teng tomonli gorizontal ABC plita, 102 shaklda tasvirlangandek oltita sterjen yordamida mahkamlangan, har bir sterjen gorizontal tekislik bilan $\alpha=30^\circ$ tashkil etadi. Plitaga uning tekisligida yotgan va momenti M bo'lgan juft kuch qo'yilgan. Plitaning og'irligini hisobga olmagan holda sterjenlardagi zo'riqishlar aniqlansin.

Yechish. Plitaning muvozanat holatini tekshiramiz. Juftning moment vektori $\overline{M}$-ni va sterjenlarning reaksiyalari $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$,..., $\overline{N}_6$ -larni vektor shaklida ifodalaymiz; ushbu reaksiyalarning yo'nalishlari ularni cho'zilayotgandek qilib tasvirlangan(plita sterjenlardan ozod bo'layotgandek hisoblandi). Muvozanat holatda barcha kuchlarning va juftlarning barcha o'qlarga nisbatan olingan momentlari [(52) formulaga qarang] nolga teng bo'lishi kerak.

z - o'qini 1 sterjen bo'ylab yo'naltiramiz va unga nisbatan momentlar tenglamasini tuzamiz, $M_z$=M bo'lsa,

$$(N_6\cdot\cos\alpha)h+M=0$$

bu yerda $h=a\sqrt{3}/2$, uchburchakning balandligi. Bu tenglamadan,

$$N_6=-2M/(a\sqrt{3}\cos\alpha)$$

2 va 3 sterjenlar bo'yicha yo'nalgan o'qlar o'tkazib, ularga nisbatan momentlar tenglamasini tuzamiz va ular orqali $N_4$ va $N_5$ larni aniqlaymiz.

Endi uchburchakning AB tomoni bo'yicha yo'nalgan $x$ o'qiga nisbatan momentlar tenglamasini tuzamiz. $M_x$=0 bo'lgani sababli,

$$N_3 h+(N_4\sin\alpha)h=0$$

$N_4=N_6$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$N_3=-N_4\sin\alpha=(2M/a\sqrt{3})\mathrm{tg}\alpha$$

AC va BC o'qlarga nisbatan momentlar tenglamasini tuzish orqali, $N_1$ va $N_2$ larning qiymatlarini aniqlaymiz, $\alpha=30^\circ$ bo'lgani uchun,

$$N_1=N_2=N_3=2M/3a,\quad N_4=N_5=N_6=-4M/3a$$

Aniqlangan natijalar shuni ko'rsatib turibdiki, qo'yilgan juft ta'sirida vertikal sterjenlar cho'zilmoqdalar, og'ma sterjenlar esa siqilmoqdalar.

Yuqoridagi misollardan aniqlandiki, masalalarni yechishda (51) formuladagi muvozanatlik shartlardan foydalanish shart emas ekan. Tekislikda joylashgan kuchlar sistemasi kabi fazoviy kuchlar sistemasi uchun ham bir necha xil muvozanat tenglamalar sistemasi tuzish mumkin ekan, (51) formula esa ularning ko'rinishlaridan biri ekan.

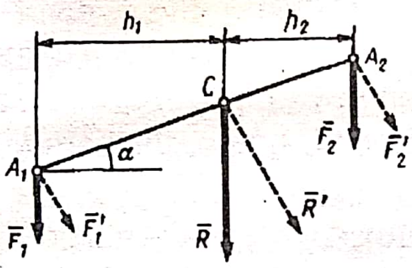
Fazoviy kuchlar sistemasining muvozanatlik sharti uchun, uchburchak prizmaning qirralaridan o'tuvchi oltita o'qlarga nisbatan momentlarning yig'indilari nolga teng bo'lgan tenglamalar sistemasi qanoatlansa, uning muvozanati uchun zaruriy va yetarli hisoblanadi.

44 masalani yechishda oxirgi shartlardan foydalangan edik.

# VIII BOB.
# OG'IRLIK MARKAZI.

## 31§ Parallel kuchlar markazi.

Parallel kuchlarning markazi tushunchasi, mexanika masalalarini yechishda ko'p qo'llaniladi, masalan, jismlarning og'irlik markazlarini aniqlashda.




103 shakl.

