O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI
GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI

MATEMATIKA KAFEDRASI

«XUSUSIY HOSILALI TENGLAMALARI » fanidan o‘quv-uslubiy

M A J M U A

«5130100 - matematika »

ta’lim yo‘nalishi bakalavr talabalari uchun

GULISTON-2021

Raxmonov Jamshidbek Turdaliyevich «Xususiy hosilali tenglamalar» fanidan o‘quv – uslubiy majmua («5130100 - matematika» ta’lim yo‘nalishi bakalavr talabalari uchun). O‘quv-uslubiy majmua. – Guliston: GulduDU nashri, 2021. – 479 bet.

« **Xususiy hosilali tenglamalar** » fanidan ushbu o‘quv – uslubiy majmua Guliston davlat universitetining «Differentsial tenglamalar» kafedrasida tayyorlangan.

Majmua « Xususiy hosilali tenglamalar » fanini o‘rganish jarayonida talabaning mustaqil ishlashini ta’minlovchi o‘quv-uslubiy materiallarni o‘z ichiga oladi hamda talaba olgan bilimining sifatini doimo nazorat qilishni ta’minlaydi.

MUNDARIJA

XUSUSIY HOSILALI TENGLAMALAR FANINIG NAMUNAVIY FAN DASTURIGA MOS ISHCHI DASTURI

1.**KIRISh**

Matematik fizika masalalarining doirasi nixoyatda keng, ular turli fizik, mexanik, texnik, biologik va boshqa jaranlarni oʻrganish bilan uzviy bogʻliqdir.

Oliy ta’lim tizimda yuksak malakali ijodkorlik va tashabuskorlik qobiliyatga ega, kelajakda kasbiy va hayotiy muammolarni mustaqil hal qiladigan, ya’ni texnika va texnologiyalarga tez moslanishi layoqatli kadrlarni tayyorlashda ta’lim jarayonini zamonaviy oʻquv metodik muammolar bilan ta’minlash muhim axamiyatga ega.

Xususiy xosilali differentsial tenglamalari fanidan oʻquv-uslubiy (metodik) majuma (OʻMM) davlat ta’lim standarti va fan dasturida belgilangan talabalar tomonidan egallanishi lozim boʻlgan bilim, koʻnikma, malaka va kompetentsiyalarni shaklantirishni, oʻquv jarayonini kompleks loyixalash asosida kafolatlangan natijalarni olishni mustaqil bilim olish va oʻrganishni hamda nazoratni amalga oshirishni taminlaydigan talabaning ijodiy qobiliyatini rivojliantirishga yoʻnaltirilgan oʻquv uslubiy manbalar, didaktik vositalar va materiallar, elektron ta’lim resurslari, oʻqitish taxnologiyasi, baxolash metodlari va mezonlari oʻz ichiga oladi.

1.1. Fanning maqsadi va vazifalari

Xususiy xosilali differentsial tenglamalari fanning oʻqitishda maqsad, bakalavr yoʻnalishi malakaviy tavsifnoma talabalarga binoan talaba oʻzi tanlagan soha tadbiqiy matematika boʻyicha etuk mutaxassis boʻlishligi uchun talaba turli fizik jarayonlarni matematik masala koʻrinishda modellashtira olishi, hisob kitob qila olishi nazariy bilimlarni amaliyotga tadbiq qilaolishi, standart va nostandart masalalarni echa olishi oliy matematikaning soʻngi yutuqlaridan biri umulashgan funktsiyalar nazariyasini chegaraviy masalalarni yechishga qoʻllashni bila oladigan bilim va koʻnikmalar oʻrganishdir.

1.2. Fanni oʻzlashtirgan talabaning malakaviy darajalari

Fanni oʻzlashtirgan talaba.

- oddiy differentsial tenglamalar hamda xususiy xosilali differentsial tenglamalar ularning yechimi haqida mustaqil fikr yuritish,

- ikkiinchi tartibli xususiy xosilali differentsial tenglamalarni tiplariga ajratish klassifikatsiyalash bilishi,

-tenglamalarning tipiga va sohaning koʻrinishga qarab korrekt qoʻyilgan chegaraviy masalalarni ajratib olishi,

-koshi masalasi, Dirixle va Neyman masalalari shuningdek boshqa chegaraviy masalalarning yechimi mavjudligi va yagonaligi koʻrsata olishi,

-chegaraviy masalalarni yechishning zamonaviy usullari toʻliq boʻlishini toʻliq oʻrganadi.

- statsionar va nostatsionar jarayonlarni farqlay oladi va tegishli muloxazalarga yuritib chegaraviy masala koʻrinishda modellashtira oladi.

Fanning oʻquv rejasidagi fanlar bilan bogʻliqligi

Xususiy xosilali differentsial tenglamalari matematik analiz, funktsional analiz oddiy differentsial tenglamalar, analitik geometriya komplek analiz kabi fanlar bilan oʻzaro bogʻliqligini va bir birlarining rivojlanishiga faol ta’sir koʻrsatishini shaklantirish lozim boʻladi.

1.4. Fanni o‘qitishda pedagogik va axborot texnologiyalaridan foydalanish

Fanni o‘qitishda talabalarning bilimini reyting nazorati tizimini qo‘llab aniqlashga asoslangan zamonaviy pedagogik texnologiyalar qo‘llaniladi Talabalarga ushbu fanni o‘qitishda kompyuter texnologiyasidan, Internet ma’lumotlaridan ma’ruza materiallari sifatida, amaliy mashg‘ulotlarda hamda test savollari to‘plamidan foydalanish tavsiya etiladi.

Fandan o‘tiladigan mavzular va ular bo‘yicha mashg‘ulot turlariga ajratilgan soatlarning taqsimoti

TG ’r	Fanning bo‘limi va mavzusi, ma’ruza mazmuni	Jami	Ma’ruza	Amaliy mashg‘ulot
1	Xususiy hosilali differentsial tenglamalar (x.h.d.t) va ularning yechimi to‘g‘risida tushunchalar. Xarakteristik forma tushunchasi ikkinchi tartibli differentsial tenglarining klassifikatsiyasi va kanonik ko‘rinishi.	**4**	2	2
2	Yuqori tartibli differentsial tenglamalar va sistemalarining klassifikatsiyasi.Ikkinchi tartibli ikki o‘zgaruvchili differetsial tenglamalarni kanonik ko‘rinishga keltirish	**4**	2	2
3	Matematik fizikaning asosiy tenglamalarini keltirib chiqarish: Tor tebranishi tenglamasi.Issiqlik tarqalishi tenglamasi. Statsionar tenglamalar: Moddiy nuqtaning og‘irlik kuchi ta’siridagi harakati	**4**	2	2
4	Matematik fizika tenglamalari uchun asosiy masalalarni qo‘yilishi. Koshi masalasi.	**4**	2	2
5	Chegaraviy masalalar va boshlang‘ich chegaraviy masalalar. Koshi masalasi va uni qo‘yilishida xarakteristikalarning roli. Korrekt qo‘yilgan masala tushunchasi.	**4**	2	2
6	**Giperbolik tipdagi tenglamalar**. Tor tebranish tenglamasi. Dalamber formulasi. Dalamber formulasi bilan aniqlangan yyechimning fizik ma’nosi. Chegaralangan tor.	**4**	2	2
7	To‘lqin tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimining yagonaligi. Koshi masalasi yechimini beradigan formulalar va ularni tekshirish. Gyugens printsipi.	**4**	2	2
8	To‘lqinlarning diffuziyasi.Bir jinsli bo‘lmagan to‘lqin tenglamasi. Kyechikuvchan potentsial. Gursa masalasi.Asgeyrson printsipi.	**4**	2	2
9	*Qo‘shma differentsial operatorlar. Riman usuli. Aralash*	**4**	2	2

	masalalar			
10	*Tor tebranish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalani Fure usuli bilan yechish.* Xos sonlar va xos funktsiyalar masala yechiimining yagonaligi	**4**	2	2
11	Bir jinsli bo‘lmagan tenglama. To‘g‘ri to‘rtburchakli membrana tebranish tenglamasi uchun aralash masalani yechish	**4**	2	2
12	Parabolik tipdagi tenglamalar. Issiqlik tarqalish tenglamasi. Ekstremum printsipi.	**4**	2	2
13	Birinchi chegaraviy masala yechimining yagonaligi. Koshi masalasi va uning yechimi yagonaligi va turg‘unligi.	**4**	2	2
14	Fundamental yyechim.Koshi masalasi yechimining mavjudligi. Bir jinsli bo‘lmagan tenglama uchun Koshi masalasi.	**4**	2	2
15	Bir o‘lchovli isssiqlik tarqalish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalani Fure usuli bilan yechish. Bir jinsli bo‘lgan va bir jinsli bo‘lmagan hol. Koshi masalasini Fure usuli bilan yechish.	**4**	2	2
16	Elliptik tipdagi tenglamalar Garmonik funktsiyalar.Laplas tenglamasining fundamental yechimi. Grin formulalari. S^2 sinf funktsiyalari va garmonik funktsiyalarning integral ifodasi.	**4**	2	2
17	O‘rta qiymat haqida teorema. Ekstremum printsipi va undan kelib chiqadigan ayrim natijalar. Kelvin teoremasi. Kelvin almashtirishi	**4**	2	2
18	Laplas tenglamasi uchun Dirixle va Neyman masalalari qo‘yilishi va ular yyechimlarining yagonaligi. Dirixle masalasining Grin funktsiyasi va uning xossalari.	**4**	2	2
19	Dirixle masalasining shar uchun yechilishi. Sharning tashqarishi uchun Dirixle masalasi	**4**	2	2
20	O‘rta qiymat haqidagi teoremaga teskari teorema.Chetlashtiriladigan maxsuslik haqidagi teorema. Garnak tengsizligi. Liuvall va Garnak teoremalari. Doira uchun Drixle masalasini Fure usuli bilan yechish.	**4**	2	2
21	**Potentsiallar nazariyasi.** Potentsiallar tushunchasi va ularning fizik ma’nosi. Parametrga bog‘liq bo‘lgan xosmas integrallar.Hajm potentsiali. Lyapunov sirtlari va egri chiziqlari. Teles burchak. Gauss integrali.	**6**	2	2
22	Ikkilangan qatlam potentsiali. Oddiy qatlam potentsiali va uning normal xosilasi.	**4**	2	2
23	Chegaraviy masalalarni potentsiallar yordamida integral tenglamalarga keltirishi. Xususiy hosilali differentsial tenglamalar yechimining silliqligining xususiyati to‘g‘risida.	**4**	2	2
	Jami	**94**	**46**	**46**

Amaliy mashg‘ulotlar (48 soat)

T/r	Mazular nomlanishi	Jami soati

1	**Xususiy hosilali differentsial tenglamalar va ularning klassifikatsiyasi**	**2**
2	**Ikki o‘zgaruvchili ikkinchi tartibli xususiy hosilali differentsial tenglamalarni klassifikatsiyalash va kanonik ko‘rinishga keltirish.**	**4**
3	**Giperbolik tipdagi tenglamalarning umumiy yyechimlarini topish**	**4**
4	**To‘lqin tenglamasi uchun Koshi masalasi**	**4**
5	**Giperbolik tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar yechish usullari: berilganlarni davom ettirish usuli.**	**2**
6	**Riman funksiyasi**	**2**
7	**Chegaraviy masalalarni Fur’ye usuli bilan yechish.**	**4**
8	**Giperbolik tipdagi tenglama yechimining xossalarini tekshirish**	**2**
9	**To‘lqin tarqalish tenglamasi uchun ba’zi masalalarning korrektligi.**	**2**
10	**Parabolik tipdagi tenglamalar uchun Koshi masalasi.**	**2**
11	**Asosiy chegaraviy masalalarni berilganlarni davom ettirish usuli bilan yechish.**	**2**
12	**Chegaraviy masalalarni Fure usuli bilan yechish.(Parabolik tipdagi tenglamalar bo‘lgan hol.).**	**4**
13	**Garmonik funktsiyalar va ularning xossalariga oid masalalar.**	**2**
14	**Laplas tenlamasi uchun doirada Dirixle va Neyman masalalari.**	**2**
15	**Laplas va Puasson tenlamalari uchun sharda Dirixle va Neyman masalalarini yechish.**	**2**
16	**Garmonik funktsiyalar uchun ba’zi masalalar.**	**2**
17	**Potentsiallar.**	**2**
18	**Elliptik tenglama yechimining xossalari.**	**2**
	Jami	**46**

2. O‘quv materiallari mazmuni

2.1. Ma’ruza mashg‘ulotlari mazmuni (jami 46 soat)

2.1.1. Xususiy hosilali differentsial tenglamalar (x.h.d.t) va ularning yechimi to‘g‘risida tushuncha. **(2 soat)** [A1, 7-12; Q2, 3-18; A3,3-16]

2.1.2. Xarakteristik forma tushunchasi ikkinchi tartibli differentsial tenglarining klassifikatsiyasi va kanonik ko‘rinishi **(2 soat).**
[A1, 13-30; A2.16-45; Q3.16-48; A6, 15-35; A3.13-25].

2.1.3. Ikkinchi tartibli ikki o‘zgaruvchili differetsial tenglamalarni kanonik ko‘rinishga keltirish **(2 soat).**
[A1, 13-30; A2.16-45; Q3.16-48; A6, 15-35; A3.70-82].

2.1.4. Matematik fizika tenglamalari uchun asosiy masalalarni qo‘yilishi. Koshi masalasi. Top tebranishi tenglamasi.
Issiqlik tarqalishi tenglamasi. **(2 soat)** [A1, 24-34; Q3.45-55].

2.1.5. Ikkinchi tartibli x.h.d.t.lar uchun chegaraviy masalalarning qo‘yilishi. **(2 soat).** [A1, 44-50; Q3.70-82;].

2.1.6. Elliptik tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar. **(2 soat).** [A1, 51-58, Q3.86-89].

2.1.7. To‘lqin tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimining yagonaligi. Koshi masalasi yechimini beradigan formulalar va ularni tekshirish. Gyugens printsipi. **(2 soat).**
[A1, 55-58 ; Q4.65-68;].

2.1.8. To‘lqinlarning diffuziyasi.Bir jinsli bo‘lmagan to‘lqin tenglamasi. Kyechikuvchan potentsial. Gursa masalasi.Asgeyrson printsipi.

To‘lqinlarning diffuziyasi.Bir jinsli bo‘lmagan to‘lqin tenglamasi. Kyechikuvchan potentsial. Gursa masalasi.Asgeyrson printsipi.

. **(2 soat).** [A1, 58-61; Q3.102-128].

2.1.9. *Qo‘shma differentsial operatorlar. Riman usuli. Aralash masalalar* **(2 soat).**

[A1.144-122; Q3.118-128;].

2.1.10. *Tor tebranish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalani Fure usuli bilan yechish.* Xos sonlar va xos funktsiyalar masala yechimining yagonaligi. **(2 soat).**

[A1, 125-130, Q3.129-132;].

2.1.11. Bir jinsli bo‘lmagan tenglama. To‘g‘ri to‘rtburchakli membrana tebranish tenglamasi uchun aralash masalani yechish. **(2 soat).**

[A1,139-142, Q.3. 133-140].

2.1.12. Parabolik tipdagi tenglamalar. Issiqlik tarqalish tenglamasi. Ekstremum printsipi. **(2 soat).** [A.1, 145-148. Q.3. 142-146].

2.1.13. Birinchi chegaraviy masala yechimining yagonaligi. Koshi masalasi va uning yechimi yagonaligi va turg‘unligi.. **(2 soat).**

[A.1, 148-155. Q.3. 152-156].

2.1.14. O‘rta qiymat haqida teorema. Ekstremum printsipi. **(1soat).**

[A1, 159-161. Q.3. 156-158].

2.1.15. Kelvin teoremasi. Kelvin almashtirish. **(1 soat).**

[A1, 161-166, Q.3.164-168].

2.1.16. Laplas tenglamasi uchun Dirixle va Neyman masalalari. Grin funktsiyasi. **(1 soat)** . [A1,167-170. Q.3. 169-172]

2.1.17. Grin fkutsiyasining xossalari. **(1 soat)**

[A1,170-174. Q.3.173-176]

2.1.18. Laplas tenglamasi uchun Dirixle va Neyman masalalari qo‘yilishi va ular yyechimlarining yagonaligi. Dirixle masalasining Grin funktsiyasi va uning xossalari.. **(2 soat)**

[A1, 174-179. Q.3.178-182]

2.1.19. Dirixle masalasining shar uchun yechilishi. Sharning tashqarishi uchun Dirixle masalasi **(2 soat)** .

[A1, 179-181. Q.3.184-190]

2.1.20. O‘rta qiymat haqidagi teoremaga teskari teorema.Chetlashtiriladigan maxsuslik haqidagi teorema. Garnak tengsizligi. Liuvall va Garnak teoremalari. Doira uchun Drixle masalasini Fure usuli bilan yechish.. **(2 soat)**.

[A1, 181-187. Q.3. 184-193]

2.1.21. Potentsiallar nazariyasi. Potentsiallar tushunchasi va ularning fizik ma’nosi. Parametrga bog‘liq bo‘lgan xosmas integrallar.Hajm potentsiali. Lyapunov sirtlari va egri chiziqlari. Teles burchak. Gauss integrali. **(2 soat)** .

[A1,187-188. Q.3. 191-193]

2.1.22. Potentsiallar nazariyasi. Potentsiallar tushunchasi va ularning fizik ma’nosi. **(1 soat)** . [A1, 188-192. Q. 3. 196-199]

2.1.23. Chegaraviy masalalarni potentsiallar yordamida integral tenglamalarga keltirishi.

(2 soat).[A1, 195-199. Q. 3. 200-202].

2.2. Amaliy mashg‘ulotlar mazmuni (jami 48 soat)

2.2.1. Xususiy hosilali differentsial tenglamalar (x.h.d.t) va ularning yechimi to‘g‘risida tushuncha. **(2 soat)** [A.3. 5-9. Q.4. 3-7]

2.2.2. Xarakteristik forma tushunchasi ikkinchi tartibli differentsial tenglarining klassifikatsiyasi va kanonik ko‘rinishi **(2 soat).**

[A.3. 25-30. Q.4.13-15].

2.2.3. Ikkinchi tartibli ikki o‘zgaruvchili differetsial tenglamalarni kanonik ko‘rinishga keltirish **(2 soat).**

[A3.31-33. Q.4.16-17].

2.2.4. Matematik fizikaning asosiy tenglamalariga keladigan kizika va mexanikaning ayrim masalalari

Tor tebranishi tenglamasi.

Issiqlik tarqalishi tenglamasi. **(2 soat)**

[A.3.35-36. Q.4. 18-19;].

2.2.5. Ikkinchi tartibli x.h.d.t.lar uchun chegaraviy masalalarning qo‘yilishi. **(2 soat).** [A.3.37-39. Q.4.22-24;].

2.2.6. . Elliptik tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar. **(2 soat).**

[A.3.41-42. Q.25-26].

2.2.7. To‘lqin tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimining yagonaligi. Koshi masalasi yechimini beradigan formulalar va ularni tekshirish. Gyugens printsipi. **(2 soat).**

[A.3. 43-44.Q.27-29;].

2.2.8. Korrekt qo‘yilgan masala tushunchasi. Korrekt qo‘yilmagan masalalarga misollar. Adamar misoli. **(2 soat).** [A.3.45-47. Q.4.30-31].

2.2.9. Giperbolik tipdagi tenglamalar. Tor tebranishning tenglamasiga qo‘yilgan Koshi masalasi. Dalamber formulasi. **(2 soat).**

[A.3.48-49. Q4. 30-31].

2.2.10. To‘liq tenglamasiuchun Koshi masalasi yechimining yagonaligi. Koshi masalasi yechimini beradigan formulalar. Tushinish metodi. **(2 soat).**

[A.3.51-53. Q.4.34-35].

2.2.11. Bir jinsli bo‘lmagan to‘lqin tenglamasi. Fazoviy, o‘zgaruvchilar uchga teng bo‘lgan hol. Kyechikuvchan potentsial. **(2 soat).**

[A.3.54-55. Q.4.35-37].

2.2.12. Koshi va Gursa masalalari umumiy qo‘yilgan Koshi masalasining yechilishi. **(2 soat).** [A3, 355-573. Q.4.38-39].

2.2.13. Elleptik tipdagi tenglamalar Garmonik funktsiyalarning va garmonik funktsiyalarning integral ifodasi. **(2 soat).** [A1, 118-125; A4.40-45; A7.56-60; Q1.292-294; Q3.262-264; Q4.85-88; A13.109-112].

2.2.14. O‘rta qiymat haqida teorema. Ekstremum printsipi. **(2 soat).**

[A.3.60-62. Q.4.46-48].

2.2.15. Kelvin teoremasi. Kelvin almashtirish. **(2 soat).**

[A.3.60-62. Q4-46-48].

2.2.16. Laplas tenglamasi uchun Dirixle va Neyman masalalari. Grin funktsiyasi. **(2 soat)** . [A363-64. Q.4.49-51]

2.2.17. Grin fkutsiyasining xossalari. **(2 soat)**

(A3.65-66. Q. 4. 52-53]

2..18. Dirixle masalasining shar uchun yechilishi. **(2 soat)**

[A3,66-67. Q4.56-58]

2.2.19. Sharning tashqarishi uchun Direxle masalasi **(2 soat)** .

[A3,68-69. Q.4.57-58]

2.2.20. Yarim fazo uchun Drixle masalasini yechish. **(2 soat)** .

[A.3.70-72. Q.4. 60-62]

2.2.21. Garnak tengsizligi. Liuvall va Garnak teoremalari **(2 soat)** .

[A3. 73-75. Q4. 63-64]

2.2.22. Potentsiallar nazariyasi. Potentsiallar tushunchasi va ularning fizik ma'nosi. **(2 soat)** . [A.3.84-86. Q.4.66-68]

2.2.23. Parametrga bog'liq bo'lgan xosmas integral. **(2 soat)** .

[A.3. 88-89. Q.4. 70-71].

2.2.24..Xususiy hosilali differentsial tenglamalar yechimining silliqligining xususiyati to'g'risida [A.3. 124-126. Q.4. 75-77]. **(2 soat)**

2.3.Mustaqil ta'limni tashkil etishning shakli va mazmuni

Mustaqil fan bo'yicha jami 94 soat ajratilgan ushbu soatlar taxminan qo'yilgan tartibda taqsimlangan.

-ma'ruza konspektini o'qib tayyorlash 58 soat

-amaliy mashg'ulotlar bo'yicha uy vazifalarni yechish 36 soat.

Amaliy mashg'ulotlarda nazariy bilimlar mavzuga oid masalalar yechish orqali mustaxkamlanadi.

Qoldirilgan darslarni topshirish uchun talaba dars materialini tayyorlab kelish va o'qituvchining suhbatidan o'tishi zarur. Qoldirilgan ON va JN lar tartib bilan topshiriladi.

Talabalar mustaqil ta'limining mazmuni va hajmi

(Ma'ruza va amaliy mashg'ulot)

Ishchi o'quv dasturining mustaqil ta'limga oid bo'lim va mavzulari	Mustaqil ta'limga oid topshiriq va tavsiyalar	Bajarilish muddatlari	Hajmi (soatda)
Koshi-Gursaning birinchi va ikkinchi masalalari	Koshi-Gursaning birinchi va ikkinchi masalalari oid teoremalar isbotini o'rganish	2-4-haftalar	8
Doiraviy membrana tebranish tenglamasi uchun birinchi aralash masalani Fure metodi bilan yechish	Doiraviy membrana tebranish tenglamasi uchun birinchi aralash masalani Fure metodi bilan yechish masalasi yagonaligini o'rganish	2-3 haftalar	8
Koshi masalasining umumiy qo'yilishi va uni tor tebranish tenglamasi uchun yechish	Echimning yagonaligini o'rganish	4-hafta	8
Statsionar va nostatsionar fizik jarayonlar, balans tenglamalari.	Impuls saqlash qonuni va boshqa saqlash qonuni	4-5 haftalar	8
Xususiy xosilali differentsial tenglamalarning xarakteristik formusi (tenglamasi)	Yuqori tartibli x.h.d.t.lar uchun xarakteristik tenglama	6-7-haftalar	8
Matematik fizikaning asosiy tenglamalari, ularning tiplari.	Ikki o'zgaruvchili 2-tartibli x.h.d.t	8-9haftalar	8
X.h.d.tlarning umumiy va umumlashgan yechimi to'g'risida	Klassik yyechim va umumlashgan yyechim haqida	10-hafta	8

Korrekt qo‘yilgan masalalar haqida	Nokorrekt qo‘yilgan masalalarga misollar.	11-12 haftalar	6
Geperbolik tipdagi tenglamalar va ularga qo‘yiladigan asosiy chegaraviy masalalar.	Tebranish va to‘lqin tenglamasi	19 hafta	6
Parabolik tipdagi tenglamar va ularga qo‘yiladigan asosiy chegaraviy masalalar.	Issiqlik tarqalishi texnologiyasi	20-21 haftalar	6
Elliptik tipdagi tenglamalar va ularga qo‘yilgan asosiy chegaraviy masalalar	Laplas va Puassan tenglamlari	22-26 haftalar	6
Potentsiallar nazariyasi va ularning chegaraviy masalalarni o‘rganishdagi o‘rni.	Oddiy qatlamli ikkilangan qatlamli, hajmi potentsiallari	26-32 haftalar	6
Xususiy hosilali differentsial tenglamalarni chekli ayirmalar bilan almashtirib yechish		33-35 haftalar	4
Jami			**90**

Izoh. Qoldirilgan darslarni topshirish uchun talaba dars materialini tayyorlab kelishi va o‘qituvchining og‘zaki suhbatidan o‘tishi zarur. Qoldirilgan ON va YaN lar belgilangan tartib bo‘yicha topshiriladi.

4. Reyting nazoratlari grafigi

Fan bir o‘quv yilida va bir semestrda o‘qitiladi. Elektron ta’lim tizimi talablaridan kelib chiqqan holda bitta blok-moduldan iborat va quyidagi reyting nazoratlari grafigi belgilandi:

№	**Reyting nazorat G’shakli, maksimal ballari**	**1-ON**	**2-ON**	**YaN**
1.	**Maksimal baho**	**5**	**5**	**5**
2.	**Shakli: (og‘zaki, test, yozma)**	Og‘zaki(3 tadan uslubiy topshiriq berladi. Har bir top-shiriq 5 baho)	Og‘zaki (3 tadan uslubiy topshiriq berladi. Har bir topshiriq 5 baho)	Yozma (3 savol, xar bittasi 5 baho)
3.	**Muddati (haftalarda)**	**7(24)**	**12(30)**	**21(37)**

KUZGI SEMESTR

№	Sentyabr	Oktyabr	Noyabr	Dekabr	Yanvar	

			2-5	7-12	14-19	21-26	28-3	5-10	12-17	19-24	26-31	2-7	9-14	16-21	23-28	30-5	7-12	14-19	21-26	28-2	4-9	11-16	18-23	25-30	
			1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	
1	ON	Yozma ish									5								5						**5**
		Mustaqil ta'lim																							
2	YaN																								**5**
	Jami																								

Baholash mezonlari:

1. Laboratoriya mashg'ulotlarini bajarishda olingan baholar oraliq nazoratda inobatga olinadi.
2. Oraliq nazorat yozma (3 savol, xar bittasi 5 bahodan baholanadi) shaklda o'tkaziladi. Barcha sovollarga to'g'ri javob yozilsa 5 baho bilan baholanadi.
3. Yakuniy nazorat variantlari ma'ruza va laboratoriya mashg'ulotlar mavzularini qamrab olgan holda shakllantiriladi. 3 ta savoldan iborat variantlar asosida yozma ish o'tkazilib, har bir savol 5 baho bilan baholanadi va 3 ta savol bo'yicha o'rtacha chiqqan baho bilan baholanadi.

Talabalarni o'zlashtirishini baholash:

5 baho "a'lo"

- fanga oid nazariy va uslubiy tushunchalarni to'la o'zlashtira olish;
- fanga oid asosiy ko'rsatgichlarni bilish va baholash;
- berilgan savolarga batavsil javob berish va mazmunini to'la yoritish;
- fikrni ilmiy-nazariy adabiyotlar yordamida asoslash;
- barcha amaliy ko'nikma va malakalarni o'zlashtirish;
- nazariy bilimlarni turli vaziyatda qo'llay olish;
- tizimli yondoshish, uzviylikka amal qilish.

4 baho "yaxshi"

- fanga oid asosiy ko'rsatgichlarni bilish va baholash;
- fanga oid asosiy ko'rsatgichlarni bilish va baholash;
- tizimli yondoshish, uzviylika amal qilish;
- asosiy amaliy ko'nikma va malakalarni o'zlashtirish;
- nazariy bilimlarni turli vaziyatda u yoki bu qo'llay olish darajada.

3 baho "qoniqarli".

- fanga oid asosiy ko'rsatgichlarni bilish va baholash;
- fanda tizimli yondosha olmaslik;
- ayrim amaliy ko'nikma va malakalarni o'zlashtirish;
- nazariy bilimlarni turli vaziyatda u yoki bu qo'llay olish darajada.

2 baho "qoniqarsiz".

- O'rganilayotgan jarayonlar haqida mustaqil fikr yurita olmaslik;
- fanda tizimli yondosha olmaslik;
- asosiy amaliy ko'nikma va malakalarni o'zlashtira olmaslik.

5. INFORMATsION-USLUBIY TA’MINOT

5.1. ASOSIY ADABIYoTLAR

№	Muallif, adabiyot nomi, turi, nashriyot, yili, xajmi	Kutubxonada mavjud nusxasi
1.	Wolter. A. Stranss. Partial differential equations. An introduction Birkhaazer. Germany, 2005.	Elektron nusha
2.	Saloxitdinov M.S. Matematik fizik tenglamalari. T. O‘zbekiston, 2002, 448 bet	50
3.	Bitsadze A. V., Kalinichenko D. F., Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki M. Izd-vo MGU. 2004.	4
4	Saloxitdinov M.S. Islomov B. “Matematik fizik tenglamalari” fanidan masalalar to‘plami. Toshkent. O‘zbekiston, 2010, 3728 bet	16

5.2. QO‘ShIMChA ADABIYoTLAR

№	Muallif, adabiyot nomi, turi, nashriyot, yili, xajmi	Kutub-xonada mavjud nusxasi
1.	Tixonov A.N. Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968. 708 str.	14
2.	Vladimirov V.S. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981 g. 540 str.	16
3.	Urinov A va boshqalar. Matematik fizik tenglamalari fanidan masalalar to‘plami. Farg‘ona 2008 yil. 180 bet	2
4.	Smirnov M. M., Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki	4
5.	http:G’G’www.nsu.ruG’icemG’grantsG’etfmG’ ;	
6.	http:G’G’www.lib .homelinex.orgG’mathG’;	
7.	http:G’G’www.eknigu.comG’libG’mathematicsG’;	
8.	http:G’G’www.eknigu.comG’infoG’M_MathematicsG’MC	
9.	http:G’G’www.rsl.ruG’ - Rossiyskaya gosudarstvennaya biblioteka;	
10.	http:G’G’www.msu.ruG’ - Moskovskiy gosudarstvenno‘y universitet;	
11.	http:G’G’www.nlr.ruG’ - Rossiyskaya natsionalnaya biblioteka;	
12.	http:G’G’www.el.tfi.uzG’pdfG’enmcoq22.uzk.pdf ;	
13.	http:G’G’www.el.tfi.uzG’pdfG’enmcoq22.uzl.pdf ;	

“Tasdiqlayman”
matematika kafedrasi
mudiri
___________D.Turdiboy
ev
«____» __________ 2020
y.

Fan dasturi bajariliishining kalendar rejasi

Ma’ruza mashg‘ulotlari 2020-2021 o‘quv yili
Fakultet: Fizika-matematika *Yo‘nalish:5130100*- matematika
Guruhlar: 5-18, 6-18,7-18, 1-semestri.
Fanning nomi**: Xususiy hosilali differentsial tenglamalar**.
Ma’ruza mashg‘ulotlari: J.Raxmanov
Amaliy mashg‘ulotlari o‘qituvchisi:Rahmonov J.T.,Xidirova Sh.

№	Mavzular nomi	Reja bo‘yicha ajratil gan hajm	Amalda bajarilishi		O‘qituvchi imzosi
		soat	soat	sana	
1	Xususiy hosilali differentsial tenglamalar (x.h.d.t) va ularning yechimi to‘g‘risida tushunchalar.	2			
2	Xarakteristik forma tushunchasi ikkinchi tartibli differentsial tenglarining klassifikatsiyasi va kanonik ko‘rinishi.	2			
3	Yuqori tartibli differentsial tenglamalar va sistemalarining klassifikatsiyasi.Ikkinchi tartibli ikki o‘zgaruvchili differetsial tenglamalarni kanonik ko‘rinishga keltirish	2			
4	Matematik fizikaning asosiy tenglamalariga keladigan kizika va mexanikaning ayrim masalalari.Tor tebranishi tenglamasi.Issiqlik tarqalishi tenglamasi. Statsionar tenglamalar: Moddiy nuqtaning og‘irlik kuchi ta’siridagi harakati	2			
5	Matematik fizika tenglamalari uchun asosiy masalalarni qo‘yilishi. Koshi masalasi. Chegaraviy masalalar va boshlang‘ich chegaraviy masalalar. Koshi masalasi va uni qo‘yilishida xarakteristikalarning roli. Korrekt qo‘yilgan masala tushunchasi.	2			
6	Giperbolik tipdagi tenglamalar. Tor tebranishning tenglamasiga qo‘yilgan Koshi masalasi. Dalamber formulasi. Dalamber formulasi bilan topilgan yechimning fizik ma’nosi. Chegaralangan tor.	2			
7	To‘lqin tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimining yagonaligi. Koshi masalasi yechimini beradigan formulalar va ularni tekshirish. Gyugens printsipi.	2			
8	To‘lqinlarning diffuziyasi.Bir jinsli bo‘lmagan to‘lqin tenglamasi. Kechikuvchan potentsial. Gursa masalasi.Asgeyrson printsipi.	2			
	Jami	**16**			

Kafedra mudiri ____________ D.Turdibayev.

Tuzuvchi: ____________ J.Raxmanov
Kalendar reja bajarilishi haqida kafedra mudiri xulosasi.

____

____

____(imzo) F.I.Sh

«Tasdiqlayman»
Matematika kafedrasi mudiri
____________D. Turdiboyev
«____» ___________ 2020y.

Fan dasturi bajariliishining kalendar rejasi

Amaliy mashg‘ulotlari 2020-2020 o‘quv yili
Fakultet: Fizika-matematika *Yo‘nalish:5130100*- matematika
Guruhlar: 5-18, 6-18,7-18, 1-semestri.
Fanning nomi**: Xususiy hosilali differentsial tenglamalar**.
Ma’ruza mashg‘ulotlari: J. Raxmanov
Amaliy mashg‘ulotlari o‘qituvchisi:Rahmonov J.T.,Xidirova Sh.,

№	Mavzular nomi	Reja bo‘yicha ajratilgan hajm	Amalda bajarilishi		O‘qituvchi imzosi
		Soat	soat	sana	
1	Xususiy hosilali differentsial tenglamalar va ularning klassifikatsiyasi	2			
2	Ikki o‘zgaruvchili ikkinchi tartibli xususiy hosilali differentsial tenglamalarni klassifikatsiyalash va kanonik ko‘rinishga keltirish.	2			
3	Uch o‘zgaruvchili ikkinchi tartibli xususiy hosilali differentsial tenglamalarni klassifikatsiyalash va kanonik ko‘rinishga keltirish.	2			
4	Giperbolik tipdagi tenglamalarning umumiy yechimlarini topish.Xarakteristikalar usuli	2			
5	Giperbolik tipdagi tenglamalarning umumiy yechimlarini topish	2			
6	To‘lqin tenglamasi uchun Koshi masalasi	2			
7	To‘lqin tenglamasi uchun Koshi masalasi. Bir jinsli bo‘lmagan tenglama yechimi	2			
8	Giperbolik tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar echish usullari: berilganlarni davom ettirish usuli.	2			
	Jami	**16**			

Kafedra mudiri ____________ D.Turdibayev.

Tuzuvchi: ____________ J.Raxmanov
Kalendar reja bajarilishi haqida kafedra mudiri xulosasi.
____
____
____(imzo) F.I.Sh

«Tasdiqlayman»
Matematika kafedrasi mudiri
___________D. Turdiboyev
«____» __________ 2020 y.

Fan dasturi bajariliishining kalendar rejasi

Ma’ruza mashg‘ulotlari 2020-21 o‘quv yili

Fakultet: Fizika-matematika *Yo‘nalish:5130100*- matematika
Guruhlar: 5-18, 6-18,7-18, 2-semestri.
Fanning nomi**: Xususiy hosilali differentsial tenglamalar**.
Ma’ruza mashg‘ulotlari: J.Raxmanov
Amaliy mashg‘ulotlari o‘qituvchisi:Rahmonov J.T.,Xidirova Sh.

№	Mavzular nomi	Reja bo‘yicha ajratilgan hajm	Amalda bajarilishi		O‘qituvchi imzosi
		soat	soat	sana	
1	*Qo‘shma differentsial operatorlar. Riman usuli. Aralash masalalar*	2			
2	*Tor tebranish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalani Furye metodi bilan yechish.* Xos sonlar va xos funktsiyalar masala yechimining yagonaligi	2			
3	Bir jinsli bo‘lmagan tenglama. To‘g‘ri to‘rtburchakli membrana tebranish tenglamasi uchun aralash masalani yechish.	2			
4	Parabolik tipdagi tenglamalar. Issiqlik tarqalish tenglamasi. Ekstremum printsipi.	2			
5	Birinchi chegaraviy masala yechimining yagonaligi. Koshi masalasi va uning yechimi yagonaligi va turg‘unligi.	2			
6	Fundamental yechim.Koshi masalasi yechimining mavjudligi. Bir jinsli bo‘lmagan tenglama uchun Koshi masalasi.	2			
7	Bir o‘lchovli isssiqlik tarqalish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalani Fure usuli bilan echish. Bir jinsli bo‘lgan va bir jinsli bo‘lmagan hol. Koshi masalasini Fure usuli bilan echish.	2			
8	Elliptik tipdagi tenglamalar Garmonik funktsiyalar.Laplas tenglamasining fundamental yechimi. Grin formulalari. S^2 sinf funktsiyalari va garmonik funktsiyalarning integral ifodasi.	2			
9	O‘rta qiymat haqida teorema. Ekstremum printsipi va undan kelib chiqadigan ayrim natijalar. Kelvin teoremasi. Kelvin almashtirishi	2			

10	Laplas tenglamasi uchun Dirixle va Neyman masalalari qo‘yilishi va ular yechimlarining yagonaligi. Dirixle masalasining Grin funktsiyasi va uning xossalari.	2			
11	Dirixle masalasining shar uchun echilishi. Sharning tashqarishi uchun Dirixle masalasi	2			
12	O‘rta qiymat haqidagi teoremaga teskari teorema.Chetlashtiriladigan maxsuslik haqidagi teorema. Garnak tengsizligi. Liuvall va Garnak teoremalari. Doira uchun Drixle masalasini Fure usuli bilan echish.	2			
13	Potentsiallar nazariyasi. Potentsiallar tushunchasi va ularning fizik ma’nosi. Parametrga bog‘liq bo‘lgan xosmas integrallar.Hajm potentsiali. Lyapunov sirtlari va egri chiziqlari. Teles burchak. Gauss integrali.	2			
14	Ikkilangan qatlam potentsiali .Oddiy qatlam potentsiali va uning normal xosilasi.	2			
15	Chegaraviy masalalarni potentsiallar yordamida integral tenglamalarga keltirishi. Xususiy hosilali differensial tenglamalar yechimining yagonaligi.	2			
	Jami	**30**			

Kafedra mudiri ___________ D.Turdibayev.

Tuzuvchi: ___________ J.Raxmanov .
Kalendar reja bajarilishi haqida kafedra mudiri xulosasi.

____
____
____(imzo) F.I.Sh

«Tasdiqlayman»
Matematika kafedrasi mudiri
___________D. Turdiboyev
«____» __________ 2020 y.

Fan dasturi bajariliishining kalendar r ejasi

Amaliy mashg‘ulotlar 2020-21 o‘quv yili.
Fakultet: Fizika-matematika *Yo‘nalish:5130100*- matematika
Guruhlar: 5-18, 6-18,7-18, 2-semestri.
Fanning nomi**: Xususiy hosilali differentsial tenglamalar**.
Ma’ruza mashg‘ulotlari: J.Raxmanov
Amaliy mashg‘ulotlari o‘qituvchisi:Rahmonov J.T.,Xidirova Sh.

№	Mavzular nomi	Reja bo‘yicha ajratil gan hajm	Amalda bajarilishi		O‘qituvchi imzosi
		Soat	soat	sana	

1	Riman funktsiyasi	**2**			
2	Chegaraviy masalalarni Fure usuli bilan yechish.	**2**			
3	Chegaraviy masalalarni Fure usuli bilan yechish. Xos sonlar va xos funksiyalar	**2**			
4	Giperbolik tipdagi tenglama yechimining xossalarini tekshirish	**2**			
5	To‘lqin tarqalish tenglamasi uchun ba’zi masalalarning korrektligi.	**2**			
6	Parabolik tipdagi tenglamalar uchun Koshi masalasi.	**2**			
7	Asosiy chegaraviy masalalarni berilganlarni davom ettirish usuli bilan echish.	**2**			
8	Chegaraviy masalalarni Furye usuli bilan yechish.	**2**			
9	Chegaraviy masalalarni Fure usuli bilan yechish.(Parabolik tipdagi tenglamalar bo‘lgan hol.).	**2**			
10	Garmonik funktsiyalar va ularning xossalariga oid masalalar yechish	**2**			
11	Laplas tenlamasi uchun ichki Dirixle va Neyman masalalari.	**2**			
12	Laplas tenlamasi uchun tashqii Dirixle va Neyman masalalari.				
13	Laplas va Puasson tenlamalari uchun sharda Dirixle va Neyman masalasini echish.	**2**			
14	Laplas va Puasson tenlamalari uchun sharda Neyman masalasinini yechish.	**2**			
15	Garmonik funktsiyalar uchun ba’zi masalalar. Potentsiallar. Elliptik tenglama yechimining xossalari.	**2**			
	Jami	**30**			

Kafedra mudiri ____________ D.Turdibayev.

<u>1-MAVZU</u> O‘ZGARMAS KOEFFISIYENTLI IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLI TENGLAMALAR

Ma`ruzaga reja-topshiriqlar

Fan: Matematik fizika tenglamalari

O‘quv soati: 2 soat (ma`ruza);

O‘quv mashg’uloti turi: ma`ruza; yangi bilimlarni mustahkamlash va o‘rganish.

Ma`ruza rejasi:

1. Asosiy ta’riflar.
2. 1-tartibli kvazichiziqli tenglamalar.
3. Misollar.
4. Ta’rif.
5. Kanonik ko‘rinishga keltirish.

O‘quv mashg’uloti maqsadi:

O‘quv fani to‘g’risida umumiy ta`surotlar berish, Xususiy hosilali tenglamalarva keyinchalik kasbiy faoliyatidagi roli.

O‘quv mashg’uloti masalalari:

- *O‘rgatuvchi*: talabalarda qabul qilish faoliyatini tashkil qilish, yangi materialni boshlang’ich esda qoldirish va anglash; Matematik fizika tenglamalarining terminlari, iboralarini xarakterlovchi elementlar; talabalarning matematik firlashini rivojlantirish muammoli masalalarni yechimini mahoratini oshirish; matematik masalalarni yechishda matematik simvollarning hususiyatlari bilan tanishtirish;
- *Rivojlantiruvchi*: kitob matni bilan ishlay bilishligi – mag’zlarini tanlab olish, tahlil qilish; gaplar tuzish, hulosa chiqarish, materialni talabalarning izlash faoliyatini stimullashtirish; hususiydan umumiy holga o‘tish usuli bilan tekshirish; tekshirish natijalarini tahlil qilib va uni umumlashtira olishini rivojlantirish; analitik-sintetik faoliyatning mantiqiy fikrlashini qo‘llash; talabalarning ijodiy mahoratini shakillantirish;
- *Tarbiyalovchi:* aktiv faoliyatga, mustaqil ishga jalb qilish; guruhlarda ishlash qoidalariga rioya qila olish; fanni o‘rganishga qiziqishni rivojlantirish; Matematik fizika tenglamalarini matematik-komunikativ kursni bir qismi sifatida tassavur berish; javobgarlik tuyg’ularini tarbiyalash, mehnatsevarlik, individual ishni jamoaviy ish bilan biriktirish, intizomlashtirish.

O‘qitish texnologiyasi:

- *O‘qutish usullari*: instruktaj; Ma`ruza, aqliy hujum, “Insert” texnikasi;
- *O‘qitish shakillari*: frontal; jamoaviy;
- *O‘qitish vositalari*: Ma`ruza matni; jadvallar, multimediya;
- *O‘qitish sharoitlari*: texnik jihozlashtirilgan auditoriya;
- *Baholash va monitoring*: o‘g’zaki savol-javob, blits-so‘rov.

Pedagogik masalalar:

- Fanning masalalari va uning o‘quv fanlar sistemasidagi o‘rni va roli bilan tanishtirish;
- O‘quv fanning tuzulmasi va tavsiya etiladigan o‘quv-metodik adabiyotlarni tasvirlash;

- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlarini ochib berish, baholash shakli va muddatlari;
- Fan ma`ruzasi paytida o‘qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy bosqichlarini xarakterlab berish va umumiy sxemasini tushuntirish.
- O‘qitish texnologiyasi rivojlanishi perspektivasini xarakterlab berish;

O‘quv faoliyati natijalari:

- Fan ma`ruzasi masalalari, maqsadlari va nomlari shakillanadi;
- Xususiy hosilali tenglamalardoirasidagi yutuqlar yoritiladi;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlari hamda baholash shakli va muddatlari aytiladi
- Fan ma`ruzasida o‘qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy sxemasini kengaytirib xatakterlab beradi;
- Fanning asosiy ta`riflarini beradi, Xususiy hosilali tenglamalarfani ma`ruzalarining asosiy yo‘nalishlari beriladi;
- Nazariy bilimlarning to‘liqligi, sistemaliyligi va harakatliyligi;
- Amaliy mag’ulotlarni bajarishda o‘rganilgan iboralarbilan ishlay olishligi;

- **1.2. Ma`ruzaning xronologik xaritasi**

- **1 bosqich. O‘quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa):**

- *O‘qituvchining faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (davomat, konspektning borligi; o‘ziga ishonch, aniqligi,); kerakli materiallarni tarqatish (konspekt, tarqatma materiallar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadini bayon qilish; o‘quv mashg’ulotning rajasi bilan tanishtirish; kalit iboralar va so‘zlar, kategoriyalar; internet saytlari va adabiyotlar ro‘yhati; o‘quv natijalari haqida aytish;
- *Talabalar faoliyati*: o‘quv joyini tayyorlash (talabalar borligi; tashqi ko‘rinish; o‘quv materiallar va qo‘llanmalar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadi bilan tanishish; o‘quv materialini qabul qilishga tayyorgarlik ko‘rish;
- *Shakillar, usular, uslublar*: instruktaj; frontal so‘rov; mustahkamlovchi so‘rov.

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa):

- *O‘qituvchining faoliyati*: mavzuga kiritadi; yangi mavzuga doir o‘tgan fanlar va mashg’ulotlarning mavzularini eslashga chorlaydi; ma`ruza matnini tarqatadi, tanishishni taklif etadi, “Insert” usuli bilan belgilar qo‘yishni taklif etadi; birinchi savol bo‘yicha matn o‘qiladi; qo‘shimcha o‘quv materiallarini aytib boorish va tushuncha berish; natural obektlarni namnoyon qilish va izohlash; tushunarsiz savollarni aniqlash va tushintirish; birinchi savol bo‘yicha nazar (shunday qilib qolgan savollarga ham);
- *Talabalar faoliyati*: yangi mavzuda doir oldingi mashg’ulotlarda va fanlarda olgan bilimlarni mustahkamlaydi,; har bir kalit ibora va terminlarni eshitib, yozib borib, konspekt qilib aytib borishadi; “Insert” usuli bilan belgilan o‘qiydilar, aniqlik kiritadilar, savollar beradilar va o‘zaro;
- *Shakllar, usular, uslublar*: frontav so‘rov blits-so‘rov; aqliy hujum, “Insert” texnikasi.

3 bosqich. Yakunlovchi qism (10 daqiqa)

- *O‘qituvchining faoliyati:* mavzu bo‘yicha hulosa qilish, talabalarning e`tiborlarini asosiylarda jalb qilish; qilingan ishning muhimligini aytib o‘tish; alohida talabalarning bajarilgan ishlarini baholash; o‘zaro baholashning natijalarini chiqarish; o‘quv mashg’ulotning yutuqlik darajasini baholash va tahlil qilish; mustaqil ish uchun topshiriqlar; baho ko‘rsatgichlari va me`zonlari;

- *Talabalar faoliyati: ishning* tahlili; natijalarni olish; texnologik bilimlarni qo‘llash; o‘zaro baholashni o‘tkazish, yo‘l qo‘yilgan hatolar bo‘yicha tahlil va aniqlik kiritish; mustaqil ish topshiriqlarini yozib olish;
- *Shakillar*, *usular*, *uslublar*: guruhlarda ishlash, kartochkalarda topshiriqlar.

1.3. O‘quv-metodik materiallar

Ma`ruza rejasi:

1. Asosiy ta’riflar.
2. 1-tartibli kvazichiziqli tenglamalar.
3. Misollar.
4. Ta’rif.
5. Kanonik ko‘rinishga keltirish.

Kalit so‘zlar: Xususiy xosilali differensial tenglama, tenglamaning tarbibi, kvazichiziqli tenglamalar, yechim, Koshi masalasi, ikkinchi tartibli xususiy xosilali tenglama

1.3.1. Ma`ruza matni

1. Asosiy ta’riflar

Xususiy xosilali differensial tenglama deb bir nechta o‘zgaruvchili noma’lum funksiyaga , uning argumentlari va turli tartibli xususiy xosilalariga nisbatan tenglamalarga aytiladi. Agar noma’lum funksiya n o‘zgaruvchiga bog’lik bo‘lsa, ya’ni $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ bo‘lsa u xolda, xususiy xosilali differensial tenglama

$$F\left(x_1, x_2, ..., u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}}\right) = 0$$

ko‘rinishga ega, bu yerda $k_1 + \ldots + k_n = m$, F – berilgan funksiyalar. Xususiy xosilali differensial tenglamaning **tartibi** deb bu tenglamaga kiruvchi xosilalarning eng yuqori tartibiga aytiladi . n -tartibli tenglama tartibi n dan katta bo‘lmagan xususiy xosilalarga ega bo‘ladi. Xususiy xosilali chiziqli tenglama

$$a_1(x_1, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + ... + a_n(x_1, ..., x_n)_1 \frac{\partial u}{\partial x_n} +$$

$$+ b_1(x_1, ..., x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ... + b_n(x_1, ..., x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = f(x_1, ..., x_n, u).$$

ko‘rinishga ega.   Masalan

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}+xyz=1,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$$

$$(x+\frac{\partial z}{\partial y})\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$$

tenglamalar chiziqli bo‘ladi.

2. Birinchi tartibli kvazichiziqli tenglamalar

Kvazichiziqli tenglamalar

$$a_1\left(x_1,...,x_n,u\right)\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+a_n\left(x_1,...,x_n,u\right)_1\frac{\partial u}{\partial x_n}=f\left(x_1,...,x_n,u\right). \quad (1.1)$$

ko‘rinishga ega. Agar $f\left(x_1,...,x_n,u\right)\neq 0$ bo‘lsa u xolda tenglama bir jinsli tenglama bo‘lmaydi, aks xolda $f\left(x_1,...,x_n,u\right)$=0 bo‘lsa, tenglama bir jinsli tenglama bo‘ladi. (1.1) tenglama yechish uchun

$$\frac{dx_1}{a_1}=\frac{dx_2}{a_2}=...=\frac{dx_n}{a_n}=\frac{du}{f} \quad (1.2)$$

sistemani tuzamiz. (1.2) sistemani yechish jarayonida n ta birinchi integrallar xosil qilamiz: $\varphi_i(x_1,...,x_n,u)=C_i, i=1,...,n$.

Tenglamani yechimini quyidagi $F(\varphi_1,...,\varphi_n)=0$ funksiya beradi, bu yerda $F(\varphi_1,...,\varphi_n)$ ixtiyoriy o‘z argumentlari bo‘yicha differensiallanuvchi funksiya.

Teorema 1. (1) tenglama yechimi (2) oddiy differensial tenglamalar sistemasining yechimga teng kuchli, uning n ta birinchi integrallari har bittasi aloxida berilgan tenglamani yechimini beradi. Shunda $F(\varphi_1,...,\varphi_n)=0$ umumiy yechim bo‘ladi.

Teorema 2. $a_1\left(x_1,...,x_n\right)\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+a_n\left(x_1,...,x_n,u\right)_1\frac{\partial u}{\partial x_n}=0$ bir jinsli tenglama yechish uchun oddiy differensial tenglamalar sistemasi tuziladi.

Bu sistemaning yechimlari (n-1)-ta birinchi integrallardan iborat bo‘ladi. Quyidagi tasdiq o‘rinli: agar

$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}=t$ bo‘lsa, shunda ixtiyoriy k uchun

$$\frac{k_1a_1+...+k_na_n}{k_1b_1+...+k_nb_n}=t \qquad (3)$$

o'rinli.

3. Misollar

1-Misol. $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial x}=0$ tenglamani yeching.

$\frac{dx}{y}=-\frac{dy}{x}$ sistemani tuzamiz. So'ngra

$$xdx+ydy=0,\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2=C,x^2+y^2=C$$

Umumiy yechimi $z=F(x^2+y^2)$ bo'ladi.

2-Misol. $xz\frac{\partial x}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{xy}=-xy$ tenglamani yeching.

$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=-\frac{dx}{xy}$ sistemani tuzamiz.

$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y},\ln|x|=\ln|y|+\ln C_1$ tenglamani yechamiz,

undan $C_1=\frac{x}{y}$ ni topamiz.

(3) ayniyatdan foydalanib $\frac{k_1dx+k_2dy+k_3dz}{k_1xz+k_2yz-k_3xy}=\frac{dz}{-xy}$ ni olamiz.

Faraz qilaylik, masalan, $k_1=y,k_2=x,k_3=0$ bo'lsin, bu xolda

$$\frac{ydx+xdy}{yxz+xyz}=\frac{dz}{-xy},\frac{d(xy)}{2xyz}=-\frac{dz}{xy}.$$

So'ngra $d(xy)=-2zdz,xy=-z^2+C,C=xy+z^2$.

$F(x^2+y^2,xy+z^2)=0$ umumiy yechimni xosil qilamiz.

Chiziqli tenglamalar uchun Koshi masalasini yechimini qaraymiz

$$\begin{cases}x=x_0(t),\\ y=y_0(t),\\ z=z_0(t).\end{cases}$$

Farz qilaylik, $\varphi_1(x,y,z)=C_1$, $\varphi_2(x,y,z)=C_2$

ikkita birinchi integral topilgan bo'lsin. U xolda

$$\begin{cases}\Phi_1(t) = C_1, \\ \Phi_2(t) = C_2; \end{cases} \Leftrightarrow \quad \Phi(C_1, C_2) = 0$$

va izlanayotgan yechim $\Phi(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ bo‘ladi.

3-Misol. $x = 2$ da $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z - xy, z = y^2 + 1$ Koshi masalani yeching.

$\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z - xy}$ sistemani tuzamiz.

$\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$ tenglamani yechimini izlasak, quyidagilarni xosil qilamiz:

$\ln|x| = \ln|y| + \ln C_1, \quad C_1 = \dfrac{x}{y}.$

Endi $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{z - xy}$ tenglamani qaraymiz.

$\dfrac{k_1 dx + k_2 dy + k_3 dz}{k_1 xz + k_2 yz - k_3(z - xy)} = \dfrac{dz}{z - xy}$ ayniyatni tuzamiz.

$k_1 = y, k_2 = x, k_3 = 0$ bo‘lsin, u xolda

$$\frac{ydx + xdy}{2xy} = \frac{dz}{z - xy}, \frac{d(xy)}{2xy} = \frac{dz}{z - xy}, \frac{1}{2}\ln|xy| = \frac{dz}{z - xy}.$$

$xy = t, dt = xdy + ydx$ almashtirish kiritamiz.

$\dfrac{1}{2}\ln|t| = \dfrac{dz}{z - t}, \dfrac{1}{2}\ln|t| = \ln|z - t| + \ln C_2$ ni xosil qilamiz,

bundan $C_2 = \dfrac{t^2}{z - t} = \dfrac{x^2 y^2}{z - xy}$ ni topamiz. $F\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{x^2 y^2}{z - xy}\right) = 0$ umumiy yechimni xosil bo‘ladi.

$x = 2$ da

$z = y^2 + 1$ Koshi masalani qaraymiz

$$\begin{cases} 2y = C_1, \\ \dfrac{4y^2}{y^2 - 2y + 1} = C_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y = C_1, \\ \dfrac{4y^2}{(y - 1)^2} = C_2. \end{cases}$$

4. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli chiziqli tenglamalar

Ikkinchi tartibli xususiy xosilali tenglama yuqori tartibli xosilalarga nisbatan chiziqli deyiladi, agar bu tenglama faqat birinchi tartibli xosilalarni o‘z ichida saqlasa.

$u = u(x.y)$ funksiyaga nisbatan ikkinchi tartibli xususiy xosilali differensial tenglama quyidagi umumiy ko‘rinishga ega:

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) = 0. \quad (1)$$

Agar $b^2 - ac > 0$ bo‘lsa , (1) tenglama giperbolik tipdagi tenglama (to‘lqin tenglama) , $b^2 - ac = 0$ bo‘lsa, parabolik tipdagi tenglama (issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi), $b^2 - ac < 0$ bo‘lsa, elliptik tipdagi tenglama (starsionar tenglama). (1) tenglamani yangi ξ va η o‘zgaruvchilarga formulalar bo‘yicha o‘tish yo‘li bilan kanonik ko‘rinishga keltirish mumkin.

x va y o‘zgaruvchilari bo‘yicha beriglan xosilalarni, ξ va η o‘zgaruvchilar bo‘yicha xosilalarga almashtiramiz. Matematik fizik tenglamalar kursi uchun xarakterli belgilashlarni kiritamiz:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

U xolda

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\
u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \\
u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx,} \\
u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy} \\
u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}
\end{aligned}$$

larni olamiz.

$\xi(x,y)$ va $\eta(x,y)$ funksiyalarni topish uchun

$$a(d\ \ y)^2 - 2bdxdy + c(dx)^2 + 0, \quad (2)$$

xarakteristik tegnlama qaraladi, u ikkita tenglamalar sistemaga teng kuchli:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} \end{cases}. \quad (3)$$

(2) egri chiziqli integral tenglamalar (1) tenglamaning xarakteristik tenglamalari deb ataladi. Giperbolik, parabolik va eliptik tipdagi tenglamalarni kanonik ko‘rinishga keltirishni qaraymiz.

1.Agar (1) tenglama giperbolik tipda bo‘lsa, (3) tenglamalarning birinchi integrallari

$$\varphi_1(x.y) = C_1, \varphi_2(x,y) = C_2$$

xaqiqiy va har xil. Ular (1) tenglamaning xaqiqiy xarakteristikalari ikkita turli oilasini aniqlaydi .

$$\xi = \varphi_1(x.y), \eta = \varphi_2(x, y)$$

o‘garuvchilarni almashtirish yordamida, (1) tenglama giperbolik tipdagi tenglamani quyidagi kanonik ko‘rinishiga keltiriladi.

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta})$$

$$\xi = \mu + \nu, \eta = \mu + \nu$$

o‘zgaruvchilarni almashtirish yerdamida boshqa

$$u_{\mu\mu} - u_{\nu\nu} = \Phi(\mu, \nu, u, u_{\mu}, u_{\nu})$$

kanonik ko‘rinishga keltiriladi.

1-misol. $a^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$ tenglamani kanonik ko‘rinishga keltiring.

$b^2 - ac = 0 + x^2y^2 = x^2y^2 > 0$ bo‘lgani uchun, bu giperbolik tipdagi tenglama ekanligini aniqlaymiz.

Xarakteristik tenglama tuzamiz:

$$x^2(dy)^2 y\ (dx)^2 = 0 \Leftrightarrow (xdy + ydx)(xdy - ydx) = 0$$

Ikkita $(xdy + ydx) = 0, (xdy - ydx) = 0$ difrensal tenglama xosil qilamiz.

O‘zgaruvchilarni ajratib va interallab quyidagi ko‘rinishga kelamiz:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0, \ln|y| + \ln|y| = \ln C_1$$

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0, \ln|y| - \ln|y| = \ln C_2$$

Potensiallashtirgandan keyin, ikki oila xarakteristikalar uchun tenglamalarni topamiz:

$$xy = C_1, \frac{y}{x} = C_2.$$

Endi yangi o‘zgaruvchidarni kiritamiz.

$$\xi = xy, \eta = \frac{y}{x}$$

Yuqorida keltirgan fomulalardan foydalanib, eski o‘zgaruvchilar bo‘yicha xususiy xosilalarni yangi o‘zgaruvchilar bo‘yicha xususiy xosilalar orqali ifodalaymiz:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = y u_\xi + \frac{y^2}{x^2} u_\eta$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = x u_\xi + \frac{1}{x} u_\eta$$

$$u_{xx} = (u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_x)y - (u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x)\frac{y}{x^2} + \frac{2y}{x^3}u_\eta = (yu_{\xi\xi} - \frac{y}{x^2}u_{\xi\eta})y -$$

$$-(yu_{\xi\eta} - \frac{y}{x^2}u_{\eta\eta})\frac{y}{x^2} + \frac{2y}{x^3}u_\eta = y^2 u_{\xi\xi} - 2\frac{y^2}{x^2}u_{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^4}u_{\eta\eta} + 2\frac{y}{x^3}u_\eta.$$

$$u_{yy} = x(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) + \frac{1}{x}(u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) = x(xu_{\xi\xi} + \frac{1}{x}u_{\xi\eta}) +$$

$$+\frac{1}{x}(xu_{\xi\eta} + \frac{1}{x}u_{\eta\eta}) = x^2 u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2}u_{\eta\eta}$$

Berilgan tenglamaga ikkinchi xosila uchun topilgan ifodalarni qo‘yib

$$x^2(y^2 u_{\xi\xi} - 2\frac{y^2}{x^2}u_{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^4}u_{\eta\eta} + 2\frac{y}{x^3}u_\eta) - y^2(x^2 u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2}u_{\eta\eta}) = 0$$

ni olamiz. Oxirgi ifodani soddalashtirib,

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi}u_\eta = 0$$

kanonik ko‘rinishga kelamiz.

2. Agar (1) parabolik tipdagi tenglama bo‘lsa, u xolda (3) tenglamalar ustma-ust tushadi. Bu xolda (3) sistema uchun bitta $\varphi(x, y) = C$ birinchi integralini xosil qilamiz.U xolda o‘zgaruvchilarni

$$\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$$

formula bo‘yicha amalshtirib olamiz, bu yerda $\psi(x, y)$ -ni

$$\begin{vmatrix} \varphi_x \ \varphi_y \\ \psi_x \psi_y \end{vmatrix} \neq 0$$

shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy funksiya, ya’ni funksional determinant –yakobian–nolga teng bo‘lmasligi lozim.

2-misol. Tenglamani kanonik ko‘rinishga keltiring**.**

$$z_{xx}\sin^2 x - z_{xy} 2y \sin x + z_{yy} y^2 = 0$$

$b^2 - ac = y^2 \sin^2 x - y^2 \sin^2 x = 0$ bo‘lgani uchun tenglama giperbolik tipga qarashli.

Xarakteristik tenglamasi quyidagicha

$$\sin^2 x(dy)^2 + 2y\sin x dx dy + y^2(dx)^2 = 0$$

yoki

$$(\sin x dy + y dx)^2 = 0$$

ko‘rinishga ega. Yani $xdy + ydx = 0$ tenglamani o‘zgaruvchilarni almashtirib va integrallab

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0, \ln|x| + \ln tg\frac{x}{2} = \ln C, tg\frac{x}{2} = C.$$

tenglamani olamiz.

$$\xi = ytg\frac{x}{2}, \eta = y$$

O‘zgaruvchilarni almashtirib, bu yerda y - ixtiyoriy $\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$ shartni

qanoatlantiruvchi funksiya. Bu funksiya uchun xususiy xosilalarni yangi o‘zgaruvchilar orqali ifodalaymiz.

$$z_x = z_\xi \xi_x + z_\eta \eta_x = \frac{1}{2} z_\xi y \sec^2\frac{x}{2},$$

$$z_y = z_\xi \xi_y + z_\eta \eta_y = z_\xi tg\frac{x}{2} + z_\eta,$$

$$z_{xx} = \frac{1}{2}(z_{\xi\xi}\xi_x + z_{\xi\eta}\eta_x) y \sec^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2} z_\xi y \sec^2\frac{x}{2} tg\frac{x}{2} =$$
$$= \frac{1}{4} z_{\xi\xi} y^2 \sec^4\frac{x}{2} + \frac{1}{2} y z_\xi \sec^2\frac{x}{2} tg\frac{x}{2},$$

$$z_{yy} = (z_{\xi\xi}\xi_y + z_{\xi\eta}\eta_y) tg\frac{x}{2} + z_{\eta\xi}\xi_y + z_{\eta\eta}\eta_y = z_{\xi\xi} tg^2\frac{x}{2} + 2 z_{\xi\eta} tg\frac{x}{2} + z_{\eta\eta}$$

$$z_{xy} = \frac{1}{2}(z_{\xi\xi}\xi_y + z_{\xi\eta}\eta_y) y \sec^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2} z_\xi \sec^2\frac{x}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}(z_{\xi\xi} tg\frac{x}{2} + z_{\xi\eta}) y \sec^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2} z_\xi \sec^2\frac{x}{2}$$

ni olamiz. Olingan xususiy xosilalarni berilgan differensial tenglamaga qo‘yamiz.

$$\frac{1}{4} z_{\xi\xi} y^2 \sec^4\frac{x}{2} + \frac{1}{2} y z_\xi \sec^2\frac{x}{2} tg\frac{x}{2} - (z_{\xi\xi} tg\frac{x}{2} + z_{\xi\eta}) y^2 \sec^2\frac{x}{2} \sin x -$$
$$- \frac{1}{2} z_\xi y \sec^2\frac{x}{2} \sin x + y^2 (z_{\xi\xi} tg^2\frac{x}{2} + 2 z_{\xi\eta} tg\frac{x}{2} + z_{\eta\eta}) = 0$$

Soddalashtirib

$$\frac{1}{2} z_{\xi\xi} y \sec^2\frac{x}{2} tg\frac{x}{2} \sin^2 x + y^2 z_{\eta\eta} - z_\xi y \sec^2\frac{x}{2} \sin x = 0$$

yoki

$y z_{\eta\eta} = z_\xi \sin x$ ni olamiz.

