§ 11. Умножение обобщенных функций на функцию

В данной работе мы ограничимся умножением обобщенной функции $\boxed{1}$ на бесконечно дифференцируемую функцию $\boxed{2}$ Под произведением $\boxed{3}$ мы понимаем обобщенную функцию $\boxed{4}$ где $\boxed{5}$

Для проверки корректности этого определения достаточно показать следующее:

1°. Последовательность $\boxed{6}$ является фундаментальной.

2°. Из соотношения $\boxed{7}$ вытекает, что $\boxed{8}$

Существуют функции $\boxed{9}$ и целое число $\boxed{10}$ такие, что $\boxed{11}$ Последовательность

$$\omega(x)\, F'_n(x) = (\omega\,(x)\, F_n(x))' - \omega'\,(x)\, F_n(x)$$

фундаментальна как разность двух последовательностей, фундаментальных в силу лемм 2.2 и 2.1. По той же причине фундаментальна и последовательность $\boxed{12}$ а тогда фундаментальна также последовательность

$$\omega\,(x)\, F''_n\,(\lambda) = (\omega\,(x)\, F'_n\,(x))' - \omega'(x) F'_n\,(x).$$

Тем же самым рассуждением убеждаемся в том, что последовательности $\boxed{13}$ фундаментальны. Таким образом, последовательность $\boxed{14}$ фундаментальная.

Для. доказательства 2° заметим, что из эквивалентности фундаментальных последовательностей

$$f_1\,(x),\;\; f_2\,(x),\;\ldots \quad \text{и} \quad g_1\,(x),\;\; g_2\,(x),\;\ldots$$

по лемме 3.2 вытекает, что последовательность

$$f_1(x),\;\; g_1(x),\;\; f_2(x),\;\; g_2(x),\;\ldots$$

фундаментальна. Тогда, по пункту $\boxed{15}$ будет фундаментальной последовательность

$$\omega\,(x)\, f_1(x),\;\; \omega\,(x)\, g_1(x),\;\; \omega\,(x)\, f_2(x),\;\; \omega\,(x)\, g_2(x),\;\ldots,$$

а значит в силу леммы 3.2 последовательности

$$\omega\,(x)\, f_1\,(x),\;\; \omega\,(x)\, f_2\,(x),\;\ldots \quad \text{и} \quad \omega\,(x)\, g_1\,(x),\;\; \omega\,(x)\, g_2\,(x),\;\ldots$$

эквивалентны.

Непосредственно из определения вытекают следующие обычные свойства умножения:

$$\omega_1(x)\,(\omega_2(x)\ \ f(x)) = (\omega_1(x)\,\omega_2(x))\,f(x),$$
$$(\omega_1(x) + \omega_2(x))\,f(x) = \omega_1(x)\,f(x) + \omega_2(x)\,f(x),$$
$$\omega(x)\,(f(x) + g(x)) = \omega(x)\,f(x) + \omega(x)\,g(x).$$

Если $\boxed{16}$ является функцией, то определенное выше произведение оказывается обычным произведением функций. Кроме того, если $\boxed{17}$ постоянная функция, $\boxed{18}$ произвольная обобщенная функция, то введенное здесь произведение совпадает с произведением, определенным в § 5.

Предполагая, что функции $\boxed{19}$ в определении умножения являются полиномами, легко доказать формулу

$$(1)\qquad (\omega(x)\,f(x))' = \omega'(x)\,f(x) + \omega(x)\,f'(x).$$

Эту формулу можно рассматривать как частный случай (при $\boxed{20}$ формулы

$$(2)\qquad \omega(x)\,f^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\,(\omega^{(j)}(x)\,f(x))^{(k-j)},$$

которая может быть доказана по индукции, как и для обычных функций.

Из последней формулы, заменяя $\boxed{21}$ непрерывной функцией $\boxed{22}$ получаем

$$(3)\qquad \omega(x)\,f(x) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(\omega^{(j)}(x)\,F(x))^{(k-j)},$$

где

$$f(x) = F^{(k)}(x).$$

Поскольку под знаком суммы стоят произведения непрерывных функций, правая часть последней формулы имеет вполне определенный смысл, даже если не введено понятие умножения обобщенной функции на функцию. Поэтому формулу (3) можно использовать как другое определение произведения $\boxed{23}$

В качестве применения формулы (1) докажем формулу

$$\omega(x)\,\delta(x) = \omega(0)\,\delta(x).$$

Действительно, легко проверить, что

$$\int_0^x \omega'(t)\,H(t)\,dt = (\omega(x) - \omega(0))\,H(x).$$

Дифференцируя в обобщенном смысле, получаем

$$\omega'(x)\,H(x) = \omega'(x)\,H(x) + (\omega(x) - \omega(0))\,\delta(x),$$

откуда и вытекает формула (4).

Полагая в формуле $\boxed{24}$ получаем, согласно формуле (4):

$$\omega(x)\,\delta^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \omega^{(j)}(0)\,\delta^{(k-j)}(x).$$

$\boxed{25}$ то $\boxed{26}$ Более общий случай: если $\boxed{27}$ для $\boxed{28}$ то $\boxed{29}$

Действительно, в силу формулы (3) имеем $\boxed{30}$

$$\omega_n(x)\,f_n(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (\omega_n^{(j)}(x)\,F_n(x)^{(k-j)}),$$

где $\boxed{31}$ выражение в правой части этой формулы стремится к выражению в правой части формулы (3), а следовательно, то же самое имеет место и для левых частей. Таким образом, второе утверждение леммы 11.1 доказано. Первое утверждение является частным случаем второго.

11.2. Формула

$$\omega(x) \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega(x)\,f_n(x)$$

справедлива всякий раз, когда сходится ряд обобщенных функций в левой части.

Эта лемма вытекает из 11.1.

Следующая лемма является непрерывным аналогом леммы $\boxed{32}$