$A_1$ va $A_2$ nuqtalarga qo'yilgan ikkita $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlarni olib ko'raylik (103 shakl). Tekislikda yotuvchi bu kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi $\overline{R}=\overline{F}_1+\overline{F}_2$ ga teng bo'lib, uning ta'sir chizig'i berilgan kuchlarga parallel bo'ladi va $A_1A_2$ nuqtalarning orasida joylashgan C nuqtani kesib o'tadi. C nuqtaning o'rnini Varin'on teoremasi yordamida aniqlaymiz. Ushbu teoremaga asosan

$$m_C(\overline{R})=m_C(\overline{F}_1)+m_C(\overline{F}_2) \text{ yoki } 0=F_1h_1-F_2h_2= F_1\cdot A_1C\cdot\cos\alpha-F_2\cdot A_2C\cdot\cos\alpha$$

bo'ladi, bundan

$$F_1\cdot A_1C=F_2\cdot A_2C \tag{54}$$

(54) tenglikda faqat $F_1$ va $F_2$ kuchlarning modullari ishtirok etmoqdalar xolos. Shu sababli, agar $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlarni $A_1$ va $A_2$ nuqtalar atrofida bir tomonga va bir xil burchakka bursak, u holda modullari saqlangan holda yangi ikkita $\overline{F}_1'$ va $\overline{F}_2'$ parallel kuchlar hosil bo'ladi. Demak, $\overline{F}'_1$ va $\overline{F}'_2$ kuchlar uchun (54) tenglik o'rinli bo'ladi va ularning teng ta'sir etuvchisi ham o'sha C nuqtani kesib o'tadi. Shu C nuqtani $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ parallel kuchlarning markazi deb ataladi.

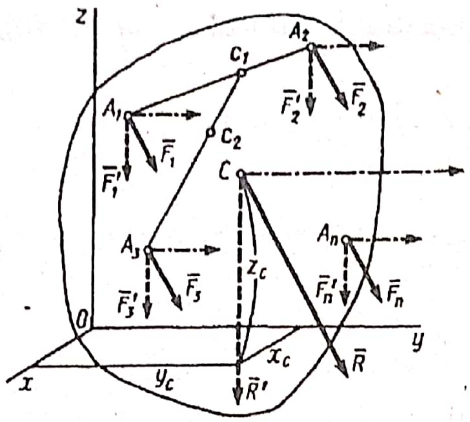
Biror qattiq jismga o'zaro parallel bo'lgan va bir tomonga yo'nalgan $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$,..., $\overline{F}_n$ kuchlar sistemasi, uning $A_1, A_2,.., A_n$ nuqtalariga qo'yilgan bo'lsin. Bunday kuchlar sistemasi $\overline{R}=\sum\overline{F}_k$ -dan iborat bo'lgan teng ta'sir etuvchiga keltiriladi, uning moduli

$$R=\sum F_k \tag{55}$$

formula orqali aniqlanadi.

Agar hamma kuchlarni bir vaqtning o'zida, qo'yilgan nuqtalari atrofida bir tomonga va ma'lum bir burchakka burilsa, u holda modullari o'zgarmagan holda va o'zaro parallel bo'lgan yangi kuchlar sistemasi hosil bo'ladi (masalan, 104 shakldagi punktir bilan tasvirlangan). Har bir shunday burilishda hosil bo'lgan yangi parallel kuchlarning teng ta'sir etuvchisining modullari - R, har doim bir xil bo'lib, yo'nalishlari o'zgaradi xolos.

Quyida shunday burilishlarning barchasida ham teng ta'sir etuvchi kuchning ta'sir chizig'i C nuqtadan o'tishligini isbot qilaylik. Avvalo $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlarni geometrik ravishda qo'shib, ularning teng ta'sir etuvchisi $\overline{R}_1$ kuchlarning qo'yilgan nuqtalarining orasida joylashgan $c_1$ nuqtadan o'tayotganligini ko'ramiz (104 shaklda




104 shakl.

tasvirlanmagan) va u nuqtaning o'rnini (54) formula yordamida aniqlaymiz, ya'ni. $F_1 \cdot A_1c_1 = F_2 \cdot A_2c_2$.

So'ngra $\overline{R}_1$ kuchni $\overline{F_2}$ kuch bilan qo'shib, (54) formula orqali tegishli $c_2$ nuqtaning o'rnini aniqlaymiz, bu nuqta $c_1A_3$ kesmaning orasida joylashgan bo'ladi. Xuddi shunday amallarni davom ettirish natijasida, birin-ketin barcha kuchlarni qo'shib chiqamiz, natijada har safargi burilishda teng ta'sir etuvchi kuch $\overline{R}$ albatta shu C nuqtani kesib o'tishligi isbot qilindi, uning $A_1, A_2, ..., A_n$, nuqtalarga nisbatan o'rni esa o'zgarmas bo'lar ekan.