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$ boʻlgani uchun u xolda

$$tg\frac{x}{2} = \frac{\xi}{\eta}, \sin x = \frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}$$ natijada

$$z_{\eta\eta} = \frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2} z_\xi$$ ni olamiz.

3. Agar (1) tenglama elliptik tipda boʻlsa, sistemaning birinchi integrallari qoʻshma kompleks koʻrinishda boʻladi:

$$\varphi(x,y) + i\psi(x,y) = C_1, \varphi(x,y) - i\psi(x,y) = C_2$$

$\xi = \varphi(x,y), \eta = \psi(x,y)$ formula boʻyicha almashtirish yerdamida (1) tenglama

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$$

koʻrinishga keltiriladi.

3-misol. $z_{xx} - 2z_{xy} + 2z_{yy} = 0$ tenglamani kanonik koʻrinishga keltiring.

$b^2 - ac = 1 - 2 = -1 < 0$ boʻlgani uchun elliptik tipdagi tenglama ekan.

Demak, xarakteristik tenglama

$$(dy)^2 + 2dxdy + 2(dx)^2 = 0, y'^2 + 2y' + 2 = 0$$

koʻrinishga ega. Uni yechib

$$y + x - ix = C_1, y + x + ix = C_2$$ ni topamiz. Ikkita mavhum

xarakteristikalar oilalarini xosil qilamiz:

$$\xi = y + x, \eta = x$$

Oʻzgaruvchilarni almashtirib

$$z_x = z_\xi \xi_x + z_\eta \eta_x = z_\xi + z_\eta,$$

$$z_y = z_\xi \xi_y + z_\eta \eta_y = z_\xi,$$

$$z_{xx} = (z_{\xi\xi}\xi_x + z_{\xi\eta}\eta_x) + (z_{\eta\xi}\xi_x + z_{\eta\eta}\eta_x) = z_{\xi\xi} + 2z_{\xi\eta} + z_{\eta\eta},$$

$$z_{xy} = z_{\xi\xi}\xi_x + z_{\xi\eta}\eta_x = z_{\xi\xi} + z_{\xi\eta}$$

$$z_{yy} = z_{\xi\xi}\xi_y + z_{\xi\eta}\eta_y = z_{\xi\xi}.$$

larga ega boʻlamiz. Topilgan ifodalarni berilgan differensial tenglamaga qoʻyib

$z_{\xi\xi} + 2z_{\xi\eta} + z_{\eta\eta} - 2z_{\xi\xi} - 2z_{\xi\eta} + 2z_{\xi\xi} = 0$ ni yoki $z_{\xi\xi} + z_{\eta\eta} = 0$ ifodani olamiz.

1.3.2-a. Frontal so‘rov uchun savollar

1. Xususiy xosilali differensial tenglama qachon giperbolik tipdagi tenglama deyiladi?
2. Xususiy xosilali differensial tenglama qachon parabolik tipdagi tenglama deyiladi?
3. Xususiy xosilali differensial tenglama qachon elliptik tipdagi tenglama deyiladi?

1.3.2-b. Blits-so‘rov uchun savollar

1. Xususiy xosilali differensial tenglama ta’rif bering.
2. Kvazichiziqli differensial tengalama qanday ko‘rinishga ega?
3. Xususiy xosilali differensial tenglama tartibi deb nima aytiladi.

1.3.2-c. Og’zaki so‘rov uchun savollar

4. Kvazichiziqli differensial tengalama umumiy yechimi to‘g’risidagi teoremani keltiring.
5. Bir jinsli iyenglamaning yechimi to‘g’risidagi teoremani keltiring.
6. Ikkinchi tartibli xususiy xosilali tenglama qachon chiziqli deyiladi?
7. Matematik fizik tenglamalar kursi uchun xarakterli belgilashlarni keltiring.
8. 2–chi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli giperbolik tipdagi tenglamani kanonik shakliga keltirish yo‘lini ayting.
9. 2–chi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli parabolik tipdagi tenglamani kanonik shakliga keltirish yo‘lini ayting.
10. 2–chi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli elliptik tipdagi tenglamani kanonik shakliga keltirish yo‘lini ayting.

1.3.3. Mustaqil ish uchun topshiriqlar

- *takrorlash va mashqlar*: takrorlash, o‘z-o‘zini tekshirish, tahlil, qayta ishlash, mustahkamlash, eslab qolish, chuqurlashtirish;
- *yangi materiallarning mustaqil o‘zlashtirish*: yangi adabiy va internet materiallar, konspekt qo‘shimchasi; mustaqil iboralar tuzish;
- *ilmiy xaraktyerdagi ishlar*: muammoli holatlar, testlar, savollar, topshiriqlar tuzish; topshiriqlarni bajarish.

1.3.4. Kartochkalar uchun testlar

1.3.5. ekranga tayanch materiallarni ko‘rsatish(slaydlar)

- Prezentatsiya

1.3.6. Tavsiya etilgan adabiyotlar

Asosiy

1. *Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O‘zbekistan», 2002, 448 b.*
2. *Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,*

3. *Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.*

4. *Bisadzs L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.*

5. *Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.*

Qo‘shimcha

6. *Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.*

7. *Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.*

8. *Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.*

9. *Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.*

10. *Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.*

11. *Mixlnn S.G. Leksii po lineynыm integralnыm uravneniyam. M. 1959.*

12. *Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.*

13. *Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.*

14. *Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.*

1.4. O‘qitish usullari qoidalari

1.4.1. Aqliy hujum qoidalari

- Hech qanday o‘zaro baholash va tanqid;
- Taklif etilayotgan g’oyalarni baholashdan o‘zingni tiy, hatto ular fantastic va iloji yo‘q bo‘lsa ham – hammasi mumkin;
- Tanqid qilma – hamma aytilgan g’oyalar birhirda;
- Bayon qiluvchi gapini bo‘lma;
- Izoh berishdan o‘zingni tiy;
- Maqsad bu - miqdor;
- Qancha g’oyalar ko‘p bo‘lsa chuncha yaxshi: yangi va zarur g’oya tug’ulishi imkoniyati ko‘proq
- Agar g’oyalar takrorlansa o‘ksinma,
- Tasavvo‘ringga erk ber;
- Senda yaralgan g’oyalarni tashlama, agal ular sening nazaringda qabul qilingan sxemaga tegishli bo‘lmasa ham;
- Bu muammo aniq usullar bilan yechiladi deb o‘ylama.

1.4.2. “Insert” texnikasi qoidalari

- Matndi o‘qib, ularda savollat tug’dirayotgan joylarni, ularni bilimlariga mos kewlayotgan va mos kelmayotgan joylarni qalam bilan belgilab qo‘yiladi;

- “Insert” jadvalini quyidagi belgilashlar bilan to‘ldirish:
  Agar «!» bo‘lsa siz o‘z bilimingizga yoki siz o‘ylagan fikrga to‘g’ri kelayotganini o‘qiyapsiz;
  Agar «–» bo‘lsa siz o‘z bilimingizga yoki tyo‘g’ri deb o‘ylaganingizga mutlaqo zid bo‘lganini o‘qiyapsiz;
  Agar «+» bo‘lsa siz o‘qityotganingiz siz uchun yangilik;
  Agar «?» bo‘lsa, siz o‘qiyotganingiz siz uchun tushunarsiz yoki siz bu savolga yanada ko‘proq ma`lumotlar olishni istaysiz.

1.4.3. Guruhlarda ishlash qoidalari

- Hamma o‘z do‘stlarini tinglashi kerak, unga yaxshi munosabatda bo‘lib hurmar ko‘rsatishi kerak;
- Hamma aktiv harakat qilishi lozim; berilgan topshiriqqa nisbatan birgalikda va javobgarlik bilan ishlashi kerak;
- Har kim o‘ziga kerak paytda yordam so‘rashi kerak;
- Har kim undan yordam so‘ralganda yordam ko‘rsatishi kerak;
- Guruhning ish natijalarini baholashda ishtirok etishi lozim;
- Biz bir kemadamiz, o‘zgalarga yordam berib o‘zimiz o‘rganamiz, shuni har kim tushunishi lozim;

Mavzu 2. GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMALAR.

Ma`ruzaga reja-topshiriqlar

Fan: Matematik fizika tenglamalari

O‘quv soati: 2 soat (ma`ruza);

O‘quv mashg’uloti turi: ma`ruza; yangi bilimlarni mustahkamlash va o‘rganish.

Ma`ruza rejasi:

1. Ikkinichi tartibli xususiy hosilali tenglamalarning klassifikasiyasi.
2. Tebranish tenglamasi uchun masalaning quyilishi.
3. Dalamber formulasi. Koshi masalasi yechimining mavjudligi turg’unligi va yagonaligi.
4. Ikkinchi tartibli xususiy hosilali tenglamalarning xarakteristikasi.
5. Yarim to‘g’ri chiziqdagi masala. Davom ettirish metodi.

O‘quv mashg’uloti maqsadi:

O‘quv fani to‘g’risida umumiy ta`surotlar berish, Xususiy hosilali tenglamalarva keyinchalik kasbiy faoliyatidagi roli.

O‘quv mashg’uloti masalalari:

- *O‘rgatuvchi*: talabalarda qabul qilish faoliyatini tashkil qilish, yangi materialni boshlang’ich esda qoldirish va anglash; Matematik fizika tenglamalarining terminlari, iboralarini xarakterlovchi elementlar; talabalarning matematik firlashini rivojlantirish muammoli masalalarni yechimini mahoratini oshirish; matematik masalalarni yechishda matematik simvollarning hususiyatlari bilan tanishtirish;
- *Rivojlantiruvchi*: kitob matni bilan ishlay bilishligi – mag’zlarini tanlab olish, tahlil qilish; gaplar tuzish, hulosa chiqarish, materialni talabalarning izlash faoliyatini stimullashtirish; hususiydan umumiy holga o‘tish usuli bilan tekshirish; tekshirish natijalarini tahlil qilib va uni umumlashtira olishini rivojlantirish; analitik-sintetik

faoliyatning mantiqiy fikrlashini qo‘llash; talabalarning ijodiy mahoratini shakillantirish;

- *Tarbiyalovchi:* aktiv faoliyatga, mustaqil ishga jalb qilish; guruhlarda ishlash qoidalariga rioya qila olish; fanni o‘rganishga qiziqishni rivojlantirish; Matematik fizika tenglamalarini matematik-komunikativ kursni bir qismi sifatida tassavur berish; javobgarlik tuyg’ularini tarbiyalash, mehnatsevarlik, individual ishni jamoaviy ish bilan biriktirish, intizomlashtirish.

O‘qitish texnologiyasi:

- *O‘qutish usullari*: instruktaj; Ma`ruza, aqliy hujum, “Insert” texnikasi;
- *O‘qitish shakillari*: frontal; jamoaviy;
- *O‘qitish vositalari*: Ma`ruza matni; jadvallar, multimediya;
- *O‘qitish sharoitlari*: texnik jihozlashtirilgan auditoriya;
- *Baholash va monitoring*: o‘g’zaki savol-javob, blits-so‘rov.

Pedagogik masalalar:

- Fanning masalalari va uning o‘quv fanlar sistemasidagi o‘rni va roli bilan tanishtirish;
- O‘quv fanning tuzulmasi va tavsiya etiladigan o‘quv-metodik adabiyotlarni tasvirlash;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlarini ochib berish, baholash shakli va muddatlari;
- Fan ma`ruzasi paytida o‘qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy bosqichlarini xarakterlab berish va umumiy sxemasini tushuntirish.
- O‘qitish texnologiyasi rivojlanishi perspektivasini xarakterlab berish;

O‘quv faoliyati natijalari:

- Fan ma`ruzasi masalalari, maqsadlari va nomlari shakillanadi;
- Xususiy hosilali tenglamalardoirasidagi yutuqlar yoritiladi;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlari hamda baholash shakli va muddatlari aytiladi
- Fan ma`ruzasida o‘qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy sxemasini kengaytirib xatakterlab beradi;
- Fanning asosiy ta`riflarini beradi, Xususiy hosilali tenglamalarfani ma`ruzalarining asosiy yo‘nalishlari beriladi;
- Nazariy bilimlarning to‘liqligi, sistemaliyligi va harakatliyligi;
- Amaliy mag’ulotlarni bajarishda o‘rganilgan iboralarbilan ishlay olishligi;

- **1.2. Ma`ruzaning xronologik xaritasi**

- **1 bosqich. O‘quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa):**

- *O‘qituvchining faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (davomat, konspektning borligi; o‘ziga ishonch, aniqligi,); kerakli materiallarni tarqatish (konspekt, tarqatma materiallar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadini bayon qilish; o‘quv mashg’ulotning rajasi bilan tanishtirish; kalit iboralar va so‘zlar, kategoriyalar; internet saytlari va adabiyotlar ro‘yhati; o‘quv natijalari haqida aytish;
- *Talabalar faoliyati*: o‘quv joyini tayyorlash (talabalar borligi; tashqi ko‘rinish; o‘quv materiallar va qo‘llanmalar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadi bilan tanishish; o‘quv materialini qabul qilishga tayyorgarlik ko‘rish;
- *Shakillar*, *usular*, *uslublar*: instruktaj; frontal so‘rov; mustahkamlovchi so‘rov.

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa):

- *O‘qituvchining faoliyati*: mavzuga kiritadi; yangi mavzuga doir o‘tgan fanlar va mashg’ulotlarning mavzularini eslashga chorlaydi; ma`ruza matnini tarqatadi, tanishishni taklif etadi, “Insert” usuli bilan belgilar qo‘yishni taklif etadi; birinchi savol bo‘yicha matn o‘qiladi; qo‘shimcha o‘quv materiallarini aytib boorish va tushuncha berish; natural obektlarni namnoyon qilish va izohlash; tushunarsiz savollarni aniqlash va tushintirish; birinchi savol bo‘yicha nazar (shunday qilib qolgan savollarga ham);
- *Talabalar faoliyati*: yangi mavzuda doir oldingi mashg’ulotlarda va fanlarda olgan bilimlarni mustahkamlaydi,; har bir kalit ibora va terminlarni eshitib, yozib borib, konspekt qilib aytib borishadi; “Insert” usuli bilan belgilan o‘qiydilar, aniqlik kiritadilar, savollar beradilar va o‘zaro;
- *Shakillar, usular, uslublar*: frontav so‘rov blits-so‘rov; aqliy hujum, “Insert” texnikasi.

3 bosqich. Yakunlovchi qism (10 daqiqa)

- *O‘qituvchining faoliyati:* mavzu bo‘yicha hulosa qilish, talabalarning e`tiborlarini asosiylarda jalb qilish; qilingan ishning muhimligini aytib o‘tish; alohida talabalarning bajarilgan ishlarini baholash; o‘zaro baholashning natijalarini chiqarish; o‘quv mashg’ulotning yutuqlik darajasini baholash va tahlil qilish; mustaqil ish uchun topshiriqlar; baho ko‘rsatgichlari va me`zonlari;
- *Talabalar faoliyati: ishning* tahlili; natijalarni olish; texnologik bilimlarni qo‘llash; o‘zaro baholashni o‘tkazish, yo‘l qo‘yilgan hatolar bo‘yicha tahlil va aniqlik kiritish; mustaqil ish topshiriqlarini yozib olish;
- *Shakillar, usular, uslublar*: guruhlarda ishlash, kartochkalarda topshiriqlar.

1.3. O‘quv-metodik materiallar

Ma`ruza rejasi:

6. Ikkinichi tartibli xususiy hosilali tenglamalarning klassifikasiyasi.
7. Tebranish tenglamasi uchun masalaning quyilishi.
8. Dalamber formulasi. Koshi masalasi yechimining mavjudligi turg’unligi va yagonaligi.
9. Ikkinchi tartibli xususiy hosilali tenglamalarning xarakteristikasi.
10. Yarim to‘g’ri chiziqdagi masala. Davom ettirish metodi.

Tayanch iboralar: xususiy xosilali teglama, klassifikasiya, tebranish tenglamasi, Dalamber formulasi, Koshi masalasi, xarakteristika, davom ettirish.

1.3.1. Ma`ruza matni

1. Ikkinichi tartibli xususiy hosilali tenglamalarning klassifikasiyasi

O‘tgan ma’ruzada berilgan ta’riflarni eslaymiz.

Ta’rif: E^2 fazoda ikkinchi tartibli xususiy hosilalarga ega bo‘lgan biror bir funksiya $U(x,y)$ berilgan (bunda $U_{xy}=U_{yx}$) bo‘lsin. Shunda xususiy hosilali umumiy tenglama deb $F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{yy})=0$ tenglamaga aytiladi. Bunda F qandaydir funksiya. Kvazichiziqli tenglama uning xususiy holidan iborat

$$a_{11}(x,y,u,u_x,u_y)u_{xx}+2a_{12}(x,y,u,u_x,u_y)u_{xy}+$$
$$+a_{22}(x,y,u,u_x,u_y)u_{yy}+F_1(x,y,u,u_x,u_y)=0$$

Bizni yuqori tartibli xosilalarga nisbatan chiziqli tenglamalar, ya’ni a_{11}, a_{12}, a_{22} funksiyalari faqat (x, y) o‘zgurvchilarga bog’liq bo‘lgan hollar qiziqtiradi.

$$a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}(x,y)u_{yy} + F_1(x,y) = 0$$

Tenglama chiziqli deyiladi, agar u nafaqat yuqori tartibli hosilalari u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} ga nisbatan balki u funksiya va uning birinchi tartibli hosilalariga nisbatan chiziqli bo‘lsa.

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0$$

(2.0)

Bu yerda $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ - koeffisiyentlar faqat x va y bo‘yicha o‘zgaradi.

Ta’rif: Agar $f \equiv 0$ bo‘lsa shunda (2.0) tenglama bir jinsli tenglama, aks holda bir jinsli bo‘lmagan tenglama deb aytiladi.

Ta’rif: (x_0, y_0) nuqtada (2. 1) tenglama quyidagicha aniqlanadi.

1. Agar $a_{12}^2(x_0,y_0) - a_{11}(x_0,y_0)a_{22}(x_0,y_0) > 0$ bo‘lsa, giperbolik tipdagi bo‘ladi.
2. Agar $a_{12}^2(x_0,y_0) - a_{11}(x_0,y_0)a_{22}(x_0,y_0) < 0$ bo‘lsa, elliptik tipdagi bo‘ladi.
3. Agar $a_{12}^2(x_0,y_0) - a_{11}(x_0,y_0)a_{22}(x_0,y_0) = 0$ bo‘lsa, parabolik tipdagi bo‘ladi.

Tenglamaning tipi ma’lum bir soha uchun ham xuddi shunday aniqlanadi: (2.1) tenglama sohada (elliptik), (giperbolik), (parabolik) tipdagi deb ataladi, agar shu soha barcha nuqtalarda $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{12}$ $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{12} > 0$ $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{12} < 0$ $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{12} = 0$ bo‘lsa. Agar tenglama sohaning har xil nuqtalarida xar xil tipga ega bo‘lsa, bunda u shu sohada aralash tipdagi tenglama teyiladi.

GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMALAR.

2. Tebranish tenglamasi uchun masalaning qo‘yilishi.

Bizlar giperbolik tipdagi tenglamani ko‘rib chiqammiz.

Faraz qilaylik $u(x,t) \in C^2 \; ((x,t): 0 < x < l, t > 0)$ bo‘lsin, shunda

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \; ((x,t): 0 < x < l, t > 0) \quad (2.1)$$

Tenglama ideal torning tebranish tenglamasi deyiladi.

Ikki fazoviy o‘zgaruvchilarning funksiyasi $u(x,y,t)$ holida:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \; (x,y) \in D, t > 0$$

bu elastik membrananing tebranish tenglamasi.

(2. 1) tenglamani qaraymiz. Biz quyidagi boshlang’ich shartlarni berishimiz mumkin:

$$\begin{cases} u\ (x,0) = \phi(x),\ 0 < x < l; \\ u_t\ (x,0) = \varphi(x),\ 0 < x < l, \end{cases}$$ − torninng muvozanat holatidan chetlanishini izohlaydi;

va chegaraviy shartlarni:

$$\begin{cases} u\ (l,t) = \mu\ (t),\ t > 0;\ (\max kamlanlangan \quad holda\ \ \mu \equiv 0) \\ u_x\ (l,t) = \nu\ (t),\ t > 0; \\ u\ (l,t) + \alpha\ u_x(l,t) = \theta\ (t).\ t > 0 \end{cases}$$

odatda bizlar ulardan ba'zilarini olamiz.

Giperbolik yoki tebranish tenglamalar uchun chegaraviy masalalar tuzamiz.

Birinchi chegaraviy masala.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\ u_{xx}, & 0 < x < l,\ 0 < t \le T; \\ u\ (x,0) = \phi\ (x), & 0 \le x \le l; \\ u_t\ (x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le l; \\ u\ (0,t) = \mu_1(t), & 0 \le t \le T; \\ u\ (l,t) = \mu_2(t), & 0 \le t \le T; \end{cases}$$

Xuddi shuni o'zi yarim to'g'ri chiziq uchun :

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\ u_{xx}, & x > 0,\ 0 < t \le T; \\ u\ (x,0) = \phi\ (x), & x \ge 0; \\ u_t\ (x,0) = \varphi(x), & x \ge 0; \\ u\ (0,t) = \mu(t), & 0 \le t \le T; \end{cases}$$

Shuningdek oddiy Koshi masalasini qarash mumkin:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\ u_{xx}, & -\infty < x < +\infty,\ 0 < t \le T; \\ u\ (x,0) = \phi\ (x), & -\infty < x < +\infty; \\ u_t\ (x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

3. Dalamber formulasi. Koshi masalasi yechimining mavjudligi turg'unligi va yagonaligi.

Bizlar tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasini qaraymiz.

$$[1.1]\ \begin{cases} (1) \quad u_{tt} = a^2\ u_{xx}, & -\infty < x < +\infty,\ 0 < t \le T; \\ (2) \quad u\ (x,0) = \phi\ (x), & -\infty < x < +\infty; \\ (3) \quad u_t\ (x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Faraz qilaylik, $u \in C^2\left(R \times R^+\right)$ funksiya bo‘lib, u [1.1] Koshi masalasining yechimi bo‘lsin. Yangi $\xi, \quad \eta$ o‘zgaruvchilarni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\begin{cases} \xi = x + at; \\ \eta = x - at; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\xi + \eta}{2}; \\ t = \dfrac{\xi - \eta}{2a}. \end{cases}$$

Yangi funksiyani aniqlaymiz:

$$v(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2a}\right).$$

Bu funksiyaning xususiy hosilalarini topamiz.

$$v_\xi = u_x\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2a}\right)\frac{1}{2} + u_t\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2a}\right)\frac{1}{2a};$$

$$\begin{aligned} v_{\xi\eta} &= u_{xx}\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2a}\right)\frac{1}{4} + u_{xt}\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2a}\right)\left(-\frac{1}{4a}\right) \\ &+ u_{tx}\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2a}\right)\frac{1}{4a} + u_{tt}\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2a}\right)\left(-\frac{1}{4a}\right) = \\ &= u_{xx}\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2a}\right)\frac{1}{4} - \frac{1}{4a}u_{tx}\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2a}\right) = \\ &\{tebranish \quad tenglamasi\} = 0; \end{aligned}$$

Endi teskari integrallashni amalga oshiramiz:

$$v_{\xi\eta}(\xi,\eta) = 0, \quad \xrightarrow[]{\xi \quad bo'yicha\ integral} \Rightarrow \quad v_\eta(\xi,\eta) = \tilde{f}_1(\eta) \quad \Rightarrow$$

$$\xrightarrow[]{\eta \quad bo'yicha\ integral} \Rightarrow \quad v(\xi,\eta) = \int \tilde{f}_1(\eta)d\eta + f_2(\xi)$$

$$\Rightarrow v(\xi,\eta) = f_1(\eta) + f_2(\xi) \Rightarrow \{u(x,t) = v(x+at, x-at)\} \Rightarrow$$

$$u(x,t) = f_1(x-at) + f_1(\ x+at), \quad (2.2)$$

bu yerda $\tilde{f}_1, f_1, f_2$- lar integrallash davomida hosil bo‘ladigan funksiyalar. Shunday qilib biz tebranish tenglamasi yechimi bo‘lgan u funksiyaning umumiy ko‘rinishini hosil qildik. Boshlang’ich shartlardan foydalanib f_1, f_2-larni aniqlaymiz:

$$\begin{cases} u\ \ (x,\ 0) =\ f_1(x)+\ f_2(x)=\phi(x); \\ u_t(x,\ 0) = -af_1'\ \ (x)+af_1'\ \ (x)=\varphi(x); \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -f_1(x)+\ f_2(x)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\varphi(\xi)d\xi+C \\ f_1(x)+\ f_2(x)=\phi(x). \end{cases}$$

Sistemadagi tenglamalarni qo‘shib va biridan birini ayirib quyidagini hosil qilamiz.

$$\begin{cases} f_2(x)=\dfrac{\phi(x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\varphi(\xi)d\xi+\dfrac{c}{2}; \\ f_1(x)=\dfrac{\phi(x)}{2}-\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\varphi(\xi)d\xi-\dfrac{c}{2}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{u\ \ (x,\ t) =\ f_1(x-at)+\ f_2(x+at)\right\} \Rightarrow$$

$$u\ \ (x,\ t)=\frac{\phi(x-at)+\phi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)d\xi \quad (2.3)$$

(2.3) formula Dalamber formulasi deyiladi.

Teorema 2. 1 (Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi).

Faraz qilaylik $\phi\ (x)\in C^2(R),\ \ \varphi\ (x)\in C^1(R)$. [1. 1] Koshi masalasining yechimidan iborat shunday $u\ (x,y)$ funksiya mavjud va yagonadirki, bunda $u\in C^2\left(R\times \overline{R}^+\right)$. Bu yerda $\phi\ (x)$, $\varphi\ \ (x)$ funksiyalar boshlang’ich shartlarni aniqlaydi.

Isbot:

Yechimning mavjudligi (1)-(3) shartlardan foydalanib va teorema shartlaridan foydalangan holda bevosita o‘rniga qo‘yish bilan tekshirilib ko‘riladi.

Yagonaligi quyidagi mulaxozalardan kelib chiqadi: (1)-(3) shartlarni qanoatlantiriuvchi ixtiyoriy funksiya uchun Dalamber formulasi bo‘yicha ifodasi xaqqoniydir, bu ifoda esa faqat bir funksiyani ko‘zda tutadi.

Teorema 2.2 (Turg’unlik teoremasi).

Faraz qilaylik $\phi_1,\phi_2\ (x)\in C^2(R),\ \ \varphi_1,\varphi_1\ (x)\in C^1(R)$ va ular R fazoda cheagralangan bo‘lsin. Agar $u_1,u_2(x,t)$ funksiyalar [2.1] tipdagi masalaning yechimlari vam mos ravishda $\phi_1,\phi_2,\varphi_1,\varphi_2$ boshlang’ich shartlar bilan berilgan yechimlari bo‘lsa, shunda

$$\sup_{x\in R,\ 0\le t\le T}\left|u_1(x,t)-u_2(x,t)\right|\le \sup_{x\in R}\left|\ \phi_1(x)-\phi_2(x)\right|+T\sup_{x\in R}\left|\ \varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right|$$

bo‘ladi.

Isbot.

u_1, u_1 uchun (2.3) Dalamber formularidan kelib chiqadiki:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ \left(\left(x,t\right): 0 < x < l, t > 0\right)$$

$$|u_1 - u_2| \le \left| \frac{\phi_1\left(x+at\right) - \phi_2\left(x+at\right)}{2} \right| + \left| \frac{\phi_1\left(x+at\right) - \phi_2\left(x+at\right)}{2} \right| +$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} |\ \varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)| d\xi \le \sup_{x\in R} \ |\ \phi_1(x) - \phi_2(x)| +$$

$$+\sup_{x\in R} \ |\ \varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} d\xi \le \sup_{x\in R} \ |\ \phi_1(x) - \phi_2(x)| + \sup_{x\in R} \ |\ \varphi_1(x) - \varphi_2(x)| T$$

Teorema isbotlandi.

4. Ikkinchi tartibli xususiy hosilali tenglamalarning xarakteristikalari.

Ikkinchi tartibli xususiy hosilali klassik tenglama quyidagi ko‘rinishga ega:

$$a_{11}(x,y)U_{xx} + 2a_{12}(x,y)U_{xy} + a_{22}(x,y)U_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y) \quad (2.4)$$

Unga bir qiymatli moslik bilan quyidagi oddiy differensial tenglamani qo‘yamiz:

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0 \quad (2.5)$$

Shunda (2.5)ning yechimlari bo‘lgan funksiyalar (egri chiziqlar) (2.4) tenglamaning xarakteristikalari deyiladi. Masalan

$a^2U_{xx} - U_{tt} = 0$ tebranish tenglamasi uchun xarakteristikalar hosil qilinadigan tenglama

$a^2(dt)^2 - (dx)^2 = 0$ ko‘rinishga ega.

Undan quyidagini hosil qilamiz:

$$\left[\begin{array}{l} a\ dt + dx = 0; \\ a\ dt - dx = 0. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x + at = const; \\ x - at = const. \end{array}\right.$$

Bular giperbolik tipdagi tenglamalarning xarakteristikalaridan iborat ikki to‘g’ri chiziqdir.

Faraz qilaylik u (x, t) funksiya ma’lum bir Koshi masalasining yechimi bo‘lsin. *Oxy* tekisligining birinchi choragida ixtiyoriy (x_0, y_0) nuqta olamiz. Bu nuqtadan faqat ikkita xarakteristika o‘tadi:

$$x - at = x_0 - at_0,\ x + at = x_0 + at_0$$

Ular O*x* o‘qini $(x_0 + at_0, 0)$, $(x_0 - at_0, 0)$ nuqtalar orqali kesib o‘tib, bunda xarakteristik uchburchakni hosil qiladi.

u (x, t) funksiya uchun $\mathbf{u}\ (\mathbf{x}_0, \mathbf{t}_0)$ nuqtada (2.3) Dalamber formulasini yozib

$$\mathrm{u}(\mathrm{x}_0, \mathrm{t}_0) = \frac{\phi(\mathrm{x}_0 - \mathrm{t}_0) + \phi(\mathrm{x}_0 + \mathrm{t}_0)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{\mathrm{x}_0 - a\mathrm{t}_0}^{\mathrm{x}_0 + a\mathrm{t}_0} \varphi(\xi) d\xi$$

hosil qilamizki, u (x, t) funksiyaning qymati faqat xarakteristik uchburchakning asosidagi $\phi(x)$, $\varphi(x)$ qiymatlari bilan aniqlanadi.

Bu giperbolik tipdagi tenglamalarning muxim o‘ziga xos xususiyat. Uni quyidagi misolda tushinib olish mumkin.

Faraz qilaylik $\phi(x)$, $\varphi(x)$ funksiyalar biror [a, b] kesmaning tashqarisida 0 ga teng bo‘lsin. Shunda II, III sohalarda u *(x, t)* funksiya ham 0 ga aynan teng bo‘ladi. Bu Dalamber formulasidan osongina ko‘rish mumkin. Ushbu fakt (dalil) giperbolik tenglamadagi u (x, t) signal (xabar)ni tarqalishining (x o‘qi bo‘yicha) (t vaqt mobaynidagi) oxiridagi tezligini ko‘rsatadi.

Aksincha issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun berilgan Koshi masalasida

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x) & -\infty > x > \infty, \end{cases}$$

yechim, keyinchlik ko‘rsatadiganidek, quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2} \right) \phi(s)ds$$

Ko‘rinib tipibdiki, agar $\phi(s)$ funksiya uzluksiz, manfiy bo‘lmagan va biror nuqtada 0 dan farqli bo‘lsa, unda

$$u(x,t) > 0, \quad \forall t > 0$$

bo‘ladi.

Ya’ni biz shuni hosil qildikki issiqlik o‘kazuvchanlik tenglamasi holida signal (xabar) amalda darhol (mgnovenno) tarqaladi.

5. Yarim to‘g’ri chiziqdagi masalalar. Davom ettirish usuli.

Birinchi chegaraviy masala

Yarim to‘g’ri chiziqdagi bir jinsli shartga ega bo‘lgan tebranish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masala quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\begin{cases} (1) \quad u_{tt} = a^2\, u_{xx}, & x > 0, t < 0; \\ (2) \quad u\,(x,t) = 0, & t < 0; \\ (3) \quad u\,(x,0) = \phi(x), & x \geq 0; \\ (4) \quad u_t\,(x,0) = \varphi(x), & x \geq 0; \end{cases}$$

u (x, t) va u_t *(x, t)* funksiyalarning 0 da uzluksizligini ta’minlash uchun

$$\begin{cases} \phi(0) = 0; \\ \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

bog’lanish shartlarini qo‘shamiz (usloviya sopryajeniya).

Ushbu chegaraviy masalaning yechimini topish uchun, uni to‘liq to‘g’ri chiziq holigacha kegaytirish asosida aniqlaymiz. Yangi Φ, Ψ fuknsiyalarni kiritgan xolda $\phi(x), \varphi(x)$ funksiyalarni butun to‘g’ri chiziqda toq tarzada qo‘shimcha aniqlaymiz (Doopredelim nechetnым obrazom).

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \geq 0; \\ -\phi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0; \\ -\varphi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Modifikasiyalangan Koshi masalasini qaraymiz.

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2\, u_{xx}(x,t), & -\infty < x < \infty,\ t > 0; \\ u\,(x,0) = \Phi(x), \\ u\,(x,0) = \Psi(x). \end{cases}$$

Bu holda U(x,t) ni topish uchun biz Dalamber formulasidan foydalanamiz.

$$\mathrm{U}\,(\mathrm{x},\mathrm{t}\,) = \frac{\Phi(\mathrm{x}-\mathrm{at}) + \Phi(\mathrm{x}+\mathrm{at})}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi.$$

$x,t \geq 0$ ∂a bizga kerakli u (x, t) funksiya sifatida U (x, t) funksiyani olamiz. Ko‘rinib tipibdiki (1), (3) va (4) shartlar $x,t \geq 0$ bo‘lganda birdaniga bajariladi, bu $\Psi(x),\Phi(x)$ larni tarifidan kelib chiqadi. (2) shartning bajrilishi quyidagi almashtirishlardan kelib chiqadi.

$$u(0,t) \overset{def}{=} U(0,t) = \frac{\Phi(-at)+\Phi(at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\Psi(\xi)d\xi.$$

1-chi va 2-chi qo‘shiluvchilar tegishli funksiyalarning toqligi sabali nolga aylanadi. Bu esa 2chi shartning bajarilishini ko‘rsatadi. Shunday qilib bizlar tuzgan u (x, t) funksiya birinchi chegaraviy masalalarning yechimi ekanligini isbotladik. $\Psi(x),\Phi(x)$ funksiyalarni mos ravishda isxodnыye funksiyalar $\phi(x),\varphi(x)$ orqali ifodalaymiz:

$$Agar\quad x \geq at\quad bo'lsa \begin{cases} \Phi(x+at) = \phi(x+at); \\ \Phi(x-at) = \phi(x-at); \\ \quad \Psi(\xi) = \varphi(\xi),\quad agar\quad \xi \in \left[x-at; x+at\right]\quad bo'lsa \end{cases}$$

$$Agar\quad x < at\quad bo'lsa \begin{cases} \Phi(x+at) = \phi(x+at); \\ \Phi(x-at) = -\phi(x-at); \end{cases}$$

Birinchi chegaraviy masalani yechish uchun quyidagi yordamchi formulani yozamiz.

$$\grave{A}g\grave{a}r\quad x < at\quad bo'lsa,\ unda \int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi = \int_{x-at}^{0}\Psi(\xi)d\xi + \int_{0t}^{x-a}\Psi(\xi)d\xi =$$

$$= \int_{x-at}^{0} -\varphi(-\xi)d\xi + \int_{0}^{x+at}\varphi(\xi)d\xi =$$

$$= \left\{-\xi = \xi\ \ deb\ \ olamiz\right\} = \int_{at-\div}^{0}\varphi(\xi)d\xi + \int_{0}^{x+at}\varphi(\xi)d\xi = \int_{at-x}^{at+x}\varphi(\xi)d\xi$$

Shunda umumiy formula quyidagicha bo‘ladi:

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\phi(x+at)+\phi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)d\xi,\ \ x \geq at; \\ \dfrac{\phi(at+x)-\phi(at-x)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-xt}^{at+xt}\varphi(\xi)d\xi,\ \ x < at; \end{cases}$$

1.3.2-a. Frontal so‘rov uchun savollar

1. Turg’unlik teoremasi
2. Dalamber formulasini yozing.
3. Xususiy xosilali tenglamaga uchun klassifikasiyani keltiring.
4. Tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasi.

1.3.2-b. Blits-so‘rov uchun savollar

1. Xususiy hosilali umumiy tenglama deb nimaga aytiladi?
2. Xususiy xosilali chiziqli tenglamaga ta’rif bering.
3. Bir jinsli xususiy hosilali tenglama ta’rifini bering.

1.3.2-c. Og’zaki so‘rov uchun savollar

1. Tebranish tenglamasi uchun masalaning quyilishi.
2. Ideal torning tebranish tenglamasini keltiring.
3. Birinchi chegaraviy masala.
4. Koshi masalasi yechimining mavjudligi turg’unligi va yagonaligi to‘g’risidagi teorema.
5. Ikkinchi tartibli xususiy hosilali tenglamalarning xarakteristikalari
6. Yarim to‘g’ri chiziqdagi bir jinsli birinchi chegaraviy shartga ega bo‘lgan tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalaning ko‘rinishi.
7. Birinchi chegaraviy masalani yechimini keltiring

1.3.3. Mustaqil ish uchun topshiriqlar

- *takrorlash va mashqlar*: takrorlash, o‘z-o‘zini tekshirish, tahlil, qayta ishlash, mustahkamlash, eslab qolish, chuqurlashtirish;
- *yangi materiallarning mustaqil o‘zlashtirish*: yangi adabiy va internet materiallar, konspekt qo‘shimchasi; mustaqil iboralar tuzish;
- *ilmiy xaraktyerdagi ishlar*: muammoli holatlar, testlar, savollar, topshiriqlar tuzish; topshiriqlarni bajarish.

1.3.4. Kartochkalar uchun testlar

1.3.5. ekranga tayanch materiallarni ko‘rsatish(slaydlar)

- Prezentatsiya

1.3.6. Tavsiya etilgan adabiyotlar

Asosiy

1. *Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O‘zbekistan», 2002, 448 b.*
2. *Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,*
3. *Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.*
4. *Bisadzs L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.*
5. *Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.*

Qo‘shimcha

1. *Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.*
2. *Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.*
3. *Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.*
4. *Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.*
5. *Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.*
6. *Mixlnn S.G. Leksii po lineynыm integralnыm uravneniyam. M. 1959.*
7. *Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.*
8. *Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.*
9. *Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.*

1.4. O‘qitish usullari qoidalari

1.4.1. Aqliy hujum qoidalari

- Hech qanday o‘zaro baholash va tanqid;
- Taklif etilayotgan g’oyalarni baholashdan o‘zingni tiy, hatto ular fantastic va iloji yo‘q bo‘lsa ham – hammasi mumkin;
- Tanqid qilma – hamma aytilgan g’oyalar birhirda;
- Bayon qiluvchi gapini bo‘lma;
- Izoh berishdan o‘zingni tiy;
- Maqsad bu - miqdor;
- Qancha g’oyalar ko‘p bo‘lsa chuncha yaxshi: yangi va zarur g’oya tug’ulishi imkoniyati ko‘proq
- Agar g’oyalar takrorlansa o‘ksinma,
- Tasavvo‘ringga erk ber;
- Senda yaralgan g’oyalarni tashlama, agal ular sening nazaringda qabul qilingan sxemaga tegishli bo‘lmasa ham;
- Bu muammo aniq usullar bilan yechiladi deb o‘ylama.

1.4.2. “Insert” texnikasi qoidalari

- Matndi o‘qib, ularda savollat tug’dirayotgan joylarni, ularni bilimlariga mos kewlayotgan va mos kelmayotgan joylarni qalam bilan belgilab qo‘yiladi;
- “Insert” jadvalini quyidagi belgilashlar bilan to‘ldirish:
  Agar «!» bo‘lsa siz o‘z bilimingizga yoki siz o‘ylagan fikrga to‘g’ri kelayotganini o‘qiyapsiz;
  Agar «–» bo‘lsa siz o‘z bilimingizga yoki tyo‘g’ri deb o‘ylaganingizga mutlaqo zid bo‘lganini o‘qiyapsiz;
  Agar «+» bo‘lsa siz o‘qityotganingiz siz uchun yangilik;
  Agar «?» bo‘lsa, siz o‘qiyotganingiz siz uchun tushunarsiz yoki siz bu savolga yanada ko‘proq ma`lumotlar olishni istaysiz.

1.4.3. Guruhlarda ishlash qoidalari

- Hamma o‘z do‘stlarini tinglashi kerak, unga yaxshi munosabatda bo‘lib hurmar ko‘rsatishi kerak;

- Hamma aktiv harakat qilishi lozim; berilgan topshiriqqa nisbatan birgalikda va javobgarlik bilan ishlashi kerak;
- Har kim o‘ziga kerak paytda yordam so‘rashi kerak;
- Har kim undan yordam so‘ralganda yordam ko‘rsatishi kerak;
- Guruhning ish natijalarini baholashda ishtirok etishi lozim;
- Biz bir kemadamiz, o‘zgalarga yordam berib o‘zimiz o‘rganamiz, shuni har kim tushunishi lozim;

Mavzu 3. Birinchi chegaraviy masala yechiminig mavjudgini isbotlash uchun o‘zgaruvchilarni ajratish usuli.

Ma`ruzaga reja-topshiriqlar

Fan: Matematik fizika tenglamalari

O‘quv soati: 2 soat (ma`ruza);

O‘quv mashg’uloti turi: ma`ruza; yangi bilimlarni mustahkamlash va o‘rganish.

Ma`ruza rejasi:

1. Ikkkinchi chegaraviy masala
2. O‘zgaruvchilarni ajratish usuli
3. Shturm-Liuvill masalasining trivial bo‘lmagan yechimlari
4. Birinchi chegaraviy masala yechimining mavjudligi haqida teorema
5. 1–chi chegaraviy masala yagonaligi

O‘quv mashg’uloti maqsadi:

O‘quv fani to‘g’risida umumiy ta`surotlar berish, Xususiy hosilali tenglamalarva keyinchalik kasbiy faoliyatidagi roli.

O‘quv mashg’uloti masalalari:

- *O‘rgatuvchi*: talabalarda qabul qilish faoliyatini tashkil qilish, yangi materialni boshlang’ich esda qoldirish va anglash; Matematik fizika tenglamalarining terminlari, iboralarini xarakterlovchi elementlar; talabalarning matematik firlashini rivojlantirish muammoli masalalarni yechimini mahoratini oshirish; matematik masalalarni yechishda matematik simvollarning hususiyatlari bilan tanishtirish;
- *Rivojlantiruvchi*: kitob matni bilan ishlay bilishligi – mag’zlarini tanlab olish, tahlil qilish; gaplar tuzish, hulosa chiqarish, materialni talabalarning izlash faoliyatini stimullashtirish; hususiydan umumiy holga o‘tish usuli bilan tekshirish; tekshirish natijalarini tahlil qilib va uni umumlashtira olishini rivojlantirish; analitik-sintetik faoliyatning mantiqiy fikrlashini qo‘llash; talabalarning ijodiy mahoratini shakillantirish;
- *Tarbiyalovchi:* aktiv faoliyatga, mustaqil ishga jalb qilish; guruhlarda ishlash qoidalariga rioya qila olish; fanni o‘rganishga qiziqishni rivojlantirish; Matematik fizika tenglamalarini matematik-komunikativ kursni bir qismi sifatida tassavur berish; javobgarlik tuyg’ularini tarbiyalash, mehnatsevarlik, individual ishni jamoaviy ish bilan biriktirish, intizomlashtirish.

O‘qitish texnologiyasi:

- *O‘qutish usullari*: instruktaj; Ma`ruza, aqliy hujum, “Insert” texnikasi;

- *O‘qitish shakillari*: frontal; jamoaviy;
- *O‘qitish vositalari*: Ma`ruza matni; jadvallar, multimediya;
- *O‘qitish sharoitlari*: texnik jihozlashtirilgan auditoriya;
- *Baholash va monitoring*: o‘g’zaki savol-javob, blits-so‘rov.

Pedagogik masalalar:

- Fanning masalalari va uning o‘quv fanlar sistemasidagi o‘rni va roli bilan tanishtirish;
- O‘quv fanning tuzulmasi va tavsiya etiladigan o‘quv-metodik adabiyotlarni tasvirlash;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlarini ochib berish, baholash shakli va muddatlari;
- Fan ma`ruzasi paytida o‘qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy bosqichlarini xarakterlab berish va umumiy sxemasini tushuntirish.
- O‘qitish texnologiyasi rivojlanishi perspektivasini xarakterlab berish;

O‘quv faoliyati natijalari:

- Fan ma`ruzasi masalalari, maqsadlari va nomlari shakillanadi;
- Xususiy hosilali tenglamalardoirasidagi yutuqlar yoritiladi;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlari hamda baholash shakli va muddatlari aytiladi
- Fan ma`ruzasida o‘qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy sxemasini kengaytirib xatakterlab beradi;
- Fanning asosiy ta`riflarini beradi, Xususiy hosilali tenglamalarfani ma`ruzalarining asosiy yo‘nalishlari beriladi;
- Nazariy bilimlarning to‘liqligi, sistemaliyligi va harakatliyligi;
- Amaliy mag’ulotlarni bajarishda o‘rganilgan iboralarbilan ishlay olishligi;

- **1.2. Ma`ruzaning xronologik xaritasi**

- **1 bosqich. O‘quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa):**

- *O‘qituvchining faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (davomat, konspektning borligi; o‘ziga ishonch, aniqligi,); kerakli materiallarni tarqatish (konspekt, tarqatma materiallar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadini bayon qilish; o‘quv mashg’ulotning rajasi bilan tanishtirish; kalit iboralar va so‘zlar, kategoriyalar; internet saytlari va adabiyotlar ro‘yhati; o‘quv natijalari haqida aytish;
- *Talabalar faoliyati*: o‘quv joyini tayyorlash (talabalar borligi; tashqi ko‘rinish; o‘quv materiallar va qo‘llanmalar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadi bilan tanishish; o‘quv materialini qabul qilishga tayyorgarlik ko‘rish;
- *Shakillar, usular, uslublar*: instruktaj; frontal so‘rov; mustahkamlovchi so‘rov.

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa):

- *O‘qituvchining faoliyati*: mavzuga kiritadi; yangi mavzuga doir o‘tgan fanlar va mashg’ulotlarning mavzularini eslashga chorlaydi; ma`ruza matnini tarqatadi, tanishishni taklif etadi, “Insert” usuli bilan belgilar qo‘yishni taklif etadi; birinchi savol bo‘yicha matn o‘qiladi; qo‘shimcha o‘quv materiallarini aytib boorish va tushuncha berish; natural obektlarni namnoyon qilish va izohlash; tushunarsiz savollarni aniqlash va tushintirish; birinchi savol bo‘yicha nazar (shunday qilib qolgan savollarga ham);
- *Talabalar faoliyati*: yangi mavzuda doir oldingi mashg’ulotlarda va fanlarda olgan bilimlarni mustahkamlaydi,; har bir kalit ibora va terminlarni eshitib, yozib borib, konspekt qilib aytib borishadi; “Insert” usuli bilan belgilan o‘qiydilar, aniqlik kiritadilar, savollar beradilar va o‘zaro;
- *Shakillar, usular, uslublar*: frontav so‘rov blits-so‘rov; aqliy hujum, “Insert” texnikasi.

3 bosqich. Yakunlovchi qism (10 daqiqa)

- *O'qituvchining faoliyati:* mavzu bo'yicha hulosa qilish, talabalarning e`tiborlarini asosiylarda jalb qilish; qilingan ishning muhimligini aytib o'tish; alohida talabalarning bajarilgan ishlarini baholash; o'zaro baholashning natijalarini chiqarish; o'quv mashg'ulotning yutuqlik darajasini baholash va tahlil qilish; mustaqil ish uchun topshiriqlar; baho ko'rsatgichlari va me`zonlari;
- *Talabalar faoliyati: ishning* tahlili; natijalarni olish; texnologik bilimlarni qo'llash; o'zaro baholashni o'tkazish, yo'l qo'yilgan hatolar bo'yicha tahlil va aniqlik kiritish; mustaqil ish topshiriqlarini yozib olish;
- *Shakillar, usular, uslublar*: guruhlarda ishlash, kartochkalarda topshiriqlar.

1.3. O'quv-metodik materiallar

Ma`ruza rejasi:

1. Ikkkinchi chegaraviy masala
2. O'zgaruvchilarni ajratish usuli
3. Shturm-Liuvill masalasining trivial bo'lmagan yechimlari
4. Birinchi chegaraviy masala yechimining mavjudligi haqida teorema
5. 1–chi chegaraviy masala yagonaligi

Tayanch iboralar: chegaraviy masala, o'zgaruvchilarni ajratish, usul, Shturm-Liuvill masalasi, mavjudlik teoremasi, yagonalik teoremasi.

1.3.1. Ma`ruza matni

Ikkinchi chegaraviy masala

Yarim to'g'ri chiziqdagi bir jinsli chegaraviy shart bilan berilgan ikkinchi chegaraviy masala quyidagi ko'rinishga ega:

$$\begin{cases} (1) \quad u_{tt} = a^2 U_{xx}, x > 0, t > 0 \\ (2) \quad u_x(0,t) = 0, t \geq 0; \\ (3) \quad u(x,0) = \phi(x), x \geq 0; \\ (4) \quad u_t(x,0) = \psi(x), x \geq 0. \end{cases}$$

Oldingi holdagiday harakat qilamiz. Lekin bizlarni faqat juft davom ettirish qanoatlantiradi:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x), x \geq 0; \\ \phi(-x), x < 0. \end{cases} \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), x \geq 0; \\ \psi(x), x < 0. \end{cases}$$

Yangi Koshi masalasi va uning uchun Dalamber formulasi bo'yicha yechimi 2-chi ma'ruzada ko'rsatganimzdek bo'ladi:

$$U(x,t) = \frac{\Phi(x-at) + \Phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi.$$

Odlingi xoldagidek, $u(x,t) = U(x,t), x, y > 0$ bo'lsin.

U holda (1), (3), (4) shartlarning bajarilishi ayon.

(2) shartni tekshiramiz. Dalamber formulasini differensiallasak va $\Psi(t)$ juft funksiyaning hosilasi toq funksiya bo'lishini inobatga olib, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$u_x(0,t) = U_x(0,t) = \frac{\Phi'(at) + \Phi'(-at)}{2} + \frac{1}{2a}[\Psi(at) - \Psi(-at)]$$

$\Phi'(t)$ toqligidan va $\Psi(t)$ juftligidan ko‘rinadiki ikkala had ham nolga teng. $u(x,t)$ uchun umumiy formula shunga o‘xshash olinadi.

2. O‘zgaruvchilarni almashtirish usuli

$[0,l]$ kesmada ortonormallashgan funksiyalar sistemalarini qaraymiz.

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\right\}, n=1,2,3,\ldots \quad \left\{\frac{1}{\sqrt{l}}\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\right\}, n=1,2,3,\ldots$$

Fur’ye koeffisiyentlarini

$$\phi_n=\int_0^l \phi(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds;\ \ \tilde{\phi}_n=\int_0^l \phi(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds.$$

kabi aniqlaymiz.

U holda matematik analiz kursidan ma’lumki, agar $\phi(x)\in C[a;b]$ bo‘lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n^2\ ,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\phi}_n^2$$

qatorlar yaqinlashadi. Buni eslab qolamiz va bir jinsli chegaraviy shartlar bilan berilgan bir jinsli tebranish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalaga o‘tamiz:

$$[1.2]\begin{cases}(1).u_{tt}=a^2u_{xx}, 0<x<l, t>0;\\ (2).u(0,t)=u(l,t)=0, t\geq 0;\\ (3).u(x,0)=\phi(x), 0\geq x\geq l;\\ (4).u_t(x,0)=\psi(x), 0\geq x\geq l.\end{cases}$$

Uning yechimini quyidagi usul bilan topamiz: biror $u(x,t)$ funksiyaga keltiruvchi almashtirishlarni bajaramiz, so‘ngra, ma’lum bir shartlarni qanoatlantiruvchi $\phi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar uchun bu funksiya mavjud bo‘lishini va berilgan masala yechimi ekanligini isbotlaymiz.

Yechimni $v(x,t)=X(x)T(t)$ ko‘rinishda izlaymiz. Bu nolga aynan teng bo‘lmagan funksiya bo‘lsin. $v(x,t)$ ni tebranish tenglamasiga qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$T''(t)X(x)=a^2X''(x)T(t)\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=-\lambda$$

bu yerda λ qandaydir o‘zgarmas son.

Bu ayniyatlardan ikkita tenglama kelib chiqadi:

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0, 0<x<l;\\ T''(t)+\lambda a^2T(t)=0, t>0.\end{cases}$$

$X(0)=X(l)=0$ da $v(x,t)$ funsiya (2) shartni qanoatlantiradi.

3. Shturm – Liuvill masalasi

Quyidagi masalani qaraymiz.

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0, 0\leq x\leq l;\\ X(0)=X(l)=0.\end{cases}$$

Shturm – Liuvill masalasining trivial bo‘lmagan yechimlarni topamiz.

Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun yechimni chiqarishda, quyidagi xos qiymatlar va ularga mos xos funksiyalar to‘g’ri keladi (buni bizlar keyinchalik ko‘rsatamiz):

$$\lambda_n = (\frac{\pi n}{l})^2; \quad X_n(x) = \sin(\frac{\pi n}{l}x), n = 1, 2, ...$$

Topilgan λ_n larni $T(t)$ uchun tenglamaga qo‘yamiz:

$$T_n''(t) + (\frac{\pi n}{l}a)^2 T_n(t) = 0 \Rightarrow T_n(t) = a_n \cos(\frac{\pi n}{l}at) + b_n \sin(\frac{\pi n}{l}at),$$

bu yerda a_n va b_n lar qandaydir o‘zgarmaslar.

Shunday qilib (1), (2) shartlar qanoatlantiradigan $X_n(x), T_n(t)$ funksiyalarni topdik.

$v_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ deb olamiz. Ravshanki, bu funksiya uchun ham (1), (2) shartlar bajariladi.

(3), (4) shartlardan a_n, b_n konstantalarni

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ deb olamiz;

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{\pi n}{l}x)[a_n \cos(\frac{\pi n}{l}at) + b_n \sin(\frac{\pi n}{l}at)];$$

$$\phi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\frac{\pi n}{l}x) \Rightarrow a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(s)\sin(\frac{\pi n}{l}s)ds;$$

$$\psi(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \frac{\pi n a}{l})\sin(\frac{\pi n}{l}x) \Rightarrow \frac{\pi n a}{l}b_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(s)\sin(\frac{\pi n}{l}s)ds \Rightarrow$$

$$b_n = \frac{2}{\pi n a}\int_0^l \psi(s)\sin(\frac{\pi n}{l}s)ds.$$

Natijada, konstantalarni topdik, endi to‘la formulani yozamiz;

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{2}{l}\int_0^l \cos(\frac{\pi n}{l}s)\phi(s)\sin(\frac{\pi n}{l}s)ds +$$
$$+ \frac{2}{\pi n a}\int_0^l \sin(\frac{\pi n}{l}at)\psi(s)\sin(\frac{\pi n}{l}s)ds]\sin(\frac{\pi n}{l}x). \tag{1.6}$$

Endi bu formula korrekt bo‘ladigan shartlarni ifodalaymiz.

4. Mavjudlik teoremasi

Teorema 1.3. (mavjudlik)

$$\phi(x) \in C^3[0;l], \phi(0) = \phi(l) = \phi''(0) = \phi''(l) = 0;$$

$$\psi(x) \in C^2[0;l], \psi(0) = \psi(l) = 0.$$

bo‘lsin. U holda (1.6) formula bilan aniqlanadigan $u(x,t)$ funksiya quyidagi xossalarga ega:

$$u(x,t) \in C^2\{[0;l] \times [0;t]\}(T - \forall > 0)$$

va (1)-(4) shartlarni qanoatlantiradi ([1.2] chegaraviy masala yechimi bo‘ladi).

Isbot: $u(x,t)\in C^2\{[0;l]\times[0;T]\}$ ekanligini isbotlaymiz;

$$\phi_n=\int_0^l \phi(s)\sin(\frac{\pi n}{l}s)ds=\{bo'laklab\,\mathrm{int}\,egrallaymiz\}=$$

$$=-\phi(s)\frac{l}{\pi n}\cos(\frac{\pi n}{l}s)\Big|_0^l+\frac{l}{\pi n}\int_0^l \phi'(s)\cos(\frac{\pi n}{l}s)ds=$$

$$=\{bo'laklab\,\mathrm{int}\,egrallaymiz\}=$$

$$=\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\phi'(s)\sin\left(\frac{l}{\pi n}s\right)\Big|_0^l-\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\int_0^l \phi''(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds=$$

$$=\left(\frac{l}{\pi n}\right)^3\phi''(s)\cos\left(\frac{\pi n}{l}s\right)\Big|_0^l-\left(\frac{l}{\pi n}\right)^3\int_0^l \phi'''(s)\cos\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds.$$

$$\widehat{\phi}_n=\int_0^l \phi'''(s)\cos\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds. \qquad n^3|\phi_n|=\left(\frac{l}{\pi}\right)^3|\widehat{\phi}_n|.$$

deb olamiz. Yuqorida aytib o‘tilgan xossaga ko‘ra $\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{\phi}_n^{\,2}$ qator yaqinlashadi. Bundan $\sum_{n=1}^{\infty}n^2|\phi_n|$ qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chiqishini ko‘rsatamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2|\phi_n|=\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|\widehat{\phi}_n|\le\left\{ab\le\frac{a^2+b^2}{2}\right\}\le\left(\frac{1}{n}\right)^3\left[\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{\phi}_n^{\,2}\right]$$

Shunday qilib, bizda ikkala qator ham yaqinlashuvchi qatorlar, shuning uchun $\sum_{n=1}^{\infty}n^2|\phi_n|$ qator majorant alomatiga ko‘ra yaqinlashadi. Shunga o‘xshash

$$\psi_n=\int_0^l \psi(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds=\{bo'laklab\,\mathrm{int}\,egrallaymiz\}=$$

$$=-\psi(s)\frac{l}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds\Big|_0^l+\frac{l}{\pi n}\int_0^l \psi'(s)\cos\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds=$$

$$=\{bo'laklab\,\mathrm{int}\,egrallaymiz\}=$$

$$=\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\psi'(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)\Big|_0^l-\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\int_0^l \psi''(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds$$

Shunga o‘xshash, $\sum_{n=1}^{\infty}n|\psi_n|$ qatorning yaqinlashishini ko‘rsatish mumkin. $\left|\cos\left(\frac{\pi n}{l}st\right)\right|$ ni bir bilan chegaralab, $u(x,t)$ uchun (1.6) qator Veyershtrass alomatiga ko‘ra tekis yaqinlashadi (majorant bo‘lib $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}|\phi_n|+\frac{2}{\pi na}|\psi_n|\right]$ yaqinlashuvchi qator hisoblanadi). Bundan tashqari $u(x,t)$ bu holda $[0;l]\times[0;T]$da uzluksiz.

Shunga o‘xshash x bo‘yicha birinchi va ikkinchi hosilalar mavjudligi va uzluksizligi uchun (1.6) formuladagi mos hosilalardan iborat qatorning tekis yaqinlashishini ko‘rsatish yetarli. x bo‘yicha differensiallab, quyidagilarni olamiz.

$$u_x(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{l}\left[\begin{array}{l}\frac{2}{l}\int_0^l\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)\phi(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds+\\ \frac{2}{\pi na}\int_0^l\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)\psi(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds\end{array}\right]\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

$$u_{xx}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\left[\begin{array}{l}\frac{2}{l}\int_0^l\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)\phi(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds+\\ +\frac{2}{\pi na}\int_0^l\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)\psi(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds\end{array}\right]\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

U holda (Veyershtrass alomatiga ko‘ra)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{l}\left(\frac{2}{l}|\phi_n|-\frac{2}{\pi na}|\psi_n|\right)\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\left(\frac{2}{l}|\phi_n|-\frac{2}{\pi na}|\psi_n|\right)$$

qatorlar yaqinlashishini ko‘rsatish yetarli.

U $\sum_{n=1}^{\infty}n^2|\phi_n|$ va $\sum_{n=1}^{\infty}n|\psi_n|$ qatorlar uchun hozir isbot qilingan xossalardan kelib chiqadi. Shuning uchun o‘sha mulohazalarni t bo‘yicha hosilalar uchun o‘tkazib, natijada $u(x,t)\in C^2\{[0;l]\times[0;T]\}$ ni hosil qilamiz. Bu holda oson tekshirish mumkinki (1.6) formula bilan belgilanadigan $u(x,t)$ funksiya tebranish tenglamasini qanoatlantiradi (ya’ni (1) shartni). Bunday $u(x,t)$ funksiya (2)-(4) shartlarni qanoatlantirishi uni ko‘rishdan quriladi – chegaraviy va boshlang’ich shartlar hisobga olingan.

Teorema isbotlandi.

Shunday qilib, yechim qurildi. Ba’zi shartlarda bu yechim yagona ekanligini isbotlaymiz.

5. 1–chi chegaraviy masalaning yagonaligi

Qo‘yidagi umumiy 1 – chegaraviy masalani qaraymiz:

$$[1.3]\quad\begin{cases}U_{tt}=a^2U_{xx}+f(x,t), & 0<x<l,\quad 0<t<T\\ U(0,t)=\mu_1(t), & 0\le t\le T;\\ U(l,t)=\mu_2(t), & 0\le t\le T;\\ U(x,0)=\phi(x), & 0\le x\le l;\\ U_t(x,0)=\varphi(x), & 0\le x\le l;\end{cases}$$

Bu chegaraviy masalaning yechimi yagonaligini isbotlaymiz.

Teorema 1.4 (yagonalik). Faraz qilaylik $u_1, u_2(x,t) \in C^2\{[0;l]\times[0;T]\}$ va u_1, u_2 funksiyalar bir hil [1.3] chegaraviy masalaning echimi bo‘lsin, u holda $\{[0;l]\times[0;T]\}$ soxada $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$

Isbot: $v(x,t) = u_1 - u_2$ ko‘rinib turibdiki funksiya bizning chegaraviy masalaning $f, \varphi, \phi, \mu_1, \mu_2$ funksiyalar aynan 0 ga teng bulgadagi yechim bo‘ladi. Shuday qilib

$$v(x,t) \in C^2\{[0;l]\times[0;T]\}$$

va

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, \ 0 < x < l, 0 < t < T; \\ v(0,t) \equiv v(l,t) \equiv v(x,o) \equiv v_t(x,0) \equiv 0 \end{cases}.$$

$v(x,t) \equiv 0$ isbotlash talab etiladi. $E(t) = \int\limits_0^l \left[(v_t(x,t))^2 + a^2(v_x(x,t))^2\right]dx$ funksiyani aniqlaymiz va uni **energiya integrali** deb ataymiz. Misol uchun bizning tebranuvchi torimizning o‘zgarmasgacha aniqlik bilan olingan to‘la energiya deb fizikaviy interpretasiya o‘ilish mumkin. Ko‘rinib turibdiki, bizning **v** funksiya shartlarida **E(t)** differensialanuvchi funksiyadir. Demak uning xosilasi quyidagicha hisoblanadi:

$$E'(t) = \int\limits_0^l \left[2v_t(x,t)v_{tt}(x,t) + 2a^2 v_x(x,t)\right]dx$$

Bu integralda ikkinichi qo‘shiluvchini **x** bo‘yicha bo‘laklab integrallab quyidagi ifodaga kelamiz:

$$E'(t) = \int\limits_0^l \left[2v_t(x,t)v_{tt}(x,t) - 2a^2 v_{xx}(x,t)v_{xx}(x,t)\right]dx + 2a^2 v_x(x,t)v_t(x,t)\Big|_0^l$$

v(x, t) tebranish tenglamasini yechimi ekanligini esda tutgan holda, integral ostidagi ifoda aynan 0 ga teng ekanligini aniqlaymiz. Chegaraviy sharlarni **t** bo‘yicha differensiallab $v_t(0,t) \equiv 0 \equiv v_t(l,t)$ ni xosil qilamiz. Bundan xulosa: integral tashqarisidagi qo‘shiluvchisi 0ga teng. Demak $E'(t) \equiv 0$ yoki

$$E(t) = \int\limits_0^l \left[(v_t(x,t))^2 + a^2(v_x(x,t))^2\right]dx \equiv const.$$

Umuman olaganda biz yopiq [1.3] tenglamar bilan ifodalanuvchi sistemada energiya saqlanish qonunininig yana bir ko‘rinishiga ega bo‘ldik — energiya soni doimiydir. Ko‘rinib turibdiki

$$E(t) = E(t) = \int\limits_0^l \left[(v_t(x,t))^2 + a^2(v_x(x,t))^2\right]dx$$

Boshlang’ich shartlardan quyidagiga ega bo‘lamiz. $v_t(x,0) = v_x(x,0) = 0, \quad 0 \ge x \ge l,$

Demak, $E(0)=0 \Rightarrow E(t)\equiv 0$. Integral ostidagi funksiyalarning manfiy bo‘lmaganligi $v_t(x,t)\equiv v_x(x,t)\equiv 0$ ga teng ekanligi aniqlanadi. Bundan $v\equiv const$, boshlang’ich shartlardan esa $v\equiv 0$ ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Eslatma: $\begin{cases} v_x(0,t)=0 \\ v_x(l,t)=0 \end{cases}$ ikkinchi tur chegaraviy shartlargaega bo‘lgan masala uchun ham barcha tasdiqlarimiz o‘rinli. Teoremaning isboti o‘zgarmaydi, faqat integral tashqarisidagi qo‘shiluvchi nolga teng ekanligi boshqa usulda. Bundat tashqari, teoremaning barcha tasdiqlari aralash ko‘rinishdagi chegaraviy shartlar uchun ham o‘rinlidir.