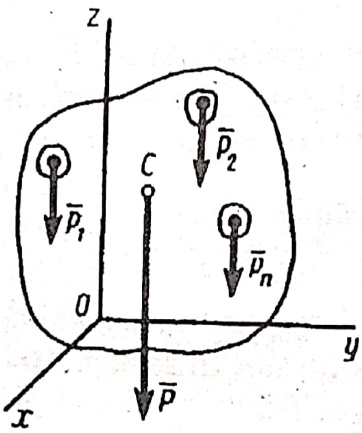
Har qanday bir tomonga yo'nalgan parallel kuchlar sistemasining har-bir tashkil etuvchisi qo'yilgan nuqtalari atrofida, bir tomonga va bir xil burchakka burilganda ham ularning teng ta'sir etuvchisi kesib o'tadigan C nuqta, shu parallel kuchlarning markazi deb ataladi.

Shu markazning koordinatasini aniqlaylik. Yuqorida aytganimizdek, C nuqtaning o'rni o'zgarmaydi va koordinata o'qlarini o'zgarishiga bog'liq ham emas. Shu sababli ixtiyoriy Oxyz koordinata o'qlarini o'tkazamiz. Shu koordinata o'qlardagi kuchlar qo'yilgan $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$,...,$A_n(x_n,y_n,z_n)$ nuqtalarning koordinatalarini belgilab chiqamiz. Kuchlar burilganda C markazning koordinatasi o'zgarmas ekanligidan foydalanib, ularni z - o'qiga parallel bo'lgan holga buramiz. So'ngra burilgan $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$,..., $\overline{F}_n$ kuchlar sistemasiga Varin'on teoremasini qo'llaymiz. Kuchlarning teng ta'sir etuvchisi $\overline{R}'$-ekanligini esda saqlab, (46) formula orqali ularni Oy o'qiga nisbatan momentlarini olamiz.

$$m_y(\overline{R}') = \sum m_y(\overline{F}_k') \qquad (56)$$

Chizmadan [yoki (47) tenglikdan] ma'lumki, $m_y(\overline{R}') = Rx_C$ hamda R=R'; xuddi shu kabi $m_y(\overline{F}_1') = F_1x_1$ chunki F=F' va h.k. Bularni (56) tenglamaga keltirib qo'ysak,

$$Rx_C = F_1x_1 + F_2x_2 + ... + F_nx_n = \sum F_kx_k$$




105 shakl.

bundan $x_C$ - ni aniqlaymiz, $y_C$- ni aniqlash uchun, xuddi shunday amallarni, ya'ni kuchlarning Ox o'qiga nisbatan momentlarining tenglamasini tuzamiz. $z_C$-ni aniqlash uchun barcha kuchlarni Oy o'qiga parallel holga keltirib (shaklda punktir bilan chizilgan) Varin'on teoremasiga asosan, Ox o'qiga nisbatan momentlar tenglamasini tuzamiz. Undan:

$$-Rz_C = -F_1z_1 - F_2z_2 - .... - F_nz_n$$

bu tenglamadan $z_C$ - ni aniqlaymiz.

Nihoyat parallel kuchlarning markazini aniqlash uchun quyidagi tenglamalar sistemasini yozamiz:

$$x_C = \frac{1}{R}\sum F_kx_k; \; y_C = \frac{1}{R}\sum F_ky_k; \; z_C = \frac{1}{R}\sum F_kz_k \qquad (57)$$

bu yerdagi R-teng ta'sir etuvchi kuchning moduli bo'lib, uning son qiymati (55) formula orqali aniqlanadi.

Agar $F_k$-larni kuchlarning algebraik qiymatlari deb hisoblasak, (55) va (57) formulalar berilgan parallel kuchlar qarama-qarshi tomonga yo'nalgan holatlarda ham o'z kuchini saqlaydi (buning uchun bir yo'nalishni musbat, teskari yo'nalishni esa manfiy deb qabul qilish lozim bo'ladi), lekin $R \neq 0$ bo'lishi lozim.

## 32§ Kuch maydoni. Qattiq jismning og'irlik markazi.

Fazoning har-bir nuqtasiga qo'yilgan moddiy zarrachalarning turgan o'rinlariga (koordinatasiga) bog'liq ravishda tegishli kuch ta'sir etuvchi ma'lum bir qismiga *kuch maydoni*[20] deb ataladi. Masalan, yerning tortish kuchidan iborat kuch maydoni shunga misol bo'la oladi (Yerning tortilish kuchi maydoni yoki boshqa osmondagi jismlarning tortilish maydonlari).

Yerning sirtiga yaqin joylashgan har-bir jismning zarrachasiga, yerning markaziga intilgan kuch ta'sir etadi, bu kuchni *og'irlik kuchi* deb ataladi (og'irlik kuchi haqidagi to'laroq ma'lumot, keyinroq 92§-da ko'rib o'tiladi). Bu kuchlar og'irlik kuchining maydonlarini tashkil etadi.

Yerning radiusiga nisbatan o'ta kichkina bo'lgan o'lchamdagi jismlarning zarrachalariga ta'sir qiluvchi kuchlarni o'zaro parallel deb hisoblaymiz va u jismlarni qaysi tomonga aylantirmaylik ularga ta'sir qilayotgan yerning tortish kuchi o'z yo'nalishini o'zgartirmaydi. Yuqoridagi ikki shartga rioya qiluvchi yerning tortishidan iborat *bo'lgan kuch maydon*, bir jinsli og'irlik maydon deb ataladi.

Har bir zarrachaga ta'sir etayotgan $p_1, p_2, ..., p_n$ kuchlarning teng ta'sir etuvchisini $\overline{P}$ - harfi bilan belgilaymiz (105 shakl). Bu kuchning moduli jismning og'irligi deb ataladi va quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$P = \Sigma p_k \tag{58}$$

Jismning ixtiyoriy ravishdagi aylantirilishidan qat'iy nazar uning har-bir zarrachasiga ta'sir qilayotgan og'irlik kuchi vektorlari $\overline{p}_k$- o'zining son qiymati va yo'nalishini o'zgartirmaydi. Demak, 31§-da isbot qilingandek, $\overline{p}_k$-kuchlarning teng ta'sir etuvchisi $\overline{P}$-jismning har qanday holatida ham har doim o'sha C nuqtani kesib o'tadi. Bu nuqta jismning *og'irlik markazi* deb ataladi.

Shunday qilib, jismning og'irlik markazi deb, shu jism bilan bog'liq bo'lgan va jismning har qanday ixtiyoriy holatida ham jism zarrachalarining og'irlik kuchlarining teng ta'sir etuvchi vektorining ta'sir chizig'i kesib o'tadigan markazga aytiladi.

Bunday nuqta (markaz) har doim albatta mavjud bo'lishligi 31§-da isbot qilingan. Parallel kuchlarning markazi, ya'ni og'irlik markazi (57) formula orqali aniqlanadi. Demak,

$$x_C = \frac{1}{P}\sum p_k x_k; \; y_C = \frac{1}{P}\sum p_k y_k; \; z_C = \frac{1}{P}\sum p_k z_k; \tag{59}$$

bu yerda $x_k$, $y_k$, $z_k$ -lar jism zarrachalarining og'irlik kuchlari $\overline{p}_k$-larning qo'yilgan nuqtalarining koordinatalari.

---

[20] Bunday kuch maydoni statsionar deb ataladi. Agar kuchlarning qiymatlari vaqt mobaynida o'zgaruvchan bo'lsa, nostatsionar kuch maydoni deb ataladi. Maydon haqidagi tushuncha boshqa vektorlar uchun ham kiritilishi mumkin, masalan (§48, §51 larga q.) jism nuqtalarining tezlik va tezlanish vektorlari uchun.

Shuni ta'kidlash lozimki, jismning og'irlik markazi joylashgan nuqta, geometrik o'rin bo'lib, u yerda massa yo'q bo'lishi ham mumkin yoki u jismning massasidan tashqaridagi nuqtada bo'lishi ham mumkin [masalan, halqaning, sferik sirtdan iborat jismlarning og'irlik markazi halqa (sfera)ni markazida, bo'shliqda joylashadi].

## 33§ Bir jinsli jismlarning og'irlik markazlarining koordinatalari.

Bir jinsli jismlarning ixtiyoriy olingan zarrachalarining og'irliklari $p_k$ - shu zarrachaning hajmiga to'g'ri proporsional ravishda bo'ladi, ya'ni $p_k = \gamma V_k$ bo'ladi. Jismning umumiy og'irligi uning hajmiga proporsional bo'ladi, ya'ni $P=\gamma V$. Bu yerda $\gamma$-jismning solishtirma og'irligi.

P va $p_k$-larning qiymatlarini (59) formulaga keltirib qo'ysak, suratdagi har bir yig'indida umumiy ko'paytma bo'lgan $\gamma$-ishtirok etadi, agar uni qavsdan chiqarib maxrajdagi $\gamma$ bilan qisqartirib yuborsak, natijada (59) formula quyidagi ko'rinishga keladi:

$$x_C = \frac{1}{V}\sum V_k x_k;\ y_C = \frac{1}{V}\sum V_k y_k;\ z_C = \frac{1}{V}\sum V_k z_k \qquad (60)$$

Ko'rinib turibdiki, agar jismlar bir jinsli bo'lsa, ularning og'irlik markazlari faqat ularning hajmlariga bog'liq bo'lib, ularning solishtirma og'irligi $\gamma$- ga bog'liq emas ekan. Shu C nuqtani (60) formula orqali aniqlanganligi sababli uni *hajmning og'irlik markazi* deb ataladi.