Savollar.

1.3.2-a. Frontal so‘rov uchun savollar

1. Yarim to‘g’ri chiziqdagi bir jinsli chegaraviy shart bilan berilgan ikkinchi chegaraviy masala quyilishini keltiring
2. Ikkinchi chegaraviy masalaning Dalamber formulasi bo‘yicha yechimini keltiring.

1.3.2-b. Blits-so‘rov uchun savollar

1. O‘zgaruvchilarni almashtirish usuli.
2. Umumiy 1 – chegaraviy masalani qo‘yilishini keltiring.
3. Umumiy 1 – chegaraviy masala yagonaligi.

1.3.2-c. Og’zaki so‘rov uchun savollar

1. Bir jinsli chegaraviy shartlar bilan berilgan bir jinsli tebranish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalani keltiring.
2. Shturm – Liuvill masalasi.
3. Mavjudlik teoremasi.

1.3.3. Mustaqil ish uchun topshiriqlar

- *takrorlash va mashqlar*: takrorlash, o‘z-o‘zini tekshirish, tahlil, qayta ishlash, mustahkamlash, eslab qolish, chuqurlashtirish;
- *yangi materiallarning mustaqil o‘zlashtirish*: yangi adabiy va internet materiallar, konspekt qo‘shimchasi; mustaqil iboralar tuzish;
- *ilmiy xaraktyerdagi ishlar*: muammoli holatlar, testlar, savollar, topshiriqlar tuzish; topshiriqlarni bajarish.

1.3.4. Kartochkalar uchun testlar

1.3.5. ekranga tayanch materiallarni ko‘rsatish(slaydlar)

- Prezentatsiya

1.3.6. Tavsiya etilgan adabiyotlar

Asosiy

6. *Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O‘zbekistan», 2002, 448 b.*
7. *Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,*

8. *Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.*
9. *Bisadzs L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.*
10. *Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.*

Qo'shimcha

10. *Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.*
11. *Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.*
12. *Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.*
13. *Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.*
14. *Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.*
15. *Mixlnn S.G. Leksii po lineynым integralnым uravneniyam. M. 1959.*
16. *Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.*
17. *Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.*
18. *Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.*

1.4. O'qitish usullari qoidalari

1.4.1. Aqliy hujum qoidalari

- Hech qanday o'zaro baholash va tanqid;
- Taklif etilayotgan g'oyalarni baholashdan o'zingni tiy, hatto ular fantastic va iloji yo'q bo'lsa ham – hammasi mumkin;
- Tanqid qilma – hamma aytilgan g'oyalar birhirda;
- Bayon qiluvchi gapini bo'lma;
- Izoh berishdan o'zingni tiy;
- Maqsad bu - miqdor;
- Qancha g'oyalar ko'p bo'lsa chuncha yaxshi: yangi va zarur g'oya tug'ulishi imkoniyati ko'proq
- Agar g'oyalar takrorlansa o'ksinma,
- Tasavvo'ringga erk ber;
- Senda yaralgan g'oyalarni tashlama, agal ular sening nazaringda qabul qilingan sxemaga tegishli bo'lmasa ham;
- Bu muammo aniq usullar bilan yechiladi deb o'ylama.

1.4.2. "Insert" texnikasi qoidalari

- Matndi o'qib, ularda savollat tug'dirayotgan joylarni, ularni bilimlariga mos kewlayotgan va mos kelmayotgan joylarni qalam bilan belgilab qo'yiladi;
- "Insert" jadvalini quyidagi belgilashlar bilan to'ldirish:
  Agar «!» bo'lsa siz o'z bilimingizga yoki siz o'ylagan fikrga to'g'ri kelayotganini o'qiyapsiz;
  Agar «–» bo'lsa siz o'z bilimingizga yoki tyo'g'ri deb o'ylaganingizga mutlaqo zid bo'lganini o'qiyapsiz;

Agar «+» bo‘lsa siz o‘qityotganingiz siz uchun yangilik;
Agar «?» bo‘lsa, siz o‘qiyotganingiz siz uchun tushunarsiz yoki siz bu savolga yanada ko‘proq ma`lumotlar olishni istaysiz.

1.4.3. Guruhlarda ishlash qoidalari

- Hamma o‘z do‘stlarini tinglashi kerak, unga yaxshi munosabatda bo‘lib hurmar ko‘rsatishi kerak;
- Hamma aktiv harakat qilishi lozim; berilgan topshiriqqa nisbatan birgalikda va javobgarlik bilan ishlashi kerak;
- Har kim o‘ziga kerak paytda yordam so‘rashi kerak;
- Har kim undan yordam so‘ralganda yordam ko‘rsatishi kerak;
- Guruhning ish natijalarini baholashda ishtirok etishi lozim;
- Biz bir kemadamiz, o‘zgalarga yordam berib o‘zimiz o‘rganamiz, shuni har kim tushunishi lozim;

Mavzu 4. Energiya integralining tebranish tenglamasi uchun chegaraiy masala yechimining yagonaligi

Ma`ruzaga reja-topshiriqlar

Fan: Matematik fizika tenglamalari

O‘quv soati: 2 soat (ma`ruza);

O‘quv mashg’uloti turi: ma`ruza; yangi bilimlarni mustahkamlash va o‘rganish.

Ma`ruza rejasi:

1. Ma’lumotlar xarakteristikalarda berilgan masala. Integral tenglamalarning ekvivalent sistemasi.
2. Xarakteristikalarda berilgan yechimning mavjudligi.
3. Malumotlar xarakteristikalarda berilgan masalaning yagonaligi.

O‘quv mashg’uloti maqsadi:

O‘quv fani to‘g’risida umumiy ta`surotlar berish, Xususiy hosilali tenglamalarva keyinchalik kasbiy faoliyatidagi roli.

O‘quv mashg’uloti masalalari:

- *O‘rgatuvchi*: talabalarda qabul qilish faoliyatini tashkil qilish, yangi materialni boshlang’ich esda qoldirish va anglash; Matematik fizika tenglamalarining terminlari, iboralarini xarakterlovchi elementlar; talabalarning matematik firlashini rivojlantirish muammoli masalalarni yechimini mahoratini oshirish; matematik masalalarni yechishda matematik simvollarning hususiyatlari bilan tanishtirish;
- *Rivojlantiruvchi*: kitob matni bilan ishlay bilishligi – mag’zlarini tanlab olish, tahlil qilish; gaplar tuzish, hulosa chiqarish, materialni talabalarning izlash faoliyatini stimullashtirish; hususiydan umumiy holga o‘tish usuli bilan tekshirish; tekshirish natijalarini tahlil qilib va uni umumlashtira olishini rivojlantirish; analitik-sintetik faoliyatning mantiqiy fikrlashini qo‘llash; talabalarning ijodiy mahoratini shakillantirish;
- *Tarbiyalovchi:* aktiv faoliyatga, mustaqil ishga jalb qilish; guruhlarda ishlash qoidalariga rioya qila olish; fanni o‘rganishga qiziqishni rivojlantirish; Matematik fizika tenglamalarini matematik-komunikativ kursni bir qismi sifatida tassavur berish;

javobgarlik tuyg'ularini tarbiyalash, mehnatsevarlik, individual ishni jamoaviy ish bilan biriktirish, intizomlashtirish.

O'qitish texnologiyasi:

- *O'qutish usullari*: instruktaj; Ma`ruza, aqliy hujum, "Insert" texnikasi;
- *O'qitish shakillari*: frontal; jamoaviy;
- *O'qitish vositalari*: Ma`ruza matni; jadvallar, multimediya;
- *O'qitish sharoitlari*: texnik jihozlashtirilgan auditoriya;
- *Baholash va monitoring*: o'g'zaki savol-javob, blits-so'rov.

Pedagogik masalalar:

- Fanning masalalari va uning o'quv fanlar sistemasidagi o'rni va roli bilan tanishtirish;
- O'quv fanning tuzulmasi va tavsiya etiladigan o'quv-metodik adabiyotlarni tasvirlash;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlarini ochib berish, baholash shakli va muddatlari;
- Fan ma`ruzasi paytida o'qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy bosqichlarini xarakterlab berish va umumiy sxemasini tushuntirish.
- O'qitish texnologiyasi rivojlanishi perspektivasini xarakterlab berish;

O'quv faoliyati natijalari:

- Fan ma`ruzasi masalalari, maqsadlari va nomlari shakillanadi;
- Xususiy hosilali tenglamalardoirasidagi yutuqlar yoritiladi;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlari hamda baholash shakli va muddatlari aytiladi
- Fan ma`ruzasida o'qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy sxemasini kengaytirib xatakterlab beradi;
- Fanning asosiy ta`riflarini beradi, Xususiy hosilali tenglamalarfani ma`ruzalarining asosiy yo'nalishlari beriladi;
- Nazariy bilimlarning to'liqligi, sistemaliyligi va harakatliyligi;
- Amaliy mag'ulotlarni bajarishda o'rganilgan iboralarbilan ishlay olishligi;

- **1.2. Ma`ruzaning xronologik xaritasi**

- **1 bosqich. O'quv mashg'ulotiga kirish (10 daqiqa):**

- *O'qituvchining faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (davomat, konspektning borligi; o'ziga ishonch, aniqligi,); kerakli materiallarni tarqatish (konspekt, tarqatma materiallar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadini bayon qilish; o'quv mashg'ulotning rajasi bilan tanishtirish; kalit iboralar va so'zlar, kategoriyalar; internet saytlari va adabiyotlar ro'yhati; o'quv natijalari haqida aytish;
- *Talabalar faoliyati*: o'quv joyini tayyorlash (talabalar borligi; tashqi ko'rinish; o'quv materiallar va qo'llanmalar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadi bilan tanishish; o'quv materialini qabul qilishga tayyorgarlik ko'rish;
- *Shakillar, usular, uslublar*: instruktaj; frontal so'rov; mustahkamlovchi so'rov.

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa):

- *O'qituvchining faoliyati*: mavzuga kiritadi; yangi mavzuga doir o'tgan fanlar va mashg'ulotlarning mavzularini eslashga chorlaydi; ma`ruza matnini tarqatadi, tanishishni taklif etadi, "Insert" usuli bilan belgilar qo'yishni taklif etadi; birinchi savol bo'yicha matn o'qiladi; qo'shimcha o'quv materiallarini aytib boorish va tushuncha berish; natural obektlarni namnoyon qilish va izohlash; tushunarsiz savollarni aniqlash va tushintirish; birinchi savol bo'yicha nazar (shunday qilib qolgan savollarga ham);

- *Talabalar faoliyati*: yangi mavzuda doir oldingi mashg'ulotlarda va fanlarda olgan bilimlarni mustahkamlaydi,; har bir kalit ibora va terminlarni eshitib, yozib borib, konspekt qilib aytib borishadi; "Insert" usuli bilan belgilan o'qiydilar, aniqlik kiritadilar, savollar beradilar va o'zaro;
- *Shakillar, usular, uslublar*: frontav so'rov blits-so'rov; aqliy hujum, "Insert" texnikasi.

3 bosqich. Yakunlovchi qism (10 daqiqa)

- *O'qituvchining faoliyati:* mavzu bo'yicha hulosa qilish, talabalarning e`tiborlarini asosiylarda jalb qilish; qilingan ishning muhimligini aytib o'tish; alohida talabalarning bajarilgan ishlarini baholash; o'zaro baholashning natijalarini chiqarish; o'quv mashg'ulotning yutuqlik darajasini baholash va tahlil qilish; mustaqil ish uchun topshiriqlar; baho ko'rsatgichlari va me`zonlari;
- *Talabalar faoliyati: ishning* tahlili; natijalarni olish; texnologik bilimlarni qo'llash; o'zaro baholashni o'tkazish, yo'l qo'yilgan hatolar bo'yicha tahlil va aniqlik kiritish; mustaqil ish topshiriqlarini yozib olish;
- *Shakillar, usular, uslublar*: guruhlarda ishlash, kartochkalarda topshiriqlar.

1.3. O'quv-metodik materiallar

Ma`ruza rejasi:

1. Ma'lumotlar xarakteristikalarda berilgan masala. Integral tenglamalarning ekvivalent sistemasi.
2. Xarakteristikalarda berilgan yechimning mavjudligi.
3. Malumotlar xarakteristikalarda berilgan masalaning yagonaligi.

Tayanch iboralar: chegaraviy masala, xarakteristika, integral tenglama, tebranish tenglamasi, energiya integrali,

1.3.1. Ma`ruza matni

1. Ma'lumotlar xarakteristikalarda berilgan masala. Integral tenglamalarning ekvivalent sistemasi.

Quyidagi masalani qaraymiz

$$[1.4]\quad \begin{cases} (1)\quad u_{xy}(x,y) = a(x,y)u_x(x,y) + b(x,y)u_y(x,y) + \\ + f(x,y,u(x,y)),\quad 0 < x < l_1,\quad 0 < x < l_2 \\ (2)\quad u(x,0) = \phi(x), \qquad 0 \le x \le l_2; \\ (3)\quad u(0,y) = \varphi(x), \qquad 0 \le y \le l_2; \end{cases}$$

Bu giperbolik tipdagi chiziqli bo'lmagan tenglama uchun berilgan masala **Gursa masala**si deb ataladi. Ilgari berilgan ta'rifga ko'ra (1) tenglamaning xarakteristikalari bu dxdy=0 tenglamani qanoatlantiruvchi funksiyalar bo'ladi. Bu esa x=const, y=const ko'rinishdagi to'g'ri chiziqlar oilasini bildiradi. Shunday qilib, bizning u(x, t) funksiyamizning x=0, y=0 xarakteristikalardagi ma'lumotlar bilan beriladi.

Ta'rif: **u(x,y)** funksiya [1.4] masalaning yechimi deb ataladi, agarda $u(x,y) \in C^2\{[0;l_1]\times[0;l_1]\}$ va (1) – (3) shartlarni qanoatlantirilsa.

Berilgan masalaning yechimi mavjudligi va yagonligini bir necha etaplarda isbotlaymiz. Dastlab biz [1.4] masalani qandaydir chiziqli bo'lmagan integral tenglamalar sistemasiga ekvivalent ekanligini ko'rsatamiz.

Faraz qilaylik, u(x,y) funksiya [1.4] masalaning yechimi bo'lsin. U holda (1) tenglamani dastlab y bo'yicha keyin x bo'yicha integrallab, quyidagini xosil qilamiz:

$$u_x(x,y)=u_x(x,0)+\int_0^y a(x,\eta)u_x(x,\eta)d\eta+\int_0^y b(x,\eta)u_y(x,\eta)d\eta+\int_0^y f(x,\eta,u(x,n))d\eta;$$

$$u(x,y)=u(0,y)+u(x,0)-u(0,0)+\int_0^x\int_0^y a(\xi,\eta)u_x(\xi,\eta)d\eta d\xi+\int_0^x\int_0^y b(\xi,\eta)u_y(\xi,\eta)d\eta d\xi+$$
$$+\int_0^x\int_0^y f(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\eta d\xi \qquad (1.7).$$

Ikkita yangi funkiyalarni kiritamiz $\begin{cases} v(x,y)=u_x(x,y) \\ w(x,y)=u_y(x,y)\end{cases}$

U holda, (2)-(3) boshlang'ich shartlarni qo‘llab, (1.7) tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$u(x,y)=\varphi(y)+\phi(x,0)-\phi(0)+$$
$$\int_0^x\int_0^y [a(\xi,\eta)v(\xi,\eta)+b(\xi,\eta)w(\xi,\eta)]\,d\xi d\eta+\int_0^x\int_0^y f(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\xi d\eta \qquad (1.8)$$

Buni x bo‘yicha differensiallab, quyidagini xosil qilamiz:

$$v(x,y)=\phi'(x)+\int_0^y [a(x,\eta)v(x,\eta)+b(x,\eta)w(x,\eta)]d\eta+\int_0^y f(x,\eta,u(x,\eta))d\eta \qquad (1.9)$$

Xuddi shunday y bo‘yicha differensiallaymiz:

$$w(x,y)=\varphi'(y)+\int_0^x [a(\xi,y)v(\xi,y)+b(\xi,y)w(\xi,y)]d\xi+\int_0^x f(\xi,y,u(\xi,y))d\xi$$

(1.10)

Demak, agar u(x,t) [1.4] masalani yechimi bo‘lsa u holda (1.8) – (1.10) tenglamalarini qanoatlantiruvchi v (x, t), w(x, t) funksiyalar mavjud bo‘ladi. Teskarisi: (1.8) – (1.10) tenglamalarning yechimlari bo‘lgan u, v,w- uzluksiz funksiyalarning mavjudligidan $v=u_x$; $w=u_y$ ekanligi kelib chiqadi. Shuningdek bevosita differensiallashdan u(x,t) funksiyalar [1.4] masalani yechimi ekanligini tekshirib ko‘rish mumkin.

2**. Xarakteristikalarda berilgan yechimning mavjudligi.**

Teorema [1.5]: (Mavjudlik teoremasi) Quyidagi to‘rtta shart bajarilgan bo‘lsin:

1. $a(x,y),\quad b(x,y)\in C\{[0;l_1]\times[0;l_2]\}$

2. $f(x,y,p)\in C\{[0;l_1]\times[0;l_2]\times E\}$ ya’ni, bizlar u(x, y) funksiyani p ixtiyoriy qiymat qabul qiluvchi o‘zgaruvchi bilan almashtirdik.

3. $|f(x,y,p_2)-f(x,y,p_2)|\le L|p_1-p_2|,\quad \forall x\in[0;l_1],\quad \forall p_1,p_2\in E$ r o‘zgaruvchi bo‘yicha Lipshis shartidir.

4. $\phi(x)\in C^1[0;l_1],\quad \varphi(y)\in C^1[0;l_2],\quad \phi(0)=\varphi(0)$

U holda [1. 4] masalaning yechimi mavjud.

Isbot. [1.4] masala (1.8)-(1.10) ga ekvivalentligini xisobga olib, (1.8)-(1.10) ni qanoatlantiruvchi u(x,y), v(x,y), w(x,y) uzluksiz funksiyalar mavjudligini isbotlaymiz. Bu funksiyalarni iterasiyalar ketma-ketligi yordamida topamiz. Ketma-ket interasiyalar prosessini quyidagicha ko‘ramiz:

$$
\begin{cases}
u_0(x,y) = v_0(x,y) = w_0(x,y) = 0 \\
u_{n+1}(x,y) = \varphi(y) + \phi(x) - \phi(0) + \int\limits_0^x \int\limits_0^y \left[a(\xi,\eta) v_n(\xi,\eta) + b(\xi,\eta) w_n(\xi,\eta) \right] d\eta d\xi + \\
+ \int\limits_0^x \int\limits_0^y f(\xi,\eta,u_n(\xi,\eta)) d\eta d\xi \\
u_{n+1}(x,y) + \phi'(y) + \int\limits_0^y \left[a(x,\eta) v_n(x,\eta) + b(x,\eta) w_n(x,\eta) \right] d\eta + \int\limits_0^y f(x,\eta,u_n(x,\eta)) d\eta \\
w_{n+1}(x,y) + \varphi'(y) + \int\limits_0^x \left[a(\xi,y) u_n(\xi,y) + b(\xi,\eta) w_n(\xi,y) \right] d\xi + \int\limits_0^x f(\xi,y,u_n(\xi,y)) d\xi
\end{cases}
$$

Bu prosessni yaqinlashuvchi ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun u_n, v_n, w_n ketma-ketliklarning hadlari orasidagi farqlarni baholaymiz. u_n uchun iterasiya ta’rifidan va teoremaning (3) shartlaridan quyidagi tengsizlik kelib chiqadi:

$$
|u_{n+1} - u_n| \le \int\limits_0^x \int\limits_0^y \left[|a(\xi,\eta)| |v_n(\xi,\eta) - v_{n-1}(\xi,\eta)| + |b(\xi,\eta)| |w_n(\xi,\eta) - w_{n-1}(\xi,\eta)| \right] d\xi d\eta +
$$
$$
+ \int\limits_0^x \int\limits_0^y L |u_n(\xi,\eta) - u_{n-1}(\xi,\eta)| d\xi d\eta
$$

Faraz qilaylik: $(x,y) \in \{[0;l_1] \times [0;l_2] \times E\} da \ \ M = \max\{\max|a(x,y)| \max|b(x,y)|, L\}$.

Shunda:

$$
|u_{n+1} - u_n| \le M \int\limits_0^x \int\limits_0^y \left[|v_n(\xi,\eta) - v_{n-1}(\xi,\eta)| + |w_n(\xi,\eta) - w_{n-1}(\xi,\eta)| + |u_n(\xi,\eta) - u_{n-1}(\xi,\eta)| \right] d\xi d\eta \qquad (1.11)
$$

v_n, w_n funksiyalar uchun ham xuddi shunday:

$$
|u_{n+1} - u_n| \le M \int\limits_0^y \left[|u_n(x,\eta) - u_{n-1}(x,\eta)| + |w_n(x,\eta) - w_{n-1}(x,\eta)| + |u_n(x,\eta) - u_{n-1}(x,\eta)| \right] d\eta \qquad (1.12)
$$

$$
|u_{n+1} - u_n| \le M \int\limits_0^x \left[|u_n(\xi,y) - u_{n-1}(\xi,y)| + |w_n(\xi,y) - w_{n-1}(\xi,y)| + |u_n(\xi,y) - u_{n-1}(\xi,y)| \right] d\xi \qquad (1.13)
$$

Iterasiya prosessining barcha elementlari uzluksiz funksiyalar bo‘lganligi sababli, bundan $|u_n|, |v_n|, |w_n|$ funksiya qandaydir H o‘zgarmas bilan chegaralanganligi kelib chiqadi. Ketma-ketlikning nolga teng bo‘lgan xadlarning ta’rifidan $|u_1 - u_1| \le M, |v_1 - v_1| \le M, |w_1 - w_1| \le M$ kelib chiqadi. Buni qo‘llab quyidagi ayirmani baholaymiz:

$$
|u_2 - u_1| \le M \int\limits_0^x \int\limits_0^y 3H d\xi d\eta = 3HMxy \le 3HM \frac{(x+y)^2}{2}
$$

$$
|v_2 - v_1| \le M \int\limits_0^y 3H d\eta = 3HMy \le 3HM(x+y)^2
$$

$$
|w_2 - w_1| \le M \int\limits_0^x 3H d\xi = 3HMx \le 3HM(x+y)
$$

Ketma – ketlikni tekis yaqinlashuvchi ekanligini isbotlash uchun majorant qator qurishga to‘g’ri keladi, lekin dastlab quyidagi bahoni isbotlaymiz.

$$|u_n(x,y)-u_{n-1}(x,y)|\le 3HM^{n-1}K^{n-2}\frac{(x+y)^2}{2};$$
$$|v_n(x,y)-v_{n-1}(x,y)|\le 3HM^{n-1}K^{n-2}\frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!};$$
$$|w_n(x,y)-w_{n-1}(x,y)|\le 3HM^{n-1}K^{n-2}\frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!};$$

Bu yerda $K=2+l_1+l_2$;

Isbotni induksiya bilan ko'ramiz .

Induksiya bazasi. Yuqorida isbotlanganidek n=2 uchun o'rinli

Induksiya farazi. Faraz qilaylik n uchun o'rinli. $n+1$ uchun isbotlaymiz .

Induktiv o'tish . $|u_{n+1}-u_n|$ induksiya farazidan foydalanib ayirmani baholaymiz:

$$|u_{n+1}-u_n|\le M\int_0^x\int_0^y\left[3HM^{n-1}K^{n-2}\frac{(\xi+\eta)^n}{n!}+2\cdot 3HM^{n-1}K^{n-2}\frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}\right]d\xi d\eta\le$$
$$\le 3HM^nK^{n-2}\left[\int_0^x\frac{(\xi+\eta)^{n+1}}{(n+1)!}\Bigg|_0^y d\xi+2\int_0^x\frac{(\xi+\eta)^n}{n!}\Bigg|_0^y d\xi\right]$$

Integralni hisoblaylik. Bunda boshlang'ich integral chegaralarini qo'yishda quyi chegarani tashlab yuboramiz. Ularni qo'shiluvchilari manfiy bo'lib, yuqoridagi ayirma uchun shunday bahoni yuqori chegara asosida hosil qilamiz:

$$|u_{n+1}-u_n|\le 3HM^nK^{n-2}\left[\frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!}+2\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}\right]=$$
$$=3HM^{n-1}K^{n-2}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}\left[\frac{x+y}{n+2}+2\right]\le$$
$$\le\left\{\frac{x+y}{n+2}+2\le l_1+l_2+2=K\right\}\le 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Shunday qilib u_n ketma-ketlik uchun induksiya farazi isbotlangan. Qolgan ikkita ketma-ketlik uchun bahoning isboti shunga o'xshash bo'ladi.

$$|u_{n+1}-u_n|\le M\int_0^y\left[3HM^{n-1}K^{n-2}\frac{(\xi+\eta)^n}{n!}+23HM^{n-1}K^{n-2}\frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}\right]d\eta\le$$
$$\le 3HM^nK^{n-2}\left[\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}+2\frac{(x+y)^n}{n!}\right]=3HM^nK^{n-2}\frac{(x+y)^n}{n!}\left[\frac{x+y}{n+1}+2\right]\le$$
$$\le 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^n}{n!}$$

Demak ikkinchi baho ham to'g'ri .

Uchinchi bahoning isboti ham shu ko'rinishda bo'lad , shuning uchun uni tashlab ketamiz. Endi u_n, v_n, w_n, ketma –ketliklarni tekis yaqinlashuvchi ekanligini isbotlaymiz. Ko'rinib turibdiki bunday ketma-ketlikning har bir hadini tegishli qatorning qismiy yig'indisi shaklida ifodalash mumkin.

$$u_n(x,y)=\sum_{m=1}^{n}\left(u_m(x,y)-u_{m-1}(x,y)\right);$$
$$v_n(x,y)=\sum_{m=1}^{n}\left(v_m(x,y)-v_{m-1}(x,y)\right);$$
$$w_n(x,y)=\sum_{m-1}^{n}\left(w_m(x,y)-w_{m-1}(x,y)\right);$$

Birinchi qatorning qo‘shiluvchilari uchun biz bahoni isbotlagan edik.

$$|u_n(x,y)-u_{n-1}(x,y)|\le 3HM^{n-1}K^{n-2}\frac{(x+y)^n}{n!}\le 3HM^{n-1}K^{n-2}\frac{(l_1+l_2)^n}{n1}=C\frac{a^n}{n!},$$
$$C,a=const.$$

Malumki, $\sum_{n=1}^{\infty}c\frac{a^n}{n!}$ qator yaqinlashuvchi. Bundan Veyershtrass alomatiga ko‘ra u_n ketma-ketlikni tekis yaqinlashishini hosil qilamiz. Qo‘shiluvchilarning uzliksizligidan limitik funksiyaning uzluksizligi kelib chiqadi.

Shunga o‘xshash qolgan ikki ketma-ketlik uchun ham ko‘rsatish mumkin:

$$v_n(x,y)\Rightarrow v(x,y)\in C\{[0;l_1]\times[0;l_2]\};$$
$$w_n(x,y)\Rightarrow w(x,y)\in C\{[0;l_1]\times[0;l_2]\};$$

Endi biz $n\to\infty$ da limitni hisoblash iterasion jarayonini yozishga haqlimiz. Bu esa ushbu tenglamalar sistemasining yechimi bo‘lgan u,v,w funksiyalarning mavjudligini bildiradi. Bu tenglamalar sistemasini boshlang’ich [1.4] ga ekvivalent deb olsak teorema butunlay isbotlanadi. Teorema isbotlandi.

3. Malumotlar xarakteristikalarda berilgan masalaning yagonaligi.

Shunday qilib**[1.4] masalaning mavjudligini isbotladik. Endi uning yagonaligini isbotlaymiz-ravshanki bu** (1.8)-(1.10) integral tenglamalar sistemasi yechimining yagonaligiga ekvivalentdir **.**

Teorema 1.6 (Yagonalik) Faraz qilaylik

$$\{u_1(x,y),v_1(x,y),w_1(x,y)\},$$
$$\{u_2(x,y),v_2(x,y),w_2(x,y)\};$$

ikki funksiyalar sistemasi mavjud bo‘lib, ular (1-8)-(1-10) integral tenglamalar sistemasining yechimlari bo‘lsin va bunda [1.4] tenglamaning yechimi mavjudligi haqidagi teoremani (1)-(4) shartlari bajarilgan bo‘lsin, u holda

$$u(x.y)=u_1(x,y)-u_2(x,y),v(x,y)=v_1(x,y)-v_2(x,y),w(x,y)=w_1(x,y)-w_2(x,y)$$

funksiyalar $\prod_{l_1l_2}=\{[0;l_1]\times[0;l_2]\}$ to‘g’ri to‘rtburchakda aynan 0 ga teng bo‘ladi.

Isbot. Shunday qilib u_1,u_2- (1.8) integral tenglamani yechimi bo‘lsin.

$$u_1(x,y)=\varphi(y)+\phi(x)-\phi(0)+\int_0^x\int_0^y[a(\xi,\eta)v_1(\xi,\eta)+b(\xi,\eta)w_1(\xi,\eta)]d\eta d\xi+\int_0^x\int_0^y f(\xi,\eta,u_1(\xi,\eta))d\eta d\xi;$$
$$u_2(x,y)=\varphi(y)+\phi(x)-\phi(0)+\int_0^x\int_0^y[a(\xi,\eta)v_2(\xi,\eta)+b(\xi,\eta)w_2(\xi,\eta)]d\eta d\xi+\int_0^x\int_o^y f(\xi,\eta,u_2(\xi,\eta))d\eta d\xi.$$

Biridan ikkinchisini ayirib va $f(x,y,p)$, uchun Lipshis shartini qo‘llab quyidagini hosil qilamiz:

$$|u_2-u_1|\le\int_0^x\int_0^y\left[M|v_2(\xi,\eta)-v_1(\xi,\eta)|+M|w_2(\xi,\eta)-w_1(\xi,\eta)|+M|u_2(\xi,\eta)-u_1(\xi,\eta)|\right]d\eta d\xi\Rightarrow$$

$$|u(x,y)|\le\int_0^x\int_0^y\left[M|v(\xi,\eta)|+M|w(\xi,\eta)|+M|u(\xi,\eta)|\right]d\eta d\xi \quad (1.14)$$

Shunga o‘xshash natija $v(x,y)$, $w(x,y)$ funksiyalar uchun ham o‘rinli:

$$|v(x,y)|\le\int_0^y\left[M|v(x,\eta)|+M|w(x,\eta)|+M|u(x,\eta)|\right]d\eta;$$

$$w\le\int_0^x\left[M|v(\xi,y)|+M|w(\xi,y)|+M|u(\xi,y)|\right]d\xi.$$

Bundan ushbu funksiyalar P to‘g’ri to‘rtburchakda 0 ga tengligi kelib chiqishini isbotlaymiz.Dastlab ular $\prod_{x_0y_0}=\{[0;x_0]\times[0;y_0]\}$, to‘g’ri to‘rtburchakda 0 ga tengligini ko‘rsatamiz. Bu yerda $x_{0,}y_0$ quyidagi shartlarni qanoatlantiradi: $\begin{cases}3x_0y_0M<1;\\3x_0M<1;\\3y_0M<1.\end{cases}$

Faraz qilaylik: $\bar{u}=\max\limits_{\Pi x_0y_0}|u(x,y)|;\bar{v}=\max\limits_{\Pi x_0y_0}|v(x,y)|;\bar{w}=\max\limits_{\Pi x_0y_0}|w(x,y)|$

Umumiylikni chegaralashdan, $\bar{u}\ge\max\{\bar{v},\bar{w}\}$ bo‘lishini faraz qilamiz.

Bu holda (1.14) tengsizlikdan quyidagi tengsizlik kelib chiqadi:

$$|u(x,y)|\le M\int_0^x\int_0^y[\bar{u}+\bar{u}+\bar{u}]ds\le 3Mx_0y_0\bar{u},(x,y)\in\Pi_{x\,y_0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\bar{u}\le 3Mx_0y_0\bar{u}.$$

$3x_0y_0M<1$ bo‘lganligi sababli, bu faqat $\bar{u}=0$ da bajariladi. Bundan ko‘rinib turibdiki $u(x,y),v(x,y),w(x,y)$ funksiyalar Πx_oy_o da aynan 0 ga teng. Keyingi qadamda biz shunday x_1 ni olamizki,

$$\begin{cases}3(x_1-x_0)y_0M<1;\\3(x_1-x_0)M<1;\\3y_0M<1.\end{cases}$$

va uni Πx_1y_0 to‘g’ri to‘rtburchakda qaraymiz.U holda (1.14) tengsizlik quyidagi ko‘rinishga ega:

$$|u(x,y)|\le M\int_{x_0}^x\int_0^y[\bar{u}+\bar{u}+\bar{u}]ds,(x,y\in\Pi x_1y_0)$$

Oldingi qadamga o‘xshash harakat qilib $u(x,y),v(x,y),w(x,y)$ funksiyalar Πx_1y_0 to‘g’ri to‘rtburchakda aynan 0 ga tengligini hosil qilamiz.

Shunday mulaxozalarni davom etib, chekli sonli qadamlardan keyin bu funksiyalarning $\Pi_{l_1 y_0}$ da 0 ga teng ekanligini ko‘rsatish mumkin.

Teorema isbotlandi. □

1.3.2-a. Frontal so‘rov uchun savollar

1. Energiya integrali
2. Ma’lumotlar xarakteristikalarda berilgan masala.
3. Gursa masalasi.

1.3.2-b. Blits-so‘rov uchun savollar

1. Mavjudlik teoremasi.
2. Lipshis sharti.

1.3.2-c. Og’zaki so‘rov uchun savollar

1. Xarakteristikalarda berilgan yechimning mavjudligi.
2. Umumiy 1 – chegaraviy masala uchun yagonalik teoremasi

1.3.3. Mustaqil ish uchun topshiriqlar

- *takrorlash va mashqlar*: takrorlash, o‘z-o‘zini tekshirish, tahlil, qayta ishlash, mustahkamlash, eslab qolish, chuqurlashtirish;
- *yangi materiallarning mustaqil o‘zlashtirish*: yangi adabiy va internet materiallar, konspekt qo‘shimchasi; mustaqil iboralar tuzish;
- *ilmiy xaraktyerdagi ishlar*: muammoli holatlar, testlar, savollar, topshiriqlar tuzish; topshiriqlarni bajarish.

1.3.4. Kartochkalar uchun testlar

1.3.5. ekranga tayanch materiallarni ko‘rsatish(slaydlar)

- Prezentatsiya

1.3.6. Tavsiya etilgan adabiyotlar

Asosiy

1. *Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O‘zbekistan», 2002, 448 b.*
2. *Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,*
3. *Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.*
4. *Bisadze L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.*
5. *Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.*

Qo‘shimcha

1. *Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.*

2. *Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.*
3. *Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.*
4. *Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.*
5. *Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.*
6. *Mixlnn S.G. Leksii po lineynыm integralnыm uravneniyam. M. 1959.*
7. *Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.*
8. *Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.*
9. *Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.*

1.4. O‘qitish usullari qoidalari

1.4.1. Aqliy hujum qoidalari

- Hech qanday o‘zaro baholash va tanqid;
- Taklif etilayotgan g’oyalarni baholashdan o‘zingni tiy, hatto ular fantastic va iloji yo‘q bo‘lsa ham – hammasi mumkin;
- Tanqid qilma – hamma aytilgan g’oyalar birhirda;
- Bayon qiluvchi gapini bo‘lma;
- Izoh berishdan o‘zingni tiy;
- Maqsad bu - miqdor;
- Qancha g’oyalar ko‘p bo‘lsa chuncha yaxshi: yangi va zarur g’oya tug’ulishi imkoniyati ko‘proq
- Agar g’oyalar takrorlansa o‘ksinma,
- Tasavvo‘ringga erk ber;
- Senda yaralgan g’oyalarni tashlama, agal ular sening nazaringda qabul qilingan sxemaga tegishli bo‘lmasa ham;
- Bu muammo aniq usullar bilan yechiladi deb o‘ylama.

1.4.2. “Insert” texnikasi qoidalari

- Matndi o‘qib, ularda savollat tug’dirayotgan joylarni, ularni bilimlariga mos kewlayotgan va mos kelmayotgan joylarni qalam bilan belgilab qo‘yiladi;
- “Insert” jadvalini quyidagi belgilashlar bilan to‘ldirish:
  Agar «!» bo‘lsa siz o‘z bilimingizga yoki siz o‘ylagan fikrga to‘g’ri kelayotganini o‘qiyapsiz;
  Agar «–» bo‘lsa siz o‘z bilimingizga yoki tyo‘g’ri deb o‘ylaganingizga mutlaqo zid bo‘lganini o‘qiyapsiz;
  Agar «+» bo‘lsa siz o‘qityotganingiz siz uchun yangilik;
  Agar «?» bo‘lsa, siz o‘qiyotganingiz siz uchun tushunarsiz yoki siz bu savolga yanada ko‘proq ma`lumotlar olishni istaysiz.

1.4.3. Guruhlarda ishlash qoidalari

- Hamma o‘z do‘stlarini tinglashi kerak, unga yaxshi munosabatda bo‘lib hurmar ko‘rsatishi kerak;
- Hamma aktiv harakat qilishi lozim; berilgan topshiriqqa nisbatan birgalikda va javobgarlik bilan ishlashi kerak;

- Har kim o‘ziga kerak paytda yordam so‘rashi kerak;
- Har kim undan yordam so‘ralganda yordam ko‘rsatishi kerak;
- Guruhning ish natijalarini baholashda ishtirok etishi lozim;
- Biz bir kemadamiz, o‘zgalarga yordam berib o‘zimiz o‘rganamiz, shuni har kim tushunishi lozim;

Mavzu 5. «Qo‘shma differensial operator. Riman usuli. Limitga o‘tish shaklidagi umumlashgan yechimlar »
Ma`ruzaga reja-topshiriqlar

Fan: Matematik fizika tenglamalari

O‘quv soati: 2 soat (ma`ruza);

O‘quv mashg’uloti turi: ma`ruza; yangi bilimlarni mustahkamlash va o‘rganish.

Ma`ruza rejasi:

1. Qo‘shma differensial operator
2. Chiziqli algebradagi qo‘shma operator bilan bog’lanish.
3. Riman usuli.
4. Limitga o‘tish shaklidagi umumlashgan yechimlar
5. Integrallik ayniyat ma’nosidagi umumlashgan yechimlar

O‘quv mashg’uloti maqsadi:

O‘quv fani to‘g’risida umumiy ta`surotlar berish, Xususiy hosilali tenglamalarva keyinchalik kasbiy faoliyatidagi roli.

O‘quv mashg’uloti masalalari:

- *O‘rgatuvchi*: talabalarda qabul qilish faoliyatini tashkil qilish, yangi materialni boshlang’ich esda qoldirish va anglash; Matematik fizika tenglamalarining terminlari, iboralarini xarakterlovchi elementlar; talabalarning matematik firlashini rivojlantirish muammoli masalalarni yechimini mahoratini oshirish; matematik masalalarni yechishda matematik simvollarning hususiyatlari bilan tanishtirish;
- *Rivojlantiruvchi*: kitob matni bilan ishlay bilishligi – mag’zlarini tanlab olish, tahlil qilish; gaplar tuzish, hulosa chiqarish, materialni talabalarning izlash faoliyatini stimullashtirish; hususiydan umumiy holga o‘tish usuli bilan tekshirish; tekshirish natijalarini tahlil qilib va uni umumlashtira olishini rivojlantirish; analitik-sintetik faoliyatning mantiqiy fikrlashini qo‘llash; talabalarning ijodiy mahoratini shakillantirish;
- *Tarbiyalovchi:* aktiv faoliyatga, mustaqil ishga jalb qilish; guruhlarda ishlash qoidalariga rioya qila olish; fanni o‘rganishga qiziqishni rivojlantirish; Matematik fizika tenglamalarini matematik-komunikativ kursni bir qismi sifatida tassavur berish; javobgarlik tuyg’ularini tarbiyalash, mehnatsevarlik, individual ishni jamoaviy ish bilan biriktirish, intizomlashtirish.

O‘qitish texnologiyasi:

- *O‘qutish usullari*: instruktaj; Ma`ruza, aqliy hujum, “Insert” texnikasi;
- *O‘qitish shakillari*: frontal; jamoaviy;
- *O‘qitish vositalari*: Ma`ruza matni; jadvallar, multimediya;
- *O‘qitish sharoitlari*: texnik jihozlashtirilgan auditoriya;
- *Baholash va monitoring*: o‘g’zaki savol-javob, blits-so‘rov.

Pedagogik masalalar:

- Fanning masalalari va uning o‘quv fanlar sistemasidagi o‘rni va roli bilan tanishtirish;
- O‘quv fanning tuzulmasi va tavsiya etiladigan o‘quv-metodik adabiyotlarni tasvirlash;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlarini ochib berish, baholash shakli va muddatlari;
- Fan ma`ruzasi paytida o‘qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy bosqichlarini xarakterlab berish va umumiy sxemasini tushuntirish.
- O‘qitish texnologiyasi rivojlanishi perspektivasini xarakterlab berish;

O‘quv faoliyati natijalari:

- Fan ma`ruzasi masalalari, maqsadlari va nomlari shakillanadi;
- Xususiy hosilali tenglamalardoirasidagi yutuqlar yoritiladi;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlari hamda baholash shakli va muddatlari aytiladi
- Fan ma`ruzasida o‘qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy sxemasini kengaytirib xatakterlab beradi;
- Fanning asosiy ta`riflarini beradi, Xususiy hosilali tenglamalarfani ma`ruzalarining asosiy yo‘nalishlari beriladi;
- Nazariy bilimlarning to‘liqligi, sistemaliyligi va harakatliyligi;
- Amaliy mag’ulotlarni bajarishda o‘rganilgan iboralarbilan ishlay olishligi;

- **1.2. Ma`ruzaning xronologik xaritasi**

- **1 bosqich. O‘quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa):**

- *O‘qituvchining faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (davomat, konspektning borligi; o‘ziga ishonch, aniqligi,); kerakli materiallarni tarqatish (konspekt, tarqatma materiallar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadini bayon qilish; o‘quv mashg’ulotning rajasi bilan tanishtirish; kalit iboralar va so‘zlar, kategoriyalar; internet saytlari va adabiyotlar ro‘yhati; o‘quv natijalari haqida aytish;
- *Talabalar faoliyati*: o‘quv joyini tayyorlash (talabalar borligi; tashqi ko‘rinish; o‘quv materiallar va qo‘llanmalar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadi bilan tanishish; o‘quv materialini qabul qilishga tayyorgarlik ko‘rish;
- *Shakillar, usular, uslublar*: instruktaj; frontal so‘rov; mustahkamlovchi so‘rov.

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa):

- *O‘qituvchining faoliyati*: mavzuga kiritadi; yangi mavzuga doir o‘tgan fanlar va mashg’ulotlarning mavzularini eslashga chorlaydi; ma`ruza matnini tarqatadi, tanishishni taklif etadi, “Insert” usuli bilan belgilar qo‘yishni taklif etadi; birinchi savol bo‘yicha matn o‘qiladi; qo‘shimcha o‘quv materiallarini aytib boorish va tushuncha berish; natural obektlarni namnoyon qilish va izohlash; tushunarsiz savollarni aniqlash va tushintirish; birinchi savol bo‘yicha nazar (shunday qilib qolgan savollarga ham);
- *Talabalar faoliyati*: yangi mavzuda doir oldingi mashg’ulotlarda va fanlarda olgan bilimlarni mustahkamlaydi,; har bir kalit ibora va terminlarni eshitib, yozib borib, konspekt qilib aytib borishadi; “Insert” usuli bilan belgilan o‘qiydilar, aniqlik kiritadilar, savollar beradilar va o‘zaro;
- *Shakillar, usular, uslublar*: frontav so‘rov blits-so‘rov; aqliy hujum, “Insert” texnikasi.

3 bosqich. Yakunlovchi qism (10 daqiqa)

- *O‘qituvchining faoliyati:* mavzu bo‘yicha hulosa qilish, talabalarning e`tiborlarini asosiylarda jalb qilish; qilingan ishning muhimligini aytib o‘tish; alohida talabalarning bajarilgan ishlarini baholash; o‘zaro baholashning natijalarini chiqarish; o‘quv mashg’ulotning yutuqlik darajasini baholash va tahlil qilish; mustaqil ish uchun topshiriqlar; baho ko‘rsatgichlari va me`zonlari;

- *Talabalar faoliyati: ishning* tahlili; natijalarni olish; texnologik bilimlarni qo‘llash; o‘zaro baholashni o‘tkazish, yo‘l qo‘yilgan hatolar bo‘yicha tahlil va aniqlik kiritish; mustaqil ish topshiriqlarini yozib olish;
- *Shakillar, usular, uslublar*: guruhlarda ishlash, kartochkalarda topshiriqlar.

1.3. O‘quv-metodik materiallar

Ma`ruza rejasi:

1. Qo‘shma differensial operator
2. Chiziqli algebradagi qo‘shma operator bilan bog’lanish.
3. Riman usuli.
4. Limitga o‘tish shaklidagi umumlashgan yechimlar
5. Integrallik ayniyat ma’nosidagi umumlashgan yechimlar

Tayanch iboralar: operator, differensial operator, qo‘shma operator, chegaraviy masala, Grin formulasi, Riman usuli, limit, Dalamber formulasi, Puasson tenglamasi.

1.3.1. Ma`ruza matni

1. Qo‘shma differensial operator.

E^n fazoni qaraymiz.Faraz qilaylik $x=(x_1,\dots,x_n)$- bir necha o‘zgaruvchilar, $u(x)$- esa p o‘zgaruvchi funksiya bo‘lsin

Tarif . Biror $u(x)\in C^2(E^n)$ funksiyadan $L[u]$ differensial operator quyidagicha aniqlanadi :

$$L[u]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{x_i}+c(x)u \tag{1.15}$$

Bu yerda $a_{ij},b_i\in C^2(E^2)$, $c(x)$ qandaydir funksiyalar. Bu holda ikkinchi tartibli xususiy hosila differensiallash tartibiga bog’liq bo‘lmaganligi sababli $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$ bir biriga to‘g’rilikni qabul qilinadi.

Tarif. Har qanday $L[u]$ differensial operatorga o‘zaro bir qiymatli moslik bo‘yicha keluvchi $M[v]$ qo‘shma operator olish mumkin.

$$M[v]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}(x)v)_{x_ix_j}-\sum_{i=1}^{n}(b_i(x)v)_{x_i}+c(x)v$$

Tarif. Agar $L[u]=M[v]$ bo‘lsa operator o‘z-o‘ziga qo‘shma operator deyiladi. Bizga quyidagi formula kerak bo‘ladi .

$$vL[u]-uM[v]=\sum_{i=1}^{n}(p_i(x))_{x_i} \tag{1.16}$$

Bu yerda $p_i(x)=\sum_{j=1}^{n}\left[va_{ij}u_{x_j}-u(a_{ij}v)_{x_j}\right]+b_iuv.$

Bu formulani isbotlash uchun $p_i(x)$ ni (1.16) ning o‘ng tomoniga qo‘yamiz va qo‘shiluvchilarni guruhlaymiz

$$\sum_{i=1}^{n}\left(p_i(x)\right)_{x_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[va_{ij}u_{x_ix_j} - u\left(a_{ij}v\right)_{x_jx_i}\right] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(va_{ij}\right)_{x_i}u_{x_j} - u_{x_i}\left(a_{ij}v\right)_{x_j}\right] +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[vb_iu_{x_i} + u\left(b_iv\right)_{x_i}\right] + cuv - cuv = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}va_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n}vb_iu_{x_i} + cuv -$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}u\left(a_{ij}v\right)_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n}u\left(b_iv\right)_{x_i} + cuv\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(va_{ij}\right)_{x_i}u_{x_j} - u_{x_i}\left(a_{ij}v\right)_{x_j}\right] =$$

$$vL[u] - uM[v] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(va_{ij}\right)_{x_i}u_{x_j} - u_{x_i}\left(a_{ij}v\right)_{x_j}\right].$$

Qolgan ikkilangan yig’indi 0 ga teng –bu qo‘shiluvchilar indekslarining simmetrikligidan kelib chiqadi. Bu yerdan(1.16) formula to‘g’riligi kelib chiqadi.

2. Chiziqli algebradagi qo‘shma operator bilan bog’lanish.

Chiziqli algebrada A operatorga qo‘shma A^* operatorni deb quyidagi $(Au,v)=(u,A^*v)$ munosabatga aytiladi. Bu E^n dan olingan barcha *u,v* lar uchun bajarilishi kerak edi. Bizning tarifimiz shu berilgan tarif bilan qanchalik mos kelishini ko‘rib chiqamiz.

Misol 1. $\Omega \subset E^3$ bo‘lsin va skalyar ko‘paytma quyidagicha aniqlansin :

$$(f,g) = \iiint_{\Omega} fg\,d\tau,\; f,g \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$$

u holda

$$u,v \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega}),$$

$u,v|\Sigma = 0,$ ($\Sigma - \Omega$ ning chegarasi) bo‘lgan funksiyalar uchun quyidagi

$$(v,L[u]) = (M[v],u)$$

ifoda to‘g’ri bo‘lsin. Buni ko‘rsatamiz:

$$(v,L[u]) - (M[v],u) = \iiint_{\Omega}(vL[u]-uM[v])d\tau = \{(1.16)\} = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\frac{\partial p_2}{\partial x_2}+\frac{\partial p_3}{\partial x_3}\right)d\tau =$$

$$= \{\vec{P} = (p_1,p_2,p_3)\} = \iiint_{\Omega} div\vec{P}d\tau = \{Ostrogradskiy - Gauss \quad formulasi(5.3)\} =$$

$$\iint_{\Sigma}(\vec{P},\vec{n})d\sigma = \{\vec{n} = (n_x,n_y,n_z)\} = \iint_{\Sigma}(p_1n_x + p_2n_y + p_3n_z)d\sigma = 0$$

- $p_i|\Sigma = 0, u, v$ uchun chegaraviy shartdan kelib chiqadi.

Misol 2. Qo‘shma operator uchun oddiy misol bu Laplas operatori hisoblanadi, masalan E^3 da $L[u] = \Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}$ bo‘ladi

Bu yerda $M[u] = \Delta v$ tekshirish oson.

3. Riman usuli

E^2 fazoda $u(x,y)$ funksiya uchun quyidagi differensiallanuvchi operatorni qaraymiz:

$$L[u] = u_{xy} + a(x,y)u_x(x,y) + b(x,y)u_y(x,y) + c(x,y)u(x,y)$$

Ta'rifga ko'ra, unga qo'shma operator quyidagi ko'rinishga ega:

$$M[v] = u_{xy} - (a(x,y)v)_x - (b(x,y)v)_x + c(x,y)v$$

Shunday qilib, (1.15) formulada

$$a_{11} = a_{22} = 0, \qquad a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2}, \quad b_1 = a, \qquad b_2 = b, \qquad c = c.$$

Ko'rinib turibdiki (1.16) formuladagi P_1, P_2 lar quyidagicha hisoblanadi:

$$p_1 = \frac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv;$$

$$p_2 = \frac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv;$$

Endi Oxy tekisligida $y = f(x)$ egri chiziq berilgan bo'lsin, va unda $\forall x$ lar uchun $f'(x) < 0$. Uning grafigini L_f bilan belgilaymiz. Nuqtalari $f(x)$ funksiya grafigidan yuqorida yotgan yarim tekislikni R_f^+ deb belgilaymiz:

$$R_f^+ = \{(x,y) : y > f(x)\},$$

Quyidagi chegaraviy masalani (shuni ta'kidlash lozimki, bu masala giperbolik tipdagi tenglama uchundir) ko'rib chiqamiz:

$$[1.5] \quad \begin{cases} (1) \quad L[u] = F(x,y,), & (x,y) \in R_f^+; \\ (2) \quad u(x,y) = \phi(x,y), & (x,y) \in L_f; \\ (3) \quad \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,y) = \psi(x,y), & (x,y) \in L_f; \end{cases}$$

($L[u]$ (1.17) formulasi bilan aniqlanadi.)

Keltirilgan chegaraviy masalaning yechimini R_f^+ da izlaymiz.

Uning ixtiyoriy $A(x_0, y_0) \in R_f^+$ nuqtada qanday qilib xisoblanilishini ko'rsatib beramiz.

Buning uchun biz A nuqtani L_f egri chiziq bilan koordinata o'qlariga parralel bo'lgan kesmalar vositasida birlashtiramiz va shu orqali kesishuv nuqtalari $B(x, y_0)$ va $C(x_0, y)$ ni hosil qilamiz. AB, AC kesmalar hamda BC yoy orasida hosil bo'lgan konturni L deb, uning ichki qismini D bilan belgilaymiz.

Qo'shma differensial operator $M[v]$ ning (bunda v - muayan bir funksiya). (1.16) formulasidan foydalanamiz.

$$\iint_D (vL[u] - uM[v])ds = \iint_D \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y} \right) ds$$

Buning o'ng qismini o'zgartirish uchun egri chiziqli integrallar uchun Grin formulasidan foydalanamiz:

$$\int_L Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y ds)$$

Bu holda quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\iint_D (vL[u] - uM[v])ds = \int_L - p_2 dx - p_1 dy = \quad \text{(kontur qismlari koordinata o'qlariga parralel)}$$

$$\int_B^C \left\{ \left[\tfrac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv\right] dy - \left[\tfrac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv\right] dx \right\} +$$

$$\int_C^A \left[\tfrac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv\right]dy + \int_B^A \left[\tfrac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv\right]dx. \qquad (1.18)$$

Ma'lumki,

$$\int_C^A \left[\tfrac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv\right]dy + \int_B^A \left[\tfrac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv\right]dx =$$

$$\underbrace{\int_C^A \left[\tfrac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv\right]dy}_{I_{CA}} + \underbrace{\int_B^A \left[\tfrac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv\right]dx}_{I_{BA}}$$

Bungacha biz v funksiyani oddiygina ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiya deb belgilagan edik. Endi $M[v]=0$ bo'lishini aniqroq aytganda quyidagi masalaning yechimi bo'lishi kerak:

$$\begin{cases} (4) \quad v_{xy} - (a(x,y)v)_x - (b(x,y)v)_y + c(x,y)v = 0, \quad x \le x_0, y \le y_0; \\ (5) \quad v(x_0, y) = \exp\{\int_{y_0}^{y} a(x_0, s)ds\}, \quad y \le y_0; \\ (6) \quad v(x, y_0) = \exp\{\int_{x_0}^{x} b(s, y_0)ds\}, \quad x \le x_0; \end{cases}$$

Bu masala [1.4] ko'rinishdagi xarakteristikalar yordamida berilgan ma'lumotlarga ega bo'lgan masaladir. Oldingi bo'lmlarda ko'rsatgan edikki uning yechimidan isbot bo'lgan va yagona bo'lgani (x,y) funksiya mavjud. Bu funksiya bizga ma'lum deb hisoblaymiz va aynan shu funksiyadan foydalanamiz.

Birinchi boshlang'ich tenglamadan $F(x,y)$ funksiyani qo'ygan holda $u(x,y)$ uchun (1.18) ifodaga qaytamiz.

$$\iint_D v(x,y)F(x,y)ds = \int_B^C \left\{ \left[\tfrac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv\right]dy + \left[\tfrac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv\right]dx \right\} + I_{CA} + I_{BA}.$$

I_{CA}, I_{BA} integrallarda koordinatalaridan biri fiksirlanganidan foydalanamiz. $v(x,y)$ uchun (4) shartdan $x = x_0$ bo'lsa, $v_y - av = 0$ bo'lishini oson aniqlash mumkin. Shunday qilib:

$$I_{CA} = \int_C^A \left[\tfrac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv\right]dy = \int_C^A \left[\tfrac{1}{2}(vu)_y - u(v_y - av)\right]dy = \tfrac{1}{2}(uv)\big|_A - \tfrac{1}{2}(uv)\big|_C$$

Xuddi shunday, $y = y_0$ bo'lganda $u_x - bu = 0$ ekanligini ko'rsatish mumkin. Demak,

$$I_{BA} = \int_B^A \left[\tfrac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv\right]dx = \int_B^A \left[\tfrac{1}{2}(vu)_x - u(v_x - bv)\right]dx = \tfrac{1}{2}(uv)\big|_A - \tfrac{1}{2}(uv)\big|_B.$$

Shunday qilib, (1.18) ifodani quyidagicha yozish mumkin.

$$\iint_D v(x,y)F(x,y)ds = \int_B^C \left\{ \left[\tfrac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv\right]dy - \right.$$

$$\left. \left[\tfrac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv\right]dx \right\} + uv\big|_A - \tfrac{1}{2}(uv)\big|_C - \tfrac{1}{2}(uv)\big|_B.$$

Bundan $A(x_0, y_0)$ nuqtada $u(x,y)$ funksiyasini qiymatini aniqlash mumkin:

$$u(x_0,y_0)v(x_0,y_0) = -\int\limits_B^C \left\{ \left[\tfrac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv\right]dy - \right.$$

$$\left.\left[\tfrac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv\right]dx \right\} + \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_C + \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_B + \iint\limits_D v(x,y)F(x,y)ds.$$

$v(x,y)$ ning (5),(6) chegaraviy shatrlardan $v(x_0,y_0)=1$ ekanligi kelib chiqadi.

U holda

$$u(x_0,y_0) = -\int\limits_B^C \left\{ \left[\tfrac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv\right]dy - \left[\tfrac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv\right]dx \right\} + \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_C + \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_B +$$

$$+\iint\limits_D v(x,y)F(x,y)ds$$

hosil bo‘ladi. Bu $u(x_0,y_0)$ uchun yakuniy formuladir. Konturdagi xususiy hosilalar $u(x,y)$ bizga noaniq ekanligi ko‘rinishi mumkin. Ularni (2),(3) chegaraviy shartlardan topish mumkinligini ko‘rsatamiz:

$$\begin{cases} u(x, f(x)) = \phi(x, f(x)); \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x, f(x)) = \varphi(x, f(x)); \end{cases}$$

L_f ga o‘rinmaning birlik vektori $\bar{\tau}$ quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\bar{\tau} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}; \frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} \right\}.$$

Bundan quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial n}\frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}$$

$\dfrac{\partial u}{\partial \tau}$ quyidagi o‘zgartirishlardan topiladi.

$$\frac{\partial}{\partial n}u(x, f(x)) = u_x(x, f(x)) + u_y(x, f(x))f'(x) = \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\frac{\partial u}{\partial \tau}(x,y).$$

Ma’lumki,

$$\frac{\partial y}{\partial n} = (\vec{n}, grad u).$$

L_j ga normalning, $\bar{\tau}$ vektorga ortogonal bo‘lgan birlik vektori quyidagicha hisoblanadi:

$$\vec{n} = \left\{ \frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}; -\frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} \right\}.$$

Bundan:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial n}\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}$$

Yuqoridagilarga asoslanib, chegaraviy shartlardan L konturda $u(x,y)$ ni topish uchun sistemani hosil qilamiz.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\phi(x, f(x)) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} f'(x) \\ \varphi(x, f(x)) = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} \end{cases}$$

Uning determinanti hech qayerda 0 ga teng emas. Bundan kelib chiqadiki, $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$ lar mavjud va ular bir qiymatli aniqlanishi mumkin.

Shunday qilib, biz (1.19) formula to‘g’riligini asosladik. Uni hosil qilish uchun qo‘llaniladigan usul **Riman usuli** deyiladi.

Eslatma: Dalamber formulasi (1.19) formulaning xususiy holidan iborat uzluksiz umumlashtirilgan yechim.

Shunday hollar bo‘ladiki, amaliy masalalarning yechimlari bo‘ladi. Bunday yechimlar ushbu kursdagi standart formulalar yordamida hosil qilib bo‘lmaydi. Ammo, ularni masalan, oddiy yechimlarning chegarasidek tasvirlash mumkin.

4. Limitga o‘tish shaklidagi umumlashgan yechimlar

Umumiy yondoshuv: $L[u]=0$ tenglamadan topish lozim bo‘lgan u funksiya berilgan va bunda shu funksiyaga ba’zi bir F va F funksiyalar ko‘rinishida shartlar qo‘yilgan bo‘lsin.Agar bu masala yechimga ega bo‘lmasa, masalan, $F \notin C^2, \hat{O} \notin C^2$ bo‘lganligi tufayli bu holda biz tekis yaqinlashuvchi ketma-ketliklar $F_n \Rightarrow F, \hat{O}_n \Rightarrow \hat{O}$ ni tuzamiz.Bu yerda $F \notin C^2, \hat{O} \notin C^2$.Shunda agar F_n va $\hat{O}_n$ funksiyalarga mos keluvchi yechim (u_n) mavjud bo‘lsa u sifatida u_n funksiyalarning limitini olamiz:

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n$$

Bunda u_n ketma-ketlik u ga tekis yaqinlashish sharti bajarilgan.

Misol. Bizlarga berilgan giperbolik tenglama uchun Koshi masalasini ko‘rib chiqamiz:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, -\infty < x < +\infty, 0 < t \le T; \\ u(x,0) = \phi(x), \qquad -\infty < x < +\infty; \\ u_t(x,0) = \psi(x), \qquad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

Ma’lumki agar $\hat{o} \in \tilde{N}^2(\AA), \psi \in C^1(E)$ bo‘lsa yechim Dalamber formulasi bilan berilgan bo‘ladi?

$$u(x,t) = \frac{\phi(x-at)+\phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

Faraz qilaylik bizlarga xuddi shunday masalada $\overline{\hat{o}}, \overline{\psi}$ funksiya faqatgina uzluksiz bo‘lsa, ya’ni biz Dalamber formulasidan foydalana ololmaymiz. Polosada fikr yuritamiz. $[-d;d]$ kesmadan tashqarida $\overline{\hat{o}} = \overline{\psi} = 0$ bo‘lishini talab qilamiz. Bu yerda d ma’lum bir o‘zgarmas. Bunday xossa

$$\operatorname{supp} \overline{\hat{o}}, \overline{\psi} = [-d;d]$$

kabi belgilanadi. Faraz qilaylikki shunday $\hat{o}_n(x), \psi_n(x)$ funksiyalar mavjud bo‘lib, $\hat{o}_n \in \tilde{N}^2(\AA), \psi_n \in C^1(E)$ shuningdek $|x| \ge 2d$ uchun $\overline{\hat{o}_n}(x) = \overline{\psi_n}(x) = 0,$ hamda $[-2(d+aT);2(d+aT)]$ kesmada

$$\begin{cases} \hat{o}_n(x) \Rightarrow \overline{\hat{o}}(\tilde{o}); \\ \psi_n(x) \Rightarrow \overline{\psi}(x). \end{cases}$$

$\hat{O}_n$ ψ_n funksiyalarga mos keluvchi Koshi masalasining yechimi uchun Dalamber formulasi o‘rinlidir.

$$u_n(x,t) = \frac{\hat{o}_n(x-at) + \hat{o}_n(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi \qquad \Rightarrow u_n(x,t) \in C^2\{E \times [0;T]\}$$

Bunday funksiyalarning limitini bizlar yechim deb nomlaymiz.

$$\overline{u}(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,t)$$

Aniqlashni to‘g’ri deb hisoblash mumkin agar biz

$$\prod = \{(x,t): -2d - aT \le x \le 2d + aT, 0 \le t \le T\}$$

To‘g’ri burchakda $u_n(x,t)$ ketma-ketlikning tekis yaqinlashishini ko‘rsata olsak (ravshanki to‘g’ri to‘rt burchakdan tashqarida ketma-ketlikning barcha hadlari 0 ga aynan teng). Buning uchun u_n fundamental ketma-ketlik ekanligini,ya’ni

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists M: \forall m > M, \forall p > 0 \quad |u_{m+p}(x,t) - u_m(x,t)| < \varepsilon \quad \forall (x,t) \in \prod$ ni isbotlaymiz

Bu ayirmani Dalamber formulasi orqali baholaymiz.

$$|u_{m+p}(x,t) - u_m(x,t)| \le \frac{|\hat{o}_{m+p}(x+at) - \hat{o}_m(x+at)|}{2} + \frac{|\hat{o}_{m+p}(x-at) - \hat{o}_m(x-at)|}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x-at}^{x+at} |\psi_{m+p}(\xi) - \hat{o}_m(\xi)| d\xi$$

Hosil qilingan yig’indini har qanday ilgaridan berilgan ε dan kichik qilish mumkin –bu tekis yaqindashish shartidan, demak $\hat{O}_n$ ψ_n ketma-ketliklarning fundamentalligidan kelib chiqadi.Shundan hosil qilamizki

$$u_n(x,t) \Rightarrow \overline{u}(x,t), (x,t) \in \prod \qquad \text{bu yerda} \qquad \overline{u}(x,t) \in C[\prod]$$

Bundan tashqari $u_n(\pm(2d + aT), t) = 0,$ bo‘lgani uchun $u\ (\pm(2d + aT), t) = 0,$ va $\prod$ to‘g’ri burchakdan tashqarida $\overline{u}(x,t) = 0$ bo‘ladi. Shunday tarzda tuzilgan funksiya limitik o‘tish shaklidagi umumlashtirilgan yechim deyiladi.Bu yechim yagonami degan savol tug’iladi (chunki biz $\hat{O}_n, \psi_n$ ketma-ketliklarni ixtiyoriy ravishda tanlagan edik)? Bu savolga javob berish uchun bizlar ixtiyoriy ikki $\hat{o}_n^1, \hat{o}_n^2$ ââ ψ_n^1, ψ_n^2 juft ketma-ketlik olamiz va ular

$$\begin{cases} \hat{o}_n^1 \Rightarrow \overline{\hat{o}}, & \hat{o}_n^2 \Rightarrow \overline{\hat{o}}; \\ \psi_n^1 \Rightarrow \overline{\psi}, & \psi_n^2 \Rightarrow \overline{\psi}; \end{cases}$$

bo‘ladi. Faraz qilaylikki bu ketma-ketliklarga mos ravishda Dalamber formulasi bo‘yicha hosil qilingan u_n^1 ââ u_n^2 ketma-ketliklar hadlarining limitlaridan iborat bo‘lgan $\overline{u}^1(x,t), \overline{u}^2(x,t)$ ikki yechimlar to‘g’ri kelsin $\overline{u}^1(x,t) \equiv \overline{u}^2(x,t)$ isbotlaymiz. Buning uchun ularning ayirmasini baxolashimiz kerak $\overline{u}^1(x,t) - \overline{u}^2(x,t)$

$$\left|\overline{u}^1(x,t) - \overline{u}^2(x,t)\right| \le \left|\overline{u}^1(x,t) - u_n^1(x,t)\right| + \left|u_n^1(x,t) - u_n^2(x,t)\right| + \left|\overline{u}^2(x,t) - u_n^2(x,t)\right|$$

u_n^1 *va* u_n^2 funksiyalarning mos ravishda $\overline{u}^1$ *va* $\overline{u}^2$ funksiyalarga tekis yaqinlashishi sababli ushbu ayirmaning birinchi va uchinchi qo‘shiluvchilari nolga intiladi, chunki ϕ_n^1, ϕ_n^2 *va* ψ_n^1, ψ_n^2 ketma-ketliklarga mos ravishda yana o‘sha funksiyalar $\hat{O}$ va

ψ yaqinlashadi.Bu yerdan $\overset{-1}{u}(x,t)$ *va* $\overset{-2}{u}(x,t)$ funksiyalarning aynan tengligi kelib chiqadi.