Agar bir jinsli jism bir xil qalinlikdagi yupqa yuzadan tashkil topgan plastinadan iborat bo'lsa, xuddi yuqoridagidek mulohazalar olib borib, ularning og'irlik markazini aniqlash uchun quyidagi formulalarni yozish mumkin:

$$x_C = \frac{1}{S} = \sum S_k x_k;\ y_C = \frac{1}{S} = \sum S_k y_k;\ z_C = \frac{1}{S} = \sum S_k z_k \qquad (61)$$

bu yerda S - jismning umumiy yuzasi, $S_k$-jism qismlarining yuzalari.

Agar jismning og'irlik markazini (61) formulalar orqali aniqlansa, bu markazni *yuzaning og'irlik markazi* deb ataladi.

Agar bir jinsli jism ko'ndalang kesimi bir xil bo'lgan chiziqlardan iborat bo'lsa, yuqoridagi kabi mulohazalar yuritib, unday jismlarning og'irlik markazini aniqlash uchun quyidagi formulalarni yozamiz,

$$x_C = \frac{1}{L}\sum l_k x_k;\ y_C = \frac{1}{L}\sum l_k y_k;\ z_C = \frac{1}{L}\sum l_k z_k \qquad (62)$$

bu yerda L- chiziqning umumiy uzunligi, $l_k$- chiziqning bo'laklarining uzunligi.

Ushbu (62) formula orqali ingichka simdan tashkil bo'lgan jismlarning og'irlik markazlarini hisoblash mumkin.

Shunday qilib, bir jinsli jismlarning og'irlik markazlarini aniqlash, hajmning, yuzaning yoki *chiziqning og'irlik markazlarini* aniqlashdan iborat bo'lar ekan.

## 34§ Jismlarning og'irlik markazlarining koordinatlarini aniqlash

Yuqorida keltirib chiqarilgan formulalarga asoslangan holda, turli jismlarning og'irlik markazlarini aniqlashning konkret usullarini ko'rib chiqamiz.

1. S i m m e t r i y a. Agar bir jinsli jism simmetriya tekisligi, o'qi va nuqtasiga ega bo'lsa, bu jismning og'irlik markazi shu tekislikda, o'qda va nuqtada joylashadi.

Masalan, bir jinsli jism simmetriya tekisligiga ega bo'lsin. U holda jism shu tekislik orqali, og'irliklari o'zaro teng bo'lgan ($p_1=p_2$) ikkita bir xil bo'lakka ajraladi. Shu sababli ikkita bir xil og'irlikka ega bo'lgan jismning umumiy og'irlik markazi, albatta, shu simmetriya tekisligida yotadi. Xuddi shunday xulosalarni simmetriya o'qi va nuqtasi uchun tasdiqlashimiz mumkin.

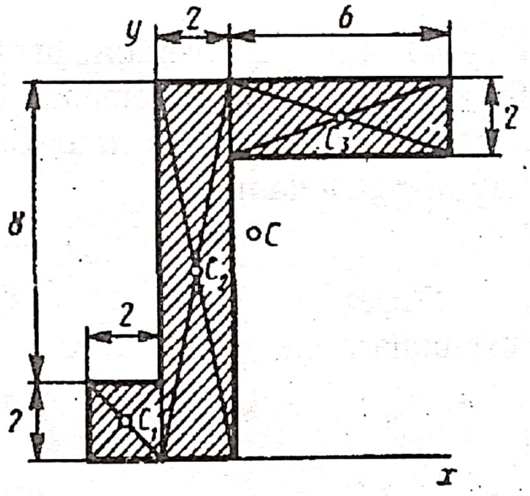
Simmetriyaning xossasiga ko'ra: bir jinsli halqaning, yumaloq yoki to'g'ri burchakli plastinaning, to'g'ri burchakli parallelopipedning, sharning va boshqa bir jinsli simmetrik jismlarning og'irlik markazlari, ularning geometrik markazlarida joylashadi (simmetriya markazida yotadi).

2. B o' l a k l a r g a a j r a t i s h. Agar bir jinsli jismni, og'irlik markazlari aniq bo'lgan bir necha oddiy qismlarga ajratish mumkin bo'lsa, bu jismning og'irlik markazini koordinatalari (59)-(62) formulalar orqali hisoblanadi. Ushbu formulalardagi yig'indilar soni, jismning bo'lingan qismlar soniga teng bo'ladi.

**45 masala.** 106 shakldа tasvirlangan bir jinsli plastina og'irlik markazining koordinatalari hisoblansin. Hamma o'lchamlar santimetrlarda berilgan.

Yechish. Koordinata o'qlarini o'tkazamiz va plastinani uchta to'g'ri to'rtburchakdan iborat qismlarga ajratib yuboramiz (har bir bo'lakning o'lchamlari chizmada ko'rsatilgan). Har bir to'g'ri to'rtburchakning og'irlik markazlarining koordinatalarini va ularning yuzalarini hisoblab jadvalga yozib chiqamiz.

| № | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $x_k$ | —1 | 1 | 5 |
| $y_k$ | 1 | 5 | 9 |
| $s_k$ | 4 | 20 | 12 |




106 shakl

Plastinaning umumiy yuzasi:

$$S=S_1+S_2+S_3=36sm^2.$$

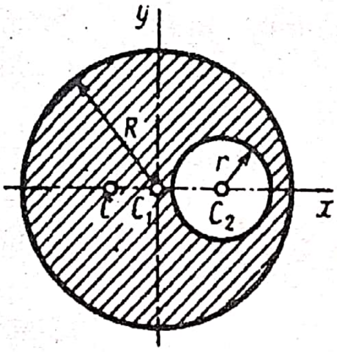
Aniqlangan qiymatlarni (61) formulaga qo'yib, quyidagilarni aniqlaymiz:

$$x_C=\frac{x_1S_1+x_2S_2+x_3S_3}{S}=\frac{-4+20+60}{36}=2\frac{1}{9}sm,$$

$$y_C=\frac{y_1S_1+y_2S_2+y_3S_3}{S}=\frac{4+100+108}{36}=5\frac{8}{9}sm.$$

Og'irlik markazining aniqlangan o'rni shaklda ko'rsatilgan; C markaz plastinadan tashqarida joylashar ekan.

3. Q o' sh i m ch a. Bu usul bo'laklarga ajratish usulining xususiy holi bo'lib hisoblanadi. Bu usul tarkibida bo'shliq (massasi yo'q) qismlarga ega bo'lgan hollarda foydalaniladi, bo'shliq qismlarning o'lchamlari ko'rsatilgan bo'lishi shart.



107 shakl.

**46 masala.** Radiusi R va r -radiusli teshigi bo'lgan yumaloq plastinaning og'irlik markazi aniqlansin (107 shakl) $C_1C_2=a$.

Yechish. $C_1C_2$ o'q simmmetriya o'qi bo'lganligi sababli, uning og'irlik markazi shu o'qda joylashadi. Koordinata o'qlarini o'tkazamiz, $x_C$ - koordinataning o'rnini aniqlash uchun teshikning o'rnini to'ldiramiz (1 qism). So'ngra umumiy yuzadan teshikning yuzasini ayirib tashlaymiz (2 qism). 2 qism (teshik)ning yuzasi manfiy ishorali bo'ladi. U holda $S_1=\pi R^2$, $S_2=-\pi r^2$, $x_1=0$, $x_2=a$, $S=S_1+S_2=\pi(R^2-r^2)$. Bu qiymatlarni (61) formulaga qo'yib C markazning koordinatalarini hisoblaymiz,

$$x_C=\frac{x_1S_1+x_2S_2}{S}=-\frac{ar^2}{R^2-r^2};\qquad y_C=0;$$

4. I n t e g r a l l a s h. Agar jismni bir nechta oddiy figuralarga (qismlarga) ajratishnini iloji bo'lmasa, u holda jismni elementar $\Delta V$ - hajmlarga ajratib yuboramiz. U holda (60) formula quyidagi ko'rinishga keladi,

$$x_C=\frac{1}{V}\sum x_k\Delta V_k \tag{63}$$

bu yerda $x_k$, $y_k$, $z_k$ - jismning har bir $\Delta V_k$ bo'lagining koordinatalari. So'ngra (63) formuladagi $\Delta V\to 0$, elementar hajmlarni nuqtalarga aylantiramiz va integralga o'tamiz. U holda (63) formuladagi yig'indilar integralga aylanadilar va quyidagi ko'rinishga keladi,

$$x_C=\frac{1}{V}\int_V x dV_k;\quad y_C=\frac{1}{V}\int_V y dV_k;\quad z_C=\frac{1}{V}\int_V z dV_k \tag{64}$$

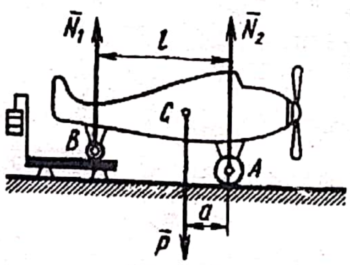
Yuzaning va chiziqning og'irlik markazining koordinatalari uchun, shu kabi formulalarni keltirib chiqaramiz,

$$x_C=\frac{1}{S}\int_{(S)} xds\quad y_C=\frac{1}{S}\int_{(S)} yds;\quad z_C=\frac{1}{S}\int_{(S)} zds; \tag{65}$$

va

$$x_C=\frac{1}{L}\int_{(L)} xdl;\quad y_C=\frac{1}{L}\int_{(L)} ydl;\quad z_C=\frac{1}{L}\int_{(L)} zdl; \tag{66}$$

Ushbu formulalar orqali og'irlik markazlarini aniqlash tartibini quyidagi masalalarda ko'rib o'tamiz.