6. **Integrallik ayniyat ma'nosidagi umumlash yechimlar**.

Umumlashgan yechimlar qo'llanilishining boshqa misoli sifatida Puasson tenglamasidagi $\Delta u = -f(x,y,z)$ f funksiya ikki marta diferensiyalanmaydigan holat, ya'ni normal yechim mavjud bo'lmagan holat bo'lishi mumkin (chunki hamma vaqt $\Delta u \in C^2$)

Umumiy yondashuv. $\sum$ chegaraga ega bo'lgan $\Omega \in E^3$ sohada $u(x,y,z)$ funksiyalar $L[u]=F$ tenglama bilan aniqlanadigan bo'lsin, bu yerda

$$L[u] = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{i,j}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{3} b_i(x) u_{x_i} + c(x)u$$

shunda burchakga bog'langan operator quyidagicha beriladi

$$M[v] = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \left(a_{i,j}(x)v\right)_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{3} \left(b_i(x)v\right)_{x_i} + c(x)v$$

Bizlar faqat shunaqa v funksiyalarni qaraymizki, ular uchun limitda to'liq quyidagi shart bajarilishi kerak. Ma'lumki agar $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ bo'lsa (1.16) formula o'rinli bo'ladi

$$\iiint\limits_{\Omega} (vL[u] - uM[v])d\tau = \iiint\limits_{\Omega} div\vec{\rho} d\tau = \iint\limits_{\sum} (\vec{p}, \vec{n}) d\sigma$$

v ga qo'yilgan shartlardan v, v_x, v_y, v_z funksiyalar demak $\vec{\rho}$ vektor funksiya ham $\sum$ da 0ga aylanishini hosil qilamiz. Bundan kelib chiqadiki

$$\iiint\limits_{\Omega} (vL[u] - uM[v])d\tau = 0$$

$L[u]=F$ ekanligidan foydalanamiz

$$\iiint\limits_{\Omega} vFd\tau = \iiint\limits_{\Omega} uM[v]d\tau \quad (1.20)$$

u funksiya uchun hosil qilingan ifoda integral o'xshashlik ma'nosidagi umumlashtirilgan yechim deyiladi. Shunday qilib biz uzluksiz differensiallanish talabini v funksiyaga o'tkazib, shuningdek bu funksiya qat'iy Ω ichida yotuvchi sohadagina 0ga teng bo'lmasligi shartini talab etib u funksiya uchun tenglamani o'zgartirdik.

1.3.2-a. Frontal so'rov uchun savollar

1. Chiziqli algebradagi qo'shma operator bilan bog'lanish.
2. $L[u]$ differensiallanuvchi operatorni yozing.
3. $L[u]$ differensiallanuvchi operator qo'shma operator qanday ko'rinishga ega
4. $L[u]$ differensiallanuvchi operator uchun chegaraviy masalani keltiring.

1.3.2-b. Blits-so'rov uchun savollar

1. Differensial operator.
2. Qo'shma differensial operator .
3. Qo'shma differensial operatormisol keltiring.
4. Dalamber formulasini yozing.

5. Puasson tenglamasini keltiring.

1.3.2-c. Og'zaki so'rov uchun savollar

1. Egri chiziqli integrallar uchun Grin formulasini yozing.
2. Limitga o'tish shaklidagi umumlashgan yechimlar. Umumiy yondoshuv.
3. Giperbolik tenglama uchun Koshi masalasini keltiring
4. Integrallik ayniyat ma'nosidagi umumlash yechimlar. Umumiy yondashuv.

1.3.3. Mustaqil ish uchun topshiriqlar

- *takrorlash va mashqlar*: takrorlash, o'z-o'zini tekshirish, tahlil, qayta ishlash, mustahkamlash, eslab qolish, chuqurlashtirish;
- *yangi materiallarning mustaqil o'zlashtirish*: yangi adabiy va internet materiallar, konspekt qo'shimchasi; mustaqil iboralar tuzish;
- *ilmiy xaraktyerdagi ishlar*: muammoli holatlar, testlar, savollar, topshiriqlar tuzish; topshiriqlarni bajarish.

1.3.4. Kartochkalar uchun testlar

1.3.5. ekranga tayanch materiallarni ko'rsatish(slaydlar)

- Prezentatsiya

1.3.6. Tavsiya etilgan adabiyotlar

Asosiy

1. *Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O'zbekistan», 2002, 448 b.*
2. *Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,*
3. *Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.*
4. *Bisadzs L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.*
5. *Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.*

Qo'shimcha

1. *Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.*
2. *Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.*
3. *Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.*
4. *Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.*
5. *Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.*
6. *Mixlnn S.G. Leksii po lineynыm integralnыm uravneniyam. M. 1959.*
7. *Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.*
8. *Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.*

9. Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.

1.4. O‘qitish usullari qoidalari

1.4.1. Aqliy hujum qoidalari

- Hech qanday o‘zaro baholash va tanqid;
- Taklif etilayotgan g’oyalarni baholashdan o‘zingni tiy, hatto ular fantastic va iloji yo‘q bo‘lsa ham – hammasi mumkin;
- Tanqid qilma – hamma aytilgan g’oyalar birhirda;
- Bayon qiluvchi gapini bo‘lma;
- Izoh berishdan o‘zingni tiy;
- Maqsad bu - miqdor;
- Qancha g’oyalar ko‘p bo‘lsa chuncha yaxshi: yangi va zarur g’oya tug’ulishi imkoniyati ko‘proq
- Agar g’oyalar takrorlansa o‘ksinma,
- Tasavvo‘ringga erk ber;
- Senda yaralgan g’oyalarni tashlama, agal ular sening nazaringda qabul qilingan sxemaga tegishli bo‘lmasa ham;
- Bu muammo aniq usullar bilan yechiladi deb o‘ylama.

1.4.2. “Insert” texnikasi qoidalari

- Matndi o‘qib, ularda savollat tug’dirayotgan joylarni, ularni bilimlariga mos kewlayotgan va mos kelmayotgan joylarni qalam bilan belgilab qo‘yiladi;
- “Insert” jadvalini quyidagi belgilashlar bilan to‘ldirish:
  Agar «!» bo‘lsa siz o‘z bilimingizga yoki siz o‘ylagan fikrga to‘g’ri kelayotganini o‘qiyapsiz;
  Agar «–» bo‘lsa siz o‘z bilimingizga yoki tyo‘g’ri deb o‘ylaganingizga mutlaqo zid bo‘lganini o‘qiyapsiz;
  Agar «+» bo‘lsa siz o‘qityotganingiz siz uchun yangilik;
  Agar «?» bo‘lsa, siz o‘qiyotganingiz siz uchun tushunarsiz yoki siz bu savolga yanada ko‘proq ma`lumotlar olishni istaysiz.

1.4.3. Guruhlarda ishlash qoidalari

- Hamma o‘z do‘stlarini tinglashi kerak, unga yaxshi munosabatda bo‘lib hurmar ko‘rsatishi kerak;
- Hamma aktiv harakat qilishi lozim; berilgan topshiriqqa nisbatan birgalikda va javobgarlik bilan ishlashi kerak;
- Har kim o‘ziga kerak paytda yordam so‘rashi kerak;
- Har kim undan yordam so‘ralganda yordam ko‘rsatishi kerak;
- Guruhning ish natijalarini baholashda ishtirok etishi lozim;
- Biz bir kemadamiz, o‘zgalarga yordam berib o‘zimiz o‘rganamiz, shuni har kim tushunishi lozim;

Mavzu 6. Parabolik tipdagi tenglamalar
Ma`ruzaga reja-topshiriqlar

Fan: Matematik fizika tenglamalari

O‘quv soati: 2 soat (ma`ruza);

O‘quv mashg’uloti turi: ma`ruza; yangi bilimlarni mustahkamlash va o‘rganish.

Ma`ruza rejasi:

1. Fazoda issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasini chiqarilishi
2. Bir fazoviy o‘zgaruvchi bilan berilgan issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi. Asosiy masalalarning qo‘yilishi
3. Birinchi chegaraviy masala yechimining mavjudligi.
4. O‘zgaruvchilarni ajratish usuli.

O‘quv mashg’uloti maqsadi:

O‘quv fani to‘g’risida umumiy ta`surotlar berish, Xususiy hosilali tenglamalarva keyinchalik kasbiy faoliyatidagi roli.

O‘quv mashg’uloti masalalari:

- *O‘rgatuvchi*: talabalarda qabul qilish faoliyatini tashkil qilish, yangi materialni boshlang’ich esda qoldirish va anglash; Matematik fizika tenglamalarining terminlari, iboralarini xarakterlovchi elementlar; talabalarning matematik firlashini rivojlantirish muammoli masalalarni yechimini mahoratini oshirish; matematik masalalarni yechishda matematik simvollarning hususiyatlari bilan tanishtirish;
- *Rivojlantiruvchi*: kitob matni bilan ishlay bilishligi – mag’zlarini tanlab olish, tahlil qilish; gaplar tuzish, hulosa chiqarish, materialni talabalarning izlash faoliyatini stimullashtirish; hususiydan umumiy holga o‘tish usuli bilan tekshirish; tekshirish natijalarini tahlil qilib va uni umumlashtira olishini rivojlantirish; analitik-sintetik faoliyatning mantiqiy fikrlashini qo‘llash; talabalarning ijodiy mahoratini shakillantirish;
- *Tarbiyalovchi:* aktiv faoliyatga, mustaqil ishga jalb qilish; guruhlarda ishlash qoidalariga rioya qila olish; fanni o‘rganishga qiziqishni rivojlantirish; Matematik fizika tenglamalarini matematik-komunikativ kursni bir qismi sifatida tassavur berish; javobgarlik tuyg’ularini tarbiyalash, mehnatsevarlik, individual ishni jamoaviy ish bilan biriktirish, intizomlashtirish.

O‘qitish texnologiyasi:

- *O‘qutish usullari*: instruktaj; Ma`ruza, aqliy hujum, “Insert” texnikasi;
- *O‘qitish shakillari*: frontal; jamoaviy;
- *O‘qitish vositalari*: Ma`ruza matni; jadvallar, multimediya;
- *O‘qitish sharoitlari*: texnik jihozlashtirilgan auditoriya;
- *Baholash va monitoring*: o‘g’zaki savol-javob, blits-so‘rov.

Pedagogik masalalar:

- Fanning masalalari va uning o‘quv fanlar sistemasidagi o‘rni va roli bilan tanishtirish;
- O‘quv fanning tuzulmasi va tavsiya etiladigan o‘quv-metodik adabiyotlarni tasvirlash;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlarini ochib berish, baholash shakli va muddatlari;
- Fan ma`ruzasi paytida o‘qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy bosqichlarini xarakterlab berish va umumiy sxemasini tushuntirish.
- O‘qitish texnologiyasi rivojlanishi perspektivasini xarakterlab berish;

O‘quv faoliyati natijalari:

- Fan ma`ruzasi masalalari, maqsadlari va nomlari shakillanadi;
- Xususiy hosilali tenglamalardoirasidagi yutuqlar yoritiladi;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlari hamda baholash shakli va muddatlari aytiladi

- Fan ma`ruzasida o‘qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy sxemasini kengaytirib xatakterlab beradi;
- Fanning asosiy ta`riflarini  beradi, Xususiy hosilali tenglamalarfani ma`ruzalarining asosiy yo‘nalishlari beriladi;
- Nazariy bilimlarning to‘liqligi, sistemaliyligi va harakatliyligi;
- Amaliy mag’ulotlarni bajarishda o‘rganilgan iboralarbilan ishlay olishligi;

- **1.2. Ma`ruzaning xronologik xaritasi**

- **1 bosqich. O‘quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa):**

- *O‘qituvchining faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (davomat, konspektning borligi; o‘ziga ishonch, aniqligi,); kerakli materiallarni tarqatish (konspekt, tarqatma materiallar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadini bayon qilish; o‘quv mashg’ulotning rajasi bilan tanishtirish; kalit iboralar va so‘zlar, kategoriyalar; internet saytlari va adabiyotlar ro‘yhati; o‘quv natijalari haqida aytish;
- *Talabalar faoliyati*: o‘quv joyini tayyorlash (talabalar borligi; tashqi ko‘rinish; o‘quv materiallar va qo‘llanmalar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadi bilan tanishish; o‘quv materialini qabul qilishga tayyorgarlik ko‘rish;
- *Shakillar, usular, uslublar*: instruktaj; frontal so‘rov; mustahkamlovchi so‘rov.

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa):

- *O‘qituvchining faoliyati*: mavzuga kiritadi; yangi mavzuga doir o‘tgan fanlar va mashg’ulotlarning mavzularini eslashga chorlaydi; ma`ruza matnini tarqatadi, tanishishni taklif etadi, “Insert” usuli bilan belgilar qo‘yishni taklif etadi; birinchi savol bo‘yicha matn o‘qiladi; qo‘shimcha o‘quv materiallarini aytib boorish va tushuncha berish; natural obektlarni namnoyon qilish va izohlash; tushunarsiz savollarni aniqlash va tushintirish; birinchi savol bo‘yicha nazar (shunday qilib qolgan savollarga ham);
- *Talabalar faoliyati*: yangi mavzuda doir oldingi mashg’ulotlarda va fanlarda olgan bilimlarni mustahkamlaydi,; har bir kalit ibora va terminlarni eshitib, yozib borib, konspekt qilib aytib borishadi; “Insert” usuli bilan belgilan o‘qiydilar, aniqlik kiritadilar, savollar beradilar va o‘zaro;
- *Shakillar, usular, uslublar*: frontav so‘rov blits-so‘rov; aqliy hujum, “Insert” texnikasi.

3 bosqich. Yakunlovchi qism (10 daqiqa)

- *O‘qituvchining faoliyati:* mavzu bo‘yicha hulosa qilish, talabalarning e`tiborlarini asosiylarda jalb qilish; qilingan ishning muhimligini aytib o‘tish; alohida talabalarning bajarilgan ishlarini baholash; o‘zaro baholashning natijalarini chiqarish; o‘quv mashg’ulotning yutuqlik darajasini baholash va tahlil qilish; mustaqil ish uchun topshiriqlar; baho ko‘rsatgichlari va me`zonlari;
- *Talabalar faoliyati: ishning* tahlili; natijalarni olish; texnologik bilimlarni qo‘llash; o‘zaro baholashni o‘tkazish, yo‘l qo‘yilgan hatolar bo‘yicha tahlil va aniqlik kiritish; mustaqil ish topshiriqlarini yozib olish;
- *Shakillar, usular, uslublar*: guruhlarda ishlash, kartochkalarda topshiriqlar.

1.3. O‘quv-metodik materiallar

Ma`ruza rejasi:

1. Fazoda issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasini chiqarilishi
2. Bir fazoviy o‘zgaruvchi bilan berilgan issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi. Asosiy masalalarning qo‘yilishi

3. Birinchi chegaraviy masala yechimining mavjudligi.
4. O‘zgaruvchilarni ajratish usuli.

Tayanch iboralar: Fur’ye qonuni, Ostragradskiy-Gauss formulasi, Fazoda issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi, Chegaraviy shartlar, Boshlang’ich shartlar, Birinchi chegaraviy masala, Ikkinchi chegaraviy masala, Yarim to‘g’ri chiziqdagi masala, Koshi masalasi

1.3.1. Ma`ruza matni

1. Fazoda issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasini chiqarilishi

Uch o‘lchovli fazoda biror issiqlik o‘tkazuvchi va koordinatalari (x,y,z) bo‘lgan ixtiyoriy M nuqtaning temperaturasi t vakt momentida $u(x,y,z,t)$ funksiya ko‘rinishida beriluvchi jismni qaraymiz. Ma’lumki, issiqlik potoki vektori uchun $\vec{W}$ quyidagi Fur’ye qonuni deb ataluvchi formula o‘rinlidir.

$$\vec{W} = -k\ grad\, u$$

Bu yerda $k(x,y,z)$ - issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffisienti.

Agar jism E^3 fazoda berilgan bo‘lsa Ω soxaning chegarasi Σ bo‘ladi. Shunda jismning issiqlik miqdori t vaqt momentida quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$Q_2 - Q_1 = \iiint\limits_{\Omega} c(M)\rho(M)u(M,t_2)d\tau_M - \iiint\limits_{\Omega} c(M)\rho(M)u(M,t_1)d\tau_M =$$
$$= (t_2 - t_1)\iiint\limits_{\Omega} c(M)\rho(M)u_t(M,t_3)d\tau_M$$

$[t_1;t_2]$ $\left(Q(t_1)=Q_1, Q(t_2)=Q_2\right)$ vaqt oralig’ini qaraymiz. Shunda

$$Q_2 - Q_1 = \iiint\limits_{\Omega} c(M)\rho(M)u(M,t_2)d\tau_M - \iiint\limits_{\Omega} c(m)\rho(M)u(m,t_1)d\tau_M$$

bo‘ladi. Issiqlik miqdorining o‘zgarishi tashqaridan issiqlik oqib kelish natijasida va ba’zi ichki manbaning (stoklarning) harakati tufayli ro‘y beradi:

$$Q_2 - Q_1 = \int\limits_{t_1}^{t_2}\left[-\iint\limits_{\Sigma}(\vec{W},\vec{n})dv\right]dt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\left[\iiint\limits_{\Omega} F(M,t)d\tau\right]dt$$

Birinchi integral uchun Ostogradskiy-Gauss formulasini qo‘llaymiz va o‘rta qiymat haqidagi formulani esa ikkinchi integral uchun qo‘llaymiz:

$$Q_2 - Q_1 = -\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[\iiint\limits_{\Omega}(div\vec{W})d\tau\right]dt + (t_1 - t_2)\iiint\limits_{\Omega} F(M,t_4)d\tau$$

Bu yerda $t_4 \in [t_1;t_2]$ ga qarashli.

Lagranj formulasidan quyidagi silliq (buni faraz qilamiz) u funksiya uchun foydalanamiz:

$$u(M,t_2) - u(M,t_1) = u_t(M,t_3)(t_2 - t_1),\quad t_3 \in [t_1;t_2]$$

Bundan quyidagini hosil qilamiz:

$$Q_2 - Q_1 = \iiint\limits_{\Omega} c(M)\rho(M)u(M,t_2)d\tau_M - \iiint\limits_{\Omega} c(M)\rho(M)u(M,t_1)d\tau_M =$$
$$= (t_2 - t_1)\iiint\limits_{\Omega} c(M)\rho(M)u_t(M,t_3)d\tau_M$$

Demak,

$$\left(t_2 - t_1\right)\iiint_{\Omega} c(M)\rho(M)u_t(M,t_3)d\tau_M = -\int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint_{\Omega}(div\vec{W})drM\right]dt + (t_1 - t_2)\iiint_{\Omega} F(M,t_4)dr\,.$$

Endi hamma integral uchun umumlashtirilgan o‘rat qiymat formulani qo‘llaymiz:

$$c(M_1)\rho(M_1)u_t(M_1,t_3)V_{\Omega}(t_2 - t_1) = -div\vec{W}\Big|_{\substack{t=t_5\\ M=M_2}} V_{\Omega}(t_2 - t_1) + F(M_3,t_4)V_{\Omega}(t_2 - t_1)\,,$$

Bunda $t_5 \in [t_1;t_2]$; $M_1, M_2 \in \Omega$, $V_{\Omega} - \Omega$ ning hajmi bo‘ladi. $V_{\Omega}(t_2 t_1)$ ga qisqartirib, Ω dan olingan biror bir M_1, M_2 nuqtalar uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$c(M_1)\rho(M_1)u_t(M_1,t_3)V_{\Omega}(t_2 - t_1) = -div\vec{W}\Big|_{\substack{t=t_3\\ M=M_2}} + F(M_3,t_4)\,.$$

Endi biror M_0 nuqtagacha Ω ni qissak, $[t_1,t_2]$ kesma ham t_0 nuqtagacha qisiladi. Bundan ko‘rinadiki M_1, M_2 nuqtalar M_0 ga o‘tadi, t_3, t_4, t_5 lar esa t_0 ga. Bundan limitga o‘tganda quyidagi hosil bo‘ladi:

$$c(M_0)\rho(M_0)u_t(M_0,t_0) = -div\vec{W}\Big|_{\substack{t=t_0\\ M=M_0}} + F(M_0,t_0)$$

$\vec{W}$ uchun Fur’ye qonunini qo‘llab quyidagini hosil qilamiz:

$$div\vec{W} = div(-kgradu) = -\frac{\partial}{\partial x}k\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}k\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}k\frac{\partial u}{\partial z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(M_0)\rho(M_0)u_t(M_0,t_0) = \frac{\partial}{\partial x}k\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}k\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}k\frac{\partial u}{\partial z} + F(M_0,t_0)$$

M_0, t_0 nuqtalarni ixtiyoriy olganimiz sababli, hosil qilingan formulani butun $[t_1.t_2]$ va Ω ni soha uchun yoyish mumkin:

$$c(x,y,z)\rho(x,y,z)u_t(x,y,z,t) = \frac{\partial}{\partial x}(k(x,y,z)u_x(x,y,z,t)) + \frac{\partial}{\partial y}(k(x,y,z)u_y(x,y,z,t)) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(k(x,y,z)u_z(x,y,z,t)) + F(x,y,z,t)$$

Bu ifoda **fazoda issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi** deb nomlanadi.

c, ρ, k larni konstanta da deb olib, quyidagi tenglik hosil qilamiz:

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x,y,z,t), \qquad a^2 = \frac{k}{c\rho}, \qquad f = \frac{F}{c\rho} \qquad \textbf{(2.1)}$$

Agar u, f faqat x va t o‘zgaruvchilari bilan bog’liq bo‘lsa, u holda bu tenglik quyidagicha yoziladi:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \qquad \textbf{(2.2)}$$

Fizik interpretasiyada bir jinsli yupqa sterjinda issiqlik o‘tkazuvchanlik (yoyilish) tenglamasidir. (2.2) tenglamani biz keyinchalik **issiqlik o‘tkazuvchi tenglamasi** deb yuritamiz.

Analogik fikrlashni boshqa bir fizik prosesslar uchun ham o‘tkazishimiz mumkin, masalan diffuziya uchun. Agar $u(x.y.z.t)$- fazoda gazning konsentrasiyasi bo‘lsa, u holda **diffuziya tenglamasi** quyidagicha bo‘ladi:

$$cu_t = div(Dgradu) + F(x,y,z,t)$$

$$D - diffuziya\ \ koeffitsiyenti$$

$$F - biror\,bir\ \ funktsiya$$

2. Bir fazoviy o‘zgaruvchi bilan berilgan issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi. Asosiy masalalarning qo‘yilishi

Quyidagi tenglamani qarab chiqamiz:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T$$

Agar bizga sterjinning boshlang’ich vaqt momentidagi temperaturasi malum bo‘lsa, u holda biz boshlang’ich shartga ega bo‘lamiz:

$$u(x,o) = \phi(x), \ 0 \le x \le l$$

Agar chetlarida temperaturani o‘zgarishini bilsak, u holda ayrim chegaraviy shartlar **xosil qilamiz:**

$$x = l, 0 \le t \le T \qquad \begin{cases} (1)\ u(l,t) = \mu_2(t) - birinchi\ chegaraviy shart \\ (2)\ u_x(l,t) = \nu_2(t) - ikkinchi chegaraviy shart \\ (3)\ u_x(l.t) = -\lambda_2[u(l,t) - \theta_2(t)] - uchinchi\ chegaraviy shart \end{cases}$$

$$x = 0, 0 \le t \le T \qquad \begin{cases} (4)\ u(0,t) = \mu_1(t) - birinchi chegaraviy shart \\ (5)\ u_x(0,t) = \nu_1(t) - ikkinchi chegaraviy shart \\ (6)\ u_x(0,t) = -\lambda_1[u(0,t) - \theta_1(t)] - uchinchi\ chegaraviy shart \end{cases}$$

Bu shartlardan bir nechtasini tanlab har xil tipli masalalarni hosil qilamiz:

Birinchi chegaraviy masala

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), 0 < x < l, 0 < t \le T \\ u(0,t) = \mu_1(t), \qquad 0 \le t \le T \\ u(l,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T \\ u(x,o) = \phi(x), \qquad 0 \le x \le l \end{cases}$$

Ikkinchi chegaraviy masala

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ 0 < x < l, 0 < t \le T \\ u_x(0,t) = \nu_1(t), \qquad 0 \le t \le T \\ u_x(l,t) = \nu_2(t), \qquad 0 \le t \le T \\ u(x,0) = \phi(x), \qquad 0 \le x \le l \end{cases}$$

Yarim to‘g’ri chiziqdagi masala

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), x > 0, 0 < t \le T \\ u(0,t) = \mu(t), \qquad 0 \le t \le T \\ u(x,0) = \phi(x), \qquad x \ge 0 \end{cases}$$

Koshi masalasi

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), -\infty < x < +\infty, 0 < t \le T \\ u(x,0) = \phi(x), \qquad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

3. Birinchi chegaraviy masala yechimining mavjudligi

O‘zgaruvchilarni ajratish usuli.

Birinchi chegaraviy masalaga kengroq to‘xtalib o‘tamiz:

$$\textbf{[2.1]} \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), 0 < x < l, 0 < t \le T \\ u(0,t) = \mu_1(t), \qquad 0 \le t \le T \\ u(l,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T \\ u(x,0) = \phi(x), \qquad 0 \le x \le l \end{cases}$$

Yechimning mavjud va yagonaligini qarab o‘tamiz, shu bilan birga turhunligini va **Grinn funksiyasini** qo‘llashini qaraymiz. Birinchi chegaraviy masalaning yechima nima. Aniqki, birjinsli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi holatida $\tilde{u}(x,t)$ uzilishga ega bo‘lgan funksiyalar tuplami qanoatlantiradi:

$$\tilde{u}(x,t) = const,\ (x,t) \in Q_T = \{(x,t) : (0;1) \times (0;T)\};$$
$$\tilde{u}(0,t) = \mu_1(t);\ 0 \le t \le T;$$
$$\tilde{u}(l,t) = \mu_2(t);\ 0 \le t \le T;$$
$$\tilde{u}(x,0) = \phi(x);\ 0 \le x \le l.$$

Shuning uchun funksiya dan uzluksizlikni talab qilamiz, bu talab bilan keyinchalik biz barcha funksiyani o‘rganishdagi noqulayliklar bartaraf etamiz.

Ta’rif. u(x,t) funksiya **[2.1] issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun 1-chegaraviy masalasining yechimi** deyiladi, agar u quyidagi 3 shartni qanoatlantirsa:

1. $u \in C[\overline{Q_T}]$;
2. $u_t, u_{xx} \in C[Q_T]$;
3. $u(x,t)$ [2.2]

Bir jinsli issiqlik o‘tazuvchasnlik tenglamasi nolinchi chegaraviy shartlar bilan berilgan birinchi chegaraviy masala uchun yechimni topamiz:

[2.2]
$$\begin{cases} (1)\ u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, 0 < t \le T; \\ (2)\ u(0,t) = 0,\ 0 \le t \le T; \\ (3)\ u(l,t) = 0,\ 0 \le t \le T; \\ (4)\ u(x,0) = \phi(x), 0 \le x \le l. \end{cases}$$

Yechimni quyidagi yo‘l bilan aniqlaymiz, avvalo berilgan tenglamani almashtirish yordamida biror u(x,t) funksiyani tuzatamiz, keyin esa, boshlang’ich shartlarga qo‘yilgan ma’lum bir cheklanishlarda biz tuzgan funksiya 1-chi chegaraviy masalaning yechimi bo‘lishini isbotlaymiz.

Yangi funksiyani aniqlaymiz:

$$v(x,t) = X(x)T(t.)$$

Funksiyamizni issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasiga qo‘yib quyidagini hosil qilamiz:

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Tenglikning ikki tomonini ham $a^2 X(x)T(t)$ ga bo‘lamiz:

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

O‘ng va chap tomondagi funksiyalar har xil o‘zgaruvchilarga bog’lik bo‘lganligi tufayli, aniqki ularning har ikkalasi ham biror konstantaga teng bo‘ladi, biz uni $-\lambda$ bilan belgilaymiz:

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Bundan 2 ta tenglamaga ega bo‘lamz:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0; \qquad \textbf{(2.3)}$$

$v(x,t)$ funksiyamiz uchun chegaraviy shartlarni yozib olamiz:

$$\begin{cases} v(0,t) = 0; \\ \qquad\qquad t \in [0;T], \\ v(l,t) = 0. \end{cases}$$

Quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} X(0)=0 \\ X(l)=0. \end{cases}$$

(2.3) ni xosil bo‘lgan sistema bilan birlashtirsak, **Shturm-Liuvill masalasini** hosil qilamiz:

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0; \\ X(0)=0; \\ X(l)=0. \end{cases}$$

Barcha λ larni topish talab qilinadi.

Differensial tenglama kursidan malumki,

$$\begin{cases} \lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, n\in N \\ X_n(x)=c_n^1\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), n\in N \end{cases}$$

λ_n ni (2.4) ga qo‘yib, quyidagi ko‘rinishdagi tenglikni hosil qilamiz:

$$T_n'(t)+a^2\lambda_n T_n(t)=0.$$

Yechim

$$T_n=c_n^2\exp\left\{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right\} \qquad \text{bo‘ladi.}$$

$X_n(x)$ *va* $T_n(t)$ ni birlashtirib quyidagini hosil qilamiz:

$$v_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=c_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\exp\left\{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right\}$$

Qayd etib o‘tamizki, xamma shunday funksiyalar (1) issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining yechimi va (2), (3) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi. u(x,t) funksiyani qatorning yig’indisi sifatida aniqlaymiz:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x,t)$$

Takidlab o‘tamizki bu chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi. Konstantalarni shunday tanlaymizki, boshlang’ich shartlar bajarilsin:

$$\phi(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

Tenglikni $\sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right)$ ga ko‘paytiramiz (m-butun). $x\to s$ almashtirish olamiz va s bo‘yicha integrallaymiz:

$$\int_0^l\phi(s)\sin\left(\frac{\pi m}{l}s\right)ds=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\int_0^l\sin\left(\frac{\pi m}{l}s\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds.$$

$$\int_0^l\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right)=\begin{cases}0, n\neq m; \\ \frac{l}{2}, n-m.\end{cases}\Rightarrow\int_0^l\phi(s)\sin\left(\frac{\pi m}{l}s\right)ds=\frac{l}{2}c_m\Rightarrow$$

$$c_m=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(s)\sin\left(\frac{\pi m}{l}s\right)ds$$

Natijada u(x,t) uchun quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\left(\int_0^l\phi(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\exp\left\{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right\}. \qquad \textbf{(2.5)}$$

1.3.2-a. Frontal so‘rov uchun savollar

1. Ostragradskiy-Gauss formulasi
2. Fazoda issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi
3. Birinchi chegaraviy masalani yechimining ta’rifi.

1.3.2-b. Blits-so‘rov uchun savollar

1. Fur’ye qonuni
2. Chegaraviy shartlar
3. Boshlang’ich shartlar

1.3.2-c. Og’zaki so‘rov uchun savollar

1. Birinchi chegaraviy masala
2. Ikkinchi chegaraviy masala
3. Yarim to‘g’ri chiziqdagi masala
4. Koshi masalasi

1.3.3. Mustaqil ish uchun topshiriqlar

- *takrorlash va mashqlar*: takrorlash, o‘z-o‘zini tekshirish, tahlil, qayta ishlash, mustahkamlash, eslab qolish, chuqurlashtirish;
- *yangi materiallarning mustaqil o‘zlashtirish*: yangi adabiy va internet materiallar, konspekt qo‘shimchasi; mustaqil iboralar tuzish;
- *ilmiy xaraktyerdagi ishlar*: muammoli holatlar, testlar, savollar, topshiriqlar tuzish; topshiriqlarni bajarish.

1.3.4. Kartochkalar uchun testlar

1.3.5. ekranga tayanch materiallarni ko‘rsatish(slaydlar)

- Prezentatsiya

1.3.6. Tavsiya etilgan adabiyotlar

Asosiy

1. *Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O‘zbekistan», 2002, 448 b.*
2. *Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,*
3. *Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.*
4. *Bisadzs L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.*
5. *Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.*

Qo‘shimcha

1. *Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.*

2. *Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.*
3. *Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.*
4. *Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.*
5. *Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.*
6. *Mixlnn S.G. Leksii po lineynыm integralnыm uravneniyam. M. 1959.*
7. *Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.*
8. *Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.*
9. *Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.*

1.4. O‘qitish usullari qoidalari

1.4.1. Aqliy hujum qoidalari

- Hech qanday o‘zaro baholash va tanqid;
- Taklif etilayotgan g’oyalarni baholashdan o‘zingni tiy, hatto ular fantastic va iloji yo‘q bo‘lsa ham – hammasi mumkin;
- Tanqid qilma – hamma aytilgan g’oyalar birhirda;
- Bayon qiluvchi gapini bo‘lma;
- Izoh berishdan o‘zingni tiy;
- Maqsad bu - miqdor;
- Qancha g’oyalar ko‘p bo‘lsa chuncha yaxshi: yangi va zarur g’oya tug’ulishi imkoniyati ko‘proq
- Agar g’oyalar takrorlansa o‘ksinma,
- Tasavvo‘ringga erk ber;
- Senda yaralgan g’oyalarni tashlama, agal ular sening nazaringda qabul qilingan sxemaga tegishli bo‘lmasa ham;
- Bu muammo aniq usullar bilan yechiladi deb o‘ylama.

1.4.2. “Insert” texnikasi qoidalari

- Matndi o‘qib, ularda savollat tug’dirayotgan joylarni, ularni bilimlariga mos kewlayotgan va mos kelmayotgan joylarni qalam bilan belgilab qo‘yiladi;
- “Insert” jadvalini quyidagi belgilashlar bilan to‘ldirish:
  Agar «!» bo‘lsa siz o‘z bilimingizga yoki siz o‘ylagan fikrga to‘g’ri kelayotganini o‘qiyapsiz;
  Agar «–» bo‘lsa siz o‘z bilimingizga yoki tyo‘g’ri deb o‘ylaganingizga mutlaqo zid bo‘lganini o‘qiyapsiz;
  Agar «+» bo‘lsa siz o‘qityotganingiz siz uchun yangilik;
  Agar «?» bo‘lsa, siz o‘qiyotganingiz siz uchun tushunarsiz yoki siz bu savolga yanada ko‘proq ma`lumotlar olishni istaysiz.

1.4.3. Guruhlarda ishlash qoidalari

- Hamma o‘z do‘stlarini tinglashi kerak, unga yaxshi munosabatda bo‘lib hurmar ko‘rsatishi kerak;

- Hamma aktiv harakat qilishi lozim; berilgan topshiriqqa nisbatan birgalikda va javobgarlik bilan ishlashi kerak;
- Har kim o‘ziga kerak paytda yordam so‘rashi kerak;
- Har kim undan yordam so‘ralganda yordam ko‘rsatishi kerak;
- Guruhning ish natijalarini baholashda ishtirok etishi lozim;
- Biz bir kemadamiz, o‘zgalarga yordam berib o‘zimiz o‘rganamiz, shuni har kim tushunishi lozim;

Mavzu 7. Parabolik tipdagi tenglamalar

Ma`ruzaga reja-topshiriqlar

Fan: Matematik fizika tenglamalari

O‘quv soati: 2 soat (ma`ruza);

O‘quv mashg’uloti turi: ma`ruza; yangi bilimlarni mustahkamlash va o‘rganish.

Ma`ruza rejasi:

1. Bir fazoviy o‘zgaruvchi bilan berilgan issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi. Mavjudlik teoremasi
2. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun maksimal qiymat prinsipi
3. Birinchi chegaraviy masalani yechimining yagonaligi.
4. Birinchi chegaraviy masalani yechimining turg’unligi.

O‘quv mashg’uloti maqsadi:

O‘quv fani to‘g’risida umumiy ta`surotlar berish, Xususiy hosilali tenglamalarva keyinchalik kasbiy faoliyatidagi roli.

O‘quv mashg’uloti masalalari:

- *O‘rgatuvchi*: talabalarda qabul qilish faoliyatini tashkil qilish, yangi materialni boshlang’ich esda qoldirish va anglash; Matematik fizika tenglamalarining terminlari, iboralarini xarakterlovchi elementlar; talabalarning matematik firlashini rivojlantirish muammoli masalalarni yechimini mahoratini oshirish; matematik masalalarni yechishda matematik simvollarning hususiyatlari bilan tanishtirish;
- *Rivojlantiruvchi*: kitob matni bilan ishlay bilishligi – mag’zlarini tanlab olish, tahlil qilish; gaplar tuzish, hulosa chiqarish, materialni talabalarning izlash faoliyatini stimullashtirish; husisiydan umumiy holga o‘tish usuli bilan tekshirish; tekshirish natijalarini tahlil qilib va uni umumlashtira olishini rivojlantirish; analitik-sintetik faoliyatning mantiqiy fikrlashini qo‘llash; talabalarning ijodiy mahoratini shakillantirish;
- *Tarbiyalovchi:* aktiv faoliyatga, mustaqil ishga jalb qilish; guruhlarda ishlash qoidalariga rioya qila olish; fanni o‘rganishga qiziqishni rivojlantirish; Matematik fizika tenglamalarini matematik-komunikativ kursni bir qismi sifatida tassavur berish; javobgarlik tuyg’ularini tarbiyalash, mehnatsevarlik, individual ishni jamoaviy ish bilan biriktirish, intizomlashtirish.

O‘qitish texnologiyasi:

- *O‘qutish usullari*: instruktaj; Ma`ruza, aqliy hujum, “Insert” texnikasi;
- *O‘qitish shakillari*: frontal; jamoaviy;
- *O‘qitish vositalari*: Ma`ruza matni; jadvallar, multimediya;
- *O‘qitish sharoitlari*: texnik jihozlashtirilgan auditoriya;

- *Baholash va monitoring*: o‘g’zaki savol-javob, blits-so‘rov.

Pedagogik masalalar:

- Fanning masalalari va uning o‘quv fanlar sistemasidagi o‘rni va roli bilan tanishtirish;
- O‘quv fanning tuzulmasi va tavsiya etiladigan o‘quv-metodik adabiyotlarni tasvirlash;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlarini ochib berish, baholash shakli va muddatlari;
- Fan ma`ruzasi paytida o‘qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy bosqichlarini xarakterlab berish va umumiy sxemasini tushuntirish.
- O‘qitish texnologiyasi rivojlanishi perspektivasini xarakterlab berish;

O‘quv faoliyati natijalari:

- Fan ma`ruzasi masalalari, maqsadlari va nomlari shakillanadi;
- Xususiy hosilali tenglamalardoirasidagi yutuqlar yoritiladi;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlari hamda baholash shakli va muddatlari aytiladi
- Fan ma`ruzasida o‘qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy sxemasini kengaytirib xatakterlab beradi;
- Fanning asosiy ta`riflarini  beradi, Xususiy hosilali tenglamalarfani ma`ruzalarining asosiy yo‘nalishlari beriladi;
- Nazariy bilimlarning to‘liqligi, sistemaliyligi va harakatliyligi;
- Amaliy mag’ulotlarni bajarishda o‘rganilgan iboralarbilan ishlay olishligi;

- **1.2. Ma`ruzaning xronologik xaritasi**

- **1 bosqich. O‘quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa):**

- *O‘qituvchining faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (davomat, konspektning borligi; o‘ziga ishonch, aniqligi,); kerakli materiallarni tarqatish (konspekt, tarqatma materiallar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadini bayon qilish; o‘quv mashg’ulotning rajasi bilan tanishtirish; kalit iboralar va so‘zlar, kategoriyalar; internet saytlari va adabiyotlar ro‘yhati; o‘quv natijalari haqida aytish;
- *Talabalar faoliyati*: o‘quv joyini tayyorlash (talabalar borligi; tashqi ko‘rinish; o‘quv materiallar va qo‘llanmalar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadi bilan tanishish; o‘quv materialini qabul qilishga tayyorgarlik ko‘rish;
- *Shakillar, usular, uslublar*: instruktaj; frontal so‘rov; mustahkamlovchi so‘rov.

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa):

- *O‘qituvchining faoliyati*: mavzuga kiritadi; yangi mavzuga doir o‘tgan fanlar va mashg’ulotlarning mavzularini eslashga chorlaydi; ma`ruza matnini tarqatadi, tanishishni taklif etadi, “Insert” usuli bilan belgilar qo‘yishni taklif etadi; birinchi savol bo‘yicha matn o‘qiladi; qo‘shimcha o‘quv materiallarini aytib boorish va tushuncha berish; natural obektlarni namnoyon qilish va izohlash; tushunarsiz savollarni aniqlash va tushintirish; birinchi savol bo‘yicha nazar (shunday qilib qolgan savollarga ham);
- *Talabalar faoliyati*: yangi mavzuda doir oldingi mashg’ulotlarda va fanlarda olgan bilimlarni mustahkamlaydi,; har bir kalit ibora va terminlarni eshitib, yozib borib, konspekt qilib aytib borishadi; “Insert” usuli bilan belgilan o‘qiydilar, aniqlik kiritadilar, savollar beradilar va o‘zaro;
- *Shakillar, usular, uslublar*: frontav so‘rov blits-so‘rov; aqliy hujum, “Insert” texnikasi.

3 bosqich. Yakunlovchi qism (10 daqiqa)

- *O‘qituvchining faoliyati:* mavzu bo‘yicha hulosa qilish, talabalarning e`tiborlarini asosiylarda jalb qilish; qilingan ishning muhimligini aytib o‘tish; alohida talabalarning bajarilgan ishlarini baholash; o‘zaro baholashning natijalarini chiqarish; o‘quv mashg’ulotning yutuqlik darajasini baholash va tahlil qilish; mustaqil ish uchun topshiriqlar; baho ko‘rsatgichlari va me`zonlari;
- *Talabalar faoliyati: ishning* tahlili; natijalarni olish; texnologik bilimlarni qo‘llash; o‘zaro baholashni o‘tkazish, yo‘l qo‘yilgan hatolar bo‘yicha tahlil va aniqlik kiritish; mustaqil ish topshiriqlarini yozib olish;
- *Shakillar, usular, uslublar*: guruhlarda ishlash, kartochkalarda topshiriqlar.

1.3. O‘quv-metodik materiallar

Ma`ruza rejasi:

1. Bir fazoviy o‘zgaruvchi bilan berilgan issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi. Mavjudlik teoremasi
2. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun maksimal qiymat prinsipi
3. Birinchi chegaraviy masalani yechimining yagonaligi.
4. Birinchi chegaraviy masalani yechimining turg’unligi.

Tayanch iboralar: issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi, fazoviy o‘zgaruvchi, maksimum prinsipi, chegaraviy masala, yagonalik, turg’unlik

1.3.1. Ma`ruza matni

a. Bir fazoviy o‘zgaruvchi bilan berilgan issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi. Mavjudlik teoremasi

$$[\mathbf{2.1}]\begin{cases} u_t &= a^2u_{xx}+f(x,t), \quad 0<x<l,\ 0<t\leqslant T;\\ u(0,t) &= \mu_1(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T;\\ u(l,t) &= \mu_2(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T;\\ u(x,0) &= \phi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$$

Bizga malumki issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalaning yechimi quyidagicha:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\left|\int_0^l\phi(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\beta\right)ds\ \right|\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\exp\left\{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2t\right\} \quad (2.5)$$

Teorema 2.1(mavjudlik):

Faraz qilaylik bizga $\phi(x)$ funksiya berilgan va u quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$1)\phi(x)\in c^1[0,l]\ \ 2)\phi(0)=\phi(l)=0$

Shunda (2.5) formula [2.2]chegaraviy masalala uchun yechimlar sinfini aniqlanadi.

Isboti. (1) $u(x,t)$ funksiyamiz $\bar{Q}_T=[0,l]*[0,T]$ soxada uzluksiz ekanini ko‘rsatishimiz kerak.

$|u(x,t)|\leq\sum|v_n(x,t)\ |\leq\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\ |\phi_n|$. Bu yerda $\phi_n=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\phi(s)sun\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds$ Agar bizlar $\sum_{n=1}^{\infty}|\phi_n|$ qatorni yaqinlashishini ko‘rsatsak, shunda Veyershtrass alomatiga ko‘ra $\sum_{n=1}^{\infty}|v_n(x,t)|$ qator tekis yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Olingan $v_n(x,t)$ funksiya uzluksiz bo‘lganligi sababli $u(x,t)$ funksiyamiz ham uzluksiz bo‘ladi, chunki bu funksiyamiz uzluksiz funksiyalardan tuzilgan tekis yaqinlashuvchi bo‘lgan qator bilan aniqlanadi. Endi ϕ_n funksiyani qaraymiz. Agarda bu funksiyani integrallasak quyidagicha bo‘ladi.

$$\phi_n=\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\phi(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds=-\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{1}{\pi n}\phi(s)\cos\left(\frac{\pi n}{l}s\right)\Big|_0^l+\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l\phi'\left(\frac{l}{\pi n}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds=$$
$$=\frac{1}{n}\int_0^l\frac{l}{\pi}\phi'(s)\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds.$$

$\overline{\phi_n}=\int_0^l\phi'(s)\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds$ belgilash olamiz.

Ortonormallashgan funksiyalar sistemasiga taluqli bo‘lgan Bessel tengsizlikdan foydalansak bizlar quyidagi tengsizlikka kelamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\phi_n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^l\phi'(s)\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds\right)^2\le\int_0^l\left(\phi^2(s)\right)ds$$

Endi bizlar $\sum_{n=1}^{\infty}|\phi_n|$ qator uchun almashtirish olishimiz mumkin

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\phi_n|=\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left|\overline{\phi_n}\right|\le\left\{ab\le\frac{a^2+b^2}{2}\right\}\le\frac{l}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\phi}_n^{\,2}\right)$$

Qavs ichidagi 1-qator ma’lumki yaqinlashuvchi, 2-chi qator esa yangi ko‘rsatganimizdek yaqinlashuvchi qator. Bundan xulosa Fur’ye koeffisentlaridan iborat bo‘lgan $\sum_{n=1}^{\infty}|\phi_n|$ qator yaqinlashuvchi.

Demak avval ko‘rsatganimizdek $u(x,t)$ funksiyamiz uzliksizligini isbotladik.

(2) Endi bizlar Q_T sohada u_t, u_{xx} bo‘yicha xosilalarning mavjudligi va uzluksizligini isbotlashimiz kerak. Barcha $0<x<l,\ \ t_0<t<T$ (bu yerda t_0 qandaydir ixtiyoriy musbat sonlar uchun u_{xx} funksiyamiz mavjud ekanligini ko‘rsatamiz. Shunda bizlar u_{xx} funksiyamiz Q_T to‘plam ustida mavjud ekanligini isbotlay olamiz. Endi bizlar (2.5) formula bilan berilgan $u(x,t)$ funksiyamizni 2 marta x bo‘yicha differensallaymiz. Shunda $u_{xx}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n\sqrt{\frac{2}{l}}\left(-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\cdot e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2t}$ hosil bo‘ladi. $e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2t}$ ko‘paytuvchimiz bizlarga $t_0<t<T$ da mojaranta qatorining tekis yaqinlashuvchiligini beradi. Bu yerdan bizlar quyidagi xulosaga kelamiz: yuqorida berilgan $u_{xx}(x,t)$ qator Q_T sohada tekis yaqinlashuvchiligi va mavjudligi kelib chiqadi. Endi $u_{xx}(x,t)$ ni uzluksizligini ko‘rsatishimiz kerak. Bu xulosa $\sum_{n=1}^{\infty}(v_n(x,t))_{xx}$ qatorni har bir hadini uzluksizligidan kelib chiqadi.

(3) Endi $u(x,t)$ funksiyamiz [2.2] chegaraviy masalaning barcha shartlarini qanoatlantiradi, chunki uni ko‘rinishini chiqarganda bu shartlardan foydalangan edik.

2. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun maksimum prinsipi

$Q_T=\{(x,t):(0,l)*(0,T]\}$ to‘plamni qaraylik.

$\Gamma_T=\overline{Q_T}\setminus Q_T$ to‘plamning chegarasi .

Bizlar $u(x,t)$ funksiyamiz o‘zining max qiymatiga Γ_T chegarada erishadi, agarda u issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasini qanoatlantirsa.

Teorema 2.2 (max qiymat prinsipi): Agar $u(x,t)\in C\left[\overline{Q_T}\right]$, $u_t, u_{xx}\in C\left[Q_T\right]$ va $u_t=a^2u_{xx}, Q_T$ bo‘lsin, u xolda $\max\limits_{Q_T} u(x,t)=\max\limits_{\Gamma} u(x,t)$, $\min\limits_{\overline{Q_T}} u(x,t)=\min\limits_{\Gamma} u(x,t)$ bo‘ladi.

Isbot. Bizlar max ga chegarada erishishini ko‘rsatishimiz kerak. Teskarisi: faraz qilamiz $\max\limits_{\Gamma} u(x,t)=M$ va shunday $(x_0,t_0)\in Q_T$ mavjudki , shu nuqtada funksiyaning qiymati: $u(x_0,t_0)=M+\varepsilon, \varepsilon>0.$ Endi yangi $v(x,t)$ funksiyani quyidagicha aniqdaymiz:

$$v(x,t)=u(x,t)-\frac{\varepsilon}{2T}(t-t_0) \tag{2.6}$$

Bundan quyidagi tenglikni xosil qilish oson: $v(x_0,t_0)=u(x_0,t_0)=M+\varepsilon.$ Bundan tashqari, $t\in[0,T]$ bo‘lganda $\left|\frac{\varepsilon}{2T}(t-t_0)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}$ bo‘lganligi sababli $\max\limits_{\Gamma} v(x,t)=\max\limits_{\Gamma}\left[u(x,t)-\frac{\varepsilon}{2T}(t-t_0)\right]\le M+\frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik o‘rinlidir.

Demak shunday $(x_1,t_1)\in Q_T$ nuqta mavjudki, bu nuqtada $v(x,t)$ funksiyamiz *max* ga erishadi. Ikki marta differensiallanuvchi funksiyaning maksimumnmng zaruriy shartiga ko‘ra $\begin{cases} v_t(x_1,t_1)\ge 0\\ v_{xx}(x_1,t_1)\le 0\end{cases}$. Agar $t_1=T$ bo‘lsa tengsizliklar qatiy bo‘ladi.

Endi biz (2.6) tenglikni ikkala tomonini t bo‘yicha 2 marta difftrentsiallashdan quyidagini xosil qilamiz: $u_t(x,t)=v_t(x,t)+\frac{\varepsilon}{2T}$

Endi x bo‘yicha 2 marta differensiallab quyidagini xosil qilamiz: $u_{xx}(x,t)=v_{xx}(x,t)$. Yuqorida yozilgan tengsizliklar sistemasidan quyidagi tengsizliklarni xosil qilamiz:

$$u_t(x_1,t_1)=v_t(x,t)+\frac{\varepsilon}{2T}>0\ge a^2v_{xx}(x_1,t_1)=a^2u_{xx}(x_1,t_1)$$

bu esa issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasiga zid. Biz qarama-qarshilikga keldik. Demak bizlar noto‘g’ri faraz qilgan edik. Shuning uchun $\max\limits_{Q_T} u(x,t)=\max\limits_{\Gamma} u(x,t)$ va birinchi qism isbotladi.

Teoremaning 2-qismini isbotlash uchun $u(x,t)$ funksiyadan $w(x,t)=-u(x,t)$ funksiyaga o‘tish kerak. Xosil bo‘lgan funksiya maksimumga erishgan nuqtalarda $u(x,t)$ funksiya minimal qiymatlarga erishadi. Teorema isbotlandi.

Chegaraviy masalalarga maksimum prinsipini qo‘llasak, quyidagini xosil qilamiz.Endi

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, x\in(0,l), t\in(0,T]\\ u(0,t)=\mu_1(t), t\in[0,T]\\ u(l,t)=\mu_2(t), t\in[o,T]\\ u(x,0)=\phi(x), x\in[0,l]\end{cases}$$

Shunda $\max\limits_{\overline{Q_T}} u(x,t)=max\left\{\max\limits_{t\in[0,T]}\mu_1(t), \max\limits_{t\in[0,T]}\mu_2(t), \max\limits_{x\in[0,l]}\phi(x)\right\}$

Bu tenglik oddiy fizikaviy ma’noga ega. Sterjenning temperaturasi uning chegaralaridagi va boshlang’ich vaqt momentidagi temperaturasidan baland bo‘lishi mumkin emas.

3. Birinchi chegaraviy masalani yechimining yagonaligi.

Teorema 2.3(yagonalik). Bizga $u_1(x,t), u_2(x,t)$ funksiyalar

$$C\left[\overline{Q_T}\right],\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial u_i}{\partial t}\in C\left[Q_T\right],\quad i=1,2$$

sinfdan olingan bo‘lib, bu funksiyalarning ikkalasi ham [2.1] chegaraviy masalaning yechimi bo‘lsa, shunda quyidagi tenglik o‘rinli: $u_1(x,t)\equiv u_2(x,t)$

Isboti: Yangi $v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ funksiya kiritamiz. Shunda $v\in C\left[\overline{Q_T}\right]$ $v_t,v_{xx}\in C\left[Q_T\right]$ bo‘lishi aniq.

Bu funksiyamiz quyidagi masalaning yechimi bo‘ladi

$$\begin{cases} v_t=a^2u_{xx},\, x\in(0,l),t\in(0,T] \\ v(0,t)=0,t\in[0,T] \\ v(l,t)=0,t\in[o,T] \\ v(x,0)=0,x\in[0,l] \end{cases}$$

$v(x,t)$ funksiya uchun max prinsipining barcha shartlari bajarilishi aniq. Demak max prinsipini qo‘llaganimizda $\begin{cases} \max\limits_{Q_T} v(x,t)=\max\limits_{\Gamma} v(x,t)=0 \\ \min\limits_{\overline{Q_T}} v(x,t)=\min\limits_{\Gamma} v(x,t)=0 \end{cases}$

$\Rightarrow v(x,t)\equiv 0\Rightarrow u_1(x,t)\equiv u_2(x,t)$ teorema isbotlandi.

4. Birinchi chegaraviy masala turg’unligi.

Lemma 1. Bizlarga $u_1(x,t)$ va $u_2(x,t)$ funksiyalar berilgan va quyidagi shartlar bajarilsin:

$$u_i\in C\left[\overline{Q_T}\right],\quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2},\frac{\partial u_i}{\partial t}\in C\left[\overline{Q}_T\right],\quad \text{i=1,2}$$

va

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t}\ge a^2\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2},x\in(0,l),t\in(0,T],i=1,2 \\ u_1(0,t)\ge u_2(0,t),t\in[0,T] \\ u_1(l,t)\ge u_2(0,t),t\in[o,T] \\ u_1(x,0)\ge u_2(x,0),x\in[0,l] \end{cases}$$

o‘rinli bo‘lsa, shunda $\overline{Q_T}$ sohada $u_1(x,t)\ge u_2(x,t)$.

Isboti:

Yana $v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ bunda $v\in C\left[\overline{Q_T}\right],v_t,v_{xx}\in C\left[Q_T\right]$ shu bilan birgalikda

$$\begin{cases} v_t=a^2u_{xx}(x,t),x\in(0,l),t\in(0,T] \\ v(0,t)\ge 0,t\in[0,T] \\ v(l,t)\ge 0,t\in[o,T] \\ v(x,0)\ge 0,x\in[0,l] \end{cases}$$

o‘rinli.

Endi bizlar max prinsipining 2-qismidan foydalanamiz: $\min\limits_{\overline{Q_T}} v(x,t)=\min\limits_{\Gamma} v(x,t)\ge 0$ demak xulosa $u_1(x,t)\ge u_2(x,t),(x,t)\in\overline{Q}$

Lemma isbotlandi.

Birinchi chegaraviy masalani yechimining turg’unligi.

Teorema 2.4 (turg'unlik). Bizga $u_1(x,t), u_2(x,t)$ funksiyalar berilgan va quyidagi shartlar:

$$u_i \in C\left[\overline{Q_T}\right], \quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \frac{\partial u_i}{\partial t} \in C\left[\overline{Q_T}\right], \quad \text{i=1,2}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, x \in (0,l), t \in (0,T], i = 1,2 \\ u_i(0,t) = \mu_1^i(t), t \in [0,T], i = 1,2 \\ u_i(l,t) = \mu_2^i(t), t \in [o,T], i = 1,2 \\ u_i(x,0) = \phi_i(x), x \in [0,l], i = 1,2 \end{cases}$$

o'rinli bo'lsa, shunda

$$\max_{\overline{Q_T}} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| = max\left\{ \max_{t\in[0,T]} |\mu_1^1(t) - \mu_1^2(t)|, \max_{t\in[0,T]} |\mu_2^1(t) - \mu_2^2(t)|, \max_{x\in[0,l]} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| \right\}$$

tenglik o'rinli

Isboti: $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ almashtirish olamiz .

Unda

$$v \in C\left[\overline{Q_T}\right]$$
$$v_t, v_{xx} \in C[Q_T]$$
$$v_t = a^2 u_{xx}(x,t), x \in (0,l), t \in (0,T]$$

Tengliklar o'rinli. Quyidagicha almashtirish olamiz:

$$\varepsilon = max\left\{ \max_{t\in[0,T]} |\mu_1^1(t) - \mu_1^2(t)|, \max_{t\in[0,T]} |\mu_2^1(t) - \mu_2^2(t)|, \max_{x\in[0,l]} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| \right\}, \varepsilon > 0$$

Bu tenglikdan $\max\limits_{\Gamma} |\ v(x,t)\ | \le \varepsilon$ kelib chiqadi.

Demak $-\varepsilon \le v(x,t) \le \varepsilon$, Γ to'g'ri chiziqda bajariladi: $(\ -\varepsilon, v(x,t)\ )$ va $(v(x,t), \varepsilon)$ fuksiyalar uchun 1-lemmani qo'llasak $-\varepsilon \le u_1(x,t) - u_2(x,t) \le \varepsilon$ $\bar{Q}_T$ sohada bo'ladi.

TEOREMA ISBOTLANDI.

1.3.2-a. Frontal so'rov uchun savollar

1. Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalaning echimi keltiring.

1.3.2-b. Blits-so'rov uchun savollar

1.3.2-c. Og'zaki so'rov uchun savollar

1. Mavjudlik teoremasi
2. Yagonalik teoremasi
3. Turg'unlik teoremasi

1.3.3. Mustaqil ish uchun topshiriqlar

- *takrorlash va mashqlar*: takrorlash, o'z-o'zini tekshirish, tahlil, qayta ishlash, mustahkamlash, eslab qolish, chuqurlashtirish;

- *yangi materiallarning mustaqil o'zlashtirish*: yangi adabiy va internet materiallar, konspekt qo'shimchasi; mustaqil iboralar tuzish;
- *ilmiy xaraktyerdagi ishlar*: muammoli holatlar, testlar, savollar, topshiriqlar tuzish; topshiriqlarni bajarish.

1.3.4. Kartochkalar uchun testlar

1.3.5. ekranga tayanch materiallarni ko'rsatish(slaydlar)

- Prezentatsiya

1.3.6. Tavsiya etilgan adabiyotlar

Asosiy

1. *Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O'zbekistan», 2002, 448 b.*
2. *Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,*
3. *Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.*
4. *Bisadzs L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.*
5. *Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.*

Qo'shimcha

1. *Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.*
2. *Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.*
3. *Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.*
4. *Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.*
5. *Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.*
6. *Mixlnn S.G. Leksii po lineynыm integralnыm uravneniyam. M. 1959.*
7. *Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.*
8. *Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.*
9. *Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.*

1.4. O'qitish usullari qoidalari

1.4.1. Aqliy hujum qoidalari

- Hech qanday o'zaro baholash va tanqid;
- Taklif etilayotgan g'oyalarni baholashdan o'zingni tiy, hatto ular fantastic va iloji yo'q bo'lsa ham – hammasi mumkin;
- Tanqid qilma – hamma aytilgan g'oyalar birhirda;

- Bayon qiluvchi gapini bo‘lma;
- Izoh berishdan o‘zingni tiy;
- Maqsad bu - miqdor;
- Qancha g’oyalar ko‘p bo‘lsa chuncha yaxshi: yangi va zarur g’oya tug’ulishi imkoniyati ko‘proq
- Agar g’oyalar takrorlansa o‘ksinma,
- Tasavvo‘ringga erk ber;
- Senda yaralgan g’oyalarni tashlama, agal ular sening nazaringda qabul qilingan sxemaga tegishli bo‘lmasa ham;
- Bu muammo aniq usullar bilan yechiladi deb o‘ylama.

1.4.2. “Insert” texnikasi qoidalari

- Matndi o‘qib, ularda savollat tug’dirayotgan joylarni, ularni bilimlariga mos kewlayotgan va mos kelmayotgan joylarni qalam bilan belgilab qo‘yiladi;
- “Insert” jadvalini quyidagi belgilashlar bilan to‘ldirish:
  Agar «!» bo‘lsa siz o‘z bilimingizga yoki siz o‘ylagan fikrga to‘g’ri kelayotganini o‘qiyapsiz;
  Agar «–» bo‘lsa siz o‘z bilimingizga yoki tyo‘g’ri deb o‘ylaganingizga mutlaqo zid bo‘lganini o‘qiyapsiz;
  Agar «+» bo‘lsa siz o‘qityotganingiz siz uchun yangilik;
  Agar «?» bo‘lsa, siz o‘qiyotganingiz siz uchun tushunarsiz yoki siz bu savolga yanada ko‘proq ma`lumotlar olishni istaysiz.

1.4.3. Guruhlarda ishlash qoidalari

- Hamma o‘z do‘stlarini tinglashi kerak, unga yaxshi munosabatda bo‘lib hurmar ko‘rsatishi kerak;
- Hamma aktiv harakat qilishi lozim; berilgan topshiriqqa nisbatan birgalikda va javobgarlik bilan ishlashi kerak;
- Har kim o‘ziga kerak paytda yordam so‘rashi kerak;
- Har kim undan yordam so‘ralganda yordam ko‘rsatishi kerak;
- Guruhning ish natijalarini baholashda ishtirok etishi lozim;
- Biz bir kemadamiz, o‘zgalarga yordam berib o‘zimiz o‘rganamiz, shuni har kim tushunishi lozim;

Mavzu 8. “Umumiy chegaraviy masala yechimining yagonaligi va mavjudligi. Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi ”

Ma`ruzaga reja-topshiriqlar

Fan: Matematik fizika tenglamalari

O‘quv soati: 2 soat (ma`ruza);

O‘quv mashg’uloti turi: ma`ruza; yangi bilimlarni mustahkamlash va o‘rganish.

Ma`ruza rejasi:

1. Umumiy chegaraviy masala yechimining yagonaligi
2. Koshi masalasining yechimining mavjudligi.
3. Koshi masalasi yechimining mavjudligi teoremaning isboti.

O‘quv mashg’uloti maqsadi:

O‘quv fani to‘g’risida umumiy ta`surotlar berish, Xususiy hosilali tenglamalarva keyinchalik kasbiy faoliyatidagi roli.

O‘quv mashg’uloti masalalari:

- *O‘rgatuvchi*: talabalarda qabul qilish faoliyatini tashkil qilish, yangi materialni boshlang’ich esda qoldirish va anglash; Matematik fizika tenglamalarining terminlari, iboralarini xarakterlovchi elementlar; talabalarning matematik firlashini rivojlantirish muammoli masalalarni yechimini mahoratini oshirish; matematik masalalarni yechishda matematik simvollarning hususiyatlari bilan tanishtirish;
- *Rivojlantiruvchi*: kitob matni bilan ishlay bilishligi – mag’zlarini tanlab olish, tahlil qilish; gaplar tuzish, hulosa chiqarish, materialni talabalarning izlash faoliyatini stimullashtirish; hususiydan umumiy holga o‘tish usuli bilan tekshirish; tekshirish natijalarini tahlil qilib va uni umumlashtira olishini rivojlantirish; analitik-sintetik faoliyatning mantiqiy fikrlashini qo‘llash; talabalarning ijodiy mahoratini shakillantirish;
- *Tarbiyalovchi:* aktiv faoliyatga, mustaqil ishga jalb qilish; guruhlarda ishlash qoidalariga rioya qila olish; fanni o‘rganishga qiziqishni rivojlantirish; Matematik fizika tenglamalarini matematik-komunikativ kursni bir qismi sifatida tassavur berish; javobgarlik tuyg’ularini tarbiyalash, mehnatsevarlik, individual ishni jamoaviy ish bilan biriktirish, intizomlashtirish.