108 shakl.

5. *Eksperimental usul.* Bir jinsli bo'lmagan murakkab konfigurasiyali jismlarning (samolyot, parovoz, avtomobil va b.) og'irlik markazlarini eksperimental usulda aniqlanadi. Ulardan biri (osib qo'yish usuli) shundan iboratki, jismning bir nechta nuqtalaridan ipga yoki trosga osib qo'yiladi. Har safar ipning yo'nalishi og'irlik markazining yo'nalishini

belgilaydi, shu chiziqlarning kesishgan nuqtasi jismning og'irlik markazi hisoblanadi.

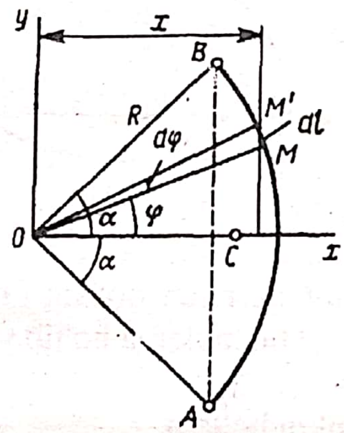
Eksperimental usulning boshqa ko'rinishi tortib ko'rish orqali aniqlanadi. Bu usulning mohiyati quyidagi misolda ko'rib o'tiladi.

**Misol.** Samolyotning og'irlik markazining koordinatasini eksperimental usulda aniqlash. AB=$l$ ma'lum bo'lsin. (108 shakl). Samolyotning B g'ildiragini tarozining platformasiga o'rnatamiz; natijada samolyotning platformaga bo'lgan bosim kuchini aniqlaymiz va uning reaksiyasini $N_1$ bilan belgilaymiz. So'ngra A nuqtasini taroziga qo'yib, uning reaksiya kuchini aniqlab $N_2$ bilan belgilaymiz. Samolyotning og'irlik markazi A nuqtadan $a$ (hozircha noma'lum qiymatli) masofada joylashganligi uchun shu nuqtaga nisbatan momentlarning yig'indisni nolga tenglaymiz, ya'ni $N_2a-N_1(l-a)=0$ bo'ladi. Bundan $a=lN_1/(N_1+N_2)$ ni aniqlaymiz.

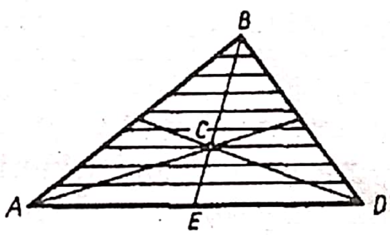
$N_1+N_2=P$ bo'lib, P- samolyotning umumiy og'irligi. Agar samolyotning og'irligi oldindan ma'lum bo'lsa, u holda $a$ - masofani aniqlash uchun, bir marta tortish kifoya qiladi.

### 35§ Ba'zibir bir jinsli jismlarning og'irlik markazlari.

1. Aylana yoyining og'irlik markazi. R - radiusli aylananing markaziy



109 shakl



110 shakl

burchagi ∠AOB=2α teng bo'lgan AB yoyining og'irlik markazini aniqlash kerak bo'lsin. AB yoy simmetriya o'qiga ega bo'lganligi uchun, og'irlik markazi shu o'qda yotadi (109 shakl). Koordinata o'qlarini o'tkazamiz, x o'qini simmetriya chizig'i bo'ylab yo'naltiramiz, $x_S$ - ni qiymatini (66) formula orqali aniqlaymiz. AB yoydan uzunligi $dl=Rd\varphi$ bo'lgan elementar MM' yoycha ajratib olamiz, uning o'rni φ burchak orqali belgilanadi. Elementar yoy MM'-ni to'g'ri chiziq deb faraz qilsak, uning og'irlik markazi shu yoyning o'rtasida joylashgan bo'ladi, uning x -o'qidagi koordinatasi $x=R\cos\varphi$ formula orqali aniqlanadi. Ushbu x va $dl$-ning qiymatlarini (66) formulaga keltirib qo'yamiz, hamda integralning chegarasini butun yoy bo'yicha olamiz, natijada

$$x_C=\frac{1}{L}\int_{(L)}x\,dl=\frac{R^2}{L}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi\, d\varphi=2\frac{R^2}{L}\sin\alpha,$$