O‘qitish texnologiyasi:

- *O‘qutish usullari*: instruktaj; Ma`ruza, aqliy hujum, “Insert” texnikasi;
- *O‘qitish shakillari*: frontal; jamoaviy;
- *O‘qitish vositalari*: Ma`ruza matni; jadvallar, multimediya;
- *O‘qitish sharoitlari*: texnik jihozlashtirilgan auditoriya;
- *Baholash va monitoring*: o‘g’zaki savol-javob, blits-so‘rov.

Pedagogik masalalar:

- Fanning masalalari va uning o‘quv fanlar sistemasidagi o‘rni va roli bilan tanishtirish;
- O‘quv fanning tuzulmasi va tavsiya etiladigan o‘quv-metodik adabiyotlarni tasvirlash;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlarini ochib berish, baholash shakli va muddatlari;
- Fan ma`ruzasi paytida o‘qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy bosqichlarini xarakterlab berish va umumiy sxemasini tushuntirish.
- O‘qitish texnologiyasi rivojlanishi perspektivasini xarakterlab berish;

O‘quv faoliyati natijalari:

- Fan ma`ruzasi masalalari, maqsadlari va nomlari shakillanadi;
- Xususiy hosilali tenglamalardoirasidagi yutuqlar yoritiladi;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlari hamda baholash shakli va muddatlari aytiladi
- Fan ma`ruzasida o‘qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy sxemasini kengaytirib xatakterlab beradi;
- Fanning asosiy ta`riflarini beradi, Xususiy hosilali tenglamalarfani ma`ruzalarining asosiy yo‘nalishlari beriladi;
- Nazariy bilimlarning to‘liqligi, sistemaliyligi va harakatliyligi;
- Amaliy mag’ulotlarni bajarishda o‘rganilgan iboralarbilan ishlay olishligi;

- **1.2. Ma`ruzaning xronologik xaritasi**

- **1 bosqich. O‘quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa):**

- *O‘qituvchining faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (davomat, konspektning borligi; o‘ziga ishonch, aniqligi,); kerakli materiallarni tarqatish (konspekt, tarqatma materiallar);

ma`ruzaning mavzusi va maqsadini bayon qilish; o‘quv mashg’ulotning rajasi bilan tanishtirish; kalit iboralar va so‘zlar, kategoriyalar; internet saytlari va adabiyotlar ro‘yhati; o‘quv natijalari haqida aytish;

- *Talabalar faoliyati*: o‘quv joyini tayyorlash (talabalar borligi; tashqi ko‘rinish; o‘quv materiallar va qo‘llanmalar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadi bilan tanishish; o‘quv materialini qabul qilishga tayyorgarlik ko‘rish;
- *Shakillar, usular, uslublar*: instruktaj; frontal so‘rov; mustahkamlovchi so‘rov.

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa):

- *O‘qituvchining faoliyati*: mavzuga kiritadi; yangi mavzuga doir o‘tgan fanlar va mashg’ulotlarning mavzularini eslashga chorlaydi; ma`ruza matnini tarqatadi, tanishishni taklif etadi, “Insert” usuli bilan belgilar qo‘yishni taklif etadi; birinchi savol bo‘yicha matn o‘qiladi; qo‘shimcha o‘quv materiallarini aytib boorish va tushuncha berish; natural obektlarni namnoyon qilish va izohlash; tushunarsiz savollarni aniqlash va tushintirish; birinchi savol bo‘yicha nazar (shunday qilib qolgan savollarga ham);
- *Talabalar faoliyati*: yangi mavzuda doir oldingi mashg’ulotlarda va fanlarda olgan bilimlarni mustahkamlaydi,; har bir kalit ibora va terminlarni eshitib, yozib borib, konspekt qilib aytib borishadi; “Insert” usuli bilan belgilan o‘qiydilar, aniqlik kiritadilar, savollar beradilar va o‘zaro;
- *Shakillar, usular, uslublar*: frontav so‘rov blits-so‘rov; aqliy hujum, “Insert” texnikasi.

3 bosqich. Yakunlovchi qism (10 daqiqa)

- *O‘qituvchining faoliyati:* mavzu bo‘yicha hulosa qilish, talabalarning e`tiborlarini asosiylarda jalb qilish; qilingan ishning muhimligini aytib o‘tish; alohida talabalarning bajarilgan ishlarini baholash; o‘zaro baholashning natijalarini chiqarish; o‘quv mashg’ulotning yutuqlik darajasini baholash va tahlil qilish; mustaqil ish uchun topshiriqlar; baho ko‘rsatgichlari va me`zonlari;
- *Talabalar faoliyati: ishning* tahlili; natijalarni olish; texnologik bilimlarni qo‘llash; o‘zaro baholashni o‘tkazish, yo‘l qo‘yilgan hatolar bo‘yicha tahlil va aniqlik kiritish; mustaqil ish topshiriqlarini yozib olish;
- *Shakillar, usular, uslublar*: guruhlarda ishlash, kartochkalarda topshiriqlar.

1.3. O‘quv-metodik materiallar

Ma`ruza rejasi:

1. Umumiy chegaraviy masala yechimining yagonaligi
2. Koshi masalasining yechimining mavjudligi.
4. Koshi masalasi yechimining mavjudligi teoremaning isboti.

Tayanch iboralar: chegaraviy masala, shartlar, yagonalik teoremasi,
Koshi masalasi

1.3.1. Ma`ruza matni

Umumiy chegaraviy masala yechimining yagonaligi.

$$[2.3]\quad \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t); & 0 < t \le T,\ \ 0 < x < l; \\ \alpha_1 u(0,t) - a_2 u_x(0,t) = p(t); & 0 \le t \le T; \\ \beta_1 u(l,t) + \beta_2 u_x(l,t) = q(t); & 0 \le t \le T; \\ u(x,0) = \varphi(x); & 0 \le x \le l; \end{cases}$$

Bu yerda $\alpha_1+\alpha_2>0;\quad \beta_1+\beta_2>0.$-manfiy bo‘lmagan o‘zgarmaslar. Bu o‘zgarmaslar uchun quyidagi shart bajarilishi kerak.

$$\alpha_1+\alpha_2>0; \qquad \beta_1+\beta_2>0;$$

Bu chegaraviy masala uchun quyidagi teorema o‘rinli.

Teorema 2.5 (yagonalik). Faraz qilaylik, Q_T sohada $u_1,u_2(x,t)$ funksiyalar aniqlangan bo‘lsin. Bu funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$u_i,\frac{\partial u_i}{\partial x}\in C[\overline{Q}_T],\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u_i}{\partial t}\in C[Q_T], \qquad \text{i }=1,2,$$

va bir xil [2.3] chegaraviy masalaning yechimlari bo‘lsin.

Shunda $\overline{Q_T}$ sohada $u_1(x,t)=u_2(x,t)$

Isbot. Har doimdagidek $v(x,t)=u_1(x,1)-u_2(x,t)$, funksiyani kiritamiz. Bu funksiya uchun quyidagi shartlar bajariladi: $v,v_x\in C[\overline{Q}_T],v_t,v_{xx}\in C[Q_T]$ va $v(x,t)$ funksiyamiz quyidagi chegaraviy masalani yechimi bo‘ladi:

$$\begin{cases} v_t=a^2v_{xx} & 0<t\le T,\ 0<x<l;\\ \alpha_1 v(0,t)-a_2v_x(0,t)=0; & 0\le t\le T;\\ \beta_1 v(l,t)+\beta_2 v_x(l,t)=0; & 0\le t\le T;\\ v(x,0)=0; & 0\le x\le l; \end{cases}$$

1-chi tenglamani ikkala tomonini $2v$ ko‘paytiramiz $2vv_t=\frac{\partial}{\partial t}(v^2)$, inobatga olsak, quyidagi tenglikni xosil qilamiz:

$$\frac{\partial}{\partial_T}(v^2(x,t))=2a^2v(x,t)v_{xx}(x,t).$$

Funksiyalarning tengligidan aniq integrallarning tengligi ham kelib chiqadi:

$$\int_0^l\int_0^t\frac{\partial}{\partial\tau}(v^2(x,\tau))d\tau dx=2a^2\int_0^l\int_0^t v(x,\tau)v_{xx}(x,\tau)d\tau dx,$$

Bu tenglikning ung tomonida bizlar integrallash tartibini o‘zgartira olalamiz:

$$\int_0^l\int_0^t\frac{\partial}{\partial\tau}(v^2(x,\tau))d\tau dx=2a^2\int_0^t\left[\int_0^l v(x,\tau)v_{xx}(x,\tau)dx\right]d\tau. \quad (2.7)$$

Bochlang’ich shartdan foydalansak , quyidagi tenglikga kelamiz:

$$\int_0^l\int_0^t\frac{\partial}{\partial\tau}(v^2(x,\tau))d\tau dx=\int_0^l(v^2(x,\tau)dx.$$

(2.7) ni o‘ng tomonidagi ichki integralni bo‘laklab integrallaymiz:

$$\int_0^l v^2(x,\tau)v_{xx}(x,\tau)^v dx=v(x,\tau)v_x(x,\tau)\,|_0^l - \int_0^l(v_x(x,t))^2dx.$$

chegaraviy shartlardan foydalansak esa, ixtiyoriy $t\in[o,T]$ ychun:

$$v(l,t)v_x(l,t)=\begin{cases}0, & \text{agar } \beta_1=0,\ \beta_2>0;\\ 0, & \text{agar } \beta_1>0,\ \beta_2=0;\\ -\frac{\beta_1}{\beta_2}v^2(l,t), & \text{agar } \beta_1>0,\ \beta_2>0.\end{cases},$$

$$v(0,t)v_x(0,t)=\begin{cases}0, & \text{agar } \alpha_1=0,\ \ \alpha_2>0;\\ 0, & \text{agar } \alpha_1>0,\ \alpha_2=0;\\ -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}v^2(0,t), & \text{agar } \alpha_1>0,\ \alpha_2>0.\end{cases},$$

Bundan xulosa, agar belgilash kiritsak:

$P(\tau)=v(x,\tau)v_x(x,\tau)|_0^l=v(l,\tau)v_x(l,\tau)-v(0,\tau)v_x(0,\tau),$ shunda $P(\tau)\le 0,\forall\tau\in[0;T].$

demak[2.7] tenglikni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin.

$$\int_0^l v^2(x,t)dx-2a^2\int_0^t P(\tau)d\tau+2a^2\int_0^t\int_0^l v_x^2(x,\tau)dx\,d\tau=0$$

Birinchi va uchinchi yig’indilar manfiy emas. Ikkinchi integralning manfiy emasligi, $P(\tau)$ funksiyaning musbat emasligidan kelib chiqadi. Demak, bizlar uchta manfiy bo‘lmagan funksiyaning yig’indisi 0 ga teng ekanligini ko‘rsatdik. Demak har bittasi 0 ga teng deb xulosa qilamiz. Teoremani isbotining boshlanishida bizlar $v(x,t)$ funksiyamizning uzluksiz ekanligini ko‘rsatgan edik. Ikkinchi tomondan $\int_0^l v^2(x,t)dx=0$ teng. Demak $v(x,t)\equiv 0$.

Xulosa qilib aytganda: $u_2(x,t)\equiv u_1(x,t).$ Teorema isbotlandi.

Koshi masalaning yechimining mavjudligi.

Bir jinsli Koshi masalasini qaraymiz:

$$[2.4]\begin{cases}(1)\qquad u_t=a^2u_{xx}, & -\infty<x<+\infty,\quad 0<t<T;\\ (2)\quad u(x,0)=\varphi(x), & -\infty<x<+\infty.\end{cases}$$

[2.4] 1-chegaraviy masalani yechimini topayotganimizdek bu yerda ham oldin malum bir almashtirishlarni o‘tkazamiz. So‘ngra esa hosil bo‘lgan funksiya yechim ekanligini ko‘rsatamiz.

$$v(x,t)=X(x)T(t).$$

$v(x,t)$ funksiyadan issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasini qanoatlantirishini talab qilamiz:

$$T'(t)X(x)=a^2X''(x)T(t).$$

Ikkala tomonini $a^2X(x)T(t)$ ga bo‘lamiz, shunda hosil bo‘lgan tengliklar quyidagicha: $\dfrac{X''(x)}{X(x)}=\dfrac{T'(t)}{a^2T(t)}=-\lambda^2;$

Bu yerda $\lambda=const>0$ ikkita tenglama xosil bo‘ladi:

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0;\ (2.8)$$

$$T'(t)+a^2\lambda^2T(t)=0.\ (2.9)$$

$X(x)=e^{i\lambda x}$ funksiya (2.8), tenglamaning yechimi bo‘ladi. Xuddi shunday qilib $T(t)=e^{-a^2\lambda^2t}$ funksiyamiz (2.9) tenglamaning yechimi bo‘ladi. Demak,

$v(x,t)=e^{i\lambda x-a^2\lambda^2t}$ birinchi tenglamaning yechimi bo‘ladi.

$u_\lambda=A(\lambda)e^{i\lambda x-a^2\lambda^2t}$ funksiya ham yechim bo‘ladi (A (λ)-qandaydir funksiya)

Endi yakuniy funksiya quyidagicha aniqlanadi

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}A(\lambda)e^{i\lambda x-a^2\lambda^2t}d\lambda$$

boshlang’ich shartlani qanoatlantirishini talab qilamiz

$$u(x,0)=\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}A(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$$

Endi, Fur'ye almashtirishtirishlar nazariyasinidan kelib chiqgan holda $A(\lambda)$ quydagicha topamiz

$$A(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda s}\varphi(s)ds\,.$$

Shunday qilib bizlar $u(x,t)$:funksiya uchun quydagi ko'rinishini xosil qilamiz

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda s}\varphi(s)ds\right]e^{i\lambda x-a^2i\lambda^2t}d\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{i\lambda(x-s)-a^2\lambda^2t}d\lambda\right]\varphi(s)ds.$$

$u(x,t)$: uchun yechim shunday ko'rinishga ega:

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\}\varphi(s)ds.\quad(2.10)$$

$$G(x,s,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\},$$

belgilash kiritasak:

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,s,t)\varphi(s)ds.$$

$G(x,s,t)$ funksiyamiz issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasini s-fiksirlangan bo'lganda qanoatlantirishini ko'rsatamiz:

$$G_x(x,s,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\}\left(-\frac{2(x-s)}{4a^2t}\right);$$

$$G_t(x,s,t)=\frac{1}{2\sqrt{4\pi a^2t^{\frac{3}{2}}}}\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\}+\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\exp\left\{-\frac{(x-s)}{4a^2t}\right\}\frac{(x-s)^2}{4a^2t^2}$$

$$G_{xx}(x,s,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi^2t}}\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\}\frac{(x-s)^2}{4a^xt^2}+\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\}(-\frac{2}{4a^2t})$$

$G(x,s,t)=a^2G_{xx}(x,s,t)$ ekanligini tekshirish oson.

Endi bizlar xosil bo'lgan funksiyamizni qandaydir boshlangich shartlarda mavjud ekanligini ko'rishimiz kerak.

3. Koshi masalasi yechimining mavjudlik teoremaning isboti.

Teorem 2.6 (mavjudlik teoremasi). [2.4] Koshi masalaning boshlang'ich shartlarini $\varphi(x)$ yordamidi aniqlangan bo'lsin va

$$\varphi(x)\in C(R),|\varphi(x)|\le M,\forall x\in R.$$

Shunda 2.10 formula bilan aniqlangan $u(x,t)$ funksiya $x\in R,t>0$ bo'lganda uzluksiz bo'ladi, u_t,u_{xx} uzluksiz xosilalarga ega, agarda $x\in R,t>0$ bo'lsa, va issiqliq o'tkazuvchanlik tenglamani qanoatlantiradi. $x\in R,t>0$ va $\forall x_0\in R\lim\limits_{\substack{t\to0+\\x\to x_0}}u(x,t)=\varphi(x_0)$ lar uchun

Izox: Teoremaning oxirgi sharti quyidagi ma'noga ega.

$$u(x,t)=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\}\varphi(s)ds, t>0;\\ \varphi(x), t=0.\end{cases}$$

$$(x,t): x\in R, t\geq 0$$

da uzluksiz ekanligini oxirgi shart bildiradi.

<u>ISBOT.</u>

1.Avvalombor $u(x,t)$ funksiyamiz $x\in R, t>0$ uzluksiz ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun funksiyamiz $\Pi_{L,t_0T}=\{(x,t):-L<x<L; t_0<t<T\}$ to‘g’ri to‘rtburchakda uzluksiz ekanligini ko‘rsatishimiz kerak. Bu yerda L, t_0, T - musbat konstantalar.

Integral ostidagi funksiya Π_{L,t_0T} to‘g’ri to‘rtburchakda uzluksiz $u(x,t)$ funksiya Π_{L,t_0T} da uzluksiz ekanligini isbotlash uchun 2.10 formulada bo‘lgan integral tekis yaqinlashuvchi ekanligini ko‘rsatishimiz kerak.

Tekis yaqinlashishining Veyershtrass alomatidan foydalanish uchun shunday $F(s)$ funkyiyani ko‘rish kerakki, bu funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$\begin{cases}|G(x,s,t)|\leq F(s)\forall x,t\in\Pi_{L,t_0,T};\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(s)ds\end{cases}$$

integral yaqinlashuvchi. Buning uchun xar xil s-lar uchun exponentaning darajasini baxolash kerak.

Agar $s\leq -2L$ $\quad \frac{(x-s)^2}{t}\geq\frac{(L+s)^2}{T}\Rightarrow -\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\geq\frac{(L+s)^2}{4a^2T}.$

Agar $|s|\leq 2L$ $\quad -\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\leq 0.$ Agar $s\geq 2L$

$$\frac{(x-s)^2}{t}\geq\frac{(L-s)^2}{T}\Rightarrow -\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\leq -\frac{(L-s)^2}{4a^2T}.$$

Endi $t_0\leq t\leq T$ bo‘lsin. Shunda 2.10 integralda berilgan birinchi ko‘paytiruvchi uchun quyidagi tengsizlikni yozish mumkin:

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\leq\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}}$$

demak

$$|G(x,s,t)|\leq F(s)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}}, |s|\leq 2L;\\ \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}}\exp\{-\frac{(L-s)^2}{4a^2T}+\frac{L^2}{4a^2T}\}, s\geq 2L;\\ \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}}\exp\{-\frac{(L+s)^2}{4a^2T}+\frac{L^2}{4a^2T}\}, s\leq 2L;\end{cases}$$

bu yerda $\frac{L^2}{4a^2T}$ bu funksiyani daraja ko‘rsatgichga kushib yozganimizning sababi quyidagicha. $F(s)$ funksiyamiz uzluksiz bo‘lishi uchun qo‘shgan funksiyamiz baxolashga ta’sir qilmaydi. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(s)ds$ yaqinlashuvchi to‘g’risidagi dalolatni eksponent beradi. Shunday

qilib $|\varphi(x)|$ funksiyaning chegaralanganligini xisobga olib 2.10 formulada bo‘lgan integral ostidagi ifodaning modulini $MF(s)$ baxolay olamiz.
Bu funksiyadan olingan integral esa yaqinlashuvchi. Demak Veyershtrass alomatiga ko‘ra 2.10 formulada berilgan integral tekis yaqinlashuvchi. Ya’ni $u(x,t)$ funksiyamiz Π_{L,t_0T} da to‘g’ri to‘rtburchakda uzluksiz ekanligini isbotladik.

2. Endi bizlar yuqorida ko‘rsatilgan Π_{L,t_0T} to‘g’ri to‘rtburchak ustida u_{xx} funksiyamiz uzluksiz ekanligini ko‘rsatishimiz kerak. $G(x,s,t)$ funksiyamizning ko‘rinishidan foydalanib quyidagi tenglikka kelamiz.

$$|G_{xx}(x,s,t)| = \left|\frac{(x-s)^2}{4a^4t^2}G(x,s,t) - \frac{1}{2a^2t}G(x,s,t)\right| \le$$

$$\le F(s)\left[\frac{1}{2a^2t_0} + \frac{L^2+2Ls+s^2}{4a^2t_0^2}\right] = F_1(s).$$

qavs ichida yozilgan 2-hadning suratidagi yozilgan ko‘phad $F(s)$ funksiyaning integraliga ta’sir qilmaydi. Shunda quyidagi ifodani xosil qilamiz.

$$u_{xx}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{xx}(x,s,t)\varphi(s)ds \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} |G_{xx}(x,s,t)||\varphi(s)|ds \le M\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(s)ds < \infty$$

Demak xosiladan olingan integral tekis yaqinlashuvchi. Xulosa qilib aytganda $u_{xx}(t)$ funksiyamiz xam uzluksiz. Xuddi shunday qilib u_t funksiyamiz xam uzluksiz funksiya ekanligini ko‘rishimiz mumkin.

3. $G(x,s,t)$ funksiyamiz issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamani qanoatlantiruvchi funksiya ekanligini yuqorida ko‘rsatgan edik. Bu yerda

$$u_t(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_t(x,s,t)\varphi(s)ds = a^2u_{xx}(x,t) = a^2\int_{-\infty}^{+\infty} G_{xx}(x,s,t)\varphi(s)ds$$

yani $u(x,t)$ funksiyamiz issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamaga mos keladi.

4. Demak

$$\forall x_0 \in R \lim_{\substack{t\to 0+ \\ x\to x_0}} u(x,t) = \varphi(x_0)$$

$$\forall x_0 \forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x,t : t, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |u(x,t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$$

Endi bizlar x_0 nuqtani va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ ni fiksirlaymiz. $\varphi(x)$ funksiyamiz uzluksizligidan

$$\exists \Delta : |x - x_0| < \Delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

kelib chiqadi.

Endi $|u(x,t) - \varphi(x_0)|$ qaraymiz:

$$|u(x,t)-\varphi(x_0)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} G_t(x,s,t)\varphi(s)ds - \varphi(x_0)\right| \le$$

$$\le \left|\int_{-\infty}^{x_0-\Delta} G\ (x,s,t)\varphi(s)ds\right| + \left|\int_{x_0+\Delta}^{+\infty} G\ (x,s,t)\varphi(s)ds\right| +$$

$$\left|\int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} G\ (x,s,t)(\varphi(s)-\varphi(x_0))ds\right| + \left|\int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} G\ (x,s,t)\varphi(x_0)ds - \varphi(x_0)\right|$$

J_1, J_2, J_3 *va* J_4 *–lar* bilan integrallarni belgilasak, quyidagilarni xosil qilamiz.
Bizlar J_3 ifodani baxolaymiz. Δ oralikda $|\varphi(x)-\varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4}$ - bo‘lganligi sababli va $\int_{-\infty}^{+\infty} Gds = 1$ bo‘lganligi sababli quyidagini xosil qilamiz:

$$|J_3| = \left| \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} G\ (x,s,t)(\varphi(s)-\varphi(x_0))ds \right| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{4}\int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} G\ (x,s,t)ds \le \frac{\varepsilon}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} G\ (x,s,t)ds$$

Bundan $|J_3| \le \frac{\varepsilon}{4}$

Endi $|x-x_0| < \delta_1 < \frac{\Delta}{2}$ talab qilamiz. Kelajakda olingan baxolar faqat shunaqa x−lar uchun.
$|J_4|$:baxolaymiz:

$$|J_4| = \left| \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} G\ (x,s,t)\varphi(x_0)ds - \varphi(x_0) \right| \le$$

$$\le |\varphi(x_0)| \left| \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} G\ (x,s,t)ds - 1 \right| =$$

$$= \{z \leftrightarrow \frac{s-x}{\sqrt{4a^2t}}\} == |\varphi(x_0)| \left| \int_{\frac{x_0-\Delta-x}{\sqrt{4a^2t}}}^{\frac{x_0+\Delta-x}{\sqrt{4a^2t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz - 1 \right|$$

Endi bizlar **t** ni kamaytirsak shunda integralning quyidagi chegarasi $-\infty$ ga, yuqoridagi chegarasiga $+\infty$ intiladi.
Shuning uchun,
$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz = 1$ bo‘lganligi sababli,

$$\exists\delta_2 : t<\delta_2 \Rightarrow |J_4| \le |\varphi(x_0)| \left| \int\limits_{\frac{x_0-\Delta-x}{\sqrt{4a^2t}}}^{\frac{x_0+\Delta-x}{\sqrt{4a^2t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}dz - 1 \right| \le \frac{\varepsilon}{4}$$

o‘rinli

Endi $|J_1|$ baxolaymiz.

$$|J_1| = \left| \int\limits_{-\infty}^{x_0-\Delta} G\ (x,s,t)\varphi(s)ds \right| \le \left| \int\limits_{-\infty}^{x_0-\Delta} \frac{1}{4\pi a^2 t} \exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\} \right.$$

$$\left. Mds \right| = \{z \leftrightarrow \frac{-(x-s)}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\} = \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{-x+x_0-\Delta}{\sqrt{4a^2t}}} e^{-z^2}dz$$

Demak shunday δ_3 mavjudki $\forall t<\delta_3$ bo‘lganda $|J_1| \le \frac{\varepsilon}{4}$ bo‘ladi.

Xuddi shunday $|J_2|$ baxolash mumkin.

Shunday qilib

$$|u(x,t)-\varphi(x_0)| \le |J_1|+|J_2|+|J_3|+|J_4| \le \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x_0 \forall \varepsilon>0 \exists\delta = \min(\delta_1,\delta_2,\delta_3) : \forall x,t : t, |x-x_0| < \delta$$

$$|u(x,t)-\varphi(x_0)| < \varepsilon$$

Teorema to‘liq isbotlandi.

Natija 1: Agarda teoremaning barcha shartlari $(\varphi(x) \in C(R), |\varphi(x)| \le M)$ bajarilsa, demak biz $u(x,t)$ funksiyamiz chegaralangan ekanligini xulosa qilishimiz mumkin.

$$|u(x,t)| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(x,s,t)||\varphi(s)|ds \le M \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x,s,t)ds = M.$$

Natija 2: Xuddi shunday qilib $(R\times R^+)$ fazoda $u(x,t)$ funksiyamiz cheksiz uzluksiz ekanligini xosil qilishimiz mumkin.

$$\frac{\partial^p u}{\partial x^k \partial t^m}(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^p G}{\partial x^k \partial t^m}(x,s,t)\varphi(s)ds, \qquad (k+m=p)$$

bu integral esa tekis yaqinlashuvchi bulib, buni teorema isbotidagi tasdiklar orkali ko‘rsatish mumkin.

Natija 3: Koshi masalasidagi shartlarni kabul qilib, biz issiqlik tarkalishining "cheksiz" tezligiga ega bo‘lamiz.

Faraz qilaylik $\varphi(x)=u(x,o)$ uzluksiz funksiyamiz $[a;b]$ oralikdan boshka barcha joyda nolga teng bo‘lsin. U xolda quyidagiga ega bo‘lamiz.

$$u(x,t) = \int\limits_a^b G(x,s,t)\varphi(s)ds > 0 \qquad \forall t>0, \forall x \in R$$

1.3.2-a. Frontal so‘rov uchun savollar

1. Umumiy chegaraviy masalaning qo‘yilishi
2. Yagonalik teoremasi
3. Koshi masalasi

1.3.2-b. Blits-so‘rov uchun savollar

1.3.2-c. Og’zaki so‘rov uchun savollar

1.3.3. Mustaqil ish uchun topshiriqlar

- *takrorlash va mashqlar*: takrorlash, o‘z-o‘zini tekshirish, tahlil, qayta ishlash, mustahkamlash, eslab qolish, chuqurlashtirish;
- *yangi materiallarning mustaqil o‘zlashtirish*: yangi adabiy va internet materiallar, konspekt qo‘shimchasi; mustaqil iboralar tuzish;
- *ilmiy xaraktyerdagi ishlar*: muammoli holatlar, testlar, savollar, topshiriqlar tuzish; topshiriqlarni bajarish.

1.3.4. Kartochkalar uchun testlar

1.3.5. ekranga tayanch materiallarni ko‘rsatish(slaydlar)

- Prezentatsiya

1.3.6. Tavsiya etilgan adabiyotlar

Asosiy

1. *Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O‘zbekistan», 2002, 448 b.*
2. *Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,*
3. *Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.*
4. *Bisadzs L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.*
5. *Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.*

Qo‘shimcha

1. *Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.*
2. *Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.*
3. *Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.*
4. *Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.*
5. *Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.*
6. *Mixlnn S.G. Leksii po lineynыm integralnыm uravneniyam. M. 1959.*
7. *Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.*
8. *Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.*
9. *Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.*

1.4. O‘qitish usullari qoidalari

1.4.1. Aqliy hujum qoidalari

- Hech qanday o‘zaro baholash va tanqid;
- Taklif etilayotgan g’oyalarni baholashdan o‘zingni tiy, hatto ular fantastic va iloji yo‘q bo‘lsa ham – hammasi mumkin;
- Tanqid qilma – hamma aytilgan g’oyalar birhirda;
- Bayon qiluvchi gapini bo‘lma;
- Izoh berishdan o‘zingni tiy;
- Maqsad bu - miqdor;
- Qancha g’oyalar ko‘p bo‘lsa chuncha yaxshi: yangi va zarur g’oya tug’ulishi imkoniyati ko‘proq
- Agar g’oyalar takrorlansa o‘ksinma,
- Tasavvo‘ringga erk ber;
- Senda yaralgan g’oyalarni tashlama, agal ular sening nazaringda qabul qilingan sxemaga tegishli bo‘lmasa ham;
- Bu muammo aniq usullar bilan yechiladi deb o‘ylama.

1.4.2. “Insert” texnikasi qoidalari

- Matndi o‘qib, ularda savollat tug’dirayotgan joylarni, ularni bilimlariga mos kewlayotgan va mos kelmayotgan joylarni qalam bilan belgilab qo‘yiladi;
- “Insert” jadvalini quyidagi belgilashlar bilan to‘ldirish:
  Agar «!» bo‘lsa siz o‘z bilimingizga yoki siz o‘ylagan fikrga to‘g’ri kelayotganini o‘qiyapsiz;
  Agar «–» bo‘lsa siz o‘z bilimingizga yoki tyo‘g’ri deb o‘ylaganingizga mutlaqo zid bo‘lganini o‘qiyapsiz;
  Agar «+» bo‘lsa siz o‘qityotganingiz siz uchun yangilik;
  Agar «?» bo‘lsa, siz o‘qiyotganingiz siz uchun tushunarsiz yoki siz bu savolga yanada ko‘proq ma`lumotlar olishni istaysiz.

1.4.3. Guruhlarda ishlash qoidalari

- Hamma o‘z do‘stlarini tinglashi kerak, unga yaxshi munosabatda bo‘lib hurmar ko‘rsatishi kerak;
- Hamma aktiv harakat qilishi lozim; berilgan topshiriqqa nisbatan birgalikda va javobgarlik bilan ishlashi kerak;
- Har kim o‘ziga kerak paytda yordam so‘rashi kerak;
- Har kim undan yordam so‘ralganda yordam ko‘rsatishi kerak;
- Guruhning ish natijalarini baholashda ishtirok etishi lozim;
- Biz bir kemadamiz, o‘zgalarga yordam berib o‘zimiz o‘rganamiz, shuni har kim tushunishi lozim;

Mavzu 9. *Yarim to‘g’ri chiziqda issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun birinchi va ikkinchi chegaraviy masalaning yechimini mavjudligi. Birinchi chegaraviy masala uchun Grin funksiyasi*

Ma`ruzaga reja-topshiriqlar

Fan: Matematik fizika tenglamalari

O‘quv soati: 2 soat (ma`ruza);

O‘quv mashg’uloti turi: ma`ruza; yangi bilimlarni mustahkamlash va o‘rganish.

Ma`ruza rejasi:

1. Koshi masalasi yechimining yagonaligi.
2. *Yarim to‘g’ri chiziqda qo‘ydagi birinchi chegaraviy masala.*
3. *Yarim to‘g’ri chiziqda qo‘ydagi ikkinchi chegaraviy masala.*
4. *Birinchi chegaraviy masala uchun Grin funksiyasi*
5. *Grin funksiyasining xossasalarii*

O‘quv mashg’uloti maqsadi:

O‘quv fani to‘g’risida umumiy ta`surotlar berish, Xususiy hosilali tenglamalarva keyinchalik kasbiy faoliyatidagi roli.

O‘quv mashg’uloti masalalari:

- *O‘rgatuvchi*: talabalarda qabul qilish faoliyatini tashkil qilish, yangi materialni boshlang’ich esda qoldirish va anglash; Matematik fizika tenglamalarining terminlari, iboralarini xarakterlovchi elementlar; talabalarning matematik firlashini rivojlantirish muammoli masalalarni yechimini mahoratini oshirish; matematik masalalarni yechishda matematik simvollarning hususiyatlari bilan tanishtirish;
- *Rivojlantiruvchi*: kitob matni bilan ishlay bilishligi – mag’zlarini tanlab olish, tahlil qilish; gaplar tuzish, hulosa chiqarish, materialni talabalarning izlash faoliyatini stimullashtirish; hususiydan umumiy holga o‘tish usuli bilan tekshirish; tekshirish natijalarini tahlil qilib va uni umumlashtira olishini rivojlantirish; analitik-sintetik faoliyatning mantiqiy fikrlashini qo‘llash; talabalarning ijodiy mahoratini shakillantirish;
- *Tarbiyalovchi:* aktiv faoliyatga, mustaqil ishga jalb qilish; guruhlarda ishlash qoidalariga rioya qila olish; fanni o‘rganishga qiziqishni rivojlantirish; Matematik fizika tenglamalarini matematik-komunikativ kursni bir qismi sifatida tassavur berish; javobgarlik tuyg’ularini tarbiyalash, mehnatsevarlik, individual ishni jamoaviy ish bilan biriktirish, intizomlashtirish.

O‘qitish texnologiyasi:

- *O‘qutish usullari*: instruktaj; Ma`ruza, aqliy hujum, “Insert” texnikasi;
- *O‘qitish shakillari*: frontal; jamoaviy;
- *O‘qitish vositalari*: Ma`ruza matni; jadvallar, multimediya;
- *O‘qitish sharoitlari*: texnik jihozlashtirilgan auditoriya;
- *Baholash va monitoring*: o‘g’zaki savol-javob, blits-so‘rov.

Pedagogik masalalar:

- Fanning masalalari va uning o‘quv fanlar sistemasidagi o‘rni va roli bilan tanishtirish;
- O‘quv fanning tuzulmasi va tavsiya etiladigan o‘quv-metodik adabiyotlarni tasvirlash;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlarini ochib berish, baholash shakli va muddatlari;
- Fan ma`ruzasi paytida o‘qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy bosqichlarini xarakterlab berish va umumiy sxemasini tushuntirish.
- O‘qitish texnologiyasi rivojlanishi perspektivasini xarakterlab berish;

O‘quv faoliyati natijalari:

- Fan ma`ruzasi masalalari, maqsadlari va nomlari shakillanadi;
- Xususiy hosilali tenglamalardoirasidagi yutuqlar yoritiladi;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlari hamda baholash shakli va muddatlari aytiladi

- Fan ma`ruzasida o‘qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy sxemasini kengaytirib xatakterlab beradi;
- Fanning asosiy ta`riflarini  beradi, Xususiy hosilali tenglamalarfani ma`ruzalarining asosiy yo‘nalishlari beriladi;
- Nazariy bilimlarning to‘liqligi, sistemaliyligi va harakatliyligi;
- Amaliy mag’ulotlarni bajarishda o‘rganilgan iboralarbilan ishlay olishligi;

1.2. Ma`ruzaning xronologik xaritasi

1 bosqich. O‘quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa):

- *O‘qituvchining faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (davomat, konspektning borligi; o‘ziga ishonch, aniqligi,); kerakli materiallarni tarqatish (konspekt, tarqatma materiallar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadini bayon qilish; o‘quv mashg’ulotning rajasi bilan tanishtirish; kalit iboralar va so‘zlar, kategoriyalar; internet saytlari va adabiyotlar ro‘yhati; o‘quv natijalari haqida aytish;
- *Talabalar faoliyati*: o‘quv joyini tayyorlash (talabalar borligi; tashqi ko‘rinish; o‘quv materiallar va qo‘llanmalar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadi bilan tanishish; o‘quv materialini qabul qilishga tayyorgarlik ko‘rish;
- *Shakillar, usular, uslublar*: instruktaj; frontal so‘rov; mustahkamlovchi so‘rov.

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa):

- *O‘qituvchining faoliyati*: mavzuga kiritadi; yangi mavzuga doir o‘tgan fanlar va mashg’ulotlarning mavzularini eslashga chorlaydi; ma`ruza matnini tarqatadi, tanishishni taklif etadi, “Insert” usuli bilan belgilar qo‘yishni taklif etadi; birinchi savol bo‘yicha matn o‘qiladi; qo‘shimcha o‘quv materiallarini aytib boorish va tushuncha berish; natural obektlarni namnoyon qilish va izohlash; tushunarsiz savollarni aniqlash va tushintirish; birinchi savol bo‘yicha nazar (shunday qilib qolgan savollarga ham);
- *Talabalar faoliyati*: yangi mavzuda doir oldingi mashg’ulotlarda va fanlarda olgan bilimlarni mustahkamlaydi,; har bir kalit ibora va terminlarni eshitib, yozib borib, konspekt qilib aytib borishadi; “Insert” usuli bilan belgilan o‘qiydilar, aniqlik kiritadilar, savollar beradilar va o‘zaro;
- *Shakillar, usular, uslublar*: frontav so‘rov blits-so‘rov; aqliy hujum, “Insert” texnikasi.

3 bosqich. Yakunlovchi qism (10 daqiqa)

- *O‘qituvchining faoliyati:* mavzu bo‘yicha hulosa qilish, talabalarning e`tiborlarini asosiylarda jalb qilish; qilingan ishning muhimligini aytib o‘tish; alohida talabalarning bajarilgan ishlarini baholash; o‘zaro baholashning natijalarini chiqarish; o‘quv mashg’ulotning yutuqlik darajasini baholash va tahlil qilish; mustaqil ish uchun topshiriqlar; baho ko‘rsatgichlari va me`zonlari;
- *Talabalar faoliyati: ishning* tahlili; natijalarni olish; texnologik bilimlarni qo‘llash; o‘zaro baholashni o‘tkazish, yo‘l qo‘yilgan hatolar bo‘yicha tahlil va aniqlik kiritish; mustaqil ish topshiriqlarini yozib olish;
- *Shakillar, usular, uslublar*: guruhlarda ishlash, kartochkalarda topshiriqlar.

1.3. O‘quv-metodik materiallar

Ma`ruza rejasi:

1. Koshi masalasi yechimining yagonaligi.
2. *Yarim to‘g’ri chiziqda qo‘ydagi birinchi chegaraviy masala.*
3. *Yarim to‘g’ri chiziqda qo‘ydagi ikkinchi chegaraviy masala.*
4. *Birinchi chegaraviy masala uchun Grin funksiyasi*

5. *Grin funksiyasining xossasalarii*

***Tayanch iboralar**:* Koshi masalasi, mavjudlik teoremasi, yagonalik teoremasi. *issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi , birinchi chegaraviy masala, Koshi masalasi, ikkinchi chegaraviy masal, Grin funksiyasi*

1.3.1. Ma`ruza matni

1. Koshi masalasi yechimining yagonaligi.

Yuqorida bizlar chegaralangan va uzluksiz boshlangich shartlar uchun Koshi masalaning yechimini mavjudligini isbotlagan edik. Endi yuqoridagi shartlarda bizlar yagonalik teoremasini isbotlaymiz.

Teorema 2.7 (yagonalik). Koshi masalasi berilgan bo‘lsin. Faraz qilaylik $(R\times R^{+})$ fazoda bizlarga 2 ta uzluksiz $u_1,u_2(x,t)$ funksiyalar berilgan bo‘lsin va ular **[2.4]** masalaning yechimlari bulib, quyidagi shartlarni qanoatlantirsin.

$$|u_i(x,t)|\le M,\ \forall(x,t)\in R\times\overline{R}^{+};$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t},\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\in C(R\times R^{+}) \qquad i=1,2$$

shunda

$$u_1(x,t)=u_{21}(x,t)\forall(x,t)\in(R\times\overline{R}^{+})$$

<u>Isbot:</u> Yangi funksiya kiritamiz. $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$

Aniqki bu funksiya xam uzluksiz funksiya bo‘ladi va quyidagi shartlarni qanoatlantiradi.

$$\begin{cases} u_t,u_{xx}\in C(R\times\overline{R}^{+}); \\ u_t=a^2u_{xx}; \\ u(x,0)=0,\forall x\in R \\ |u(x,t)|\le 2M,\forall(x,t)\in(R\times\overline{R}^{+}); \end{cases}$$

Teoremani isbotlash uchun $u(x,t)$ funksiyamiz aynan nolga teng ekanligini isbotlashimiz kerak. Buning uchun qandaydir ixtiyoriy (x_0,t_0) nuqtada nolga teng ekanligini ko‘rsatish kerak. Buning uchun 2 ta konstanta **L** va **T** olamiz. Ularni shunday qilib olish kerakki ular quyidagi to‘g’rito‘rtburchakka qarashli bo‘lsin.

Bu yerda $\Pi_{L,T}$ - to‘g’rito‘rtburchakning chegarasi bo‘lsin.

$$\Pi_{L,T}=\{(x,t):|x|\le L,0\le t\le T\},$$

$$v_t^L,v_{xx}^L\in C[\Pi_{L,T}];$$

$$v_t^L=a^2v_{xx}^L\in C[\Pi_{L,T}];v^L(x,t)=\frac{4M}{L^2}(\frac{x^2}{2}+a^2t)$$

Yuqorida bizlar $u(x,t)$ funksiya uchun baxolarni olgan edik. Shundan xulosa qilib aytganda $\Pi_{L,T}$ chegara ustida $v^L(x,t)\ge u(x,t)$ bo‘ladi.

Endi maksimum prinsipidan foydalansak,

$$v^L(x,t)\ge u(x,t)\forall(x,t)\in\Pi_{L,T.}$$

$$-v^L(x,t)\le u(x,t)\forall(x,t)\in\Pi_{L,T.}$$

Bundan

$$|u(x_0,t_0)|\le v^L(x_0,t_0)=\frac{4M}{L^2}(\frac{x_0^2}{2}+a^2t_0)$$

Endi **L** n cheksizlikka intiltirsak quyidagiga ega bo‘lamiz.

$$\left|u(x_0,t_0)\right| \le v^{\infty}(x_0,t_0)=0$$

Teorema isbotlandi.

2. Yarim to'g'ri chiziqda qo'ydagi birinchi chegaraviy masala.

Yarim to'g'ri chiziqda qo'ydagi birinchi chegaraviy masalani ko'rib chiqamiz:

$$[2.5]\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & x>0, t>0; \\ u(0,t)=0, & t\ge 0; \\ u(x,0)=\phi(x), & x\ge 0. \end{cases}$$

bu yerda $\phi(x)=0$.

Butun Haqiqiy o'qda boshlang'ich shartni beruvchi $\phi(x)$ *funksiyani toq qilib davom ettirib yechimni topamiz:*

$$\Phi(x)=\begin{cases} \phi(x), & x\ge 0; \\ -\phi(-x), & x<0. \end{cases}$$

Mos ravishda qo'ydagi Koshi masalasini ko'rib chiqamiz:

$$[2.6]\begin{cases} U_{tt}=a^2U_{xx}, & -\infty<x<+\infty, t>0; \\ U(0,t)=0, & t\ge 0; \\ U(x,0)=\Phi(x), & -\infty<x<+\infty. \end{cases}$$

Uning yechimi bizga malum:

$$U(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\}\Phi(s)ds.$$

Aytaylik $(x,t)\in(\overline{R}^+\times\overline{R}^+)$ *da* $u(x,t)=U(x,t)$. *Bu funksiya [2.5] ning yechimi ekanligini ko'rsatamiz . Koshi masalasining qo'yilishiga ko'ra ,*

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, & x>0, t>0; \\ u(x,0)=\phi(x), & x\ge 0. \end{cases}$$

ekanligi malum. Chegaraviy shartni bajarilishini tekshiramiz:

$$u(0,t)=U(0,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\exp\{-\frac{s^2}{4a^2t}\}\Phi(s)ds.$$

Integiral ostida juft va toq funksiyalarning ko'paytmasi turibdi , shuning uchun u nolga teng . Chegaravi shart bajarilayapdi. endi yechim uchun to'liq formulani olamiz:

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\}\Phi(s)ds=$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\}(-\phi(-s))ds+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\}\phi(s)ds=$$

$$=-\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\exp\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2t}\}\phi(s)ds+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\}\phi(s)ds=$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\left[\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\}-\exp\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2t}\}\right]\phi(s)ds.$$

Demak,

$$u(x,t)=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\left[\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\}-\exp\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2t}\}\right]\phi(s)ds. \quad (2.11)$$

bu yarim to'g'ri chiziqda birinchi chegaraviy masalaning yechimi bo'ladi.

3. Yarim to'g'ri chiziqda ikkinchi chegaraviy masala

Yarim to'gri chiziqda ikkinchi chegaraviy masala qo'ydagi ko'rinishga ega:

$$[2.7]\quad \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x>0, t>0; \\ u_x(0,t)=0, & t\ge 0; \\ u(x,0)=\phi(x), & x\ge 0. \end{cases}$$

Yana yechimni topish uchun boshlang'ich shartni beruvchi funksiyani endi juft qilib davom ettiramiz:

$$\Phi(x)=\begin{cases} \phi(x), & x\ge 0; \\ \phi(-x), & x<0. \end{cases}$$

Boshlang'ich shartni o'zgartirib , quyidagi koshi masalasini olamiz:

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx}, & -\infty<x<+\infty, t>0; \\ U(0,t)=0, & t\ge 0; \\ U(x,0)=\Phi(x), & -\infty<x<+\infty. \end{cases}$$

Xuddi shunday uning yechimi

$$U(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\}\Phi(s)ds$$ *funksiya bo'ladi.*

Aytaylik $(x,t)\in(\overline{R}^+\times\overline{R}^+)$ *da* $u(x,t)=U(x,t)$ *bo'lsin.*

Yana

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x>0, t>0; \\ u(x,0)=\phi(x), & x\ge 0. \end{cases}$$

ekanligi aniq.

Chegaraviy masalaning bajarilishini tekshiramiz:

$$u_x(x,t)=U_x(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\left(-\frac{(x-s)}{2a^2t}\right)\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\}\Phi(s)ds\Rightarrow$$

$$u_x(0,t)=U_x(0,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\left(\frac{s}{2a^2t}\right)\exp\{-\frac{s^2}{4a^2t}\}\Phi(s)ds\ \forall t\ge 0.$$

Hosil bo'lgan integral ostida 2 ta juft va bitta toq funksiyaning ko'paytmas turibdi, demak u nolga aylanadi. Chegaraviy shart bajarilmoqda. [2.7] ning yechimi uchun qo'ydagi formilani xosil qilamiz:

$$u(x,t)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\exp\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2t}\}\phi(s)ds+\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\}\phi(-s)ds=$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\left[\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\}+\exp\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2t}\}\right]\phi(s)ds.$$

Bu yarim to'g'ri chiziqda 2-chegaraviy masalaning yechimidir.

4. Birinchi chegaraviy masala uchun Grin funksiyasi.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0<x<l, t>0; \\ u(0,t)=0, & 0\le t\le T; \\ u(l,t)=0, & 0\le t\le T; \\ u(x,0)=\phi(x), & 0\le x\le l. \end{cases}$$

Malumki, uning yechimi qo'ydagi ko'rinishga ega:

$$u(x,l)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\left(\int_0^l \phi(s)\sin(\frac{\pi n}{l}s)ds\right)\sin(\frac{\pi n}{l}x)\exp\{-a^2(\frac{\pi n}{l})^2t\}.$$

Uni Koshi masalasini yechishda qo'llaganimizday boshqacha ko'rinishda ifodalashimiz mumkin:

$$u(x,t)=\int_0^l G(x,s,t)\phi(s)ds,$$

$$G(x,s,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\sin(\frac{\pi n}{l}s)\sin(\frac{\pi n}{l}x)\exp\{-a^2(\frac{\pi n}{l})^2t\}. \quad (2.12)$$

-bu birinchi chegaraviy masala uchin Grin funksiyasidir .

5. Grin funksiyasining xossalari

1-xossa. $G(x,s,t)=G(s,x,t).$

Bu xossa Grin funksiyasining tarifidan kelib chiqadi.

2-xossa. $G(x,s,t)\in C^{\infty}(R\times R\times R^{+}).$

Isboti: (x,s,t) *nuqtada uzluksizligini isbotlaymiz. Buning uchun ,* $t>t_0$ *da Veyershtrass alomatiga ko'ra tekis yaqinlashuvchi ekanligini aytib o'tish yetarli, chunki uni eksponentalardan iborat yaqinlashivchi qator bilan chegaralash mumkin:*

$$|G(x,s,t)|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\exp\{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t_0\}.$$

Differensiallanuvchiligini isbotlash uchun, Hosilalardan iborat qator tekis yaqinlashishini takidlash yetarli, chunki differinsiallash natijasida yani ko'paytuvchilar sifatida faqatgina palinomlar Hosil bo'ladi . Ular Halaqit bermaydi, ekisponenta baribir yaqinlashuvchilikni taminlaydi.

3-xossa. $\begin{cases} G_t = a^2 G_{xx}; \\ G_t = a^2 G_{ss}; \end{cases}$

*Birinchi tenglamani (2.12) formulani differensiallash orqali, ikkinchi tenglamani esa 1-**xossa**dagi tenglamani differensiallash orqali tekshirish mumkin.*

4-xossa. $G(x,s,t)\ge 0, \qquad x,s\in[0;l], \quad t>0.$

Isboti: *Ixtiyoriy* (x,s_0,t) *nuqta uchun isbotlaymiz.* $\phi_h(x)$ *funksiya* $(s_0-h;s_0+h)$ *intervalda qandaydir* $\tilde{\phi}(x)$ *musbat funksiyaga, intervaldan tashqarisida esa 0 ga teng bo'lsin:*

$$\phi_h(x)=\begin{cases}\tilde{\phi}(x)>0 & ,x\in(s_0-h;s_0+h); \\ 0, & x\in[0,l]\setminus(s_0-h,s_0+h).\end{cases}$$

Bundan tashqari , quydagi shartlarni qanoatlantirsin :

$$\begin{cases}\phi_h(x)\in C[0;l]; \\ \int_0^l \phi_h(x)dx=1.\end{cases}$$

va [2.2] turdagi qandaydir chegaraviy masala uchun boshlang'ich shartni bersin. U Holda bu chegaraviy masalaning yechimi bo'lgan $u_h(x,t)$ *funksiya quyidagi formila bilan anioqlanadi:*

$$u_h(x,t)=\int_0^l G(x,s,t)\phi_h(x)ds=\int_{s_0-h}^{s_0+h}G(x,s,t)\phi_h(s)ds=$$

$$=G(x,\theta,t)\int_{s_0-h}^{s_0+h}\phi_h(s)ds=G(x,\theta,t),\theta\in(s_0-h;s_0+h).\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{h\to 0}G(x,\theta,t)=\lim_{h\to 0}u_h(x,t)\Rightarrow$$

$$G(x,s_0,t)=\lim_{h\to 0}u_h(x,t). \quad (2.12)$$

$u_h(0,t)\equiv 0\equiv u_h(l,t)$: *bo'lgan xolda maksimal qiymat prinsipini qo'llaymiz:*

$$\min_{\substack{x\in[0;l]\\ t\in[0,T]}}u_h(x,t)=\min\{0,0,\min_{x\in[0;l]}\phi(x)\}=0.$$

(2.13) ga ko'ra , $G(x,s_0,t)$. *manfiy emasligini aniqlaymiz.*

4-xossa isbotlandi.

1.3.2-a. Frontal so'rov uchun savollar

1. *Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalaning keltiring.*
2. *Yarim to'g'ri chiziqda 1-chi chegaraviy masalaning yechimini keltiring.*
3. *Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun ikkinchi chegaraviy masalaning keltiring.*
4. *Yarim to'g'ri chiziqda 2-chi chegaraviy masalaning yechimini keltiring.*
5. *Birinchi chegaraviy masala uchun Grin funksiyasi yozing.*

1.3.2-b. Blits-so'rov uchun savollar

4. Koshi masalasi
5. Yagonalik teoremasi
6. Mavjudlik teoremasi

1.3.2-c. Og'zaki so'rov uchun savollar

1. *Grin funksiyasining 1-chi xossasini isbotlang.*
2. *Grin funksiyasining 2-chi xossasini isbotlang.*
3. *Grin funksiyasining 3-chi xossasini isbotlang.*
4. *Grin funksiyasining 4-chi xossasini isbotlang.*

1.3.3. Mustaqil ish uchun topshiriqlar

- *takrorlash va mashqlar*: takrorlash, o'z-o'zini tekshirish, tahlil, qayta ishlash, mustahkamlash, eslab qolish, chuqurlashtirish;
- *yangi materiallarning mustaqil o'zlashtirish*: yangi adabiy va internet materiallar, konspekt qo'shimchasi; mustaqil iboralar tuzish;
- *ilmiy xaraktyerdagi ishlar*: muammoli holatlar, testlar, savollar, topshiriqlar tuzish; topshiriqlarni bajarish.

1.3.4. Kartochkalar uchun testlar

1.3.5. ekranga tayanch materiallarni ko'rsatish(slaydlar)

- Prezentatsiya

1.3.6. Tavsiya etilgan adabiyotlar

Asosiy

1. *Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O'zbekistan», 2002, 448 b.*
2. *Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,*
3. *Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.*
4. *Bisadzs L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.*
5. *Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.*

Qo'shimcha

1. *Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.*
2. *Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.*
3. *Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.*
4. *Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.*
5. *Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.*
6. *Mixlnn S.G. Leksii po lineynыm integralnыm uravneniyam. M. 1959.*
7. *Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.*
8. *Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.*
9. *Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.*

1.4. O'qitish usullari qoidalari

1.4.1. Aqliy hujum qoidalari

- Hech qanday o'zaro baholash va tanqid;
- Taklif etilayotgan g'oyalarni baholashdan o'zingni tiy, hatto ular fantastic va iloji yo'q bo'lsa ham – hammasi mumkin;
- Tanqid qilma – hamma aytilgan g'oyalar birhirda;
- Bayon qiluvchi gapini bo'lma;
- Izoh berishdan o'zingni tiy;
- Maqsad bu - miqdor;
- Qancha g'oyalar ko'p bo'lsa chuncha yaxshi: yangi va zarur g'oya tug'ulishi imkoniyati ko'proq
- Agar g'oyalar takrorlansa o'ksinma,
- Tasavvo'ringga erk ber;
- Senda yaralgan g'oyalarni tashlama, agal ular sening nazaringda qabul qilingan sxemaga tegishli bo'lmasa ham;
- Bu muammo aniq usullar bilan yechiladi deb o'ylama.

1.4.2. "Insert" texnikasi qoidalari

- Matndi o‘qib, ularda savollat tug’dirayotgan joylarni, ularni bilimlariga mos kewlayotgan va mos kelmayotgan joylarni qalam bilan belgilab qo‘yiladi;
- “Insert” jadvalini quyidagi belgilashlar bilan to‘ldirish:
  Agar «!» bo‘lsa siz o‘z bilimingizga yoki siz o‘ylagan fikrga to‘g’ri kelayotganini o‘qiyapsiz;
  Agar «–» bo‘lsa siz o‘z bilimingizga yoki tyo‘g’ri deb o‘ylaganingizga mutlaqo zid bo‘lganini o‘qiyapsiz;
  Agar «+» bo‘lsa siz o‘qityotganingiz siz uchun yangilik;
  Agar «?» bo‘lsa, siz o‘qiyotganingiz siz uchun tushunarsiz yoki siz bu savolga yanada ko‘proq ma`lumotlar olishni istaysiz.

1.4.3. Guruhlarda ishlash qoidalari

- Hamma o‘z do‘stlarini tinglashi kerak, unga yaxshi munosabatda bo‘lib hurmar ko‘rsatishi kerak;
- Hamma aktiv harakat qilishi lozim; berilgan topshiriqqa nisbatan birgalikda va javobgarlik bilan ishlashi kerak;
- Har kim o‘ziga kerak paytda yordam so‘rashi kerak;
- Har kim undan yordam so‘ralganda yordam ko‘rsatishi kerak;
- Guruhning ish natijalarini baholashda ishtirok etishi lozim;
- Biz bir kemadamiz, o‘zgalarga yordam berib o‘zimiz o‘rganamiz, shuni har kim tushunishi lozim;

Mavzu 10. “ Laplas va Puasson tenglamalari. Grin formulasi.”

Ma`ruzaga reja-topshiriqlar

Fan: Matematik fizika tenglamalari

O‘quv soati: 2 soat (ma`ruza);

O‘quv mashg’uloti turi: ma`ruza; yangi bilimlarni mustahkamlash va o‘rganish.

Ma`ruza rejasi:

1. Laplas va Puasson tenglamalari. Chegaraviy masalalarning qo‘yilishi. Laplas tenglamasining fundamental yechimi.
2. Birinchi Grin formulasi.
3. Grinning ikkinchi formulasi.
4. Grinning uchinchi formulasi.Tayanch iboralar: Laplas, Puasson, Grin, tenglama, fundamental yechim, formula,

O‘quv mashg’uloti maqsadi:

O‘quv fani to‘g’risida umumiy ta`surotlar berish, Xususiy hosilali tenglamalarva keyinchalik kasbiy faoliyatidagi roli.

O‘quv mashg’uloti masalalari:

- *O‘rgatuvchi*: talabalarda qabul qilish faoliyatini tashkil qilish, yangi materialni boshlang’ich esda qoldirish va anglash; Matematik fizika tenglamalarining terminlari, iboralarini xarakterlovchi elementlar; talabalarning matematik firlashini rivojlantirish muammoli masalalarni yechimini mahoratini oshirish; matematik masalalarni yechishda matematik simvollarning hususiyatlari bilan tanishtirish;
- *Rivojlantiruvchi*: kitob matni bilan ishlay bilishligi – mag’zlarini tanlab olish, tahlil qilish; gaplar tuzish, hulosa chiqarish, materialni talabalarning izlash faoliyatini stimullashtirish; hususiydan umumiy holga o‘tish usuli bilan tekshirish; tekshirish natijalarini tahlil qilib va uni umumlashtira olishini rivojlantirish; analitik-sintetik

faoliyatning mantiqiy fikrlashini qo‘llash; talabalarning ijodiy mahoratini shakillantirish;
- *Tarbiyalovchi:* aktiv faoliyatga, mustaqil ishga jalb qilish; guruhlarda ishlash qoidalariga rioya qila olish; fanni o‘rganishga qiziqishni rivojlantirish; Matematik fizika tenglamalarini matematik-komunikativ kursni bir qismi sifatida tassavur berish; javobgarlik tuyg’ularini tarbiyalash, mehnatsevarlik, individual ishni jamoaviy ish bilan biriktirish, intizomlashtirish.

O‘qitish texnologiyasi:

- *O‘qutish usullari*: instruktaj; Ma`ruza, aqliy hujum, “Insert” texnikasi;
- *O‘qitish shakillari*: frontal; jamoaviy;
- *O‘qitish vositalari*: Ma`ruza matni; jadvallar, multimediya;
- *O‘qitish sharoitlari*: texnik jihozlashtirilgan auditoriya;
- *Baholash va monitoring*: o‘g’zaki savol-javob, blits-so‘rov.

Pedagogik masalalar:

- Fanning masalalari va uning o‘quv fanlar sistemasidagi o‘rni va roli bilan tanishtirish;
- O‘quv fanning tuzulmasi va tavsiya etiladigan o‘quv-metodik adabiyotlarni tasvirlash;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlarini ochib berish, baholash shakli va muddatlari;
- Fan ma`ruzasi paytida o‘qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy bosqichlarini xarakterlab berish va umumiy sxemasini tushuntirish.
- O‘qitish texnologiyasi rivojlanishi perspektivasini xarakterlab berish;

O‘quv faoliyati natijalari:

- Fan ma`ruzasi masalalari, maqsadlari va nomlari shakillanadi;
- Xususiy hosilali tenglamalardoirasidagi yutuqlar yoritiladi;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlari hamda baholash shakli va muddatlari aytiladi
- Fan ma`ruzasida o‘qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy sxemasini kengaytirib xatakterlab beradi;
- Fanning asosiy ta`riflarini beradi, Xususiy hosilali tenglamalarfani ma`ruzalarining asosiy yo‘nalishlari beriladi;
- Nazariy bilimlarning to‘liqligi, sistemaliyligi va harakatliyligi;
- Amaliy mag’ulotlarni bajarishda o‘rganilgan iboralarbilan ishlay olishligi;

- **1.2. Ma`ruzaning xronologik xaritasi**

- **1 bosqich. O‘quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa):**

- *O‘qituvchining faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (davomat, konspektning borligi; o‘ziga ishonch, aniqligi,); kerakli materiallarni tarqatish (konspekt, tarqatma materiallar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadini bayon qilish; o‘quv mashg’ulotning rajasi bilan tanishtirish; kalit iboralar va so‘zlar, kategoriyalar; internet saytlari va adabiyotlar ro‘yhati; o‘quv natijalari haqida aytish;
- *Talabalar faoliyati*: o‘quv joyini tayyorlash (talabalar borligi; tashqi ko‘rinish; o‘quv materiallar va qo‘llanmalar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadi bilan tanishish; o‘quv materialini qabul qilishga tayyorgarlik ko‘rish;
- *Shakillar*, *usular*, *uslublar*: instruktaj; frontal so‘rov; mustahkamlovchi so‘rov.

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa):

- *O'qituvchining faoliyati*: mavzuga kiritadi; yangi mavzuga doir o'tgan fanlar va mashg'ulotlarning mavzularini eslashga chorlaydi; ma`ruza matnini tarqatadi, tanishishni taklif etadi, "Insert" usuli bilan belgilar qo'yishni taklif etadi; birinchi savol bo'yicha matn o'qiladi; qo'shimcha o'quv materiallarini aytib boorish va tushuncha berish; natural obektlarni namnoyon qilish va izohlash; tushunarsiz savollarni aniqlash va tushintirish; birinchi savol bo'yicha nazar (shunday qilib qolgan savollarga ham);
- *Talabalar faoliyati*: yangi mavzuda doir oldingi mashg'ulotlarda va fanlarda olgan bilimlarni mustahkamlaydi,; har bir kalit ibora va terminlarni eshitib, yozib borib, konspekt qilib aytib borishadi; "Insert" usuli bilan belgilan o'qiydilar, aniqlik kiritadilar, savollar beradilar va o'zaro;
- *Shakillar, usular, uslublar*: frontav so'rov blits-so'rov; aqliy hujum, "Insert" texnikasi.

3 bosqich. Yakunlovchi qism (10 daqiqa)

- *O'qituvchining faoliyati:* mavzu bo'yicha hulosa qilish, talabalarning e`tiborlarini asosiylarda jalb qilish; qilingan ishning muhimligini aytib o'tish; alohida talabalarning bajarilgan ishlarini baholash; o'zaro baholashning natijalarini chiqarish; o'quv mashg'ulotning yutuqlik darajasini baholash va tahlil qilish; mustaqil ish uchun topshiriqlar; baho ko'rsatgichlari va me`zonlari;
- *Talabalar faoliyati: ishning* tahlili; natijalarni olish; texnologik bilimlarni qo'llash; o'zaro baholashni o'tkazish, yo'l qo'yilgan hatolar bo'yicha tahlil va aniqlik kiritish; mustaqil ish topshiriqlarini yozib olish;
- *Shakillar, usular, uslublar*: guruhlarda ishlash, kartochkalarda topshiriqlar.

1.3. O'quv-metodik materiallar

Ma`ruza rejasi:

1. Laplas va Puasson tenglamalari. Chegaraviy masalalarning qo'yilishi. Laplas tenglamasining fundamental yechimi.
2. Birinchi Grin formulasi.
3. Grinning ikkinchi formulasi.
4. Grinning uchinchi formulasi.Tayanch iboralar: Laplas, Puasson, Grin, tenglama, fundamental yechim, formula,

Tayanch iboralar*:* Koshi masalasi, mavjudlik teoremasi, yagonalik teoremasi. *issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi , birinchi chegaraviy masala, Koshi masalasi, ikkinchi chegaraviy masal, Grin funksiyasi*

1.3.1. Ma`ruza matni

E^3 fazoga qarashli qandaydir Ω ochiq soxaning chegarasi $\sum$ bo'lsin. Xuddi shunday, E^2 fazodagi qandaydir D ochiq soxa chegarasi L bo'lsin.

1. Laplas va Puasson tenglamalari. Chegaraviy masalalarning qo'yilishi. Laplas tenglamasining fundamental yechimi.

Issiqlikni o'tkazuvchanlik tenglamasini qaraymiz:

$$u_t(x,y,z,t) = a^2\Delta u(x,y,z,t) + f_1(x,y,z),\ (x,y,z)\in\Omega;\quad \Delta u = u_{xx}+u_{yy}+u_{yy};$$

$$u_t(x,y,t)) = a^2\Delta u(x,y,t) + f_2(x,y),\ (x,y)\in D;\quad \Delta u = u_{xx}+u_{yy.}$$

Stasionar issiqlik prosess holidagi $(u_t \equiv 0)$ elliptik tipdagi tenglamani tuzamiz :

$\Delta u = -f$

Bu xolda umumiy ko'rinishidan quyidagi ikki tip tenglama hosil bo'ladi :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-f(x,y,z),\ E^3$$ **fazoda Puasson tenglamasi.**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-f(x,y),\quad E^2$$ **fazoda Puasson tenglamasi.**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\ E^3$$ **fazoda Laplas tenglamasi.**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad E^2$$ **fazoda Laplas tenglamasi.**

Bu tenglamalar ko‘pincha turli stasionar fizik maydonlarni ta’riflashda yordam beradi .