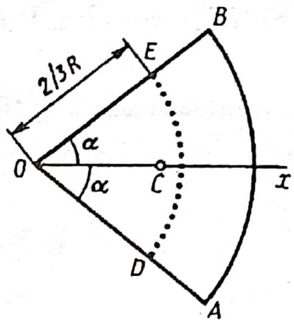
bu yerda L - AB yoyning uzunligi bo'lib, L= R·2α. Bu qiymatni oxirgi tenglamaga qo'ysak,

$$x_C = R\frac{\sin\alpha}{\alpha} \tag{67}$$

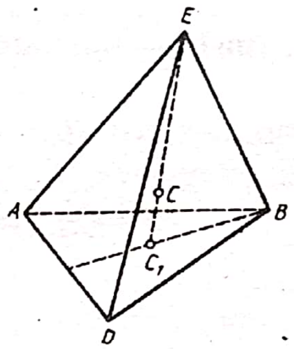
bo'ladi, natijada yoyning og'irlik markazini o'rni aniqlanadi. Demak, aylana yoyining og'irlik markazi C, uning simmetriya o'qida joylashgan bo'lib, uning geometrik markazi O nuqtada (67) formula orqali aniqlangan masofada yotar ekan.

2. U ch b u r ch a k  yu z a s i n i n g  o g' i r l i k  m a r k a z i. ABD uchburchakning yuzasini (110 shakl), AD tomoniga parallel bo'lgan n-ta ingichka kesmalardan iborat bo'lgan bo'laklarga ajratib yuboramiz. U holda bu kesmalarning og'irlik markazlari BE medianada yotadi. Xuddi shunday mulohazani boshqa ikkita mediana uchun ham isbot qilish mumkin. Natijada, xulosa qilib shuni aniqlaymizki, uchburchakning yuzasini og'irlik markazi, medianalarning uchrashgan nuqtasida joylashadi. Geometriyadan ma'lumki

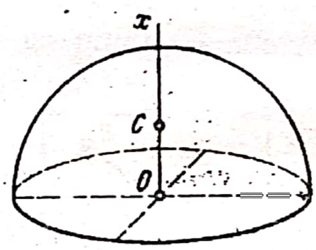
$$CE=BE/3 \tag{68}$$



111 shakl.



112 shakl.



113 shakl.

3. *Doira sektori yuzasining og'irlik markazi.* Markaziy burchagi -2α, radiusi R-ga teng bo'lgan OAB doiraviy sektor berilgan bo'lsin (111 shakl). Sektorning yuzasini *n*-ta mini-sektorlardan iborat bo'laklarga bo'lib yuboramiz. Mini-sektorlarning sonini cheksiz orttirib borsak, ularning har birini mini uchburchakdan iborat yuzalar deb qarash mumkin bo'ladi.

Ushbu uchburchaklarning har birini og'irlik markazlari medianalarining kesishgan nuqtalarida yoki O markazdan 2R/3 masofada joylashadi. Bunday markazlarni birlashtirsak radiusi 2R/3 bo'lgan DE yoy hosil bo'ladi. Demak, OAB doiraviy sektorning og'irlik markazi, DE yoyning (67) formula orqali aniqlanadigan markazida joylashar ekan, ya'ni: doiraviy sektor yuzasining og'irlik markazi - C, simmetriya o'qida joylashib, uning O markazidan

$$x_C = \frac{2}{3}\cdot\frac{R\sin\alpha}{\alpha} \tag{69}$$

masofada yotar ekan.

Isbot qilishni qoldirgan holda, quyidagi ikkita muhim natijani keltiramiz.

4. *Piramida (yoki konus) hajmining og'irlik markazi* (112 shakl). Uning og'irlik markazi C, $C_1E$ to'g'ri chiziqda joylashgan bo'lib, $C_1$ nuqta, piramidaning asosini og'irlik markazidan iborat nuqta; hamda,

$$CC_1=EC_1/4 \tag{70}$$

bo'ladi. Ushbu natija ixtiyoriy ko'pburchakli piramida va konuslar uchun o'rinlidir.

5. *Yarim shar hajmining og'irlik markazi.* Uning og'irlik markazi C, Ox - o'qida (simmetriya o'qida, 113 shakl) joylashgan bo'ladi va koordinatasi,

$$x_C = OC = \frac{3R}{8} \tag{71}$$

R - yarim sharning radiusi.

Bundan tashqari turli xil bir jinsli geometrik figuralarning og'irlik markazlarini aniqlash formulalari texnikaga oid maxsus spravochniklarda keltirilgan.