Ta’rif. $u(x,y,z)$funksiya Ω, soxada garmonik deyiladi, agar

$$u\in c^2(\Omega)\quad v\grave{a}\quad \Omega\quad d\grave{a}\quad \Delta u\equiv 0$$

Kompleks o‘zgaruvchili fuknsiya analitikligidan, ikki o‘zgaruvchili garmonik funksiyani tuzish mumkin. Agar $f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$ analitik bo‘lsa, v funksiya uchun Koshi-Riman xossalari bajariladi : $\begin{cases} u_x(x,y)=v_y(x,y); \\ u_y(x,y)=-v_x(x,y) \end{cases}$

Yuqoridagi tenglamani x bo‘yicha, pastki tenglamani y bo‘yicha differensiallaymiz:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y)=-v_{xy}(x,y) \\ u_{yy}(x,y)=-v_{xy}(x,y) \end{cases}.\Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=0$$

Xuddi shunday tenglamani v funksiya uchun hosil qilish mumkin.Bundan xulosa qilish mumkinki, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$-analitik funksiya bo‘lsa ,u holda ,u,v- garmonik funksiya bo‘ladi.

Keyinchalik biz fazoda quyidagi masalalarni qaraymiz:

Dirixle ichki masalasi

$$\begin{cases} \Delta u(x,y,z)=0, & (x,y,z)\in\Omega \\ u(x,y,z)=\mu(x,y,z), & (x,y,z)\in\Sigma \end{cases}$$

Neyman ichki masalasi $\begin{cases} \Delta u(x,y,z)=0, & (x,y,z)\in\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z)=v(x,y,z), & (x,y,z)\in\Sigma \end{cases}$

Dirixle tashqi masalasi $\begin{cases} \Delta u(x,y,z)=0, & (x,y,z)\in E^3\setminus\bar{\Omega} \\ u(x,y,z)=\mu(x,y,z), & (x,y,z)\in\Sigma \end{cases}$

Neyman tashqi masalasi $\begin{cases} \Delta u(x,y,z)=0, & (x,y,z)\in E^3\setminus\bar{\Omega} \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z)=v(x,y,z), & (x,y,z)\in\Sigma \end{cases}$

Berilgan masalalarni Puasson tengligi uchun qo‘llash tabiiydir. Bundan tashqari, ikki o‘lchovli analoglar ham mavjud. Masalan:

$\begin{cases} \Delta u(x,y,z)=0,(x,y,z)\in D; \\ u(x,y,z)=\mu(x,y,z)(x,y,z)\in L \end{cases}$ E^2-fazoda Dirixli ichki masalasi

$$u(x,y,z)=\frac{1}{R_{MM_0}}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$ funksiyani qaraylik

($R_{MM_0}-M(x,y,z)$va $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtalar orasidagi masofa) Keltirilgan funksiya $E^3\setminus M_0$ soxada Laplas tenglamasining yechimi bo‘lishini isbotlaymiz.

$$u_x=-\frac{1}{2}\frac{2(x-x_0)}{R^3_{MM_0}}=-\frac{x-x_0}{R^3_{MM_0}};u_{xx}=-\frac{3(x-x_0)^2}{R^5_{MM_0}}-\frac{1}{R^5_{MM_0}}$$

$$u_y=-\frac{1}{2}\frac{2(y-y_0)}{R^2_{MM\,0}}=-\frac{y-y_0}{R_{MM\,0}};u_{yy}=-\frac{3(y-y_0)}{R^5_{MM\,0}}-\frac{1}{R^5_{MM\,0}}$$

$$u_z=-\frac{1}{2}\frac{2(z-z_0)}{R^3_{MM\,0}}=-\frac{z-z_0}{R^3_{MM\,0}};u_{zz}=-\frac{3(z-z_0)}{R^5_{MM\,0}}-\frac{1}{R^5_{MM\,0}}$$

$$\Rightarrow\Delta\frac{1}{R_{MM\,0}}=\frac{3(x-x_0)^2+3(y-y_0)+3(z-z_0)}{R^5_{MM\,0}}-\frac{3}{R^3_{MM\,0}}\equiv 0$$

E^3 fazoda quyidagi funksiyani tekshirish oson:

$$u(x,y)=\ln\frac{1}{P_{MM\,0}}$$

qachonki $P_{MM\,0}=\sqrt{(x-x_0)}^2+(y-y_0)^2$ $E^2\setminus M_0$ da Laplas tenglamasining yechimi bo‘ladi. Bu funksiyalar Laplas tenglamasining fundamental yechimi deyiladi.

Birinchi va ikkinchi Grin formulalari.

2. Birinchi Grin formulasi.

Faraz qilaylik chekli sondagi yopiq qismlardan iborat bo‘lib, har bir nuqtada o‘rinmaga ega bo‘lib, bu o‘rinmalar koordinata o‘qlariga parallel bo‘lsa, shunda ular yo chekli sondagi nuqtalarda kesishadi yo kesishishdan xosil bo‘lgan yopiq oraliqlar chekli bo‘ladi.U holda Ω soxa uchun $\vec{A}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$, bu yerda $P,Q,R\in C^1(\overline{\Omega})$Ostrogradskiy- Gauss formulasi o‘rinli:

$$\iint_\Sigma(\vec{A},\vec{n})d\sigma=\iiint_\Omega div\vec{A}d\tau \quad (10.1)$$

$u(x,y,z)$ va $v(x,y,z)\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega}),\vec{A}=ugradv$

berilgan bo‘lsin.Shunda (10.1) formulaga ko‘ra:

$$\iiint_\Omega div(ugradv)d\tau=\iint_\Sigma(ugradv,\vec{n})d\sigma=$$

$$=\left\{(gradv,\vec{n})=\frac{\partial v}{\partial n};div(ugradv)=(gradu,gradv)+u\Delta v\right\}$$

$$=\iint_\Sigma u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma\Rightarrow$$

$$\iiint_\Omega((gradu,gradv)+u\Delta v)d\tau=\iint_\Sigma u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma. \quad (10.2)$$

Hosil bo‘lgan formula Grinning birinchi formulasi deyiladi.

3. Grinning ikkinchi formulasi.

Birinchi Grin formulasidan u va v funksiyalarning o‘rnini almashtiramiz. Hosil bo‘lgan ayniyatni (10.2) dan ayirsak, Grinning ikkinchi formulasi kelib chiqadi:

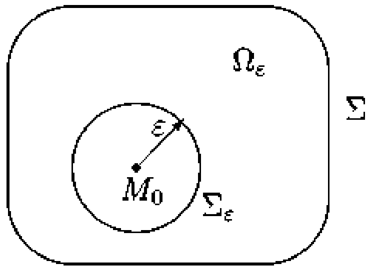
$$\iiint_\Omega(u\Delta v-v\Delta u)d\tau=\iint_\Sigma\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial}{\partial nu}\right)d\sigma \quad (10.3)$$

4. Grinning uchinchi formulasi.

Yuqorida ko‘rsatganimizdek

$$v=\frac{1}{R_{MM0}}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

E^3da Laplas tenglamasining yechimi deyiladi. $M_0\in\Omega$ nuqtani fikserlaymiz va uni ε radiusli $\sum_3$ sfera bilan aylantirib olamiz. Shunda $v\in C^2(\overline{\Omega}_\varepsilon),\Omega_\varepsilon=\Omega\setminus S_{M_0}(\varepsilon).$



Qandaydir $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$. funksiya olamiz. Ω_ε soxa uchun Grinning ikkinchi formulasini yozamiz:

$$\iiint_{\Omega_\varepsilon}(u\Delta v-vv\Delta u)d\tau=\iint_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma+\iint_{\Sigma_\varepsilon}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma\Rightarrow\{\Delta u\equiv 0\}\Rightarrow$$

$$-\iiint_{\Omega_\varepsilon}\frac{1}{R_{MM0}}\Delta u(M)d\tau_M=\iint_{\Sigma}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MM0}}\right)-\frac{1}{R_{MM0}}\frac{\partial u}{\partial n}(M)\right)d\sigma_M+$$

$$+\iint_{\Sigma_\varepsilon}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MM0}}\right)-\frac{1}{R_{MM0}}\frac{\partial u}{\partial n}(M)\right)d\sigma_M.$$

$\varepsilon\to 0$ ikkinchi ikki karrali integralni qaraymiz.Ma’lumki, birlik $\bar{n}$ normal $\sum_\varepsilon$ sferaning $\{x,y,z\}$

nuqtasida quyidagicha bo‘ladi: $\left\{-\frac{x-x_0}{R_{MM_0}},-\frac{Y-Y_0}{R_{MM_0}},-\frac{Z-Z_0}{R_{MM_0}}\right\}$. bundan,

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MM0}}\right)=\left(\vec{n},grad\frac{1}{R_{MM0}}\right)=\frac{(x-x_0)^2}{R^4{}_{MM0}}+\frac{(y-y_0)^2}{R^4{}_{MM0}}+\frac{(z-z_0)^2}{R^4{}_{MM0}}=\frac{1}{R^2{}_{MM0}}=\frac{1}{\varepsilon^{2.}}$$

Unda bu integral quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\iint_{\Sigma_\varepsilon}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MM0}}\right)-\frac{1}{R_{MM0}}\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\Sigma_\varepsilon}ud\sigma-\frac{1}{\varepsilon}\iint_{\Sigma_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=$$

$$=u(M_\varepsilon{}')\frac{4\pi\varepsilon^2}{\varepsilon^2}-\frac{\partial u}{\partial n}(M_\varepsilon{}'')\frac{4\pi\varepsilon^2}{\varepsilon}=4\pi u(M'_\varepsilon)-4\pi\varepsilon\frac{\partial u}{\partial n}(M_\varepsilon{}''),$$

Bu yerda $M''_\varepsilon,M'_{\varepsilon-}$ nuqtalar $\sum_\varepsilon$ sferada olingan.

$\frac{\partial u}{\partial n}$ chegaraviylikni hisobga olgan holda ε nolga intiltiramiz:

$$4\pi u(M'_\varepsilon)-4\pi\varepsilon\frac{\partial u}{\partial n}(M''_\varepsilon)\xrightarrow{\varepsilon\to 0}4\pi u(M_0)$$

Qugiluvchilarni ma’lum bir qismini o‘ng tomonga o‘tkazib, $u(M_0)$uchun quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$4\pi u\left(M_0\right) = -\iiint_{\Omega} \frac{1}{R_{MM0}} \Delta u\left(M\right) d\tau_M -$$
$$-\iint_{\Sigma} \left[u\left(M\right) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MM0}}\right) - \frac{1}{R_{MM0}} \frac{\partial u}{\partial n}\left(M\right) \right] d\sigma_M \tag{10.4}$$

Bu Grinning uchinchi formulasi deb ataladi.

E^2 fazoda analogik tahlillar olib borib, ikkinchi va uchinchi Grin formulalari uchun ikki o‘lchovli analoglar hosil qilish oson:

$$\iint_D (u\Delta v - v\Delta u) ds = \int_L \left(u\frac{\partial u}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) dl.$$

$$2\pi u(M_0) = -\iint_D \ln\left(\frac{1}{\rho MM_0}\right)\Delta u ds - \int_L \left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{\rho MM_0}\right) - \ln\frac{1}{\rho MM_0}\frac{\partial u}{\partial n}\right] dl$$

1.3.2-a. Frontal so‘rov uchun savollar

1. Laplas tenglamasi.
2. Puasson tenglamasi.

1.3.2-b. Blits-so‘rov uchun savollar

1. Birinchi Grin formulasi.
2. Grinning ikkinchi formulasi.
3. Grinning uchinchi formulasi.

1.3.2-c. Og’zaki so‘rov uchun savollar

1. Chegaraviy masalalarning qo‘yilishi.
2. Laplas tenglamasining fundamental yechimi.

1.3.3. Mustaqil ish uchun topshiriqlar

- *takrorlash va mashqlar*: takrorlash, o‘z-o‘zini tekshirish, tahlil, qayta ishlash, mustahkamlash, eslab qolish, chuqurlashtirish;
- *yangi materiallarning mustaqil o‘zlashtirish*: yangi adabiy va internet materiallar, konspekt qo‘shimchasi; mustaqil iboralar tuzish;
- *ilmiy xaraktyerdagi ishlar*: muammoli holatlar, testlar, savollar, topshiriqlar tuzish; topshiriqlarni bajarish.

1.3.4. Kartochkalar uchun testlar

1.3.5. ekranga tayanch materiallarni ko‘rsatish(slaydlar)

- Prezentatsiya

1.3.6. Tavsiya etilgan adabiyotlar

Asosiy

1. *Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O'zbekistan», 2002, 448 b.*
2. *Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,*
3. *Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.*
4. *Bisadzs L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.*
5. *Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.*

Qo'shimcha

1. *Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.*
2. *Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.*
3. *Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.*
4. *Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.*
5. *Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.*
6. *Mixlnn S.G. Leksii po lineynыm integralnыm uravneniyam. M. 1959.*
7. *Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.*
8. *Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.*
9. *Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.*

1.4. O'qitish usullari qoidalari

1.4.1. Aqliy hujum qoidalari

- Hech qanday o'zaro baholash va tanqid;
- Taklif etilayotgan g'oyalarni baholashdan o'zingni tiy, hatto ular fantastic va iloji yo'q bo'lsa ham – hammasi mumkin;
- Tanqid qilma – hamma aytilgan g'oyalar birhirda;
- Bayon qiluvchi gapini bo'lma;
- Izoh berishdan o'zingni tiy;
- Maqsad bu - miqdor;
- Qancha g'oyalar ko'p bo'lsa chuncha yaxshi: yangi va zarur g'oya tug'ulishi imkoniyati ko'proq
- Agar g'oyalar takrorlansa o'ksinma,
- Tasavvo'ringga erk ber;
- Senda yaralgan g'oyalarni tashlama, agal ular sening nazaringda qabul qilingan sxemaga tegishli bo'lmasa ham;
- Bu muammo aniq usullar bilan yechiladi deb o'ylama.

1.4.2. "Insert" texnikasi qoidalari

- Matndi o‘qib, ularda savollat tug’dirayotgan joylarni, ularni bilimlariga mos kewlayotgan va mos kelmayotgan joylarni qalam bilan belgilab qo‘yiladi;
- “Insert” jadvalini quyidagi belgilashlar bilan to‘ldirish:
  Agar «!» bo‘lsa siz o‘z bilimingizga yoki siz o‘ylagan fikrga to‘g’ri kelayotganini o‘qiyapsiz;
  Agar «–» bo‘lsa siz o‘z bilimingizga yoki tyo‘g’ri deb o‘ylaganingizga mutlaqo zid bo‘lganini o‘qiyapsiz;
  Agar «+» bo‘lsa siz o‘qityotganingiz siz uchun yangilik;
  Agar «?» bo‘lsa, siz o‘qiyotganingiz siz uchun tushunarsiz yoki siz bu savolga yanada ko‘proq ma`lumotlar olishni istaysiz.

1.4.3. Guruhlarda ishlash qoidalari

- Hamma o‘z do‘stlarini tinglashi kerak, unga yaxshi munosabatda bo‘lib hurmar ko‘rsatishi kerak;
- Hamma aktiv harakat qilishi lozim; berilgan topshiriqqa nisbatan birgalikda va javobgarlik bilan ishlashi kerak;
- Har kim o‘ziga kerak paytda yordam so‘rashi kerak;
- Har kim undan yordam so‘ralganda yordam ko‘rsatishi kerak;
- Guruhning ish natijalarini baholashda ishtirok etishi lozim;
- Biz bir kemadamiz, o‘zgalarga yordam berib o‘zimiz o‘rganamiz, shuni har kim tushunishi lozim;

Mavzu 11. “Garmonik funksiyalarning xossalari Maksimum prinsipi. Dirixle masalasi ”

Ma`ruzaga reja-topshiriqlar

Fan: Matematik fizika tenglamalari

O‘quv soati: 2 soat (ma`ruza);

O‘quv mashg’uloti turi: ma`ruza; yangi bilimlarni mustahkamlash va o‘rganish.

Ma`ruza rejasi:

1. Garmonik funksiya xossalari
2. Garmonik funksiyalar uchun maksimum prinsipi.
3. Dirixle ichki masalasining yechimi yagonaligi va turg’unligi
4. Dirixle tashki masalasi yechimi yagonaligi. Fazoda Dirixli tashki masalasi

O‘quv mashg’uloti maqsadi:

O‘quv fani to‘g’risida umumiy ta`surotlar berish, Xususiy hosilali tenglamalarva keyinchalik kasbiy faoliyatidagi roli.

O‘quv mashg’uloti masalalari:

- *O‘rgatuvchi*: talabalarda qabul qilish faoliyatini tashkil qilish, yangi materialni boshlang’ich esda qoldirish va anglash; Matematik fizika tenglamalarining terminlari, iboralarini xarakterlovchi elementlar; talabalarning matematik firlashini rivojlantirish muammoli masalalarni yechimini mahoratini oshirish; matematik masalalarni yechishda matematik simvollarning hususiyatlari bilan tanishtirish;
- *Rivojlantiruvchi*: kitob matni bilan ishlay bilishligi – mag’zlarini tanlab olish, tahlil qilish; gaplar tuzish, hulosa chiqarish, materialni talabalarning izlash faoliyatini stimullashtirish; hususiydan umumiy holga o‘tish usuli bilan tekshirish; tekshirish

natijalarini tahlil qilib va uni umumlashtira olishini rivojlantirish; analitik-sintetik faoliyatning mantiqiy fikrlashini qo‘llash; talabalarning ijodiy mahoratini shakillantirish;

- *Tarbiyalovchi:* aktiv faoliyatga, mustaqil ishga jalb qilish; guruhlarda ishlash qoidalariga rioya qila olish; fanni o‘rganishga qiziqishni rivojlantirish; Matematik fizika tenglamalarini matematik-komunikativ kursni bir qismi sifatida tassavur berish; javobgarlik tuyg’ularini tarbiyalash, mehnatsevarlik, individual ishni jamoaviy ish bilan biriktirish, intizomlashtirish.

O‘qitish texnologiyasi:

- *O‘qutish usullari*: instruktaj; Ma`ruza, aqliy hujum, “Insert” texnikasi;
- *O‘qitish shakillari*: frontal; jamoaviy;
- *O‘qitish vositalari*: Ma`ruza matni; jadvallar, multimediya;
- *O‘qitish sharoitlari*: texnik jihozlashtirilgan auditoriya;
- *Baholash va monitoring*: o‘g’zaki savol-javob, blits-so‘rov.

Pedagogik masalalar:

- Fanning masalalari va uning o‘quv fanlar sistemasidagi o‘rni va roli bilan tanishtirish;
- O‘quv fanning tuzulmasi va tavsiya etiladigan o‘quv-metodik adabiyotlarni tasvirlash;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlarini ochib berish, baholash shakli va muddatlari;
- Fan ma`ruzasi paytida o‘qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy bosqichlarini xarakterlab berish va umumiy sxemasini tushuntirish.
- O‘qitish texnologiyasi rivojlanishi perspektivasini xarakterlab berish;

O‘quv faoliyati natijalari:

- Fan ma`ruzasi masalalari, maqsadlari va nomlari shakillanadi;
- Xususiy hosilali tenglamalardoirasidagi yutuqlar yoritiladi;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlari hamda baholash shakli va muddatlari aytiladi
- Fan ma`ruzasida o‘qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy sxemasini kengaytirib xatakterlab beradi;
- Fanning asosiy ta`riflarini beradi, Xususiy hosilali tenglamalarfani ma`ruzalarining asosiy yo‘nalishlari beriladi;
- Nazariy bilimlarning to‘liqligi, sistemaliyligi va harakatliyligi;
- Amaliy mag’ulotlarni bajarishda o‘rganilgan iboralarbilan ishlay olishligi;

- **1.2. Ma`ruzaning xronologik xaritasi**

- **1 bosqich. O‘quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa):**

- *O‘qituvchining faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (davomat, konspektning borligi; o‘ziga ishonch, aniqligi,); kerakli materiallarni tarqatish (konspekt, tarqatma materiallar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadini bayon qilish; o‘quv mashg’ulotning rajasi bilan tanishtirish; kalit iboralar va so‘zlar, kategoriyalar; internet saytlari va adabiyotlar ro‘yhati; o‘quv natijalari haqida aytish;
- *Talabalar faoliyati*: o‘quv joyini tayyorlash (talabalar borligi; tashqi ko‘rinish; o‘quv materiallar va qo‘llanmalar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadi bilan tanishish; o‘quv materialini qabul qilishga tayyorgarlik ko‘rish;
- *Shakillar, usular, uslublar*: instruktaj; frontal so‘rov; mustahkamlovchi so‘rov.

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa):

- *O‘qituvchining faoliyati*: mavzuga kiritadi; yangi mavzuga doir o‘tgan fanlar va mashg’ulotlarning mavzularini eslashga chorlaydi; ma`ruza matnini tarqatadi, tanishishni taklif etadi, “Insert” usuli bilan belgilar qo‘yishni taklif etadi; birinchi savol bo‘yicha matn o‘qiladi; qo‘shimcha o‘quv materiallarini aytib boorish va tushuncha berish; natural obektlarni namnoyon qilish va izohlash; tushunarsiz savollarni aniqlash va tushintirish; birinchi savol bo‘yicha nazar (shunday qilib qolgan savollarga ham);
- *Talabalar faoliyati*: yangi mavzuda doir oldingi mashg’ulotlarda va fanlarda olgan bilimlarni mustahkamlaydi,; har bir kalit ibora va terminlarni eshitib, yozib borib, konspekt qilib aytib borishadi; “Insert” usuli bilan belgilan o‘qiydilar, aniqlik kiritadilar, savollar beradilar va o‘zaro;
- *Shakillar, usular, uslublar*: frontav so‘rov blits-so‘rov; aqliy hujum, “Insert” texnikasi.

3 bosqich. Yakunlovchi qism (10 daqiqa)

- *O‘qituvchining faoliyati:* mavzu bo‘yicha hulosa qilish, talabalarning e`tiborlarini asosiylarda jalb qilish; qilingan ishning muhimligini aytib o‘tish; alohida talabalarning bajarilgan ishlarini baholash; o‘zaro baholashning natijalarini chiqarish; o‘quv mashg’ulotning yutuqlik darajasini baholash va tahlil qilish; mustaqil ish uchun topshiriqlar; baho ko‘rsatgichlari va me`zonlari;
- *Talabalar faoliyati: ishning* tahlili; natijalarni olish; texnologik bilimlarni qo‘llash; o‘zaro baholashni o‘tkazish, yo‘l qo‘yilgan hatolar bo‘yicha tahlil va aniqlik kiritish; mustaqil ish topshiriqlarini yozib olish;
- *Shakillar, usular, uslublar*: guruhlarda ishlash, kartochkalarda topshiriqlar.

1.3. O‘quv-metodik materiallar

Ma`ruza rejasi:

1. Garmonik funksiya xossalari
2. Garmonik funksiyalar uchun maksimum prinsipi.
3. Dirixle ichki masalasining yechimi yagonaligi va turg’unligi
4. Dirixle tashki masalasi yechimi yagonaligi. Fazoda Dirixli tashki masalasi

Tayanch iboralar: Garmonik funksiya, Dirixli ichki,tashki masalasi, Fazoda Dirixli tashki masalasi

1.3.1. Ma`ruza matni

1. Garmonik funksiya xossalari

Ta’rif. Agar u funksiya $u \in C^2(\Omega)$ va $\forall x \in \Omega$ uchun $\Delta u = 0$ bo‘lsa, Ω sohada garmonik deyiladi.

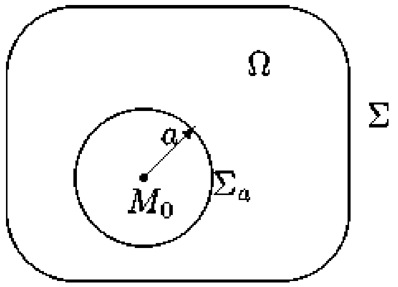
1-xossa.Agar v funksiya Ω da garmonik bo‘lsa, u holda $\iint\limits_{\tilde{\Sigma}} \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma = 0$ bo‘ladi, bu yerda $\tilde{\Sigma}$: Ω da yotuvchi ixtiyoriy yopiq sirt.

Isboti. $\tilde{\Sigma}$ bilan chegaralangan soha uchun Grinning 1-formulasida (3.2) $u \equiv 1$ ni olamiz. (ravshanki, u -garmonik funksiya) Demak $\iint\limits_{\tilde{\Sigma}} \frac{dv}{dn} d\sigma = 0$

2-xossa. (O‘rta qiymat haqidagi teorema)

u funksiya Ω da garmonik bo‘lsin va Ω da yotuvchi markazi M_0 no‘qtada radiusi a ga teng ixtiyoriy $\sum_a$ sfera uchun

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_{\Sigma_a} u(p) d\sigma_p \qquad (3.5)$$



formula o‘rinli.
Isbot. $\sum_a$ sferaning ichki sohasi uchun Grinning uchinchi formulasi (3.4) ni yozamiz:

$$4\pi u(M_0) = -\iint_{\Sigma_a}[u\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{R_{MM_0}}) - \frac{1}{R_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial n}]d\sigma = \{\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{R_{MM_0}}) = -\frac{1}{a^2}\} =$$
$$= \frac{1}{a^2}\iint_{\Sigma_a} u d\sigma + \iint_{\Sigma_a}\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma$$

Garmonik funksiyaning 1-xossasiga ko‘ra ikkinchi integral nolga aylanadi va shu bilan (3.5) formula isbotlandi.

3-xossa : Agar u funksiya- Ω da garmonik bo‘lsa, u holda u Ω da cheksiz differinsiallanuvchi bo‘ladi.

Isboti . $u(M_0) = u(x,y,z), (P(P_x,P_y,P_z) \in \Sigma_a)$ uchun Grinning 3-formulasini yozamiz.

$$4\pi u(x,y,z) = -\iint_{\Sigma}[u(P)\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{\sqrt{(x-P_x)^2+(y-P_y)^2+(z-P_z)^2}}) - \frac{1}{\sqrt{(x-P_x)^2+(y-P_y)^2+(z-P_z)^2}}\frac{\partial u(P)}{\partial n}]d\sigma_P \qquad (11.4)$$

Ko‘rinib turibdiki: agar M no‘kta $\sum$ ning chegarasida yotmasa, u holda integral tagidagi funksiya x (xudi shuday y va z) argumentlari bo‘yicha cheksiz differinsiallanuvchi.

Ma’lumki, bu holda butun integral, demak, u(M) funksiya ham cheksiz differinsiallanuvchi funksiya.

2 Garmonik funksiyalar uchun maksimum prinsipi.

Teorema 11.1 (Maksimum prinsipi)

Agar funksiya $u \in C(\tilde{\Omega})$ va Ω da garmonik bo‘lsa, bu holda u o‘zining maksimum(minimum) iga sohaning chegarasida erishadi .

$$\max_{\underline{M \in \tilde{\Omega}}} u(M) = \max_{M \in \Sigma} u(M);$$
$$\min_{M \in \Omega} u(M) = \min_{M \in \Sigma} u(M);$$

Isboti: faraz qilaylik u(M) funksiya masalan, biror M_0 ichki no‘qtada maksimumga erishsin: : $u(M_0) = \max_{M \in \tilde{\Omega}} u(M)$ u holda (11.5) o‘rta qiymat formulasiga ko‘ra (a-yetarlicha kichik son)

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2}\iint_{\Sigma_a} u(P)d\sigma_p \le \frac{1}{4\pi a^2}\iint_{\Sigma_a} u(M_0)d\sigma = u(M_0)$$

u funksiya uzluksiz bo‘lgani uchun, u holda $u(P) \equiv u(M_0)$, (ya’ni maksimum butun sferada erishiladi).

Bu almashtirishlarni yetarlicha marta davom ettirib, maksimum chegarada ham erishishini xosil qilamiz.

3. Dirixle ichki masalasining yechimi yagonaligi va turg'unligi

Bu yerda va keyin xam μ , v lar qandaydir berilgan funksiyalar.

Ta'rif: u(x,y,z) funksiya Dirixle ichki masalasining yechimi deyiladi, agar u quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

$$(11.1)\begin{cases}(1).u(x,y,z)\in C(\overline{\Omega}), u\in C^2(\Omega)\\ (2).\Delta u(x,y,z)=0,(x,y,z)\in\Omega\\ (3).u(x,y,z)=\mu(x,y,z),(x,y,z)\in\sum\end{cases}$$

Ω da uzluksiz va garmonik yechimning yagonalik hakidagi teoremani isbotlaymiz:

Teorema. 11.2 (yagonaligi teoremasi)

$u_1(x,y,z),u_2(x,y,z)$ funksiya [11.1] Dirixle ichki masalasining yechimlari bo'lsin. U holda $u_1(x,y,z)=u_2(x,y,z);\forall(x,y,z)\in\overline{\Omega}$.

Isboti: $\upsilon=u_1-u_2$ yangi funksiyalarni aniqlaymiz. Oson ko'rinadiki, u $\overline{\Omega}$ da uzluksiz, Ω da garmonik va $\upsilon(x,y,z)=0,(x,y,z)\in\sum$.

U holda υ funksiya uchun maksimum prinsipining hamma shartlarini qanoatlantirgan va bundan quyidagi kelib chiqadi:

$$\left.\begin{matrix}\max\limits_{\Omega} v=\max\limits_{\Sigma} v=0\\ \min\limits_{\Omega} v=\min\limits_{\Sigma} v=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow v(x,y,z)\equiv 0,(x,y,z)\in\Omega$$

teorema isbotlandi.

Endi Dirixle ichki masalasini yechimi turgunligini ko'rsatamiz. Lekin undan avval quyidagi lemmani isbot qilamiz:

Lemma 1. $u_1(x,y,z),u_2(x,y,z)$ funksiyalar quyidagi uchta shartlarni qanoatlantirsin:

1. $u_1,u_2\in C(\overline{\Omega})$;
2. $u_1,u_2-\Omega$ da garmonik
3. $u_1(x,y,z)\ge u_2(x,y,z),(x,y,z)\in\Sigma$

U xolda $u_1\ge u_2,\forall(x,y,z)\in\Omega$

Isboti: $\upsilon=u_1-u_2$ funksiyani qaraymiz. U holda $v(x,y,z)\ge 0$, $\forall(x,y,z)\in\sum$. Minimum prinsipidan foydalanib (ravshanki barcha shartlar bajarilgan) $\overline{\Omega}$ da $\min\limits_{\overline{\Omega}} v=\min\limits_{\Sigma} v\ge 0\Rightarrow u_1\ge u_2$ ni olamiz.

Lemma isbotlandi.

Teorema 11.3 (turg'unlik teoremasi). $u_1(x,y,z),u_2(x,y,z)$ funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$\begin{cases}(1)u_1,u_2\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega);\\ (2)\Delta u_1(x,y,z)=\Delta u_2(x,y,z)=0,(x,y,z)\in\Omega;\\ (3)u_i(x,y,z)=\mu_i(x,y,z),(x,y,z)\in\Sigma, i=1,2.\end{cases}$$

U holda $\max\limits_{\Omega}|u_1-u_2|\le\max\limits_{\Sigma}|\mu_1-\mu_2|$ bo'ladi.

Isboti. $\varepsilon=\max\limits_{\Sigma}|\mu_1-\mu_2|, v=u_1-u_2$ belgilash olamiz. U holda v funksiya Ω da garmonik, $-\varepsilon\le v\le\varepsilon;(x,y,z)\in\Sigma,$ U holda (-ε, v) va (ε, v) funksiyalar jufti uchun lemmani qo'llab (ravshanki uning shartlari bajariladi) $\overline{\Omega}$ da

$-\varepsilon \le v \le \varepsilon; (x,y,z) \in \overline{\Omega} \Rightarrow |u_1 - u_2| \le \varepsilon$ ni olamiz.
teorema isbotlandi.
Natija.
$u_n(x,y,z)$ funksiyalar ketma-ketligi ,har bir funksiya hamda $u\ (x,y,z)$ mos $\sum$ da $u_n = \mu_n$, Ω da u=μ Dirixle masalasi yechimi bo‘lsin. U holda μ_n ning tekis yaqinlashishidan $\sum$ da $\mu_n(\mu_n \Rightarrow \mu)$, Ω da $u_n \Rightarrow u$ kelib chiqadi.
Eslatma. Isbotlangan teorema ikki ulchamli hol uchun to‘lik o‘rinli. Bunga ishonch hosil qilish uchun shunga uxshash muloxazalar yuritish kerak.Endi Dirixli masalasining boshqa varianti- Dirixli tashqi masalasini qaraymiz.
4. Dirixle tashki masalasi yechimi yagonaligi
Fazoda Dirixli tashki masalasi
Ta’rif. $u(x,y,z)$ funksiya fazodagi Dirixle tashki masalasining yechimi deyiladi, agar u quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

$$\begin{cases} (1) u(x,y,z) \in C(\mathrm{E}^3 \setminus \Omega); \\ (2) \Delta u(x,y,z) = 0, (x,y,z) \in \mathrm{E}^3 \setminus \overline{\Omega}; \\ (3) u(x,y,z) = \mu(x,y,z), (x,y,z) \in \Sigma. \\ (4) u(x,y,z) \Rightarrow 0, (x,y,z) \to \infty \end{cases}$$

Uzluksiz yechimning yagonaligini isbotlaymiz:
Teorema 11.4 (yagonalig teoremasi). $u_1, u_2(x,y,z)$ funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$\begin{cases} (1) u_1, u_2(x,y,z) \in C(\mathrm{E}^3 \setminus \Omega); \\ (2) \Delta u_1(x,y,z) = \Delta u_2(x,y,z), (x,y,z) \in \mathrm{E}^3 \setminus \overline{\Omega}; \\ (3) u_1, u_2(x,y,z) = \mu(x,y,z), (x,y,z) \in \Sigma. \\ (4) u_1, u_2(x,y,z) \Rightarrow 0, (x,y,z) \to \infty \end{cases}$$

U holda $u_1(x,y,z) = u_2(x,y,z), (x,y,z) \in \Sigma^3 \setminus \overline{\Omega}$ bo‘ladi.
Isboti. $v(x,y,z) = u_{1(}(x,y,z) - u_2(x,y,z)$ bo‘lsin. U holda v funksiya teoremaning $\mu(x,y,z) \equiv 0$ shartini qanoatlantiradi. $v \equiv 0$ ekanligini isbotlaymiz; Teskarisini faraz qilaylik, ya’ni,
$\exists M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathrm{E}^3 \setminus \overline{\Omega} : v(x_0, y_0, z_0) = A > 0$ bo‘lsin.
U holda tekis yaqinlashish ta’rifiga ko‘ra M_0 no‘qtani to‘la uz ichiga oluvchi R radiusli shunday Σ_R sfera mavjudki $|v(x,y,z)| \le \frac{A}{2}, (x,y,z) \in \Sigma_R$, u holda

$$\begin{matrix} \max\limits_{\Sigma_R} v(x,y,z) \le \frac{A}{2}; \\ \min\limits_{\Sigma_R} v(x,y,z) \ge -\frac{A}{2}. \end{matrix}$$ bo‘ladi.

v funksiya ga Ω_R ochik sohada maksimal qiymat prinsipini qo‘llab (bu soha tashqarisidan Σ_R bilan ichkarisidan- $\sum$ bilan chegaralangan):

$$\left\{\begin{array}{l}\max\limits_{\overline{\Omega}_R} v = \max\limits_{\Sigma\cup\Sigma_R} v \le \dfrac{A}{2};\\ \min\limits_{\overline{\Omega}_R} v = \min\limits_{\Sigma\cup\Sigma_R} v \le -\dfrac{A}{2};\end{array}\right. \Rightarrow |v(x_0, y_0, z_0)| \le \frac{A}{2}. \qquad \text{ni olamiz.}$$

$v(x_0, y_0, z_0) = A$ bilan qarama-qarshilikga kelamiz.U holda $v(x, y, z) = 0$ ekanligi kelib chikadi. Teorema isbotlandi.

Misol. $\begin{array}{l}\Omega : x^2 + y^2 + z^2 < a^2;\\ \Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = a^2.\end{array}$ bo‘lsin.

Endi quyidagi Dirixli tashki masalasini qaraymiz.

$1. u \in C(\mathrm{E}^3 \setminus \overline{\Omega});$

$2. u - \mathrm{E}^3 \setminus \overline{\Omega}$ da garmonik funksiya

$3. u(x, y, z) = C = const, (x, y, z) \in \Sigma.$

Oson ko‘rish mumkinki $u_1(x, y, z) = C$ va $u_2(x, y, z) = \dfrac{Ca}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ funksiyalar berilgan masalaning yechimlari bo‘ladi, lekin $u_1 \ne u_2$,shuning uchun bu qo‘yilgan shartlar masala yechimi yagonaligiga zid.

1.3.2-a. Frontal so‘rov uchun savollar

1. Dirixli tashki masalasining yechimi ta’rifi.

1.3.2-b. Blits-so‘rov uchun savollar

1. Garmonik funksiya ta’rifi.
2. Garmonik funksiya xossalari.
3. Maksimum prinsipi teoremasi.

1.3.2-c. Og’zaki so‘rov uchun savollar

1. Dirixle ichki masalasining yechimi yagonaligi teoremasi.
2. Dirixle ichki masalasining yechimi turg’unligi teoremasi.
3. Dirixle tashki masalasi yechimi yagonaligi teoremasi.

1.3.3. Mustaqil ish uchun topshiriqlar

- *takrorlash va mashqlar*: takrorlash, o‘z-o‘zini tekshirish, tahlil, qayta ishlash, mustahkamlash, eslab qolish, chuqurlashtirish;
- *yangi materiallarning mustaqil o‘zlashtirish*: yangi adabiy va internet materiallar, konspekt qo‘shimchasi; mustaqil iboralar tuzish;
- *ilmiy xaraktyerdagi ishlar*: muammoli holatlar, testlar, savollar, topshiriqlar tuzish; topshiriqlarni bajarish.

1.3.4. Kartochkalar uchun testlar

1.3.5. ekranga tayanch materiallarni ko‘rsatish(slaydlar)

- Prezentatsiya

1.3.6. Tavsiya etilgan adabiyotlar

Asosiy

1. *Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O'zbekistan», 2002, 448 b.*
2. *Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,*
3. *Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.*
4. *Bisadzs L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.*
5. *Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.*

Qo'shimcha

1. *Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.*
2. *Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.*
3. *Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.*
4. *Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.*
5. *Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.*
6. *Mixlnn S.G. Leksii po lineynыm integralnыm uravneniyam. M. 1959.*
7. *Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.*
8. *Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.*
9. *Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.*

1.4. O'qitish usullari qoidalari

1.4.1. Aqliy hujum qoidalari

- Hech qanday o'zaro baholash va tanqid;
- Taklif etilayotgan g'oyalarni baholashdan o'zingni tiy, hatto ular fantastic va iloji yo'q bo'lsa ham – hammasi mumkin;
- Tanqid qilma – hamma aytilgan g'oyalar birhirda;
- Bayon qiluvchi gapini bo'lma;
- Izoh berishdan o'zingni tiy;
- Maqsad bu - miqdor;
- Qancha g'oyalar ko'p bo'lsa chuncha yaxshi: yangi va zarur g'oya tug'ulishi imkoniyati ko'proq
- Agar g'oyalar takrorlansa o'ksinma,
- Tasavvo'ringga erk ber;
- Senda yaralgan g'oyalarni tashlama, agal ular sening nazaringda qabul qilingan sxemaga tegishli bo'lmasa ham;
- Bu muammo aniq usullar bilan yechiladi deb o'ylama.

1.4.2. “Insert” texnikasi qoidalari

- Matndi o‘qib, ularda savollat tug’dirayotgan joylarni, ularni bilimlariga mos kewlayotgan va mos kelmayotgan joylarni qalam bilan belgilab qo‘yiladi;
- “Insert” jadvalini quyidagi belgilashlar bilan to‘ldirish:
  Agar «!» bo‘lsa siz o‘z bilimingizga yoki siz o‘ylagan fikrga to‘g’ri kelayotganini o‘qiyapsiz;
  Agar «–» bo‘lsa siz o‘z bilimingizga yoki tyo‘g’ri deb o‘ylaganingizga mutlaqo zid bo‘lganini o‘qiyapsiz;
  Agar «+» bo‘lsa siz o‘qityotganingiz siz uchun yangilik;
  Agar «?» bo‘lsa, siz o‘qiyotganingiz siz uchun tushunarsiz yoki siz bu savolga yanada ko‘proq ma`lumotlar olishni istaysiz.

1.4.3. Guruhlarda ishlash qoidalari

- Hamma o‘z do‘stlarini tinglashi kerak, unga yaxshi munosabatda bo‘lib hurmar ko‘rsatishi kerak;
- Hamma aktiv harakat qilishi lozim; berilgan topshiriqqa nisbatan birgalikda va javobgarlik bilan ishlashi kerak;
- Har kim o‘ziga kerak paytda yordam so‘rashi kerak;
- Har kim undan yordam so‘ralganda yordam ko‘rsatishi kerak;
- Guruhning ish natijalarini baholashda ishtirok etishi lozim;
- Biz bir kemadamiz, o‘zgalarga yordam berib o‘zimiz o‘rganamiz, shuni har kim tushunishi lozim;

Mavzu 12. “**Tekislikda Dirixlening tashqi masalasi**”

Ma`ruzaga reja-topshiriqlar

Fan: Matematik fizika tenglamalari

O‘quv soati: 2 soat (ma`ruza);

O‘quv mashg’uloti turi: ma`ruza; yangi bilimlarni mustahkamlash va o‘rganish.

Ma`ruza rejasi:

1. Yagonalik teoremasi.
2. Neymanning ichki masalasi
3. Neymanning ichki masalasi yechilishi uchun zaruriy shartlar.
4. Yechimning yagonaligi.
5. Laplas tenglamasi uchun Grin funksiyasi va uning xossalari.

O‘quv mashg’uloti maqsadi:

O‘quv fani to‘g’risida umumiy ta`surotlar berish, Xususiy hosilali tenglamalarva keyinchalik kasbiy faoliyatidagi roli.

O‘quv mashg’uloti masalalari:

- *O‘rgatuvchi*: talabalarda qabul qilish faoliyatini tashkil qilish, yangi materialni boshlang’ich esda qoldirish va anglash; Matematik fizika tenglamalarining terminlari, iboralarini xarakterlovchi elementlar; talabalarning matematik firlashini rivojlantirish muammoli masalalarni yechimini mahoratini oshirish; matematik masalalarni yechishda matematik simvollarning hususiyatlari bilan tanishtirish;
- *Rivojlantiruvchi*: kitob matni bilan ishlay bilishligi – mag’zlarini tanlab olish, tahlil qilish; gaplar tuzish, hulosa chiqarish, materialni talabalarning izlash faoliyatini

stimullashtirish; hususiydan umumiy holga o‘tish usuli bilan tekshirish; tekshirish natijalarini tahlil qilib va uni umumlashtira olishini rivojlantirish; analitik-sintetik faoliyatning mantiqiy fikrlashini qo‘llash; talabalarning ijodiy mahoratini shakillantirish;

- *Tarbiyalovchi:* aktiv faoliyatga, mustaqil ishga jalb qilish; guruhlarda ishlash qoidalariga rioya qila olish; fanni o‘rganishga qiziqishni rivojlantirish; Matematik fizika tenglamalarini matematik-komunikativ kursni bir qismi sifatida tassavur berish; javobgarlik tuyg’ularini tarbiyalash, mehnatsevarlik, individual ishni jamoaviy ish bilan biriktirish, intizomlashtirish.

O‘qitish texnologiyasi:

- *O‘qutish usullari*: instruktaj; Ma`ruza, aqliy hujum, “Insert” texnikasi;
- *O‘qitish shakillari*: frontal; jamoaviy;
- *O‘qitish vositalari*: Ma`ruza matni; jadvallar, multimediya;
- *O‘qitish sharoitlari*: texnik jihozlashtirilgan auditoriya;
- *Baholash va monitoring*: o‘g’zaki savol-javob, blits-so‘rov.

Pedagogik masalalar:

- Fanning masalalari va uning o‘quv fanlar sistemasidagi o‘rni va roli bilan tanishtirish;
- O‘quv fanning tuzulmasi va tavsiya etiladigan o‘quv-metodik adabiyotlarni tasvirlash;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlarini ochib berish, baholash shakli va muddatlari;
- Fan ma`ruzasi paytida o‘qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy bosqichlarini xarakterlab berish va umumiy sxemasini tushuntirish.
- O‘qitish texnologiyasi rivojlanishi perspektivasini xarakterlab berish;

O‘quv faoliyati natijalari:

- Fan ma`ruzasi masalalari, maqsadlari va nomlari shakillanadi;
- Xususiy hosilali tenglamalardoirasidagi yutuqlar yoritiladi;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlari hamda baholash shakli va muddatlari aytiladi
- Fan ma`ruzasida o‘qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy sxemasini kengaytirib xatakterlab beradi;
- Fanning asosiy ta`riflarini beradi, Xususiy hosilali tenglamalarfani ma`ruzalarining asosiy yo‘nalishlari beriladi;
- Nazariy bilimlarning to‘liqligi, sistemaliyligi va harakatliyligi;
- Amaliy mag’ulotlarni bajarishda o‘rganilgan iboralarbilan ishlay olishligi;

- **1.2. Ma`ruzaning xronologik xaritasi**

- **1 bosqich. O‘quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa):**

- *O‘qituvchining faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (davomat, konspektning borligi; o‘ziga ishonch, aniqligi,); kerakli materiallarni tarqatish (konspekt, tarqatma materiallar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadini bayon qilish; o‘quv mashg’ulotning rajasi bilan tanishtirish; kalit iboralar va so‘zlar, kategoriyalar; internet saytlari va adabiyotlar ro‘yhati; o‘quv natijalari haqida aytish;
- *Talabalar faoliyati*: o‘quv joyini tayyorlash (talabalar borligi; tashqi ko‘rinish; o‘quv materiallar va qo‘llanmalar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadi bilan tanishish; o‘quv materialini qabul qilishga tayyorgarlik ko‘rish;
- *Shakillar, usular, uslublar*: instruktaj; frontal so‘rov; mustahkamlovchi so‘rov.

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa):

- *O‘qituvchining faoliyati*: mavzuga kiritadi; yangi mavzuga doir o‘tgan fanlar va mashg’ulotlarning mavzularini eslashga chorlaydi; ma`ruza matnini tarqatadi, tanishishni taklif etadi, “Insert” usuli bilan belgilar qo‘yishni taklif etadi; birinchi savol bo‘yicha matn o‘qiladi; qo‘shimcha o‘quv materiallarini aytib boorish va tushuncha berish; natural obektlarni namnoyon qilish va izohlash; tushunarsiz savollarni aniqlash va tushintirish; birinchi savol bo‘yicha nazar (shunday qilib qolgan savollarga ham);
- *Talabalar faoliyati*: yangi mavzuda doir oldingi mashg’ulotlarda va fanlarda olgan bilimlarni mustahkamlaydi,; har bir kalit ibora va terminlarni eshitib, yozib borib, konspekt qilib aytib borishadi; “Insert” usuli bilan belgilan o‘qiydilar, aniqlik kiritadilar, savollar beradilar va o‘zaro;
- *Shakillar, usular, uslublar*: frontav so‘rov blits-so‘rov; aqliy hujum, “Insert” texnikasi.

3 bosqich. Yakunlovchi qism (10 daqiqa)

- *O‘qituvchining faoliyati:* mavzu bo‘yicha hulosa qilish, talabalarning e`tiborlarini asosiylarda jalb qilish; qilingan ishning muhimligini aytib o‘tish; alohida talabalarning bajarilgan ishlarini baholash; o‘zaro baholashning natijalarini chiqarish; o‘quv mashg’ulotning yutuqlik darajasini baholash va tahlil qilish; mustaqil ish uchun topshiriqlar; baho ko‘rsatgichlari va me`zonlari;
- *Talabalar faoliyati: ishning* tahlili; natijalarni olish; texnologik bilimlarni qo‘llash; o‘zaro baholashni o‘tkazish, yo‘l qo‘yilgan hatolar bo‘yicha tahlil va aniqlik kiritish; mustaqil ish topshiriqlarini yozib olish;
- *Shakillar, usular, uslublar*: guruhlarda ishlash, kartochkalarda topshiriqlar.

1.3. O‘quv-metodik materiallar

Ma`ruza rejasi:

1. Yagonalik teoremasi.
2. Neymanning ichki masalasi
3. Neymanning ichki masalasi yechilishi uchun zaruriy shartlar.
4. Yechimning yagonaligi.
5. Laplas tenglamasi uchun Grin funksiyasi va uning xossalari.

Tayanch iboralar: Yagonalik teoremasi, Neymanning tashqi masalasi, Laplas tenglamasi, Grin funksiyasi, Grin funksiyasi xossalari

1.3.1. Ma`ruza matni

1. Yagonalik teoremasi. Tekislikda Dirixlening tashqi masalasi

Endi tashki masalani tekislikda qaraymiz.

Ta’rif: Agar $u(x,y)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, shunda tekislikda Dirixle tashqi masalasining yechimi deyiladi:

$$[3.3] \qquad \begin{cases} (1) & u(x,y) \in C(E^2 \setminus D), \quad u \in C^2(E^2 \setminus \overline{D}) \\ (2) & \Delta u(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in E^2 \setminus \overline{D} \\ (3) & u(x,y) = \mu(x,y), \qquad (x,y) \in L \\ (4) & |u(x,y)| \le C = const, \quad (x,y) \in E^2 \setminus \overline{D} \end{cases}$$

3.5. teorema (yagonalik): Faraz qilamiz, $u_1, u_2(x,y)$ shunday funksiyalar bo‘lsinki, ular uchun

$$\begin{cases} (1) \quad u_1, u_2(x,y) \in C(E^2 \setminus D), \quad u \in C^2(E^2 \setminus \overline{D}) \\ (2) \quad \Delta u_1(x,y) = \Delta u_2(x,y), \qquad (x,y) \in E^2 \setminus \overline{D} \\ (3) \quad u_1, u_2(x,y) = \mu(x,y), \qquad (x,y) \in L \\ (4) \quad |u_i(x,y)| \le C_i = const, \qquad i = 1,2; \quad (x,y) \in E^2 \setminus \overline{D} \end{cases}$$

U holda $E^2 \setminus \overline{D}$ fazoda $u_1(x,y) = u_2(x,y)$ bo‘ladi.

Isbot:

Faraz qilamiz, $u = u_1 + u_2$. Unda v uchun: $v(x,y) = 0, \quad (x,y) \in L, \quad |v(x,y)| \le C = c_1 + c_2$. Isbot qilamizki, $v(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in E^2 \setminus \overline{D}$.

Teskarisini faraz qilamiz: shunday $M^*(x^*, y^*), \; (x^*, y^*) \in E^2$ mavjudki, $v(x^*, y^*) = A > 0$. U holda shunday a-ni olamizki, markazi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtada bo‘lgan L_a aylana to‘lig’icha D da yotsin va shunday R tanlaymizki L_R aylana D sohani ham M^* nuqtani ham o‘zida saqlasin.

Ushbu funksiyani aniqlaymiz:

$$w_R(x,y) = C \frac{\ln \frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}{a}}{\ln \frac{R}{a}}$$

Ko‘rinib turibdiki,

1) $w_R(x,y) \in C(E^2 \setminus D)$

2) $w_R(x,y)$ funksiya $E^2 \setminus \overline{D}$ sohada garmonik funksiya.

3) L chegarada $w_R(x,y) \ge 0$ bo‘ladi.

4) L_R chegarada $w_R(x,y) = C$ bo‘ladi.

Bu yerdan

$$\begin{cases} |v(x,y)| \le w_R(x,y), \quad (x,y) \in L \\ |v(x,y)| \le C = w_R(x,y), \quad (x,y) \in L_R \end{cases}$$

kelib chiqadi.

Maksimumlar prinsipini qo‘llab, ichkaridan L bilan va tashqaridan L_R bilan chegaralangan D_{LL_R} sohada

$$|v(x,y)| \le w_R(x,y), \quad (x,y) \in D_{LL_R}$$

ni hosil qilamiz. Bu yerdan

$$|v(x^*, y^*)| \le w_R(x^*, y^*) = w_R(x,y) = C \frac{\ln \frac{\sqrt{(x^*-x_0)^2 + (y^*-y_0)^2}}{a}}{\ln \frac{R}{a}}.$$

R ni cheksizlikka intiltirib,

$$|v(x^*, y^*)| \le w_\infty(x^*, y^*) = 0$$

ni hosil qilamiz.

Bu esa, $v(x^*, y^*) = A > 0$ deb qilgan farazimiz noto‘g’riligini isbotlaydi. Demak, $v(x,y) \equiv 0$ ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.*

(4) shart muhim ekanini ko‘rsatuvchi misol keltiramiz:

Misol:

Faraz qilaylik:

$$D: x^2 + y^2 < b^2$$
$$Д: x^2 + y^2 = b^2$$
Dirixlening tashqi masalasini quyidagicha qo‘yamiz:
$$\begin{cases} \Delta u \equiv 0, \quad E^2 \setminus \overline{D} \\ u(x, y) = C = const, \quad (x, y) \in L \end{cases}$$
Osongina tekshirib ko‘rish mumkinki, $u_1(x, y) = C$ va $u_2(x, y) = C + \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{b}$ funksiyalar berilgan masalaning yechimlari bo‘ladi. Ammo u_2 funksiya hyech qanday o‘zgarmas bilan chegaralanmagan, shuning uchun ham masalaning bunday qo‘yilishida yagonalik buzilyapti.

2. Neymanning ichki masalasi.

Ta’rif: Agar E^3 fazoda aniqlangan $u(x, y, z)$ funksiya quyidagi 3 ta [3.4] masalaning shartlarini qanoatlantirsa, shunda u Neyman ichki masalasining yechimi deyiladi:

$$[3.4] \qquad \begin{cases} (1) \quad u(x, y, z) \in C^1(\overline{\Omega}), & u \in C^2(\Omega) \\ (2) \quad \Delta u(x, y, z) = 0, & (x, y, z) \in \Omega \\ (3) \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = \nu(x, y, z), & (x, y, z) \in \Sigma \end{cases}$$

Shunga diqqatingizni qaratingki, u funksiya $\overline{\Omega}$ sohada va uning 1-tartibli hosilasilalari bilan birgalikda uzluksiz bo‘lishi kerakligi talab qilinmoqda, va bu bilan Dirixle masalasidan farq qiladi. Chunki, Dirixle masalasida faqat u funksiyaning uzluksizligi talab etilgan edi.

3. Neymanning ichki masalasi yechilishi uchun zaruriy shartlar.

Faraz qilamiz, u funksiya [3.4] masalaning yechimi va v – ixtiyoriy ikki marta differensiallanuvchi funksiya bo‘lsin. Bu funksiyalar uchun Grinning 2-formulasini qo‘llaymiz:
$$\iiint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) d\tau = \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$$
$v \equiv 1$ bo‘lganda quyidagi hosil bo‘ladi:
$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \iint_{\Sigma} \nu(x, y, z) d\sigma = 0 \qquad (3.6)$$
(3.6) tenglik Neyman ichki masalasining yechilishi uchun zaruriy shart deyiladi.

Neyman masalasi yechimining yagonaligini isbotlaymiz. Osongina ko‘rish mumkinki, agar u funksiya ([3.4]) masalaning yechimi bo‘lsa, unda $(u + const)$ ham yechimdir. Buni trivial bir qiymatli emaslik deb ataymiz.

Faqat shunday bir qiymatli emaslik bo‘lishi mumkinligini isbotlaymiz.

4. Yechimning yagonaligi.

3.6. teorema (yagonalik teoremasi): Faraz qilamiz, $u_i(x, y, z), \quad i = 1,2$ uchun:

1) $u_i \in C^1(\overline{\Omega})$

2) Ω sohada u_i garmonik funksiya

3) $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = \nu(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Sigma$

o‘rinli.

U holda $u_1 - u_2 \equiv const$ (bu shuni bildiradiki, $\nu \equiv 0$ da, faqatgina trivial yechim mavjud).

Isbot: Grinning 1-formulasini ixtiyoriy ikki marta differesiallanuvchi u va v funksiyalar uchun yozamiz:

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(u\Delta v - grad^2 u\right)d\tau = \iint\limits_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma$$

$u_1 - u_2$ funksiya [3.4] masalaning $v \equiv 0$ bo‘lgan holdagi yechimidir. Grin formulasida $u = v = u_1 - u_2$ deylik. Unda

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(u\Delta v - grad^2 u\right)d\tau = \iint\limits_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma$$

$$\Rightarrow \iiint\limits_{\Omega}\left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right)d\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad u_x \equiv u_y \equiv u_z \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad u \equiv const$$

Teorema isbotlandi.*

5. Laplas tenglamasi uchun Grin funksiyasi va uning xossalari.

E^3 fazoda aniqlangan garmonik u funksiya uchun Grinning 3-formulasini yozib olamiz:

$$u(M) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left[\frac{1}{R_{MP}}\frac{\partial u}{\partial n} - u(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\right]d\sigma_P \qquad (3.7)$$

Bu yerda - $P \in \Sigma, \quad M \in \Omega$.

Demak biz $u(M)$ funksiya uchun ifoda oldik. Uni Dirixle va Neyman masalalari uchun qo‘llashga harakat qilamiz. Grinning 2-formulasini yozib olamiz. Bunda v fuknsiya Ω sohada garmonik bo‘lgan funksiya:

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(u\Delta v - grad^2 u\right)d\tau = \iint\limits_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma$$

u va v funksiyalar garmonik, demak,

$$\iint\limits_{\Sigma}\left[u(P)\frac{\partial v}{\partial n} - v(P)\frac{\partial u}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\right]d\sigma_P = 0 \qquad (3.8)$$

(3.7) formuladan (3.8) formulani ayirib,

$$u(M) = \iint\limits_{\Sigma}\left[\left(\frac{1}{4\pi} + u(P)\right)\frac{\partial v}{\partial n}(P) - u(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi R_{MP}} + v(P)\right)\right]d\sigma_P$$

ni hosil qilamiz.

$$G(M,P) = \frac{1}{4\pi R_{MP}} + v(P) \text{ deylik.}$$

Unda

$$u(M) = \iint\limits_{\Sigma}\left[G(M,P)\frac{\partial v}{\partial n}(P) - u(P)\frac{\partial G}{\partial n}(M,P)\right]d\sigma_P$$

Demak, $u(M)$ funksiya uchun ixtiyoriy garmonik funksiya ishtirok etgan yangi formula hosil qildik. Uni o‘zgartirib, turli yechimlarni hosil qilish mumkin.

Misol:

1) Agar $G\big|_{P\in\Sigma} = 0$ bo‘lsa, u holda

$$u(M) = -\iint\limits_{\Sigma} u(P)\frac{\partial G}{\partial n}(M,P)d\sigma_P$$

Biz [3.1] Dirixle masalasining yechimi uchun formula hosil qildik:

2) Agar $\tilde{G}: \left.\frac{\partial \tilde{G}}{\partial n}\right|_{P\in\Sigma} = 0,$ bo‘lsa, u holda

$$u(M) = \iint_{\Sigma} \tilde{G}(M,P)\frac{\partial v}{\partial n}(P)d\sigma_P$$

Biz [3.4] Neyman masalasi yechimi uchun formula hosil qildik.

Demak, biz Dirixle va Neyman masalalarini yechishni ularga mos Grin funksiyalariga olib kelib soddalashtirishga, osonlashtirishga erishdik. Endi lo‘nda ta’rifdan beramiz.

Ta’rif: Agar

1) $\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \zeta^2} = 0, \quad \forall P \in \Omega, \quad P \neq M$

2) $G(M,P)$ quyidagi ko‘rinishda:

$G(M,P) = \frac{1}{4\pi R_{MP}} + v$, bu yerda v - Ω sohadagi garmonik funksiya.

3) $\left.G(M,P)\right|_{P\in\Sigma} = 0$

v funksiyaga quyidagi talablar qo‘yiladi:

v - Ω sohada garmonik funksiya

$\left.v\right|_{\Sigma} = -\frac{1}{4\pi R_{MP}}$ bo‘lsa, shunda $G(M,P): M(x,y,z), \quad P(\xi,\eta,\zeta) \in \overline{\Omega}$ funksiya Dirixle ichki masalasi uchun Grin funksiyasi deyiladi.

1.3.2-a. Frontal so‘rov uchun savollar

1. Dirixle ichki masalasi uchun Grin funksiyasining ta’rifi?

1.3.2-b. Blits-so‘rov uchun savollar

2. Dirixle tashqi masalasining yechimining ta’rifi?
3. Neymanning ichki masalasining ta’rifi?

1.3.2-c. Og’zaki so‘rov uchun savollar

1. Yagonalik teoremasi?
2. Yechimning yagonalik teoremasi?

1.3.3. Mustaqil ish uchun topshiriqlar

- *takrorlash va mashqlar*: takrorlash, o‘z-o‘zini tekshirish, tahlil, qayta ishlash, mustahkamlash, eslab qolish, chuqurlashtirish;
- *yangi materiallarning mustaqil o‘zlashtirish*: yangi adabiy va internet materiallar, konspekt qo‘shimchasi; mustaqil iboralar tuzish;
- *ilmiy xaraktyerdagi ishlar*: muammoli holatlar, testlar, savollar, topshiriqlar tuzish; topshiriqlarni bajarish.

1.3.4. Kartochkalar uchun testlar

1.3.5. ekranga tayanch materiallarni ko‘rsatish(slaydlar)

- Prezentatsiya

1.3.6. Tavsiya etilgan adabiyotlar

Asosiy

1. *Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O'zbekistan», 2002, 448 b.*
2. *Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,*
3. *Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.*
4. *Bisadzs L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.*
5. *Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.*

Qo'shimcha

1. *Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.*
2. *Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.*
3. *Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.*
4. *Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.*
5. *Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.*
6. *Mixlnn S.G. Leksii po lineynыm integralnыm uravneniyam. M. 1959.*
7. *Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.*
8. *Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.*
9. *Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.*

1.4. O'qitish usullari qoidalari

1.4.1. Aqliy hujum qoidalari

- Hech qanday o'zaro baholash va tanqid;
- Taklif etilayotgan g'oyalarni baholashdan o'zingni tiy, hatto ular fantastic va iloji yo'q bo'lsa ham – hammasi mumkin;
- Tanqid qilma – hamma aytilgan g'oyalar birhirda;
- Bayon qiluvchi gapini bo'lma;
- Izoh berishdan o'zingni tiy;
- Maqsad bu - miqdor;
- Qancha g'oyalar ko'p bo'lsa chuncha yaxshi: yangi va zarur g'oya tug'ulishi imkoniyati ko'proq
- Agar g'oyalar takrorlansa o'ksinma,
- Tasavvo'ringga erk ber;
- Senda yaralgan g'oyalarni tashlama, agal ular sening nazaringda qabul qilingan sxemaga tegishli bo'lmasa ham;
- Bu muammo aniq usullar bilan yechiladi deb o'ylama.

1.4.2. "Insert" texnikasi qoidalari

- Matndi o‘qib, ularda savollat tug’dirayotgan joylarni, ularni bilimlariga mos kewlayotgan va mos kelmayotgan joylarni qalam bilan belgilab qo‘yiladi;
- “Insert” jadvalini quyidagi belgilashlar bilan to‘ldirish:
  Agar «!» bo‘lsa siz o‘z bilimingizga yoki siz o‘ylagan fikrga to‘g’ri kelayotganini o‘qiyapsiz;
  Agar «–» bo‘lsa siz o‘z bilimingizga yoki tyo‘g’ri deb o‘ylaganingizga mutlaqo zid bo‘lganini o‘qiyapsiz;
  Agar «+» bo‘lsa siz o‘qityotganingiz siz uchun yangilik;
  Agar «?» bo‘lsa, siz o‘qiyotganingiz siz uchun tushunarsiz yoki siz bu savolga yanada ko‘proq ma`lumotlar olishni istaysiz.

1.4.3. Guruhlarda ishlash qoidalari

- Hamma o‘z do‘stlarini tinglashi kerak, unga yaxshi munosabatda bo‘lib hurmar ko‘rsatishi kerak;
- Hamma aktiv harakat qilishi lozim; berilgan topshiriqqa nisbatan birgalikda va javobgarlik bilan ishlashi kerak;
- Har kim o‘ziga kerak paytda yordam so‘rashi kerak;
- Har kim undan yordam so‘ralganda yordam ko‘rsatishi kerak;
- Guruhning ish natijalarini baholashda ishtirok etishi lozim;
- Biz bir kemadamiz, o‘zgalarga yordam berib o‘zimiz o‘rganamiz, shuni har kim tushunishi lozim;

Mavzu 13. “Grin funksiyaning xossalari. Ikkilangan qatlam potensiali. Potensial xossalari. Fredgolm alternativasi.”

Ma`ruzaga reja-topshiriqlar

Fan: Matematik fizika tenglamalari

O‘quv soati: 2 soat (ma`ruza);

O‘quv mashg’uloti turi: ma`ruza; yangi bilimlarni mustahkamlash va o‘rganish.

Ma`ruza rejasi:

1. Grin funksiyaning 1-chi xossasi
2. Grin funksiyaning 2-chi xossasi
3. Oddiy va ikkilangan qatlam potensiali. Birlik zichlik bilan berilgan ikkilangan qatlam potensiali

O‘quv mashg’uloti maqsadi:

O‘quv fani to‘g’risida umumiy ta`surotlar berish, Xususiy hosilali tenglamalarva keyinchalik kasbiy faoliyatidagi roli.

O‘quv mashg’uloti masalalari:

- *O‘rgatuvchi*: talabalarda qabul qilish faoliyatini tashkil qilish, yangi materialni boshlang’ich esda qoldirish va anglash; Matematik fizika tenglamalarining terminlari, iboralarini xarakterlovchi elementlar; talabalarning matematik firlashini rivojlantirish muammoli masalalarni yechimini mahoratini oshirish; matematik masalalarni yechishda matematik simvollarning hususiyatlari bilan tanishtirish;
- *Rivojlantiruvchi*: kitob matni bilan ishlay bilishligi – mag’zlarini tanlab olish, tahlil qilish; gaplar tuzish, hulosa chiqarish, materialni talabalarning izlash faoliyatini stimullashtirish; hususiydan umumiy holga o‘tish usuli bilan tekshirish; tekshirish natijalarini tahlil qilib va uni umumlashtira olishini rivojlantirish; analitik-sintetik

faoliyatning mantiqiy fikrlashini qo‘llash; talabalarning ijodiy mahoratini shakillantirish;

- *Tarbiyalovchi:* aktiv faoliyatga, mustaqil ishga jalb qilish; guruhlarda ishlash qoidalariga rioya qila olish; fanni o‘rganishga qiziqishni rivojlantirish; Matematik fizika tenglamalarini matematik-komunikativ kursni bir qismi sifatida tassavur berish; javobgarlik tuyg’ularini tarbiyalash, mehnatsevarlik, individual ishni jamoaviy ish bilan biriktirish, intizomlashtirish.

O‘qitish texnologiyasi:

- *O‘qutish usullari*: instruktaj; Ma`ruza, aqliy hujum, “Insert” texnikasi;
- *O‘qitish shakillari*: frontal; jamoaviy;
- *O‘qitish vositalari*: Ma`ruza matni; jadvallar, multimediya;
- *O‘qitish sharoitlari*: texnik jihozlashtirilgan auditoriya;
- *Baholash va monitoring*: o‘g’zaki savol-javob, blits-so‘rov.

Pedagogik masalalar:

- Fanning masalalari va uning o‘quv fanlar sistemasidagi o‘rni va roli bilan tanishtirish;
- O‘quv fanning tuzulmasi va tavsiya etiladigan o‘quv-metodik adabiyotlarni tasvirlash;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlarini ochib berish, baholash shakli va muddatlari;
- Fan ma`ruzasi paytida o‘qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy bosqichlarini xarakterlab berish va umumiy sxemasini tushuntirish.
- O‘qitish texnologiyasi rivojlanishi perspektivasini xarakterlab berish;

O‘quv faoliyati natijalari:

- Fan ma`ruzasi masalalari, maqsadlari va nomlari shakillanadi;
- Xususiy hosilali tenglamalardoirasidagi yutuqlar yoritiladi;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlari hamda baholash shakli va muddatlari aytiladi
- Fan ma`ruzasida o‘qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy sxemasini kengaytirib xatakterlab beradi;
- Fanning asosiy ta`riflarini beradi, Xususiy hosilali tenglamalarfani ma`ruzalarining asosiy yo‘nalishlari beriladi;
- Nazariy bilimlarning to‘liqligi, sistemaliyligi va harakatliyligi;
- Amaliy mag’ulotlarni bajarishda o‘rganilgan iboralarbilan ishlay olishligi;

- **1.2. Ma`ruzaning xronologik xaritasi**

- **1 bosqich. O‘quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa):**

- *O‘qituvchining faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (davomat, konspektning borligi; o‘ziga ishonch, aniqligi,); kerakli materiallarni tarqatish (konspekt, tarqatma materiallar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadini bayon qilish; o‘quv mashg’ulotning rajasi bilan tanishtirish; kalit iboralar va so‘zlar, kategoriyalar; internet saytlari va adabiyotlar ro‘yhati; o‘quv natijalari haqida aytish;
- *Talabalar faoliyati*: o‘quv joyini tayyorlash (talabalar borligi; tashqi ko‘rinish; o‘quv materiallar va qo‘llanmalar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadi bilan tanishish; o‘quv materialini qabul qilishga tayyorgarlik ko‘rish;
- *Shakillar*, *usular*, *uslublar*: instruktaj; frontal so‘rov; mustahkamlovchi so‘rov.

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa):

- *O‘qituvchining faoliyati*: mavzuga kiritadi; yangi mavzuga doir o‘tgan fanlar va mashg’ulotlarning mavzularini eslashga chorlaydi; ma`ruza matnini tarqatadi, tanishishni taklif etadi, “Insert” usuli bilan belgilar qo‘yishni taklif etadi; birinchi savol bo‘yicha matn o‘qiladi; qo‘shimcha o‘quv materiallarini aytib boorish va tushuncha berish; natural obektlarni namnoyon qilish va izohlash; tushunarsiz savollarni aniqlash va tushintirish; birinchi savol bo‘yicha nazar (shunday qilib qolgan savollarga ham);
- *Talabalar faoliyati*: yangi mavzuda doir oldingi mashg’ulotlarda va fanlarda olgan bilimlarni mustahkamlaydi,; har bir kalit ibora va terminlarni eshitib, yozib borib, konspekt qilib aytib borishadi; “Insert” usuli bilan belgilan o‘qiydilar, aniqlik kiritadilar, savollar beradilar va o‘zaro;
- *Shakillar, usular, uslublar*: frontav so‘rov blits-so‘rov; aqliy hujum, “Insert” texnikasi.

3 bosqich. Yakunlovchi qism (10 daqiqa)

- *O‘qituvchining faoliyati:* mavzu bo‘yicha hulosa qilish, talabalarning e`tiborlarini asosiylarda jalb qilish; qilingan ishning muhimligini aytib o‘tish; alohida talabalarning bajarilgan ishlarini baholash; o‘zaro baholashning natijalarini chiqarish; o‘quv mashg’ulotning yutuqlik darajasini baholash va tahlil qilish; mustaqil ish uchun topshiriqlar; baho ko‘rsatgichlari va me`zonlari;
- *Talabalar faoliyati: ishning* tahlili; natijalarni olish; texnologik bilimlarni qo‘llash; o‘zaro baholashni o‘tkazish, yo‘l qo‘yilgan hatolar bo‘yicha tahlil va aniqlik kiritish; mustaqil ish topshiriqlarini yozib olish;
- *Shakillar, usular, uslublar*: guruhlarda ishlash, kartochkalarda topshiriqlar.

1.3. O‘quv-metodik materiallar

Ma`ruza rejasi:

1. Grin funksiyaning 1-chi xossasi
2. Grin funksiyaning 2-chi xossasi
3. Oddiy va ikkilangan qatlam potensiali. Birlik zichlik bilan berilgan ikkilangan qatlam potensiali

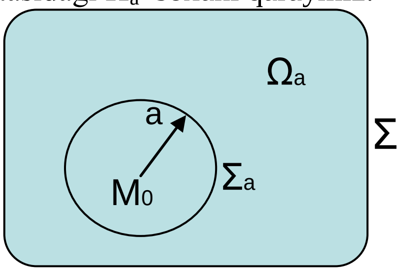
Tayanch iboralar: Grin funksiyasi, 1-chi xossa, 2-chi xossa, oddiy va ikkilangan qatlam potensiali.

1.3.1. Ma`ruza matni

1. Grin funksiyaning 1-chi xossasi

$$G(M,P) > 0, \quad M,P \in \Omega,\ P \neq M.$$

Isbot: Ω ichida biror $M_0(\cdot)$ nuqtani olamiz. Yetarlicha kichik a radiusi va markazi M_0 da bo‘lgan sferani xamda Σ va Σ_a urtasidagi Ω_a soxani qaraymiz.



Ω_a soxada M_0, R o‘zgaruvchilarga bog’liq bo‘lgan Grin funksiyani ko‘rib chikaylik. U xolda Ω_a garmonikdir. Demak, max kiymat prinsipining barcha shartlari bajariladi. G,(M_0, P) uchun ushbu ifoda o‘rinli: (3.9)

$$G(M_0,P) = \frac{1}{4\pi R_{M_0 p}} + v(P), \quad \text{bu yerda } \frac{1}{4\pi R_{M_0 P}} \xrightarrow{R\to 0} \infty$$

v esa Ω da garmonik (demak chegaralangan) funksiya bo‘lgani uchun, shunday a ni olish mumkinki, $G \mid P \in \sum_a < 0$ o‘rinli bo‘ladi.

$G(M,P) \mid P \in \Sigma = 0$ bo‘lgani uchun $G(M_0, P) \geq 0$ ifoda Ω_a dagi $\forall P$ uchun o‘rinli.

G funksiya konstanta bo‘lmagani uchun, u Ω_a ichida minimumga (ya’ni 0 kiymatga) erishmaydi. U xolda (a ni ∞ kichraytirish mumkin bo‘lgani uchun) Ω dagi ixtiyoriy nuqtalar uchun P≠M G(M,P)>0 o‘rinli. Tasdiq o‘rinli.

2. Grin funksiyaning 2-chi xossasi

$$G(M,P) = G(P,M) \qquad \forall M,P \in \Omega, M \neq P. \qquad (3.10)$$

Isbot: M_1, M_2 nuqtalarni fiksirlaymiz – ular Ω dagi 2 ta har xil ixtiyoriy nuqtalar. $G(M_1,M_2) = G(M_2,M_1)$ ni isbotlash yetarli.

Belgilash kiritamiz: $u(\xi,\eta,\zeta) = G(M_1,P)$;

$$v(\xi,\eta,\zeta) = G(M_2 P).$$

$\sum^1_\varepsilon$ yetarlicha kichik ε radiusli sfera (**Ω^1_ε** – unga mos shar) bulib, **M_1** (·) ni o‘rab tursin, **$\sum^2_\varepsilon$, Ω^2_ε** esa mos xolda **M_2 (·)** uchun sfera va shar bo‘lsin. **Ω_ε** - Ω soxaning ichki qismi bo‘lsin va **Ω^2_ε, Ω^1_ε** sharlar bu soxaga tegishli bo‘lmasin. u va v funksiyalar uchun Grinning 2 – formulasini yozib olamiz (Grin aniqlanishiga ko‘ra **Ω_ε** da ular garmonik funksiyalar) va quyidagiga ega bo‘lamiz.

$$\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}(u\Delta v - v\Delta u)dr = \iint\limits_{\Sigma}(u\frac{dv}{dn} - v\frac{dv}{dn})d\sigma + \iint\limits_{\Sigma^1_\varepsilon}(u\frac{dv}{dn} - v\frac{du}{dn}) +$$

$$+\iint\limits_{\Sigma^2_e}(u\frac{dv}{dn} - v\frac{du}{dn})d\sigma \Rightarrow \left\{G \middle| p \in \Sigma \Rightarrow u\middle|\Sigma = v\middle|\Sigma = 0\right\} \Rightarrow$$

$$\iint\limits_{\Sigma^1_e}\left[G(M_1,P)\frac{\partial G(M_2,P)}{\partial n} - G(M_2 P)\frac{\partial G(M_1,P)}{\partial n}\right]d\sigma_p +$$

$$+\iint\limits_{\Sigma^2_e}\left[G(M1,P)\frac{\partial G(M_2,P)}{\partial n} - G(M_2,P)\frac{\partial G(M_1,P)}{\partial n}\right]d\sigma_p = 0 \qquad (3.11)$$

1 – integralni 1- qo‘shiluvchini ko‘rib chiqamiz. E –> 0 da (3.9) dagi $G(M_2P)$ funksiya ifodasida qatnashuvchi u va v funksiyalar $\sum^1_\varepsilon$ da garmonik va chegaralangan funksiyalar (Masalan: $\frac{\partial G(M_2,P)}{\partial n}$ S_1 va S_2 konstantalar bilan chegaralangan). U xolda ushbuga ega bo‘lamiz;

$$\iint\limits_{\Sigma^1_e}G(M_1,P)\frac{\partial G(M_2,P)}{\partial n}d\sigma_p \leq \iint\limits_{\Sigma^1_e}\left|\frac{1}{4\pi R_{M_1P}}\right|\left|\frac{\partial G(M_1,P)}{\partial n}\right|d\sigma_p \leq$$

$$\leq\left|\frac{C_1}{4\pi R_{M_1P}} - c_1c_2\right|d\sigma = \iint\limits_{\Sigma^1_e}\left|\frac{c_1}{4\pi\varepsilon} + c_1c_2\right|d\sigma_p = c_1\varepsilon + 4\pi c_1c_2\varepsilon^2 \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

2-qo‘shiluvchi esa murakkabrok. $G(M_1,P)$ funksiya uchun (3,9) ifodadan foydalanib, uni 2 ta integralga ajratamiz:

$$\iint\limits_{\Sigma^1_e}G(M_2,P)\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{4\pi R_{M_1P}})d\sigma + \iint\limits_{\Sigma^1_e}G(M_2,P)\frac{\partial v}{dn}d\sigma_p$$

ε kichrayishi bilan 2 – integral ham 0 ga intiladi. (yuqorida keltirilgan tushuntirishlarga ko‘ra)

$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi R_{M_1P}}\right)$ ko‘paytuvchini tekshiramiz. Ta’rifga kura: $\frac{\partial f}{\partial n} = (\vec{n}, grad\ f)$. Bizning xolda

$$n=\left\{-\frac{(\xi-x)}{R_{M_1P}},-\frac{(\eta-y)}{R_{M_1P}},-\frac{(\zeta-z)}{R_{M_1P}}\right\}, grad\frac{1}{R_{M_1P}}=\left\{-\frac{(\xi-x)}{R^3{}_{M_1P}},-\frac{(\eta-y)}{R^3{}_{M_1P}},-\frac{(\zeta-z)}{R^3{}_{M_1P}}\right\}$$

Bundan kelib chikadiki,

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{M_1P}}\right)=\frac{1}{4\pi R^2{}_{M_1P}}\Rightarrow\iint_{\Sigma_e^1}G(M_2P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi R_{M_1P}}\right)\partial\sigma_p=$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\iint_{\Sigma_e^1}G(M_2P)\partial\sigma_p=$$

$$=\frac{G(M_2P')}{4\pi\varepsilon^2}\iint_{\Sigma_e^1}\partial\sigma\xrightarrow{\varepsilon\to 0}G(M_2,M_1)$$

(3.11) formuladagi 2 – integral birinchisidan o‘zgaruvchini almashtirish va ishorasini almashtirish orkali xosil qilinadi. Shunga uxshash fikr yuritib, u G (M_1,M_2) ga intilishni topamiz. Bu yerdan quyidagi formulaga ega bo‘lamiz:

$$G(M_2,M_1)-G(M_1,M_2)=0$$

Bu formula **Ω** dagi barcha xar xil M_1,M_2 (·) uchun to‘g’ridir. Tasdiq isbotladi.

3. Oddiy va ikkilangan qatlam potensiali. Birlik zichlik bilan berilgan ikkilangan qatlam potensiali

Shunlay qilib, tekislik va fazodagi Laplas tenglamasining yechimlari quyidagicha:

$$E^3:\frac{1}{R_{MP}};\quad E^2:\ln\frac{1}{\rho_{MP}},$$

Bu yerda M(x,y,z)- fiksirlangan nuqta, $P(\xi,\eta,\zeta)$ - o‘zgaruvchi. Faraz qilaylik ∑ bu M nuqtani o‘z ichiga oladigan **Ω** soxani chegaralab turuvchi qandaydir yopiq sirt bo‘lsin. $\mathbf{E^3}$ da quyidagi funksiyani qarab chiqaylik:

$$v(M)=\iint_{\Sigma}g(P)\frac{1}{R_{MP}}\partial\sigma p$$

va unga **oddiy qatlam potensial** deb nom qo‘yamiz. Va shu bilan bir qatorda quyidagi funksiyani qaraymiz

$$u(M)=-\iint_{\Sigma}f(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\partial\sigma p$$

va bu funksiyaga **ikkilangan katlamning potensiali** degan nom qo‘yamiz. Qo‘yidagi narsani ko‘rsatamiz

$$\forall M\notin\Sigma\quad \partial a\quad \Delta v\equiv\Delta u\equiv 0$$

$$\Delta_M v=\Delta_M\iint_{\Sigma}g(P)\frac{1}{R_{MP}}d\sigma_P=$$

$$=\iint_{\Sigma}g(P)\Delta\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)d\sigma_P=0$$

$$\text{чунки}\quad\Delta\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\equiv 0$$

Ikkilangan qatlam potensiali uchun natija xuddi shunaqa:

$$\Delta_M u=\Delta_M\iint_{\Sigma}f(P)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R_{MP}}d\sigma_P=$$

$$=\iint_{\Sigma}f(P)\frac{\partial}{\partial n}\Delta\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)d\sigma_P=0$$

Tekislikda potensial tushunchasini aniqlaylik. L – M (x,y) (·) ni o‘rab turuvchi yopik egri chiziq bo‘lsin:

$$v(M)=\int_L g(P)\ln\frac{1}{\rho MP}dl_p$$ oddiy katlam potensiali.

$$u(M)=-\int_L f(P)\frac{\partial}{\partial n}(\ln\frac{1}{\rho MP})dl_P$$ ikkilangan katlam potensiali.

Shunday qilib, potensiallar garmonik funksiyalardir. Bundan kelib chikadiki, ularni, ba’zi masalalarni yechishda, masalan Neyman masalasini yechishda qo‘llash mumkin, buning uchun mos g va f funksiyalarni tanlaymiz va bu funksiyalarni mos potensiallarning **zichliklari** deb ataymiz.

1.3.2-a. Frontal so‘rov uchun savollar

1. Grin funksiyaning 1-chi xossasi
2. Grin funksiyaning 2-chi xossasi

1.3.2-b. Blits-so‘rov uchun savollar

1.3.2-c. Og’zaki so‘rov uchun savollar

1. Oddiy va ikkilangan qatlam potensiali.

1.3.3. Mustaqil ish uchun topshiriqlar

- *takrorlash va mashqlar*: takrorlash, o‘z-o‘zini tekshirish, tahlil, qayta ishlash, mustahkamlash, eslab qolish, chuqurlashtirish;
- *yangi materiallarning mustaqil o‘zlashtirish*: yangi adabiy va internet materiallar, konspekt qo‘shimchasi; mustaqil iboralar tuzish;
- *ilmiy xaraktyerdagi ishlar*: muammoli holatlar, testlar, savollar, topshiriqlar tuzish; topshiriqlarni bajarish.

1.3.4. Kartochkalar uchun testlar

1.3.5. ekranga tayanch materiallarni ko‘rsatish(slaydlar)

- Prezentatsiya

1.3.6. Tavsiya etilgan adabiyotlar

Asosiy

1. *Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O‘zbekistan», 2002, 448 b.*
2. *Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,*
3. *Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.*
4. *Bisadzs L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.*
5. *Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.*

Qo‘shimcha

1. *Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.*

2. *Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.*
3. *Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.*
4. *Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.*
5. *Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.*
6. *Mixlnn S.G. Leksii po lineynыm integralnыm uravneniyam. M. 1959.*
7. *Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.*
8. *Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.*
9. *Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.*

1.4. O‘qitish usullari qoidalari

1.4.1. Aqliy hujum qoidalari

- Hech qanday o‘zaro baholash va tanqid;
- Taklif etilayotgan g’oyalarni baholashdan o‘zingni tiy, hatto ular fantastic va iloji yo‘q bo‘lsa ham – hammasi mumkin;
- Tanqid qilma – hamma aytilgan g’oyalar birhirda;
- Bayon qiluvchi gapini bo‘lma;
- Izoh berishdan o‘zingni tiy;
- Maqsad bu - miqdor;
- Qancha g’oyalar ko‘p bo‘lsa chuncha yaxshi: yangi va zarur g’oya tug’ulishi imkoniyati ko‘proq
- Agar g’oyalar takrorlansa o‘ksinma,
- Tasavvo‘ringga erk ber;
- Senda yaralgan g’oyalarni tashlama, agal ular sening nazaringda qabul qilingan sxemaga tegishli bo‘lmasa ham;
- Bu muammo aniq usullar bilan yechiladi deb o‘ylama.

1.4.2. “Insert” texnikasi qoidalari

- Matndi o‘qib, ularda savollat tug’dirayotgan joylarni, ularni bilimlariga mos kewlayotgan va mos kelmayotgan joylarni qalam bilan belgilab qo‘yiladi;
- “Insert” jadvalini quyidagi belgilashlar bilan to‘ldirish:
  Agar «!» bo‘lsa siz o‘z bilimingizga yoki siz o‘ylagan fikrga to‘g’ri kelayotganini o‘qiyapsiz;
  Agar «–» bo‘lsa siz o‘z bilimingizga yoki tyo‘g’ri deb o‘ylaganingizga mutlaqo zid bo‘lganini o‘qiyapsiz;
  Agar «+» bo‘lsa siz o‘qityotganingiz siz uchun yangilik;
  Agar «?» bo‘lsa, siz o‘qiyotganingiz siz uchun tushunarsiz yoki siz bu savolga yanada ko‘proq ma`lumotlar olishni istaysiz.

1.4.3. Guruhlarda ishlash qoidalari

- Hamma o‘z do‘stlarini tinglashi kerak, unga yaxshi munosabatda bo‘lib hurmar ko‘rsatishi kerak;

- Hamma aktiv harakat qilishi lozim; berilgan topshiriqqa nisbatan birgalikda va javobgarlik bilan ishlashi kerak;
- Har kim o‘ziga kerak paytda yordam so‘rashi kerak;
- Har kim undan yordam so‘ralganda yordam ko‘rsatishi kerak;
- Guruhning ish natijalarini baholashda ishtirok etishi lozim;
- Biz bir kemadamiz, o‘zgalarga yordam berib o‘zimiz o‘rganamiz, shuni har kim tushunishi lozim;

Ma’ruza № 14
“Potensial xossalari. Fredgolm alternativasi.”

Ma`ruzaga reja-topshiriqlar

Fan: Matematik fizika tenglamalari

O‘quv soati: 2 soat (ma`ruza);

O‘quv mashg’uloti turi: ma`ruza; yangi bilimlarni mustahkamlash va o‘rganish.

Ma`ruza rejasi:

1. Ikkilangan qatlam potensiali
2. Potensiallar xossalari.
3. Dirixlening ichki masalasini Fredgolmning 2-chi turdagi integral sistemasiga keltirish.
4. Fredgolm alternativasi.

O‘quv mashg’uloti maqsadi:

O‘quv fani to‘g’risida umumiy ta`surotlar berish, Xususiy hosilali tenglamalarva keyinchalik kasbiy faoliyatidagi roli.

O‘quv mashg’uloti masalalari:

- *O‘rgatuvchi*: talabalarda qabul qilish faoliyatini tashkil qilish, yangi materialni boshlang’ich esda qoldirish va anglash; Matematik fizika tenglamalarining terminlari, iboralarini xarakterlovchi elementlar; talabalarning matematik firlashini rivojlantirish muammoli masalalarni yechimini mahoratini oshirish; matematik masalalarni yechishda matematik simvollarning hususiyatlari bilan tanishtirish;
- *Rivojlantiruvchi*: kitob matni bilan ishlay bilishligi – mag’zlarini tanlab olish, tahlil qilish; gaplar tuzish, hulosa chiqarish, materialni talabalarning izlash faoliyatini stimullashtirish; hususiydan umumiy holga o‘tish usuli bilan tekshirish; tekshirish natijalarini tahlil qilib va uni umumlashtira olishini rivojlantirish; analitik-sintetik faoliyatning mantiqiy fikrlashini qo‘llash; talabalarning ijodiy mahoratini shakillantirish;
- *Tarbiyalovchi:* aktiv faoliyatga, mustaqil ishga jalb qilish; guruhlarda ishlash qoidalariga rioya qila olish; fanni o‘rganishga qiziqishni rivojlantirish; Matematik fizika tenglamalarini matematik-komunikativ kursni bir qismi sifatida tassavur berish; javobgarlik tuyg’ularini tarbiyalash, mehnatsevarlik, individual ishni jamoaviy ish bilan biriktirish, intizomlashtirish.

O‘qitish texnologiyasi:

- *O‘qutish usullari*: instruktaj; Ma`ruza, aqliy hujum, “Insert” texnikasi;
- *O‘qitish shakillari*: frontal; jamoaviy;
- *O‘qitish vositalari*: Ma`ruza matni; jadvallar, multimediya;
- *O‘qitish sharoitlari*: texnik jihozlashtirilgan auditoriya;

- *Baholash va monitoring*: o‘g’zaki savol-javob, blits-so‘rov.

Pedagogik masalalar:

- Fanning masalalari va uning o‘quv fanlar sistemasidagi o‘rni va roli bilan tanishtirish;
- O‘quv fanning tuzulmasi va tavsiya etiladigan o‘quv-metodik adabiyotlarni tasvirlash;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlarini ochib berish, baholash shakli va muddatlari;
- Fan ma`ruzasi paytida o‘qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy bosqichlarini xarakterlab berish va umumiy sxemasini tushuntirish.
- O‘qitish texnologiyasi rivojlanishi perspektivasini xarakterlab berish;

O‘quv faoliyati natijalari:

- Fan ma`ruzasi masalalari, maqsadlari va nomlari shakillanadi;
- Xususiy hosilali tenglamalardoirasidagi yutuqlar yoritiladi;
- Fan sohasida metodik va tashkiliy xususiyatlari hamda baholash shakli va muddatlari aytiladi
- Fan ma`ruzasida o‘qitish jarayonini tashkil qilishning umumiy sxemasini kengaytirib xatakterlab beradi;
- Fanning asosiy ta`riflarini  beradi, Xususiy hosilali tenglamalarfani ma`ruzalarining asosiy yo‘nalishlari beriladi;
- Nazariy bilimlarning to‘liqligi, sistemaliyligi va harakatliyligi;
- Amaliy mag’ulotlarni bajarishda o‘rganilgan iboralarbilan ishlay olishligi;

- **1.2. Ma`ruzaning xronologik xaritasi**

- **1 bosqich. O‘quv mashg’ulotiga kirish (10 daqiqa):**

- *O‘qituvchining faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (davomat, konspektning borligi; o‘ziga ishonch, aniqligi,); kerakli materiallarni tarqatish (konspekt, tarqatma materiallar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadini bayon qilish; o‘quv mashg’ulotning rajasi bilan tanishtirish; kalit iboralar va so‘zlar, kategoriyalar; internet saytlari va adabiyotlar ro‘yhati; o‘quv natijalari haqida aytish;
- *Talabalar faoliyati*: o‘quv joyini tayyorlash (talabalar borligi; tashqi ko‘rinish; o‘quv materiallar va qo‘llanmalar); ma`ruzaning mavzusi va maqsadi bilan tanishish; o‘quv materialini qabul qilishga tayyorgarlik ko‘rish;
- *Shakillar, usular, uslublar*: instruktaj; frontal so‘rov; mustahkamlovchi so‘rov.

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa):

- *O‘qituvchining faoliyati*: mavzuga kiritadi; yangi mavzuga doir o‘tgan fanlar va mashg’ulotlarning mavzularini eslashga chorlaydi; ma`ruza matnini tarqatadi, tanishishni taklif etadi, “Insert” usuli bilan belgilar qo‘yishni taklif etadi; birinchi savol bo‘yicha matn o‘qiladi; qo‘shimcha o‘quv materiallarini aytib boorish va tushuncha berish; natural obektlarni namnoyon qilish va izohlash; tushunarsiz savollarni aniqlash va tushintirish; birinchi savol bo‘yicha nazar (shunday qilib qolgan savollarga ham);
- *Talabalar faoliyati*: yangi mavzuda doir oldingi mashg’ulotlarda va fanlarda olgan bilimlarni mustahkamlaydi,; har bir kalit ibora va terminlarni eshitib, yozib borib, konspekt qilib aytib borishadi; “Insert” usuli bilan belgilan o‘qiydilar, aniqlik kiritadilar, savollar beradilar va o‘zaro;
- *Shakillar, usular, uslublar*: frontav so‘rov blits-so‘rov; aqliy hujum, “Insert” texnikasi.

3 bosqich. Yakunlovchi qism (10 daqiqa)

- *O‘qituvchining faoliyati:* mavzu bo‘yicha hulosa qilish, talabalarning e`tiborlarini asosiylarda jalb qilish; qilingan ishning muhimligini aytib o‘tish; alohida talabalarning bajarilgan ishlarini baholash; o‘zaro baholashning natijalarini chiqarish; o‘quv mashg’ulotning yutuqlik darajasini baholash va tahlil qilish; mustaqil ish uchun topshiriqlar; baho ko‘rsatgichlari va me`zonlari;
- *Talabalar faoliyati: ishning* tahlili; natijalarni olish; texnologik bilimlarni qo‘llash; o‘zaro baholashni o‘tkazish, yo‘l qo‘yilgan hatolar bo‘yicha tahlil va aniqlik kiritish; mustaqil ish topshiriqlarini yozib olish;
- *Shakillar, usular, uslublar*: guruhlarda ishlash, kartochkalarda topshiriqlar.

1.3. O‘quv-metodik materiallar

Ma`ruza rejasi:

1. Ikkilangan qatlam potensiali
2. Potensiallar xossalari.
3. Dirixlening ichki masalasini Fredgolmning 2-chi turdagi integral sistemasiga keltirish.
4. Fredgolm alternativasi.

Tayanch iboralar: Ikkilangan qatlam potensiali, potensiallar xossalari, Dirixlening ichki masalasi, Fredgolmning 2-chi turdagi integral sistemasiga keltirish, Fredgolm alternativasi

1.3.1. Ma`ruza matni

1. Ikkilangan qatlam potensiali

Tekislikda ikkilangan qatlam potensialini birmuncha batafsil ko‘rib chiqamiz.

$$u(M) = -\int_L f(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\right)dl_P \quad (3.12)$$

Faraz qilamiz L egri chiziq va unga o‘tkazilgan urinmalar (ma’lum ma’noda) uzluksizdir. Shundan kelib chiqan holda

$$-\frac{\partial}{\partial n}(\ln\frac{1}{\rho_{MP}}):$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\right) = \left\{\rho_{MP} = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right\} = -\frac{1}{\rho_{MP}}\,\frac{1}{2}\,\frac{2(\xi - x)}{\rho_{MP}} = -\frac{\xi - x}{\rho^2{}_{MP}};$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\right) = -\frac{\eta - y}{\rho^2{}_{MP}};$$

$$\overrightarrow{MP} = \{\xi - x; \eta - y\} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\right) = -\left(\vec{n}, grad\ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right)\right) =$$

$$= \left(\vec{n}, \frac{\overrightarrow{MP}}{\rho^2{}_{MP}}\right) = \rho_{MP} \quad \Rightarrow \quad u(M) = \int_L f(P)\frac{\cos\angle\left(\overrightarrow{MP},\vec{n}\right)}{\rho_{MP}}dl_P \quad (3.13)$$

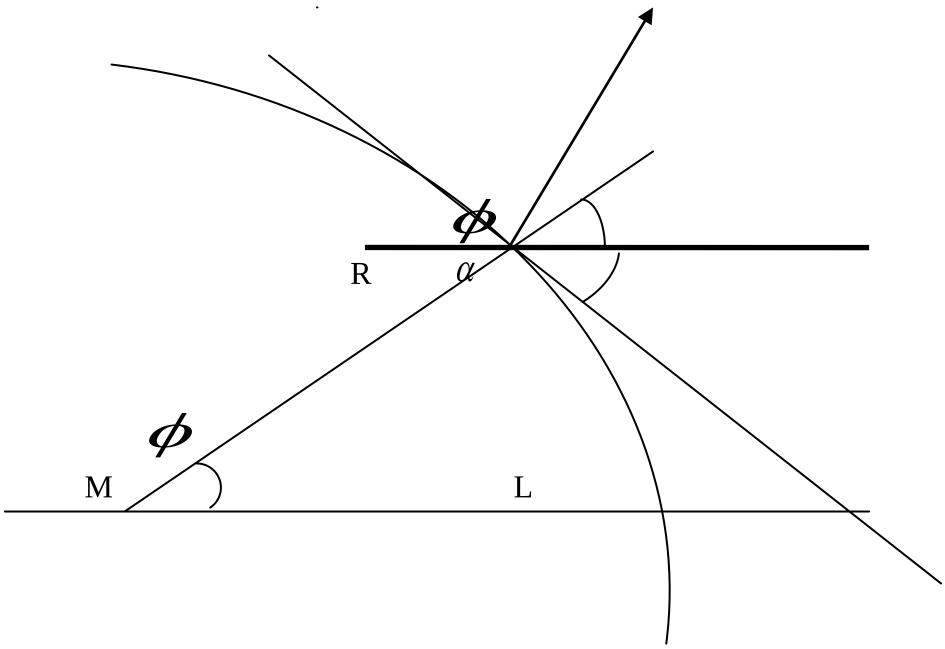
Zichligi 1 ga teng bo‘lgan potensial bo‘lsin.

$$u_e(M) = \int_L \frac{\cos\angle\left(\overrightarrow{MP},\vec{n}\right)}{\rho_{MP}}dl_P$$

Qutb koordinatasi sistemasidan foydalanib hisoblaymiz. M no‘qta orqali ma’lum bitta o‘q o‘tkazamiz va undan φ burchaklarni hisoblaymiz. L egri chiziqning R nuqtasidan unga o‘tkazilgan urinma bilan shu o‘q o‘rtasidagi burchakni [0, π/2] oraliqda α burchagi deb belgilaymiz. Shunda quyidagi munosobatlar to‘g’ri bo‘ladi.

$$\angle\left(\overrightarrow{MP},\vec{n}\right)=\frac{\pi}{2}-\phi-\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\angle\left(\overrightarrow{MP},\vec{n}\right)=\sin(\phi+\alpha) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_e(M)=\int_L \frac{\sin(\phi+\alpha)}{\rho_{MP}}dl_P \qquad (3.14)$$



$P(\varepsilon,\eta)$ nuqta koordinatalarida, to‘g’ri burchakli koordinatalar sistemasida qutb koordinatalar sistemasiga o‘tamiz.

$$\begin{array}{ll} \xi=r(\phi)\cos\phi; & d\xi=\left[\left(r'(\phi)\cos(\phi)-r(\phi)\sin(\phi)\right)\right]d\phi \\ \eta=r(\phi)\sin\phi; & dn=\left[\left(r'(\phi)\sin(\phi)-r(\phi)\cos(\phi)\right)\right]d\phi \end{array} \quad (*)$$

Rasmdan ko‘rinib turibdiki $\begin{cases} d\xi=-dl\cos\alpha; \\ d\eta=dl\sin\alpha; \end{cases}$.

(3.14) dagi integral ostidagi funksiyani o‘zgartiramiz.

$$\sin(\phi+\alpha)dl=\sin\phi\cos\alpha dl+\cos\phi\sin\alpha dl=\begin{Bmatrix} d\xi=-dl\cos\alpha \\ d\eta=dl\sin\alpha \end{Bmatrix}=$$

$$=\cos\phi d\eta-\sin\phi d\xi=(*)$$

$$=\left(\cos\phi\sin\phi r'+r'\cos^2\phi-r'\sin\phi\cos\phi+r\sin^2\phi\right)d\phi=$$

$$=rd\phi\Rightarrow\cos\angle\left(\overrightarrow{MP},\vec{n}\right)dl=r(\phi)d\phi\Rightarrow u_e(M)=\int_L\frac{r(\phi)}{r(\phi)}d\phi=2\pi$$

Xuddi shunday o‘zgartirishlar asosida nuqta soxadan tashqarida yoki uning chegarasida yotgan bo‘lsa quyidagi munosobatlar o‘rinli bo‘lishini hosil qilamiz:

$$u_e(M)=\begin{cases}\pi, & M\in L \\ 0, & M\notin D\end{cases}$$

Shunday qilib

$$u_e=(M)=\begin{cases}2\pi, & M\in D\\ \pi, & M\in L\\ 0, & M\notin \overline{D}\end{cases} \quad (3.15)$$

2. Potensiallar xossalari.

Endi zichligi 1 ga teng bo‘lgan potensial ifodasini bilgan holda bizning boshlang’ich potensialimizning ba’zi xossalarini chiqaramiz.

Buning uchun quyidagi ta’rif kerak bo‘ladi.

Ta’rif

$$\int_l F(P,M)dl_P$$

Integral $M_0\in L$ nuqtada tekis yaqinlashuvchi deyiladi, agar $\forall\varepsilon>0\exists V(M_0)$ $-$M$_0$ nuqtaning atrofii va $l\in L$ yoy shunaqakim, $\int_l F(P,A)dl_P$ integral $\forall A\in V(M_0)$ yaqinlashuvchi bo‘lsa va $\left|\int_l F(P,A)dl_P\right|\le\varepsilon$.

Quyidagi teoremadan isbotsiz foydalanamiz.

Teorema: 3.7

$F(P,M)$ funksiya $P\neq M$ hamma nuqtalarda uzluksiz bo‘lsin. Shunda $\int_l F(P,M)dl_P$ integral tekis yaqinlashadigan nuqtalarda uzluksiz funksiyadan iborat bo‘ladi.

L chegarada M$_0$ nuqtani olib $u(M)-f(M_0)u_e(M)$ funksiyani ko‘rib chiqamiz.

Teorema: 3.8

(3.12) dagi $f(P)$ funksiya M$_0$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa $u(M)-f(M_0)u_e(M)$ funksiya M$_0$ nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Isbot:

$$u(M)-f(M_0)u_e(M)=$$
$$=(3.13)=\int_L f(P)\frac{\cos\angle(\overrightarrow{MP},\vec{n})}{\rho_{MP}}dl_P-\int_L f(M_0)\frac{\cos\angle(\overrightarrow{MP},\vec{n})}{\rho_{MP}}dl_P=$$
$$=\int_L f(P)-f(P)\frac{\cos\angle(\overrightarrow{MP},\vec{n})}{\rho_{MP}}dl_P$$

Bizning funksiyamiz uzluksizligidan $\forall\varepsilon>0$ M$_0$ nuqtaning shunday atrofi mavjud ekanligi kelib chiqadi. U yerda $|f(P)-f(m_0)|\le\varepsilon$

Demak markazi M$_0$ nuqtada bo‘lgan qutb koordinatalariga o‘tib biz tomonimizdan egri chiziqga qo‘yilgan shartlarda

$$\left|\int_L f(P)-f(M_0)\frac{\cos\angle(\overrightarrow{MP},\vec{n})}{\rho_{MP}}dl_P\right|=\left|\int_L f(P)-f(M_0)d\phi\right|\le\varepsilon\left|\int_L d\phi\right|=2\pi\varepsilon$$

hosil qilamiz.

Teorema isbotlandi.

Endi $u_P(M)$ funksiya uchun (3.15) formuladan foydalanib teorema da’vosini hisobga olib $u\ (M)$ funksiya M$_0$ nuqtadagi ko‘rinishi $u_e(M)f(M_0)$ fnksiyaningg ko‘rinishiga teng ekanligini hosil qilamiz.

Biz birinchi natijani hosil qildik.

1.Natija

$$u_{ich}(M_0)=\lim_{\substack{M\longrightarrow M_0\\ M\in D}} u(M)$$
$$u_{tash}(M_0)=\lim_{\substack{M\longrightarrow M_0\\ M\notin \overline{D}}} u(M)$$
Shunda
$$u_{ich}(M_0)=\lim_{\substack{M\longrightarrow M_0\\ M\in D}} u(M)+\pi\ f(M_0);$$
$$u_{tash}(M_0)=\lim_{\substack{M\longrightarrow M_0\\ M\notin \overline{D}}} u(M)-\pi\ f(M_0)$$
Shunday qilib, potensialni konturda shunday tasvirlash mumkin.
$$u(M_0)=\frac{u_{ich}(M_0)+u_{tash}(M_0)}{2}$$
Natija 2.
agar $f(P)$ funksiya L uzluksiz bo‘lsa, u(M) funksiya $M\in L$ uzluksiz bo‘ladi.
Isbot.
Biz konturda $f(M)u_e(M)=\pi f(M);\quad u(M)-f(M_0)u_e(M)=\psi(M)$
Uzluksiz funksiyaga ega bo‘lamiz. Shunda u(M) funksiya quyidagi ko‘rinishga keladi.
$u(M)=\pi\ f(M)+\psi(M)$
3. Dirixlening ichki masalasini Fredgolmning 2-chi turdagi integral sistemasiga keltirish.
Dirixlening ichki masalasini E^2 da qaraymiz.
$$\begin{cases}(1)\quad u(x,y)\in C(\overline{D});\\ (2)\quad u(x,y)=0;\quad (x,y)\in D;\\ (3)\quad u(x,y)=\mu(x,y)\quad (x,y)\in L\,.\end{cases}$$
Yechimnm ikki qatlam potensialli ko‘rinishda izlaymiz.
$$\overline{u}(M)=\int_L f(P)\frac{\cos\angle\left(\overrightarrow{MP},\vec{n}\right)}{р\mathcal{M}р}$$
Bo‘lsin.
Shunda birinchi shart bajariladi. $f(P)$ funksiyani o‘zgartirib ikkinchi va uchinchi shartlarni hosil qilamiz.
$$u(M)=\begin{cases}\overline{u}(M),\quad M\in D;\\ \overline{u_{ich}(M)},\quad M\in L,\end{cases}$$
Yangi funksiya kiritamiz. Bu yerda $\overline{u}_{tash}(M)=\lim\limits_{\substack{A\longrightarrow D\\ A\notin \overline{D}}}\overline{u}(A)$.

Hosil qilingan funksiya D da garmonik bo‘lishini tekshirish oson. Uchinchi shartni hosil qilish uchun 3.8 teoremadagi birinchi natijadan foydalanamiz. Shunda
$$\begin{cases}\overline{u}_{внут}(M)=\pi\ f(M)+\int\limits_L f(P)\dfrac{\cos\angle\left(\overrightarrow{MP},\vec{u}\right)}{р\mathcal{M}р}dl_P,\ M\in L;\\ \overline{u}_{внут}(M)=\mu(M),\quad M\in L\end{cases}\Rightarrow \qquad (3.16)$$
$$\Rightarrow\quad \pi\ f(M)+\int\limits_L f(P)\frac{\cos\angle\left(\overrightarrow{MP},\vec{u}\right)}{р\mathcal{M}р}dl_P=\mu(M),\quad M\in L$$
Hosil bo‘ladi. Hosil qilingan tenglama f(P) funksiyaga nisbatan fredgolmaning ikkinchi turdagi integral tenglamasi deyiladi. Keyingi teoremani isbotsiz qabul qilamiz.
4. Teorema 3.9 (Fredgolm alternativasi **).**

Agar bir jinsli integral tenglama (3.16)(ya'ni $(\mu(M)\equiv 0)$) faqat 0li yechimga ega bo'lsa shunda va faqatgina shu holda fredgolmaning ikkinchi turdagi integral tenglamasi yagona uzluksiz yechim $\forall \mu(M)\in C(L)$ ga ega bo'ladi.
Bu teoremadan foydalanib Dirixlening [3.5] masalasining yechimi yagonaligini isbotlaymiz.
Ta'rif.
Biz L konturda har qanday ikkita nuqtani olganda shu nuqtalarni birlashtiruvchi kesma butunligicha kontur ichida yotsa, bu kontur qa'tiy qavariq deb ataladi.
Teorema 3.10 (Yagonalik teoremasi).
D soxa qa'tiy qavariq (L qa'tiy qavariq kontur) bo'lsin. Shunda Dirixlening 3.5 ichki masalasi istalgan L dagi uzluksiz $\mu(M)$ funksiya uchun yagona yechimga ega.
Isbot
Fredgolmaning boshqa holiga muvofiq

$$\pi f(M)+\int_L f(P)\frac{\cos\angle\left(\overrightarrow{MP},\vec{n}\right)}{\rho_{MP}}dl_P=0,\ M\in L;\quad (3.17)$$

Faqat 0 li yechimga ega ekanligini isbotlash etarli. Shunday $M_0\in L$ nuqtani olamizki unda $\left|f(M_0)=\max_{M\in L}|f(M)|\right|$ bilamizki zichligi 1 ga teng bo'lgan potensial formulasi 3.15 ga muvofiq

$$\pi f(M_0)=\int_L f(M_0)\frac{\cos\angle\left(\overrightarrow{M_0P},\vec{n}\right)}{\rho_{M_0P}}dl_P,\ M_0\in L;$$

Bundan tashqari $f(M)$ 3.17 ning yechimi bo'lgani uchun

$$\pi f(M_0)+\int_L f(P)\frac{\cos\angle\left(\overrightarrow{M_0P},\vec{n}\right)}{\rho_{M_0P}}dl_P=0;$$

bo'ladi. Hosil bo'lgan tengliklardan $\int_L [f(P)+f(M_0)]\frac{\cos\angle\left(\overrightarrow{M_0P},\vec{n}\right)}{\rho_{M_0P}}dl_P=0;$ hosil qilamiz.
$M_0:|f(M_0)|\geq|f(P)|\forall P\in L$ ta'rifdan hamda
$\frac{\cos\angle\left(\overrightarrow{M_0P},\vec{n}\right)}{\rho_{M_0P}}=\frac{d\varphi}{dl_P}>0$ ekanligidan ham foydalanib
$f(M_0)+f(P)\equiv 0\quad (\forall P\in L)$ hosil qilamiz.
P=M_0 deb $f(M_0)=0\Rightarrow f\equiv 0$
hosil qilamiz.
Teorema isbotlandi**.**

1.3.2-a. Frontal so'rov uchun savollar

1. Ikkilangan qatlam potensiali?
2. Dirixlening ichki masalasi?

1.3.2-b. Blits-so'rov uchun savollar

1. Potensiallar xossalari?

1.3.2-c. Og'zaki so'rov uchun savollar

1. Fredgolm alternativasi?
2. Yagonalik teoremasi?

1.3.3. Mustaqil ish uchun topshiriqlar

- *takrorlash va mashqlar*: takrorlash, o‘z-o‘zini tekshirish, tahlil, qayta ishlash, mustahkamlash, eslab qolish, chuqurlashtirish;
- *yangi materiallarning mustaqil o‘zlashtirish*: yangi adabiy va internet materiallar, konspekt qo‘shimchasi; mustaqil iboralar tuzish;
- *ilmiy xaraktyerdagi ishlar*: muammoli holatlar, testlar, savollar, topshiriqlar tuzish; topshiriqlarni bajarish.

1.3.4. Kartochkalar uchun testlar

1.3.5. ekranga tayanch materiallarni ko‘rsatish(slaydlar)

- Prezentatsiya

1.3.6. Tavsiya etilgan adabiyotlar

Asosiy

1. *Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O‘zbekistan», 2002, 448 b.*
2. *Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,*
3. *Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.*
4. *Bisadzs L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.*
5. *Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.*

Qo‘shimcha

1. *Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.*
2. *Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.*
3. *Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.*
4. *Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.*
5. *Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.*
6. *Mixlnn S.G. Leksii po lineynыm integralnыm uravneniyam. M. 1959.*
7. *Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.*
8. *Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.*
9. *Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.*

1.4. O‘qitish usullari qoidalari

1.4.1. Aqliy hujum qoidalari

- Hech qanday o‘zaro baholash va tanqid;
- Taklif etilayotgan g’oyalarni baholashdan o‘zingni tiy, hatto ular fantastic va iloji yo‘q bo‘lsa ham – hammasi mumkin;
- Tanqid qilma – hamma aytilgan g’oyalar birhirda;
- Bayon qiluvchi gapini bo‘lma;
- Izoh berishdan o‘zingni tiy;
- Maqsad bu - miqdor;
- Qancha g’oyalar ko‘p bo‘lsa chuncha yaxshi: yangi va zarur g’oya tug’ulishi imkoniyati ko‘proq
- Agar g’oyalar takrorlansa o‘ksinma,
- Tasavvo‘ringga erk ber;
- Senda yaralgan g’oyalarni tashlama, agal ular sening nazaringda qabul qilingan sxemaga tegishli bo‘lmasa ham;
- Bu muammo aniq usullar bilan yechiladi deb o‘ylama.

1.4.2. “Insert” texnikasi qoidalari

- Matndi o‘qib, ularda savollat tug’dirayotgan joylarni, ularni bilimlariga mos kewlayotgan va mos kelmayotgan joylarni qalam bilan belgilab qo‘yiladi;
- “Insert” jadvalini quyidagi belgilashlar bilan to‘ldirish:
  Agar «!» bo‘lsa siz o‘z bilimingizga yoki siz o‘ylagan fikrga to‘g’ri kelayotganini o‘qiyapsiz;
  Agar «–» bo‘lsa siz o‘z bilimingizga yoki tyo‘g’ri deb o‘ylaganingizga mutlaqo zid bo‘lganini o‘qiyapsiz;
  Agar «+» bo‘lsa siz o‘qityotganingiz siz uchun yangilik;
  Agar «?» bo‘lsa, siz o‘qiyotganingiz siz uchun tushunarsiz yoki siz bu savolga yanada ko‘proq ma`lumotlar olishni istaysiz.

1.4.3. Guruhlarda ishlash qoidalari

- Hamma o‘z do‘stlarini tinglashi kerak, unga yaxshi munosabatda bo‘lib hurmar ko‘rsatishi kerak;
- Hamma aktiv harakat qilishi lozim; berilgan topshiriqqa nisbatan birgalikda va javobgarlik bilan ishlashi kerak;
- Har kim o‘ziga kerak paytda yordam so‘rashi kerak;
- Har kim undan yordam so‘ralganda yordam ko‘rsatishi kerak;
- Guruhning ish natijalarini baholashda ishtirok etishi lozim;
- Biz bir kemadamiz, o‘zgalarga yordam berib o‘zimiz o‘rganamiz, shuni har kim tushunishi lozim;

Xususiy hosilali tenglamalarfanidan amaliy matematika va informatika yo‘nalishi talabalari uchun amaliy mashg‘ulotlari ishlanmasi

Guliston 2010

Mavzu 1. 2-chi tartibli chiziqli tenglamalar.2-chi tartibli xususiy xosilali differensial tenglamalar.

Amaliy mashg'ulotlar rejasi

Fan: " Matematik fizika tenglamalari".
O'quv soati: 2 s. (amaliy)
O'quv mashg'ulotlar turi: kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.
O'quv mashg'ulotlar rejasi:
- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

O'quv mashg'ulotlar maqsadi:

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

O'quv mashg'ulotlar vazifasi:
- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish,Xususiy hosilali tenglamalarnazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

O'qitish texnologiyasi:
- *o'qitish metodlari*: individual savol-javob; birga o'qitish;o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremalarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qtish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

Pedagogik masalalar :
- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

O'quv faoliyati natijalari:
- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;

- o‘rgangan tushunchalar bilan amaliy mashgulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremalar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo‘llashni mustaqil o‘rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

1.2 Amaliy mashg’ulotning xronologik xaritasi.

1 bosqich. O‘quv mashg’ulotlarga kirish (10 daqiqa);

- *o‘qituvchi faoliyati:* tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qatiyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo‘llanmalar,kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish ; o‘quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlalar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari;o‘quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati:* o‘quv joyini tayyorlash (o‘quvchilarning borligi; tashqi ko‘rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o‘quv dars maqsadi; o‘quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari:* og’zaki nazorat, individual savol-javob; ob’yektlar bilan ishlash; konspektlash;

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);

- *o‘qituvchi faoliyati:* mavzuni kiritish,Matematik fizika tenglamalarini o‘rganish bilan bog’liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg’ulotlar matnini tarqatish; qo‘shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg’ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;
- *talaba faoliyati:* oldingi mavzu bo‘yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari:* og’zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)

- *o‘qituvchi faoliyati:* mavzu bo‘yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o‘tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o‘quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati:* ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o‘zaro baholash o‘tkazish; yo‘l qo‘yilgan xatolarnini aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;

- *qabul qilish shakli metodlari:* guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

Misol va mashqlar namoishi

1.Xususiy hosilali tenglamaning umumiy yechimi haqida tushincha.

n-chi tartibli oddiy defferensial tenglamani qarab chiqamiz $f(x, y, y', y'',..., y^{(n)}) = 0.$Uning umumiy integrali n-ta ixtyiyoriy o'zgarmas funksialar oilasini tashkil etadi $F(x, y, C_1, C_2,..., C_n) = 0.$ Ixtiyoriy xususiy yechimlarni - $C_1, C_2,..., C_n$ parametrlarini aniq qiymati berilgan holda hosil qilish mumkin.

1.1Misol Faraz qilaylik $\boldsymbol{u_x = 0}$ tenglama berilgan bo'lsin .Bu tenglama shuni anglatadiki, $\boldsymbol{u(x, y)}$-funksiya x –dan bog'liq emas. Ya'ni echimlar $\boldsymbol{u(x, y) = y^2 + 2y}$, $\boldsymbol{u(x, y) = e^y + \sin y}$ funksialardan iborat .Umumiy yechim: $u(x, y) = C(y)$,bo'lsa bu yerda $\boldsymbol{C}$,y-o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan funksiya .

1.2Misol $\boldsymbol{u_x = f(x, y)}$ tenglamani qaraymiz .Bu tenglama yechimini topish uchun,uni x-bo'yicha integrallaymiz $\boldsymbol{\int u_x dx = \int f(x, y) dx + C.}$ (1.2)

x-bo'yicha integrallashda ,biz y-ni o'zgarmas deb olamiz va shuning uchun (1.2) dan C-ixtiyoriy o'zgarmas y-dan bog'liq bo'lishi mumkin.Xuddi shunday umumiy yechim quyidagicha.

$$\boldsymbol{u(x, y) = \int f(x, y) dx + C(y).}$$

1.3Misol faraz qilaylik $\boldsymbol{u_{xy} = 0}$ tenglama berilgan 1.1 Misoldan shu narsa kelib chiqadiki $\boldsymbol{u_y = C(y)}$.Bu tenglama (1.2) misol kabi quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\boldsymbol{u(x, y) = \int C(y) dy + C_1(x).}$$

$\boldsymbol{C_2(y) = \int C(y) dy}$ deb olamiz .U holda umumiy yechim quyidagicha

$$\boldsymbol{u(x,y)=C_1(x)+C_2(y).}$$

Shuni takidlaymizki , ixtiyoriy o‘zgarmasga bog’liq bo‘lgan oddiy defferensial tenglamalarning umumiy yechimidan farqli xususiy hosilali tenglamalarning umumiy yechimi ixtiyoriy funksiyadan bog’liq bo‘ladi

Xususiy hosilali defferensial tenglamalarning umumiy yechimida ixtiyoriy funksiya bor , ularning soni tenglamaning tartibiga teng

Farazx qilaylik $$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0. \qquad (1.1)$$

tenglama berilgan bo‘lsin.

Buning uchun tenglamani $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$ ko‘rinishga yozamiz. X-bo‘yicha hosila nolga tengligidan uni y-ixtiyoriy funksiyaga bog’liq diyish mumkin $\frac{\partial u}{\partial y} = f(y).$ Shuning uchun $u(x,y) = \int f(y)dy.$ Lekin ixtiyoriy $f(y),$ funksiyani integrallab,ixtiyoriy yangi $F(y),$ funksiyani,

plyus ixtiyoriy $f(y),$ -ni hosil qilamiz.Xuddi shunday (1.1) tenglamaning umumiy integrali $u(x,y) = \phi(x) + F(y)$

Ikkita ixtiyoriy funksiyaga ega. Endi $u(x;y)$ -ng umumiy yechimidan xususiy yechimini topish uchun $\phi(x)$ va $F(y)$ konkret ko‘rinishini toppish kerak .Biroq shu yerda oddiy defferensial tenglamalar va xususiy hosilali differensial tenglamalarning umumiy yechimini topish farqi shundan iboratki xususiy hosilali defferensial tenglamalarning umumiy yechimini umumiyligi tufayli konkret yechimni topish qiyinlashadi.

1.Xususiy hosilali defferensialtenglamaning umumiy yechimini toping: $\frac{\partial^2 u(x;y)}{\partial x^2} = 0$ bu yerda $u(x;y)$ -ikki o‘zgaruvchili noma’lum funksiya

Echish:Tenglamani $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0.$ ko‘rinishga yozamiz .Bu yerda $\frac{\partial u}{\partial x}$,
x dan bog’liq emas ,ya’ni undan x bo‘yicha xususiy hosila nolga teng

Shuning uchun , $\frac{\partial u}{\partial x}=C_1(y)$,bu yerda $C_1(y)$-y-ga bog'liq ixtiyoriy funksiya $\frac{\partial u}{\partial x}=C_1(y)$ tenglamada $\frac{\partial u}{\partial x}$-xususiy hosila x bo'yicha olinib ,y-o'zgarmas sanaladi .Chap va O'ng tomonni integrallab,qo'yilgan masalaning yechimini qo'lga kiritamiz.

$u(x,y)=\int C_1(y)dx=xC_1(y)+C_2(y),$ Bu yerda $C_1(y)$ va $C_2(y)$-ga bog'liq ixtiyoriy funksiya .Agar topilgan $u(x,y)$ funksiyani ikki marta x-bo'yicha defferensiallasak,u xolda $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$ bo'ladi ,demak topilgan funksiya tenglamani umumiy yechimi ekan.

2.Tenglamaning umumiy yechimini toping $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x^2-y.$

Echish:Tenglamani $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=x^2-y$ ko'rinishga yozib uning chap va o'ng tomonlarini y-bo'yicha integrallasak ,(x-o'zgarmas sanaladi) ,u holda ;

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\int(x^2-y)dy=x^2y-\frac{y^2}{2}+C_1(x).$$

Endi x-bo'yicha integrallaymiz (y-o'zgarmas sanaladi),ya'ni

$u(x,y)=\int(x^2y-\frac{y^2}{2}+C_1(x))dx=\frac{x^3y}{3}-\frac{y^2x}{2}+C_1^*(x)+C_2(y).$ Bu yerda $C_1^*(x)=\int C_1(x)dx.$ Xuddi shunday, qaralayotgan tenglamani umumiy yechimi quyidagicha :

$$u(x,y)=\int(x^2y-\frac{y^2}{2}+C_1(x))dx=\frac{x^3y}{3}-\frac{y^2x}{2}+C_1^*(x)+C_2(y).$$

Bu yerda $C_1^*(x)=\int C_1(x)dx.$Ixtiyoriy funksiyalar bo'lib, $C_1^*(x)$-defferensiallanuvchi.

3.Xususiy hosilali defferensial tenglamani yeching : $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2\frac{\partial u}{\partial x}.$

Echish: Tenglamani $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-2u\right)=0$ ko'rinishda yozib chap va o'ng tomonlarini x-bo'yicha integrallaymiz .U holda $\frac{\partial u}{\partial y}-2u=C_1(y).$ Bu tenglamada

$\frac{\partial u}{\partial y}$ ni y-bo‘yicha oddiy hosila kabi qarab,x-ni parametr deb sanaymiz .U holda tenglama $\frac{du}{dy}-2u=C_1(y).$ ko‘rinishda bo‘ladi. Biz birjinsli bo‘lmagan birinchi tartibli chiziqli tenglamaga ega bo‘ldik .Uni yechsak :

$$u(x,y)=e^{\int 2dy}\left(C_2(x)+\int C_1(y)e^{-\int 2dy}dy\right)=C_2(x)e^{2y}+C_1^*(y).$$

Shuday qilib , $u(x,y)=C_2(x)e^{2y}+C_1^*(y),$ bu yerda $C_2(x)$ va $C_1^*(y)$ -ixtiyoriy funksiyalar.

O‘quv mashqlar

–misol va masalalarni eching
–teoremani isbotlang
–shu mavzuni nazariyasini o‘qib oling

Uyga vazifa

Xususiy xosilali differensial tenglamalarni umumiy yechimini toping:

1. $u(x,y)=C_1(x)+C_2(y).$
2. $u(x,y)=\frac{x^2y}{2}+\frac{xy^2}{2}+C_1(x)+C_2(y).$
3. $u(x,y)=\frac{x^4}{12}+\frac{yx^2}{2}+xC_1(y)+C_2y.$
4. $u(x,y)=e^{x+y}+yC_1(x)+C_2(x).$
5. $u(x,y)=C_1(x)+\frac{1}{x}C_2(y).$
6. $u(x,y)=C_1(x)e^{y^2}+C_2(y).$
7. $u(x,y)=C_1(x)+C_2(y)e^{5x}.$
8. $u(x,y)=x^2+C_1(y)x+C_2(y).$
9. $u(x,y)=x^2y+C_1(y)+C_2(x).$
10. $u(x,y)=C_1(x)e^{y}+C_2(x).$
11. $u(x,y)=\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{6}+yC_1(x)+C_2(x).$
12. $u(x,y)=x^3+xC_1(y)+C_2(y).$

Tavsiya etiladigan adabiyotlar

Asosiy

11. ***Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O‘zbekistan», 2002, 448 b.***

12. ***Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,***

13. ***Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.***

14. ***Bisadzs L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.***

15. ***Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.***

Qo‘shimcha

19. ***Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.***

20. ***Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.***

21. ***Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.***

22. ***Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.***

23. ***Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.***

24. ***Mixlnn S.G. Leksii po lineynыm integralnыm uravneniyam. M. 1959.***

25. ***Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.***

26. ***Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.***

27. ***Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.***

Mavzu bo‘yicha yangi tushunchalar uchun savollar.

1. Xususiy xosilali differensial tenglama ta’rif bering.
2. Kvazichiziqli differensial tengalama qanday ko‘rinishga ega?
3. Xususiy xosilali differensial tenglama tartibi deb nima aytiladi.
4. Kvazichiziqli differensial tengalama umumiy yechimi to‘g’risidagi teoremani keltiring.
5. Bir jinsli tenglamaning yechimi to‘g’risidagi teoremani keltiring.
6. Ikkinchi tartibli xususiy xosilali tenglama qachon chiziqli deyiladi?
7. Matematik fizik tenglamalar kursi uchun xarakterli belgilashlarni keltiring.

Mavzu 2. 2-chi tartibli xususiy xosilali differensial tenglamalarning klassifikasiya(giperbolik tip)

Amaliy mashg’ulotlar rejasi
Fan: “ Matematik fizika tenglamalari“.
O‘quv soati: 2 s. (amaliy)
O‘quv mashg’ulotlar turi: kartochka, topshiriq, o‘quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg’ulotlar.
O‘quv mashg’ulotlar rejasi:

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o‘quv masalalari.

- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

O‘quv mashg’ulotlar maqsadi:

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg’ulotlar bilan chuqurlashtirish

O‘quv mashg’ulotlar vazifasi:

- *o‘qituvchi:* mavzu bo‘yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o‘rganish tajribasini oshirish,Xususiy hosilali tenglamalarnazariyasini o‘rganish, analiz va o‘rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg’otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo‘ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma’suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o‘rgatish.

O‘qitish texnologiyasi:

- *o‘qitish metodlari*: individual savol-javob; birga o‘qitish;o‘quv qo‘llanmalarga asoslanib teoremalarni isbotlash, misollar echish mahoratini o‘rgatish
- *o‘qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o‘qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko‘rsatmalar
- *o‘qtish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og’zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

Pedagogik masalalar :

- mavzu bo‘yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o‘rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo‘yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o‘rganishni shakllantirish;

O‘quv faoliyati natijalari:

- kurs mavzulari bo‘yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o‘rgangan tushunchalar bilan amaliy mashgulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremalar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo‘llashni mustaqil o‘rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

1.2 Amaliy mashg’ulotning xronologik xaritasi.

1 bosqich. O‘quv mashg’ulotlarga kirish (10 daqiqa);

- *o‘qituvchi faoliyati:* tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qatiyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo‘llanmalar,kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish ; o‘quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlalar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari;o‘quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati:* o‘quv joyini tayyorlash (o‘quvchilarning borligi; tashqi ko‘rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o‘quv dars maqsadi; o‘quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;

- *qabul qilish shakli metodlari:* og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati:* mavzuni kiritish,Matematik fizika tenglamalarini o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;
- *talaba faoliyati:* oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari:* og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)

- *o'qituvchi faoliyati:* mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati:* ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarnini aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari:* guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

Misol va mashqlar namoishi

Xuddi hosilali ikkinchi tartibli tenglamalar klassifikasiyasi.

O'zgaruvchilarni almashtirish yordamida

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (2.1)$$

Tenglamani soddaroq ko'rinishga keltiramiz $c\neq 0,$ deb yangi $\xi = x+\lambda_1 y,\quad \eta = x+\lambda_2 y,$ o'zgaruvchilarni kiritamiz ,bu yerda λ_1 va λ_2 hozircha o'zgarmaslar bo'lib turli xil (aks holda ξ va η bir biriga erkli funksiyaga bo'lmaydi) son shunday qilib ,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}$$ \

va

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=\lambda_1\frac{\partial u}{\partial \xi}+\lambda_2\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

U holda quyidagi munosabat o‘rinli . $\frac{\partial}{\partial x}\to\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \eta},\quad \frac{\partial}{\partial y}\to\lambda_1\frac{\partial}{\partial \xi}+\lambda_2\frac{\partial}{\partial \eta}.$

Shuning uchun

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\left(\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\lambda_1\frac{\partial u}{\partial \xi}+\lambda_2\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\lambda_1\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(\lambda_1\frac{\partial}{\partial \xi}+\lambda_2\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\lambda_1\frac{\partial u}{\partial \xi}+\lambda_2\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\lambda_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\lambda_1\lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\lambda_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Bu ikkinchi tartibli hosilalarni a,2b va c- ga ko‘paytirib qo‘shamiz .U holda (2.1) tenglamaning chap tomoni quyidagicha bo‘ladi .

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

Bu yerda

$A=a+2b\lambda_1+c\lambda_1^2,\quad B=a+b(\lambda_1+\lambda_2)+c\lambda_1\lambda_2,\quad C=a+2b\lambda_2+c\lambda_2^2.$

Endi yordamchi kvadrat tenglamani qaraymiz $c\lambda^2+2b\lambda+a=0.$ Uning ildizlari $\lambda_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{c}.$ $D=b^2-ac$ diskriminantning qiymatiga qarab uch hol bo‘ladi:

Agar qaralayotgan sohada $b^2-ac>0,$bo‘lsa u holda tenglama gepirbolik tipli, agar $b^2-ac=0,$ bo‘lsa u holda (2.1) tenglama parabolic tipli ,agar $b^2-ac<0,$bo‘lsa, tenglama elliptic tipli bo‘ladi.

U holda gipirbolik tipli tenglamaning kanonik ko‘rinishi quyidagicha

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f(x,y,z,z'_x,z'_y),$(yoki $\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2}=\Phi\left(\alpha,\beta,z,\frac{\partial z}{\partial \alpha},\frac{\partial z}{\partial \beta}\right),$)

Bu yerda $\alpha=\frac{x-y}{2},\beta=\frac{x+y}{2}$);

Parabolik tipli uchun: $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x,y,z,z'_x, z'_y)$;

Elliptik tipli uchun: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x,y,z,z'_x, z'_y)$

Umumiy holda yangi $\xi = \xi(x,y),\ \eta = \eta(x,y).$-o‘zgaruvchilar kiritiladi, $\xi(x,y)$ va $\eta(x,y)$-ikki marta uzliksiz defferensialanuvchi funksiyalar va $\begin{vmatrix} \xi'_x & \xi'_y \\ \eta'_x & \eta'_y \end{vmatrix} \neq 0.$

$a\,dy^2 - 2b\,dxdy + c\,dx^2 = 0$ defferensiyal tenglama $a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}).$ tenglamaning xarakteristik tenglamasi diyiladi.

Misollar

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$ tenglamani qaraymiz. Bu tenglamani gepirbolik tipli, Yani $b^2 - ac = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$ Xarakteristik tenglamani tuzamiz $dy^2 + 2\sin x dxdy - \cos^2 x dx^2 = 0$ yoki tenglamaning chap qismida $dxdy - dxdy + \sin xdx^2 - \sin xdx^2$ yozib va uni guruxlasak, u holda $(dy + (1+\sin x)dx)(dy - (1-\sin x)dx) = 0.$ Tenglamani integrallasak $dy + (1+\sin x)dx = 0$ va $dy - (1-\sin x)dx = 0$ u holda $x + y - \cos x = C_1,\ x - y + \cos x = C_2.$ Yangi o‘zgaruvchilarni $\xi = x + y - \cos x,\ \eta = x - y + \cos x.$ formulalar buyicha kiritamiz. Uholda yangi o‘zgaruvchili tenglama $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$ ko‘rinishda bo‘ladi .

$\xi = \alpha + \beta,\ \eta = \alpha - \beta,$ deb,kanonik ko‘rinishdagi tenglamaga kelamiz $\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = 0.$

Javob:Berilgan gepirbolik tipli tenglamaning kanonik ko‘rinishi: $\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = 0.$

2.Tenglamani kanonik ko‘rinishga keltiring

$$u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0.$$

2)Xarakteristik tenglamani yozamiz

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Bu yerda $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ Tenglama gepirbolik tipli, shuning uchun $\boldsymbol{\xi = y - x, \quad \eta = y - 2x}$ yoki $\boldsymbol{\xi = y - \frac{3}{2}x, \quad \eta = x.}$ almashtrish olamiz. O‘zgaruvchilarni almashtrishdan kiyin tenglama $\boldsymbol{u_{\xi\eta} = 0}$ yoki $\boldsymbol{u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = 0.}$ ko‘rinishni oladi.Shuni ta’kidlaymizki $\boldsymbol{u_{\xi\eta} = 0}$ tenglamani yechimi 1.3 misolda qaralgan edi.Xuddi shunday,biz (r) tenglamaning umumiy yechimini quyidagicha yozamiz .

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(y - x) + \psi(y - 2x).$$

O‘quv mashqlar

–misol va masalalarni eching
–teoremani isbotlang
–shu mavzuni nazariyasini o‘qib oling

Uyga vazifa

1.Tenglamani kanonik ko‘rinishga keltring . $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0.$

Ya’ni, $b^2 - ac = 0 + x^2y^2 = x^2y^2 > 0$, ,u holda tenglama gepirbolik tipli

Xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$x^2(dy)^2 - y^2(dx)^2 = 0 \Leftrightarrow (x\,dy + y\,dx)(x\,dy - y\,dx) = 0.$$

Ikkita differensial tenglamaga ega bo‘lamiz

$$x\,dy + y\,dx = 0, \quad x\,dy - y\,dx = 0.$$

O‘zgaruvchilarni ajratib va uni integrallasak

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0, \ \ln|y| + \ln|x| = \ln C_1,$$
$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0, \ \ln|y| - \ln|x| = \ln C_2.$$

Potinserlashdan kiyin ikkita

$$xy = C_1, \quad \frac{y}{x} = C_2$$

Tenglamalar oilasining xarakteristikalarini topamiz.Ya’ni o‘zgaruvchilarni kiritamiz .

$$\xi = xy, \quad \eta = y/x.$$

Yuqorida keltirilgan formulalardan foydalanib ,xususiy hosilalarni topamiz .Ya’ni

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = y\,u_\xi - \frac{y}{x^2}\,u_\eta,$$
$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = x\,u_\xi + \frac{1}{x}\,u_\eta,$$
$$u_{xx} = (u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x)y - (u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x)\frac{y}{x^2} + \frac{2y}{x^3}\,u_\eta = (y\,u_{\xi\xi} - \frac{y}{x^2}\,u_{\xi\eta})y -$$
$$-\left(y\,u_{\xi\eta} - \frac{y}{x^2}\,u_{\eta\eta}\right)\frac{y}{x^2} + \frac{2y}{x^3}\,u_\eta = y^2\,u_{\xi\xi} - 2\frac{y^2}{x^2}\,u_{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^4}\,u_{\eta\eta} + 2\frac{y}{x^3}\,u_\eta,$$
$$u_{yy} = x(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) + \frac{1}{x}(u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) = x\left(x\,u_{\xi\xi} + \frac{1}{x}\,u_{\xi\eta}\right) +$$
$$+\frac{1}{x}\left(x\,u_{\xi\eta} + \frac{1}{x}\,u_{\eta\eta}\right) = x^2\,u_{\xi\xi} + 2\,u_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2}\,u_{\eta\eta}.$$

Bularni berilgan tenglamaga quysak

$$x^2\left(y^2\,u_{\xi\xi} - 2\frac{y^2}{x^2}\,u_{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^4}\,u_{\eta\eta} + 2\frac{y}{x^3}\,u_\eta\right) - y^2\left(x^2\,u_{\xi\xi} + 2\,u_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2}\,u_{\eta\eta}\right) = 0.$$

Oxirgi ifodani soddalashtirib ,kanonik ko‘rinishga kelamiz $u_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi}\,u_\eta = 0.$

2. Tenglamani kanonik ko‘rinishga keltring $z_{xx}\sin^2 x - z_{xy}2y\sin x + z_{yy}y^2 = 0.$

ya’ni $b^2 - ac = y^2\sin^2 x - y^2\sin^2 x = 0,$ u holda tenglam gepirbolik tipli

Xarakteristik tenglama quyidagicha bo‘ladi :

$$\sin^2 x\,(dy)^2 + 2y\sin x\,dxdy + y^2\,(dx)^2 = 0,$$

Yoki

$$(\sin x\,dy + y\,dx)^2 = 0.$$

$$(\sin x\,dy + y\,dx)^2 = 0.$$

tenglamadagi o‘zgaruvchilarni ajratamiz va uni integrallab quyidagiga ega bo‘lamiz :

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{\sin x} = 0,\ \ln|y| + \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \ln C,\ y\operatorname{tg}\frac{x}{2} = C.$$

O‘zgaruvchilarni ajratamiz

$$\xi = y\operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad \eta = y,$$

Bu yerda y-ixtiyoriy funksiya bo‘lib

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Shartni qanoatlantirsin

Xususiy hosilali yangi o‘zgaruvchilar ifodalaymiz u holda

$$z_x = z_\xi \xi_x + z_\eta \eta_x = \frac{1}{2} z_\xi \, y \sec^2 \frac{x}{2},$$
$$z_y = z_\xi \xi_y + z_\eta \eta_y = z_\xi \operatorname{tg} \frac{x}{2} + z_\eta,$$

$$z_{xx} = \frac{1}{2}\left(z_{\xi\xi}\xi_x + z_{\xi\eta}\eta_x\right) y \sec^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} z_\xi \, y \sec^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{4} z_{\xi\xi} \, y^2 \sec^4 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} y \, z_\xi \, \sec^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$
$$z_{yy} = \left(z_{\xi\xi}\xi_y + z_{\xi\eta}\eta_y\right) \operatorname{tg} \frac{x}{2} + z_{\eta\xi}\xi_y + z_{\eta\eta}\eta_y = z_{\xi\xi} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2 z_{\xi\eta} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + z_{\eta\eta},$$
$$z_{xy} = \frac{1}{2}\left(z_{\xi\xi}\xi_y + z_{\xi\eta}\eta_y\right) y \sec^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} z_\xi \sec^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left(z_{\xi\xi} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + z_{\xi\eta}\right) y \sec^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} z_\xi \sec^2 \frac{x}{2}.$$

Olingan xususiy hosilalarni berilgan defferensial tenglamaga quysak:

$$\frac{1}{4} z_{\xi\xi} \, y^2 \sec^4 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} y \, z_\xi \, \sec^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} -$$
$$- \left(z_{\xi\xi} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + z_{\xi\eta}\right) y^2 \sec^2 \frac{x}{2} \sin x - z_\xi \, y \sec^2 \frac{x}{2} \sin x +$$
$$+ y^2 \left(z_{\xi\xi} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2 z_{\xi\eta} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + z_{\eta\eta}\right) = 0.$$

Soddalashtribquyidagiga ega bo‘lamiz

$$\frac{1}{2} z_\xi y \sec^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \sin^2 x + y^2 z_{\eta\eta} - z_\xi \, y \sec^2 \frac{x}{2} \sin x = 0,$$

Yoki

$$y \, z_{\eta\eta} = z_\xi \, \sin x.$$

$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}$, bolsa, uholda $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\xi}{\eta}$, $\sin x = \frac{2\xi\eta}{\xi^2 + \eta^2}$. oxirgi $z_{\eta\eta} = \dfrac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2} z_\xi.$ ga ega bolamiz

3. $U_{yy} - 2U_{xy} + 2U_x - U_y - 4e^x = 0$ *Hususiy hosilali 2- tartibli tenglamani kanonik ko‘rinishga keltiring.*

Yechilishi: Bu tenglamani ko‘rinishini quyidagi ko‘rinishga keltiramiz.

$$0U_{xx} - 2U_{xy} + U_{yy} + 2U_x - U_y - 4e^x = 0$$

Bu tenglamani kanonik ko‘rinishga keltiraylik . Bunda

$$a_{11} = 0,\ a_{12} = -1,\ a_{22} = 1$$

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = (-1)^2 - 01 = 1;$$

$$\Delta > 0;$$

Demak, tenglama giperbolik ko‘rinishdagi tenglama ekan . Xarakteristik tenglamasi

$$a_{11}\,dy-(a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}\,a_{22}})\,dx=0$$

formulaga asosan

$$0\,dy-(-1\pm\sqrt{(-1)^2-01})\,dx=0$$

kelib chiqadi. Bundan ikkita dif.tenglama hosil bo'ladi.

$$0\,dy-(-1-1)\,dx=0$$

$$0\,dy-(-1+1)\,dx=0$$

Hosil bo'lgan tenglamalardan esa mos ravishda

$$x=-y+C_1$$

$$C_2=y$$

ildiz chiqadi .

Umumiy nazariyaga asosan o'zgarivchilarni quydagicha almashtiramiz.

$$\xi=y+x;$$

$$\eta=y;$$

Hosilalarni hisoblasak,

$$U_x=U_\xi\ ;$$

$$U_y=U_\xi+U_\eta\ ;$$

$$U_{xx}=U_{\xi\xi}\ ;$$

$$U_{xy}=U_{\xi\xi}+U_{\xi\eta};$$

$$U_{yy}=U_{\xi\xi}+2U_{\xi\eta}+U_{\eta\eta}.$$

Biz tenglamani kanonik ko'rinishga keltirishdan oldin x ni topishimiz kerak.

$$\xi=y+x$$

$$\eta=y$$

dan $x=\xi-\eta$ *kelib chiqadi.*

Bularni tenglamaga qo'yib soddalashtirish natijasida

$$U_{\xi\xi}-U_{\eta\eta}-U_\xi+U_\eta+4e^{\xi-\eta}=0$$

ko'rinishdagi kanonik tenglamaga kelamiz.

4. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\dfrac{\partial z}{\partial x}+6\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.$

J. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}-\dfrac{\partial z}{\partial\xi}=0, \quad \xi=x+y, \quad \eta=3x+y.$

5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

J. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}=0, \quad \xi=\dfrac{x^2}{2}+y, \quad \eta=x.$

6. $U_{xx}-9U_{yy}+2U_x=0.$

7. $u_{xx}+8u_{xy}+3u_x=0$

Javoblar

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0.$

Kanonik shakliga keliting

1.

$$u_{\xi\eta}-\frac{1}{2\xi}u_\eta=0.$$

2.

$$z_{\eta\eta}=\frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}z_\xi.$$

3. $U_{\xi\xi}-U_{\eta\eta}-U_\xi+U_\eta+4e^{\xi-\eta}=0$

4. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}-\dfrac{\partial z}{\partial\xi}=0, \quad \xi=x+y, \quad \eta=3x+y.$

5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}=0, \quad \xi=\dfrac{x^2}{2}+y, \quad \eta=x.$

Tavsiya etiladigan adabiyotlar

Asosiy

1. ***Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O‘zbekistan», 2002, 448 b.***
2. ***Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,***
3. ***Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.***
4. ***Bisadzs L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.***
5. ***Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.***

6. **Qo‘shimcha**

7. ***Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.***
8. ***Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.***
9. ***Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.***
10. ***Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.***
11. ***Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.***
12. ***Mixlnn S.G. Leksii po lineynыm integralnыm uravneniyam. M. 1959.***
13. ***Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.***
14. ***Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.***
15. ***Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.***

Mavzu bo‘yicha yangi tushunchalar uchun savollar.

1. Xususiy xosilali differensial tenglama qachon giperbolik tipdagi tenglama deyiladi?
2. 2–chi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli giperbolik tipdagi tenglamani kanonik shakliga keltirish yo‘lini ayting.

Mavzu 3. 2-chi tartibli xususiy hosilali d.t. klassifikasiya (parabolic tip)

Amaliy mashg’ulotlar rejasi

Fan: “ Matematik fizika tenglamalari“.
O‘quv soati: 2 s. (amaliy)
O‘quv mashg’ulotlar turi: kartochka, topshiriq, o‘quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg’ulotlar.
O‘quv mashg’ulotlar rejasi:
- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o‘quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

O‘quv mashg’ulotlar maqsadi:
Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg’ulotlar bilan chuqurlashtirish
O‘quv mashg’ulotlar vazifasi:
- *o‘qituvchi:* mavzu bo‘yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash

- *rivojlantiruvchi:* o‘rganish tajribasini oshirish,Xususiy hosilali tenglamalarnazariyasini o‘rganish, analiz va o‘rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg’otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo‘ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma’suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o‘rgatish.

O‘qitish texnologiyasi:

- *o‘qitish metodlari*: individual savol-javob; birga o‘qitish;o‘quv qo‘llanmalarga asoslanib teoremalarni isbotlash, misollar echish mahoratini o‘rgatish
- *o‘qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o‘qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko‘rsatmalar
- *o‘qtish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og’zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

Pedagogik masalalar :

- mavzu bo‘yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o‘rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo‘yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o‘rganishni shakllantirish;

O‘quv faoliyati natijalari:

- kurs mavzulari bo‘yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o‘rgangan tushunchalar bilan amaliy mashgulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremalar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo‘llashni mustaqil o‘rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

1.2 Amaliy mashg’ulotning xronologik xaritasi.

1 bosqich. O‘quv mashg’ulotlarga kirish (10 daqiqa);

- *o‘qituvchi faoliyati:* tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qatiyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo‘llanmalar,kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish ; o‘quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlalar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari;o‘quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati:* o‘quv joyini tayyorlash (o‘quvchilarning borligi; tashqi ko‘rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o‘quv dars maqsadi; o‘quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari:* og’zaki nazorat, individual savol-javob; ob’yektlar bilan ishlash; konspektlash;

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);

- *o‘qituvchi faoliyati:* mavzuni kiritish,Matematik fizika tenglamalarini o‘rganish bilan bog’liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg’ulotlar matnini tarqatish; qo‘shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg’ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;

- *talaba faoliyati:* oldingi mavzu bo‘yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari:* og’zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)

- *o‘qituvchi faoliyati:* mavzu bo‘yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o‘tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o‘quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati:* ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o‘zaro baholash o‘tkazish; yo‘l qo‘yilgan xatolarnini aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari:* guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

1.3 O‘quv-uslubiy qo‘llanma

O‘quv mashg’ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o‘quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

Misol va mashqlar namoishi

2-chi tartibli hosilali defferensial tenglamalar klassfikasiasi (parabolic tip)

Faraz qilaylik U=U(x,y)-ikkita x va y o‘zgaruvchili noma’lum funksia bo‘lsin.

Uholda 2-chi tartibli tenglama deb quyidagicha aytamiz.

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})=0 \quad (3.1)$$

Tenglamani tepi $\Delta = b^2 - ac$ ga qarab aniqlanadi.

Agar $\Delta > 0$ bo‘lsa, tenglama giperbolik tipli

Agar $\Delta = 0$ bo‘lsa, tenglama parabolic tipli

Agar $\Delta < 0$ bo‘lsa, elliptik tipli

(4)ni kanonik ko‘rinishga keltirish uchun uning xarakteritek tenglamasini yozish kerak.

$$\begin{cases} ady-(b+\sqrt{b^2-ac})dx=0, \\ ady-(b-\sqrt{b^2-ac})dx=0. \end{cases} \qquad (3.2)$$

So‘ngra uning umumiy yechimini toppish kerak

$b^2-ac>0$ Bo‘lganda,tenglama giperbolik tipli (3.2)-tenglama sestimasining umumiy integrallarini $\varphi(x,y)=c_1;\psi(x,y)=c_2,$

Bilan ifodalab,yangi ξ,η -o‘zgaruvchilarni $\xi=\varphi(x,y);\eta=\psi(x,y).$ formula bilan kiritamiz. U holda (3.1) tenglama $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=F(\xi,\eta,u,\dfrac{\partial u}{\partial\xi},\dfrac{\partial u}{\partial\eta})$ kurinishini oladi .Bu gepirbolik tipdagi tenglamaning kanonik ko‘rinishidir.

$b^2-ac=0$ Bo‘lganda, tenglama parabolic tipli (3.2) tenglamalar sestimasini umumiy integrallari $\varphi(x,y)=\tilde{c}$ bilan ustma-ust tushadi .Yani ξ,η -o‘zgaruvchilarni $\xi=\varphi(x,y);\eta=\eta(x,y),$ formula bilan kiritamiz,bu yerda $\eta(x,y)$ -funksia quydagi shartni qanoatlantiradi $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial y} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix}\neq 0,$ masalan $\eta=x.$

U holda (3.1) tenglama $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+F(\xi,\eta,u,\dfrac{\partial u}{\partial\xi},\dfrac{\partial u}{\partial\eta})=0$ ko‘rinishni oladi bu parabolic tipdagi tenglamaning kanonik ko;rinishidir.

$b^2-ac<0.$ Bo‘lganda ,tenglama elliptic tipli (3.2) tenglamalar sestimasining umumiy integrallari quyidagicha $\varphi(x,y)\pm i\psi(x,y)=\tilde{c}$

Yangi ξ va $\eta.$ -o‘zgaruvchilarni $\xi=\varphi(x,y);\eta=\psi(x,y).$ orqali kiritamiz.U holda (3.1) tenglama $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+F(\xi,\eta,u,\dfrac{\partial u}{\partial\xi},\dfrac{\partial u}{\partial\eta})=0$ ko‘rinishni oladiki,bu elliptic tipdagi tenglamalarni kanonik ko‘rinishidir.

1.Tenglamani kanonik ko‘rinishiga keltiring $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

Echish:Buyerda a= $a=x^2, b=xy, c=y^2, b^2-ac=x^2y^2-x^2y^2=0;$ ya’ni tenglama parabolic tipli.Xarakteristik tenglamani tuzamiz $x^2dy^2-2xydxdy+y^2dx^2=0.$ Bu xolda ikkita xarakteristikalar oilasi ustma-ust tushadi $xdy=ydx.$ tenglamani qaraymiz.O‘zgaruvchilarni ajratib uni integrallaymiz $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$ yoki $\ln|y|-\ln|x|=\ln|C|$,

$\frac{y}{x}=C.$ .Yangi uzgaruvchilarni kiritamiz . $\eta.$ ni shunday tanlaymizki

$\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\neq 0.$ shart bajarilsin .Yani ξ va $\eta.$ uzgaruvchi olib,u holda berilgan tenglamani kanonik ko‘rinishi quyidagicha $\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=0.$

2.misol; 2. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+9u_x+9u_y=0$

Xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$a_{11}=1 \quad a_{12}=-1 \quad a_{22}=1$$

$$\lambda^2+2\lambda+1=0$$
$$(\lambda+1)^2=0$$

Bu yerda $\lambda_{1,2}=-1$ bulganligi uchun bu parabolik tipdagi tenglama. U xolda kuyidagi almashtirish kiritamiz:

$$\begin{cases}\xi=y-\lambda x\\ \eta=x\end{cases} \qquad \begin{cases}\xi=y+x\\ \eta=x\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&u_x=u_\xi+u_\eta\\
&u_y=u_\xi\\
&u_{xx}=u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}+u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\
&u_{xy}=u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\\
&u_{yy}=u_{\xi\xi}
\end{aligned}$$

Tenglama urniga kuyamiz:

$$u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}-2u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\xi\xi}+9u_\xi+9u_\eta+9u_\xi=u_{\eta\eta}+18u_\xi+9u_\eta$$

Demak, parabolik tipdagi tenglamamiz kanonik shakli kuyidagicha:

$$u_{\eta\eta}+18u_\xi+9u_\eta=0$$

3.misol:Tenglamani kanonik ko‘rinishga keltiring

$$u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y=0. \qquad (3.3)$$

Xarakteristik tenglamani yechib $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ga ega bulamiz. Yani, (3.3) tenglama parabolic tipli.

$\xi = y - x, \eta = x$ Almashtirish kiritamiz,uholda

$$
\begin{aligned}
&u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\eta - u_\xi, \\
&u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi, \\
&u_{xx} = (u_\eta - u_\xi)_\xi \xi_x + (u_\eta - u_\xi)_\eta \eta_x = -(u_{\eta\xi} - u_{\xi\xi}) + (u_{\eta\eta} - u_{\xi\eta}) = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \\
&u_{yy} = (u_\xi)_\xi \xi_y + (u_\xi)_\eta \eta_y = u_{\xi\xi}, \\
&u_{xy} = (u_\eta - u_\xi)_\xi \xi_y + (u_\eta - u_\xi)_\eta \eta_y = u_{\xi\eta} - u_{\xi\xi}.
\end{aligned}
$$

Hosil bo‘lgan ifodani (3.3) tenglamaga quyib ,o‘xshash hadlarini ixchamlasak,

$$u_{\eta\eta} + u_\eta = 0.$$

Hosil bo‘ladi.Shuni takidlaymizki,biz bu tenglamani _parametriga bog’likq bo‘lgan oddiy defrensial tenglamadik qarash mumkin.Uniyechsak:

$$u = C_1(\xi) + C_2(\xi)e^{-\eta} = C_1(y - x) + C_2(y - x)e^{-x}.$$

Teorema:Agar $z = \varphi(x, y)$ funksia quyidagitenglamaning

$$a_{11} z_x^2 + 2a_{11} z_x z_y + a_{22} z_y^2 = 0, \qquad (3.4)$$

Yechim bo‘lsa, uholda $\varphi(x, y) = C$ (C-ixtiyoriy konstanta)

$$a_{11}(y')^2 - 2a_{12}y' + a_{22} = 0 \qquad (3.5)$$

Umimiy integrali hisoblanadi.(bu yerda u $y = y(x), y' = dy / dx$).).

Teskarisi, agar $\varphi(x, y) = C$ (3,5) tenglamaning umumiy integrali bo‘lsa,u holda u $z = \varphi(x, y)$ (3.4) tenglamaning yechimi bo‘ladi.Ikki o‘zgaruvchili 2-chi tartibli xususiy xosilali chiziqli tenglama $u = u(x, y)$ funksiani ko‘rinishi quyidagicha

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + cu + f = 0 \qquad (3.6)$$

Bu yerda $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ f- x va y o‘zgaruvchili funksia,bundan tashqari $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ larning koefsentlari orasida noldan farqli bor. X va y – o‘zgaruvchili (3.6) tenglamada, ya’ni ξ, η -o‘zgaruvchiga $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$, formula orqali o‘tamiz.Faraz qilaylik $\varphi(x, y), \psi(x, y)$, funksialar, D sohaning x O y tekisligida ikki marta differensialanuvchi va o‘tish yakobiani noldan farqli bo‘lsin

Sohaning har bir nuqtasida

$$J(x,y)=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}\neq 0$$

U holda quydagilar o‘rinli:

$$u_x=u_\xi\cdot\xi_x+u_\eta\cdot\eta_x,\quad u_y=u_\xi\cdot\xi_y+u_\eta\cdot\eta_y,$$
$$u_{xx}=u_{\xi\xi}\cdot\xi_x^2+2u_\eta\cdot\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\cdot\eta_x^2+u_\xi\cdot\xi_{xx}+u_\eta\cdot\eta_{xx},$$
$$u_{xy}=u_{\xi\xi}\cdot\xi_x\cdot\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\xi\cdot\xi_{xy}+u_\eta\cdot\eta_{xy},$$
$$u_{xy}=u_{\xi\xi}\cdot\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\cdot\xi_{yy}+u_\eta\cdot\eta_{yy}, \tag{3.7}$$

$$\overline{a_{11}}u_{\xi\xi}+2\overline{a_{12}}u_{\xi\eta}+\overline{a_{22}}u_{\eta\eta}+F=0, \tag{3.8}$$

$$\overline{a_{11}}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2, \tag{3.9}$$

$$\overline{a_{12}}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y, \tag{3.10}$$

$$\overline{a_{22}}=a_\eta\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2, \tag{3.11}$$

Bu holda F bilan U-funksianing ikkinchi tartibli hosilasiga bog’liq bo‘lmagan ifoda belgilangan

3.31 Masala. Tenglamani umumiy yechimini toping va uni kanonib ko‘rinishga keltiring .

Yechish $a_{11}=2, a_{12}=\frac{5}{2}, a_{22}=-3, a_{12}^2-a_{11}a_{22}=\frac{49}{4}>0$.

gaega bo‘lamiz.Demak butun x O y tekislikida gipirbolik tipli tenglama (3.8) tenglamaning xarakteristik tenglamasi quyidagicha $2(y')^2-5y'-3=0.\quad t=y'$, deb, $2t^2-5t-3=0$ kvadrat tenglamaga kelamiz.Uning yecimlari $t_1=3, t_2=-\frac{1}{2}$ (turli haqiqiy yechimlar), y' ga qaytib, ikkita 1-chi tartibli oddiy defglamaga ega bo‘lamiz: $y'=3$ va $y'=-1/2$ Bularni echamiz

$$y' = 3 \Leftrightarrow y = 3x + C \Leftrightarrow y - 3x = C,$$
$$y' = -0{,}5 \Leftrightarrow t = -0{,}5x + C \Leftrightarrow y + 0{,}5x = C.$$

Xarakteristik metodga asosan yani ξ, η - o‘zgaruvchilarni $\xi = y - 3x, \eta = y + 0{,}5x$. formula orqali kirirtamiz xususiy hosilalarni hisoblaymiz $\xi_x = -3, \xi_y = 1, \xi_{xx} = 0, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 0$, $\eta_x = 0{,}5, \eta_y = 1, \eta_{xx} = 0, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 0$. hosilalarni (3.8) ga quysak:

$$u_x = -3u_\xi + u_\eta \cdot 0{,}5,\ u_x = u_\xi + u_\eta,\ u_{xx} = 9u_{\xi\xi} - 3u_{\xi\eta} + 0{,}25u_{\eta\eta},$$
$$u_{xy} = -3u_{\xi\xi} - 2{,}5u_{\xi\eta} + 0{,}5u_{\eta\eta},\ u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

(3.3) ga u_{xx}, u_{yy}, u_{xy} larni qo‘ysak,u holda

$$2(9u_{\xi\xi} - 3u_{\xi n} + 0{,}25u_{nn}) + 5(-3u_{\xi\xi} - 2{,}5u_{\xi n} + 0{,}5u_{nn}) - 3(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi n} + u_{nn}) = 0.$$

O‘xshash hadlarni ixchamlab,tenglamaning kanonik shaklini hosil qilamiz

$: -24{,}5u_{\xi\eta} = 0$ yoki $u_{\xi\eta} = 0$

Bu tenglamani yechish uchun uni $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$ yoki $\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0$.ko‘rinishga yozamiz.Bu yerdan, bu yerda $\dfrac{\partial u}{\partial\eta} = h(\eta)$ -ixtiyoriy faqat η bog’liq funksia η - o‘zgaruvchi bo‘yicha integrallab $u = u(\xi, \eta) = \int h(\eta)d\eta = \ = f(\eta) + g(\xi)$

Bu yerda $f'(\eta) = h(\eta)$ g-funksia bo‘lsa,faqat ξ dan bog’liq.Ya’ni (3.2) tenglamani umumiy yechimi $u(x, y) = f(y + 0{,}5x) + g(y - 3x)$ Bu yerda f va g ixtiyoriy ikki marta defferensialanuvchifunksia

2.Faraz qilamizki sohada $D: a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = 0$ ya’ni (3.7) tenglama, parabolic tipli bo‘lsin Xarateristik tenglama faqat bitta $y' = \dfrac{a_{12}}{a_{11}}$ faraz kilaylik $\varphi(x, y) = C$ uning umumiy integrali $\xi = \varphi(x,y)$,deb olamiz $\eta = \psi(x,y)$ funksia sifatida ixtiyoriy shunday funksiani olamizki $J(x, y) = \xi_x \cdot \eta_y - \xi_y \cdot \eta_x \neq 0$. bo‘lsa.U holda (3.7) tenglama $u_{\eta\eta} = \Phi$. ko‘rinishga ega

2.31 Masala Tenglamaning umumiy yechimini toping

$$49u_{xx}-14u_{xy}+u_{yy}+14u_x-2u_y=0 \qquad (3.12)$$

Yechish: Bu yerda $a_{11}=49, a_{12}=-7, a_{22}=1, b_1=14, b_2=-2, c=f=0,$,

Tenglama parabolic tipli.Xarakteristik tenglamasi: $49(y')^2+14y'+1=0$.

Bu tenglamaning diskriminanti nolga teng. $y'=\frac{1}{7}, y=-\frac{x}{7}+C, y+\frac{x}{7}=C$

Faqat bir guruh xarakteristikalar. $\xi=y+\frac{x}{7}$.

Deb olamiz η funksiani ixtiyoriy tanlaymiz $\eta=x$ (biroq $J(x,y)=\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x=\frac{1}{7}0-1\cdot1=-1\neq0$). shartni tekshiramiz).xususiy hosilalarni topamiz

$$\xi_x=\frac{1}{7},\ \xi_y=1,\ \xi_{xx}=0,\ \xi_{yy}=0,\ \xi_{xy}=0,\ \eta_x=1, \eta_y=0,\ \eta_{xy}=0, \eta_{yy}=$$

Va bularni (3.8) formulaga quyamiz,u holda

$$u_{xx}=\frac{1}{49}u_{\xi\xi}+\frac{2}{7}u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}, u_{xy}=\frac{1}{7}u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}, u_{yy}=u_{\xi\xi}, u_x=\frac{1}{7}u_\xi+u_\eta, u_y=u_\xi.$$

$u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ larni (3.12) tenglamaga quysak

$$49\left(\frac{1}{49}u_{\xi\xi}+\frac{2}{7}u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\right)-14\left(\frac{1}{7}u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\right)+u_{\xi\xi}+14\left(\frac{1}{7}u_\xi+u_\eta\right)-2u_\xi=0.$$

Qavslarni ochib,o‘xshash hadlarni ixchamlasak,kanonik shakldagi tenglamaga kelamiz

$49u_{\eta\eta}+14u_\eta=0$ yoki $7u_{\eta\eta}+2u_\eta=0$

Xar bir £ uchun, bu 2-chi tartibli o‘zgarmas koefsentli chiziqli bir jinsli tenglamadir:uning xarakteristik tenglamalari esa $7r^2+2r=0$ yoki $r_1=0, r_2=-\frac{2}{7}$;

Shuning uchun umumiy yechim quydagicha $u=u(\xi,\eta)C_1(\xi)+C_2(\xi)e^{-2\eta/7}$ bu yerda $C_1(\xi)$ va $C_2(\xi)$ O‘zgaruvchiga bog’liq ixtiyoriy funksia.Eski o‘zgaruvchilarga qaytib,

$$u(x,y)C_1\left(y+\frac{x}{7}\right)+C_2\left(y+\frac{x}{7}\right)e^{-2x/7}$$ Bu yerda

C_1C_2 - Ikki marta differensialanuvchi funksiada

Faraz qilaylik $D: a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} < 0$ (3.7) tenglama elliptic tipli bo‘lsin,uning xarakteristik tenglamasi 2-ta turli kompleks tenglamalardan iborat.Bulardan faqat bittasini qaraymiz,faraz qilamiz $\varphi(x,y) = C$uning umumiy integrali $\xi = \operatorname{Re}\varphi(x,y)$, $\eta = Jm\,\psi(x,y)$deb olamiz (η-haqiqiy qism, η-esa $\varphi(x,y)$) funksianing mavhum qismi)U holda (3.7) tenglama $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi$ko‘rinishi oladi .

- 1.1Misol.Tenglamani kanonik ko‘rinishga keltiring

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0. \qquad \textbf{(3.13)}$$

Yechish.Xarakteristik tenglamasi$(y')^2 + 2y' + 2 = 0$ $t = y'$belgilash olib, $t^2 + 2t + 2 = 0$kvadrat tenglamani hosil qilamiz.Uning yechimi $t_{12} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i$ -kompleks sonlar.Uholda $y' = -1 \pm i$Faqat bitta tenglamani qaraymiz $y' = -1 + i$ uning umumiy yechimi $y = (-1+i)x + C$ yoki $y + x - ix = C$

Buyerda $\varphi(x,y) = y + x - ix$ $\xi = \operatorname{Re}\varphi(x,y) = y + x$, $\eta = Jm\,\varphi(x,y) = -x$ Deb olamiz hosilalarni topamiz $\xi_x = \xi_y = 1, \eta_x = -1, \eta_y = 0$, ikkinchi tartibli hosilalar nolga teng (3.8) formulaga asosan

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, u_{xy} = u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta}, u_{yy} = u_{\xi\xi}.$$

(1.13) qo‘ysak $\left(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\right) - 2\left(u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta}\right) + 2u_{\xi\xi}$

O‘quv mashqlar

–misol va masalalarni eching
–teoremani isbotlang
–shu mavzuni nazariyasini o‘qib oling

Uyga vazifa

Tenglamaning tipini aniqlang va uni kanomik ko‘rinishga keltiring .

1) **1.** $U_{xx} + 2U_{xy} + U_{yy} + 3U_x - 5U_y = 0$

Yechilishi:

Bunda $\begin{matrix} a_{11} = 1, \\ a_{12} = -2, \\ a_{22} = 1 \end{matrix}$ $\qquad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$\lambda = 1$ demak tenglama parabolik kurinishdagi tenglama ekan.

Umumiy nazaraiyaga asosan uzgaruvchilarni kuyidagicha almashtiramiz

$$\xi = y - x \qquad \eta = x$$

Xosilalarni xisoblasak

$$U_x = -U_\xi + U_\eta;$$

$$U_{xx} = U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta};$$

$$U_y = U_\xi;$$

$$U_{yy} = U_{\xi\xi};$$

$$U_{xy} = -U_{\xi\xi} + U_{\xi\eta};$$

Bularni tenglamaga kuyib

$$U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta} - 2U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\xi\xi} - 3U_\xi + 3U_\eta - 5U_\xi = 0$$

soddalashtirish natijasida $U_{\eta\eta} + 3U_\eta - 8U_\xi = 0$ kurinishdagi kanonik tenglamag

kelamiz.

2. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u_y = 0$

Xarakteristik tenglamasini tuzamiz:

$$a_{11} = 1 \qquad a_{12} = -1 \quad a_{22} = 1$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda + 1)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -1$$

Bu yerda $\lambda_{1,2} = -1$ bulganligi uchun bu parabolik tipdagi tenglama.

U xolda kuyidagicha almashtirish kiritamiz:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

$$\begin{cases} \xi(x,y) = y - \lambda x \\ \eta(x,y) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi(x.y) = y + x \\ \eta(x.y) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_x = 1 & \xi_y = 1 \\ \eta_x = 1 & \eta_y = 0 \end{cases}$$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\mu \eta_y = u_\xi \cdot 1 + u_\eta \cdot 0 = u_\xi$$

$$u_{xx} = (u_\xi + u_\eta)_x = (u_\xi)_x + (u_\eta)_x = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

$$u_{yy} = \left(u_\xi\right)_y = u_{\xi\xi} \cdot 1 + u_{\xi\eta} \cdot 0 = u_{\xi\xi}$$

$$u_{xy} = \left(u_\xi + u_\eta\right)_y = \left(u_\xi\right)_y + \left(u_\mu\right)_y = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}$$

Tenglamani urniga kuyamiz:

$$u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} - 2u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\xi\xi} + u_\xi = 0$$

Berilgan tenglamaning kanonik kurinishi kuyidagicha buladi:

$$u_{\eta\eta} + u_\xi = 0$$

3. $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2 u_{yy} = 0;$

Tavsiya etiladigan adabiyotlar

Asosiy

1. ***Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O'zbekistan», 2002, 448 b.***
2. ***Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,***
3. ***Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.***
4. ***Bisadzs L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.***
5. ***Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.***

Qo'shimcha

6. ***Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.***
7. ***Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.***
8. ***Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.***
9. ***Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.***
10. ***Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.***
11. ***Mixlnn S.G. Leksii po lineynыm integralnыm uravneniyam. M. 1959.***
12. ***Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.***

13. ***Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.***

14. ***Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.***

Mavzu bo‘yicha yangi tushunchalar uchun savollar.

1. Xususiy xosilali differensial tenglama qachon parabolik tipdagi tenglama deyiladi?
2. 2–chi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli parabolik tipdagi tenglamani kanonik shakliga keltirish yo‘lini ayting.

Mavzu 4. 2-chi tartibli xususiy xosilali d.t. klassifikasiya (elliptik tip)

Amaliy mashg'ulotlar rejasi
Fan: " Matematik fizika tenglamalari".
O'quv soati: 2 s. (amaliy)
O'quv mashg'ulotlar turi: kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.
O'quv mashg'ulotlar rejasi:
- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

O'quv mashg'ulotlar maqsadi:
Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish
O'quv mashg'ulotlar vazifasi:
- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish,Xususiy hosilali tenglamalarnazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

O'qitish texnologiyasi:
- *o'qitish metodlari*: individual savol-javob; birga o'qitish;o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremalarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qtish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

Pedagogik masalalar :
- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

O'quv faoliyati natijalari:
- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashgulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremalar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.

1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati:* tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qatiyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo'llanmalar,kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish ; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlalar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari;o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati:* o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari:* og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati:* mavzuni kiritish,Matematik fizika tenglamalarini o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;
- *talaba faoliyati:* oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari:* og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)

- *o'qituvchi faoliyati:* mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati:* ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarnini aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari:* guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

Misol va mashqlar namoishi

2-chi tartibli xususiy xosilali d.t. klassifikasiya (elliptik tip)

2-chi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar klassfikasiyasi (elliptic tip)

Ikkinchi tartibli chiziqli tenglama

§1. Ikkinchi tartibli chiziqli tenglamalarning klassfikasiyasi.

Ikkinchi tartibli xususiy hosilali chiziqli yuqori tartibli gosilaga rga bo`lgan tenglamani qarab chiqamiz

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \qquad (4.1)$$

Bu yerda a_{11}, a_{12}, a_{22} lar X va Y funksiyalar hisoblanadi.

O`zgaruvchilarni almashtirish yordamida

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

Buning uchun detirminantnoldan farqli bo‘lishi kerak

$$D = \begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix}$$

Berilgan tenglamaga ekvivalent tenglamaga ega bo`lamiz. Bizni qo`yidagi savol qiziqtiradi: ξ va η yangi o`zgaruvchilarni qanday olish kerakki, berilgan tenglama soddaroq (kanonik) ko`rinishga ega bo`lsa.

Yangi o`zgaruvchilarga o`tib:

$$\begin{aligned}
&u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\
&u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\
&u_{xx} = (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)_\xi \xi_x + (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)_\eta \eta_x = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + u_\xi (\xi_x)_\xi \xi_x + \\
&+ u_{\eta\xi}\eta_x \xi_x + u_\eta (\eta_x)_\xi \xi_x + u_{\xi\eta}\xi_x \eta_x + u_\xi (\xi_x)_\eta \eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\eta (\eta_x)_\eta \eta_x = \\
&= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \left[(\xi_x)_\xi \xi_x + (\xi_x)_\eta \eta_x\right] + u_\eta \left[(\eta_x)_\xi \xi_x + (\eta_x)_\eta \eta_x\right] = \\
&= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}.
\end{aligned} \qquad (4.2)$$

Xuddi shunday

$$\begin{aligned}
&u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}, \\
&u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}.
\end{aligned} \qquad (4.3)$$

Bu hosilalarni (4.1)-ga qo`ysak:

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + F_1(\xi, \eta, u_\xi, u_\eta, u) = 0, \qquad (4.4)$$

Bu yerda

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{11} &= a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2, \\
\bar{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y, \\
\bar{a}_{22} &= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Shuni ta`kidlaymizki, agar berilgan tenglama chiziqli, ya`ni

$$F(x,y,u,u_x,u_y) = b_1u_x + b_2u_y + cu + f,$$

U holda F_1 qo`yidagi ko`rinishga ega.

$$F_1(\xi,\eta,u_\xi,u_\eta,u) = \beta_1u_\xi + \beta_2u_\eta + \gamma u + \delta.$$

Bu yo`l bilan, tenglama yana chziqli bo`ladi.

$\xi = \varphi(x,y)$ o`zgaruvchini hunday olamizki,

(4.4) tenglamadagi $\bar{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{11}}$ nolga teng bo`lsa Buni uchun $\xi = \varphi(x,y)$

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0. \tag{4.6}$$

tenglamaning yechimi bo`lishi zarur

(4.6) tenglamani ko`paytma shaklida yozish mumkin.

$$\left(a_{11}\xi_x - \left(-a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right)\xi_y\right)\left(a_{11}\xi_x - \left(-a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right)\xi_y\right).$$

Bu yo`l bilan (4.6) tenglama yechimi, ikkita chiziqli birinchi tartibli tenglamadan iborat bo`ladi.

$$a_{11}\xi_x - \left(-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right)\xi_y = 0. \tag{4.7}$$

§3 da kelib chiqadiki, (4.7) tenglamani yechish uchun, qo`yidagi tenglamaning umumiy integralini toppish kerak.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{4.8}$$

(4.8) tenglama yechimining ko`rinishiga ildiz ostidagi $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ ifodani ishorasi ta`sir qiladi.

Bu ifodaning ishorasi yordamoda (4.1) tenglamaning tipi aniqlanadi.

(4.1) Tenglamani M nuqtada

Giperbolik tipli, agar $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$

Elliptic tipli, agar $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$

Parabolic tipli, agar $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ bo`lsa,

$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})D^2$, tenglikning o`rinli ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin, bu yerdan tenglaning tipi o`zgaruvchilarni almashtirishda o`zgarmaydi.

Shuni ta`kidlash joyizki, tenglamaning tipi M nuqtaga bog`liq ba turli nuqtada turlicha bo`lishi mumkin.

1.1 Misol. Qo`yidagi tenglamani qaraymiz

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0, \tag{4.9}$$

Buyerda . $a_{11} = 1, a_{12} = 0$ va $a_{22} = x$ ya'ni

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -x.$$

Xuddi shunday $x < 0$ bo'lganda (4.9) tenglamani gepirbolik tipli , $\boldsymbol{x = 0}$ da parabolic tipli va $x > 0$ da elliptic tipli.

§2. Ikkinchi tartibli chiziqli tenglamani kanonik ko`rinishga keltirish

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0 \tag{4.10}$$

Tenglamani (4.1) tenglamaning xarakteristik tenglamasi deymiz, uning integrallari esa – xarakteristikalar. (4.10) tenglama ikkita (4.8) tenglamaga ajraladi va (4.1) tenglamani kanonik ko`rinishiga keltirish uchun kattarol uynaydi Gepirbolik tenglamalar uchun xarakteristikalar haqiqiy va turli xil, ellliptik tipdagi tenglamalar uchun kompleks va turlicha, parobolik tipli tenglamalar uchun ikkala xarakteristikalar haqiqiy va mos tushadi.

Bu holatlarni alohida qarab chiqamiz.

1. Gepirbolik tenglamalar uchun $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ va (4.8) tenglamaning o`ng qismi haqiqiy va turlicha. Uning umumiy integral $\varphi(x, y) = C$ va $\psi(x, y) = C$, xarakteristikalar oilasini anglatadi.

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

Deb qo`ysak , u holda (4.5) ni $\boldsymbol{\bar{a}_{11}}$ va $\boldsymbol{\bar{a}_{22}}$ koeffisientlari nolga aynada va (4.4) tenglama $u_{\xi\eta}$ oldidagi koeffisientiga bo`lsak, qo`yidagi ko`rinishni oladi.

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

Bu yerda $\Phi = -\frac{F_1}{2\bar{a}_{12}}$, Bu gepirbolikn tipdagi tenglamalarning kanonik ko`rinishi deyiladi. Ko`pincha boshqa kanonik ko`rinishdan foydalaniladi.

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \qquad \beta = \frac{\xi - \eta}{2},$$

Bu yerda α va β - yangi o`zgaruvchilar. U holda

$$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \quad u_\eta = (u_\alpha - u_\beta), \quad u_{\xi\eta} = (u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta})$$

va (4.2) tenglama qo`yidagi ko`rinishga ega

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1,$$

Bu yerda $\Phi_1 = 4\Phi$

2.Parabolik tipdagi tenglamalar uchun $\boldsymbol{a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0,}$ va (4.8) tenglama bitta $\varphi(x, y) = C.$ umumiy integralni beradi.

Bu holda

$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y),$$

Bu holda $\psi(x, y)$ - ixtiyoriy funksiya, $\varphi(x, y)$ bilan birgalikda teskari almashtirishli o`zgaruvchilar.

U holda

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{12}\xi_y^2 = a_{11}\left(\xi_x + \frac{a_{12}}{a_{11}}\xi_y\right)^2 = 0$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\left(\xi_x + \frac{a_{12}}{a_{11}}\xi\right)\left(\eta_x + \frac{a_{12}}{a_{11}}\eta_y\right) = 0,$$

ya`ni, $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$ (4.4) tenglamani $u_{\xi\eta}$ oldidagi koeffisientiga bo`lsak, qo`yidagi parobolik tipdagi tenglama uchun kanonik ko`rinishiga ega bo`lamiz

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta),$$

Bu yerda $\Phi = -\frac{F_{11}}{\bar{a}_{22}}.$

2. Elliptik tipdagi tenglamalar uchun

$a_{12}^2 - a_{11}a_{12} < 0$ va (4.8) tenglamaning o`ng tomoni qo`shma kompleksdir, shuning uchun bu tenglamaning umumiy integrali han qo`shma kompleksdir

$$\varphi(x,y) = C, \qquad \overline{\varphi}(x,y) = C.$$

Kompleks o`zgaruvchilar va funksiyalar bilan ishlamaslik uchun, yangi haqiqiy $\alpha$ va $\beta$ o`zgaruvchilarni kiritamoz.

$$\alpha = \frac{\varphi + \overline{\varphi}}{2}, \qquad \beta = \frac{\varphi - \overline{\varphi}}{2i},$$

yoki $\varphi = \alpha + i\beta, \ \overline{\varphi} = \alpha - i\beta.$ Bu yo`l bilan

$$0 = a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = a_{11}(\alpha_x + i\beta_x)^2 + 2a_{12}(\alpha_x + i\beta_x)(\alpha_y + i\beta_y) +$$
$$+ a_{22}(\alpha_y + i\beta_y)^2 = (a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2) - (a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) +$$
$$+ 2i(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y).$$

bu yerdan ((4.5)ga qarang), $\overline{a}_{11} = \overline{a}_{22}$,$\overline{a}_{12} = 0.$

(4.4) tenglama $u_{\alpha\alpha}$ oldidagi koeffisientga bo`lgandan so`ng qo`yidagi ko`rinishni oladi.

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_{\xi}, u_{\beta}),$$

Bu yerda $\Phi = -\dfrac{F_1}{\overline{a}_{11}}.$

Ya`ni $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ ifodani ishorasidan (4.1) tenglamaning qo`yidagi kanonik ko`rinishini qo`lga kiritamiz.

1. Giperbolik tipli: $u_{\xi\eta} = \Phi$ yoki $u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi.$
2. Parabolik tipli: $u_{\eta\eta} = \Phi.$
3. Elliptik tipli: $u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi.$

2. O`zgarmas koeffisientli chiziqli tenglamalarning kanonik ko`rinishi

O`zgarmas koeffisientli ikkinchi tartibli chiziqli tenglamaning umumiy ko`rinishi qo`yidagicha.

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_1u_y + cu + f(x,y) = 0. \qquad (4.11)$$

(4.8) tenglamani yechib, xarakteristikalari qo`yidagi to`g`ri chiziqlarni hosil qilamiz

$$y = \lambda_1 x + C_1, \qquad y = \lambda_2 + C_2,$$

bu yerda $\lambda_1$vaλ_2 tenglamaning yehimlari (uni qo`laylik uchun xaraktereistikakar ataymiz)

$$a_{11}\lambda^2 - 2a_{12}\lambda + a_{22} = 0. \qquad (4.12)$$

Endi o`zgaruvchilarni almashtirish yordamida, ya`ni.

1. Agar $\lambda_1$va$\lambda_2$haqiqiy va va turlicha bo`lsa (giperbolik tipli)

$$\xi = y - \lambda_1 x, \quad \eta = y - \lambda_2 x \quad \text{yoki} \quad \xi = y - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}x, \quad \eta = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}x;$$

2. Agar $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ bo`lsa (parobolik tipli)

$$\xi = y - \lambda x, \quad \eta = x;$$

3. Agar $\lambda_{1,2} = a \pm ib \quad (b \neq 0)$ bo`lsa (elliptic tipli)

$$\xi = y - ax, \quad \eta = bx;$$

(4.11) tenglama qo`yidagi ko`rinishlardan biriga keladi

1. . $u_{\xi\eta} + \Phi = 0$ yoki $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \Phi = 0;$

2. $u_{\eta\eta} + \Phi = 0;$

3. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \Phi = 0;$

bu yerda $\Phi = \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + cu + f.$

1. Misol: Tenglamaning tipini aniqlang va uni kanonik ko`rinishiga keltiring.

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + u_x = 0,$$
$$a = 1, b = 1, c = 2$$

$\Delta = b^2 - ac = -1$; Tenglama elliptic tipli, Xarakteristika tenglamalari

$$ady - (b \pm \sqrt{b^2 - ac})dx = 0,$$
$$dy - (1 \pm i)dx = 0.$$
$$y - x \pm ix = c, \xi = y - x, \eta = x.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}(\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}(\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}(\frac{\partial u}{\partial y})\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta}(\frac{\partial u}{\partial y})\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi}(\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta}(\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Olingan hosilalarni tenglama qo`ysak, u holda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

Jabob: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi}.$

2. Misol. Tenglamani kanonik ko`rinishiga keltiring.

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} + u_x + u_y = 0. \tag{4.15}$$

Tenglamaning xarakteristik ildizlari

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ teng . tenglama-elliptik tipli, shuning qo`yidagi almashririshni olamiz

$$\xi = x + y, \quad \eta = x.$$

Qo`yidagi ifodalarni

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta,$$
$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi,$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$
$$u_{xy} = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}, \quad u_{yy} = u_{\xi\xi},$$

(4.15) tenglamaga qo`ysak, u holda

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_\xi + u_\eta = 0. \tag{4.16}$$

Ikkinchi tartibli o`zgarmas koeffisientli chiziqli tenglamalar uchun, kanomik ko`rinishga keltirishini yanada soddaroq ko`rinishi mavjud. Buning uchun $\boldsymbol{u}$-funksiyaning o`rniga yangi $\boldsymbol{\vartheta}$ funksiya kiritamiz.

$$u = e^{\lambda\xi + \mu\eta}\vartheta,$$

Bu yerda λ va μ - o`zgarmaslar. U holda

$$\begin{aligned}
u_\xi &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\vartheta_\xi + \lambda\vartheta),\\
u_\eta &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\vartheta_\eta + \mu\vartheta),\\
u_{\xi\xi} &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\vartheta_{\xi\xi} + 2\lambda\vartheta_\xi + \lambda^2\vartheta),\\
u_{\xi\eta} &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\vartheta_{\xi\eta} + \lambda\vartheta_\eta + \mu\vartheta_\xi + \lambda\mu\vartheta),\\
u_{\eta\eta} &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\vartheta_{\eta\eta} + 2\mu\vartheta_\eta + \mu^2\vartheta).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Bu ifodalarni qo`yidagi tenglamaga qo`yib $u_{\xi\eta} + \beta_1 u_\xi + \beta_1 u_\eta + cu + f = 0$

va so`ngra $e^{\lambda\xi+\mu\eta}$ qisqartirsak, u holda

$$\vartheta_{\xi\eta} + (\mu + \beta_1)\vartheta_\xi + (\lambda + \beta_2)\vartheta_\eta + (\lambda\mu + \beta_1\lambda + \beta_2\mu + C)\vartheta + f_1 = 0.$$

λ va μ parametrni shunday tanlaymizki, birinchi hosila oldidagi koeffisentlar nolga aylansa $(\lambda = -\beta_2,\ \mu = -\beta_1)$

Natijada

$$\vartheta_{\xi\eta} + \gamma\vartheta + f_1 = 0,$$

Bu yerda $\gamma = \lambda\mu + \beta_1\lambda + \beta_2\mu + c = c - \beta_1\beta_2,\; f_1 = fe^{-(\lambda\xi + \mu\eta)}$.

Shunga o`xshash boshqa kanonik ko`rinishi uchun xam soddalashtirishlarni keltirishi mumkin. Nihoyat koeffisientlari o`zgarmas bo`lgan qo`yidagi tenglamalarning kanonik ko`rinishiga kelamiz.

1. Giperbolik tipli: $\vartheta_{\xi\eta} + \gamma\vartheta + f_1 = 0$ yoki $\vartheta_{\xi\xi} - \vartheta_{\eta\eta} - \gamma\vartheta + f_1 = 0.$
2. Parabolik tipli: $\vartheta_{\eta\eta} + \beta_1\vartheta_{\xi} + f_1 = 0.$
3. Elliptik tipli: $\vartheta_{\xi\xi} + \vartheta_{\eta\eta} + \gamma\vartheta + f_1 = 0.$

2.4 Misol: 2 misoldagi (4.16) tenglamani soddalashtiramiz. (4.17)dagi ifodadagi hosilalarni qo`yib, $e^{\lambda\xi + \mu\eta}$ ga qisqartirsak, u holda

$$\vartheta_{\xi\xi} + \vartheta_{\eta\eta} + 2(\lambda + 1)\vartheta_{\xi} + (2\mu + 1)\vartheta_{\eta} + (\lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda + \mu)\vartheta = 0.$$

$\lambda = -1, \quad \mu = -\dfrac{1}{2}.$ deb olamiz.

U holda tenglama qo`yidagi ko`rinishga ega.

$$\vartheta_{\xi\xi} + \vartheta_{\eta\eta} - \frac{5}{4}\vartheta = 0.$$

O‘quv mashqlar

–misol va masalalarni eching
–teoremani isbotlang
–shu mavzuni nazariyasini o‘qib oling

Uyga vazifa

Tavsiya etiladigan adabiyotlar

Asosiy

1. ***Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O‘zbekistan», 2002, 448 b.***
2. ***Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,***
3. ***Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.***

4. *Bisadzs L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.*

5. *Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.*

Qo‘shimcha

1. *Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.*

2. *Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.*

3. *Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.*

4. *Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.*

5. *Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.*

6. *Mixlnn S.G. Leksii po lineynыm integralnыm uravneniyam. M. 1959.*

7. *Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.*

8. *Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.*

9. *Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.*

Mavzu bo‘yicha yangi tushunchalar uchun savollar.

1. Xususiy xosilali differensial tenglama qachon elliptik tipdagi tenglama deyiladi?

2. 2–chi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli elliptik tipdagi tenglamani kanonik shakliga keltirish yo‘lini ayting.

Mavzu 5. Dalamber formulasi

Amaliy mashg’ulotlar rejasi
Fan: “ Matematik fizika tenglamalari“.
O‘quv soati: 2 s. (amaliy)
O‘quv mashg’ulotlar turi: kartochka, topshiriq, o‘quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg’ulotlar.
O‘quv mashg’ulotlar rejasi:
- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o‘quv masalalari.
- Misol va masalalar echish

- Yakuniy tahlil

O'quv mashg'ulotlar maqsadi:

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

O'quv mashg'ulotlar vazifasi:

- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish,Xususiy hosilali tenglamalarnazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

O'qitish texnologiyasi:

- *o'qitish metodlari*: individual savol-javob; birga o'qitish;o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremalarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qtish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

Pedagogik masalalar :

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

O'quv faoliyati natijalari:

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashgulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremalar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.

1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati:* tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qatiyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo'llanmalar,kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish ; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlalar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari;o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati:* o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;

- *qabul qilish shakli metodlari:* og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati:* mavzuni kiritish,Matematik fizika tenglamalarini o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;
- *talaba faoliyati:* oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari:* og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)

- *o'qituvchi faoliyati:* mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati:* ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarnini aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari:* guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

Misol va mashqlar namoishi
Dalamber formulasi

To'lqin tenglamasi uchun Koshi masasalasi

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x,\, t)$$

Boshlang`ich shartlarda

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t\big|_{t=0} = u_1(x),$$

Bu yerda f, u_0, u_1 berilgan funksiyalar bo`lib, Dalamber formulasi orqali topiladi

$$u(x,\,t)=\frac{1}{2}\big[u_0(x+at)+u_0(x-at)\big]+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}u_1(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\,\tau)\,d\xi d\tau.$$

4.1 Misol. $u_{tt}=4u_{xx}\ u\big|_{t=0}=x^2,\ u_t\big|_{t=0}=x.$ tenglamaning yeching. Tenglamada $a=2,\ u_0(x)=x^2,\ u_1(x)=x,$

U holda $u_1(\xi)=\xi.$

Dalamber formulasini qo`llasak

$$u(x,\,t)=\frac{1}{2}\big[(x+2t)^2+(x-2t)^2\big]+\frac{1}{4}\int\limits_{x-2t}^{x+2t}\xi\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2t^2+8t^2\right)+\frac{1}{4}\xi^2\bigg|_{x-2t}^{x+2t}=x^2+4t^2+4xt=(x+2t)^2\,.$$

4.2 Misol. $u_{tt}=4u_{xx}+e^x+t$ при $u\big|_{t=0}=x,\ u_t\big|_{t=0}=\frac{\ln x}{x}.$ tenglamani yeching Dalamber formulasidan:

$$u(x,\,t)=\frac{1}{2}\big[(x+2t)+(x-2t)\big]+\frac{1}{4}\int\limits_{x-2t}^{x+2t}\frac{\ln\xi}{\xi}\,d\xi+\frac{1}{4}\int\limits_0^t\int\limits_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)}\left(e^{\xi}+\tau\right)\,d\xi\,d\tau=$$

$$=x+\frac{1}{8}\ln^2\xi\bigg|_{x-2t}^{x+2t}+\frac{1}{4}\int\limits_0^t\left(e^{\xi}+\xi\tau\right)\bigg|_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)}d\tau=x+\frac{1}{8}\big[\ln^2(x+2t)-\ln^2(x-2t)\big]+$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^t\big[e^{x+2(t-\tau)}+\big(x+2(t-\tau)\big)\tau-e^{x-2(t-\tau)}-\big(x-2(t-\tau)\big)\tau\big]\,dt=$$

$$=x+\frac{1}{8}\big[\ln^2(x+2t)+\ln^2(x-2t)\big]-\frac{1}{4}e^x+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{8}\left(e^{x+2t}+e^{x-2t}\right).$$

ya`ni, torni erkin tebranishi uchun biz qo`yidafi bir jinsli tenglamani

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad(5.1)$$

$$u\big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = F(x), \tag{5.2}$$

boshlang`ich shartlarda yechish kerak, bu yerda $f(x)$ va $F(x)$ butun sonli o`qda berilgan funksiyalardir. Bunday masala boshlang`ich shartli masala`ki Koshi masalasi deyiladi. Bu masalani to`lqin yugirishi metodi bilan yechish mumkin. (5.1) tenglama umumiy yechimining ko`rinishi qo`yidagicha:

$$u(x,t) = \varphi(x-at) + \psi(x+at), \tag{5.3}$$

bu yerda φ va ψ ikki marta differensiallanuvchi sanaladi. φ va ψ ni shunday tanlaymizki $u = u(x,t)$ funksiya (5.2) boshlang`ich shartlarni qanoatlantirsak, u holda differensial tenglamaning yechishini keltirib chiqamiz.

$$u = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)dz.$$

Uyga vazfa

5.3 tenglamaning yechimini toping. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

Agar $u\big|_{t=0} = x, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0.$ bo‘lsa

Yechish. Ya`ni a=1, F(x)=0, u holda

$u = \dfrac{f(x-at) + f(x+at)}{2}$ Bu yerda $u = \dfrac{x - t + x + t}{2}$

va u=x

Javob: u=x

5.4 Tenglamaning yechimini toping $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, agar $u\big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = x^3.$

Yechish. Bu yerda $f(x)=0,\ F(x)=x^3.$

$$u=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}z^3dz=\frac{1}{8a}z^4\Big|_{x-at}^{x+at}=\frac{1}{8a}\Big((x+at)^4-(x-at)^4\Big)=$$
$$=\frac{1}{8a}(x^2+2axt+a^2t^2+x^2-2axt+a^2t^2)(x^2+2axt+a^2t^2-x^2+2axt-a^2t^2)=$$
$$=\frac{1}{8a}(2x^2+2a^2t^2)\cdot 2\cdot 2axt=\frac{1}{a}(x^3at+xa^3t^3)=x^3t+xt^3a^2.$$

Javob: $u=x^3t+xt^3a^2.$

5.5 $\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$, tenglama bilan aniqlanadigan torning formasini toping $t=\pi$, momentda

Agar $u\big|_{t=0}=\cos x,\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=x.$

Yechish

$$u=\frac{\cos(x+at)+\cos(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}z\ dz=$$
$$=\cos x\cos at+\frac{1}{2a}\cdot\frac{z^2}{2}\Bigg|_{x-at}^{x+at}=\cos x\cos at+\frac{1}{4a}\cdot 4atx=\cos x\cos at+xt.$$

Agar $t=\pi$, bo`lsa, u holda $u=\cos a\pi\cdot\cos x+\pi x.$

Javob: $u=\cos a\pi\cdot\cos x+\pi x.$

Bir jinsli tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masala

$u_{tt}=a^2u_{xx}$, birjinsli to`lqin tenglamasi $u(0,x)=\varphi(x),\dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t}=\psi(x)$ boshlang`ich shartlar va $U(t,0)=U(t,l)=0.$ va chegaraviy shartlar bilan berilgan bo`lsin

Berilgan masala Fure metodi bilan yechiladi agarda yechim $U(t,x)=X(x)T(t).$ko`rinishda ifodalansa $U(t,x)$ berilgan tenglamaga qo`yib $X(x)$ va

$T(t)$ funksiyhala uchun tenglamaga ega bo`lamiz. $X''=-\lambda^2 X$ tenglamani $X(x)$ ga $X(0)=X(l)=0$ chegaraviy shartlarga nisbatan yechsak

$$X(x)=X_n(x)=A_n\sin\frac{\pi n}{l}x, \lambda=\lambda_n=\frac{\pi n}{l}.$$

$T''=-\lambda^2 a^2 T$ tenglamani T(t) nisbatan yechsak, $T(t)=T_n(t)=C_n\sin\frac{a\pi n}{l}t+D_n\cos\frac{a\pi n}{l}t,$

bu yerda, A_n, C_n, D_n konstantalar. Tenglamaning birjinsligidan $A_n=1.$ deb olish mumkin.

Demak, berilgan tenglamaning umumiy yechimi qo`yidagicha:

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\sin\frac{a\pi n}{l}t+D_n\cos\frac{a\pi n}{l}t)\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

C_n, D_n Konstantalarni topish uchun boshlang`ich shartlardan foydalanamiz.

$$U(0,x)=\varphi(x), \frac{\partial U(0,x)}{\partial x}=\psi(x).$$

U holda qo`yidagi tenglamalarga ega bo`lamiz

$$\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\frac{\pi n}{l}x=\varphi(x), \qquad D_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{a\pi n}{l}\sin\frac{\pi n}{l}x=\psi(x), \qquad C_n=\frac{2}{a\pi n}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx.$$

1.Misol. Bir jinsli to`lqin tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$U_{tt}=a^2U_{xx}, a=1{,}5$$
$$U(0,x)=x(l-x), \frac{\partial U(0,x)}{\partial t}=0, U(t,0)=U(t,l)=0.$$

Yechim qo`yidagi ko`rinishga yoziladi.

$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\sin\frac{a\pi n}{l}t+D_n\cos\frac{a\pi n}{l}t)\sin\frac{\pi n}{l}x,$ bu yerda

$$C_n = 0\,, \psi(x) = 0\,,\ D_n = \frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx,\ \varphi(x) = x(l-x),\ \ D_n$$

Hisoblashlarni ikki marta qismlarga integrallashlardan boshlaymiz

$$D_n = \frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx = -\frac{2}{\pi n}\int_0^l x(l-x)d\cos\frac{\pi n}{l}x = -\frac{2}{\pi n}x(l-x)\cos\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^l +$$
$$+\frac{2}{\pi n}\int_0^l \cos\frac{\pi n}{l}x(l-2x)dx = \frac{2l}{(\pi n)^2}\int_0^l (l-2x)d\sin\frac{\pi n}{l}x = \frac{2l}{(\pi n)^2}(l-2x)\sin\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^l +$$
$$+\frac{4l}{(\pi n)^2}\int_0^l \sin\frac{\pi n}{l}xdx = -\frac{4l^2}{(\pi n)^3}\cos\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^l = -\frac{4l^2}{(\pi n)^3}\cos\pi n + \frac{4l^2}{(\pi n)^3} = \frac{4l^2}{(\pi n)^3}\left[1-\cos\pi n\right] =$$
$$= \frac{4l^2}{(\pi n)^3}\left[1+(-1)^{n+1}\right].$$

Jabob: $U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4l^2}{(\pi n)^3}\left[1+(-1)^{n+1}\right]\cos\frac{1{,}5\pi n}{l}t\sin\frac{\pi n}{l}x.$

O‘quv mashqlar

–misol va masalalarni eching
–teoremani isbotlang
–shu mavzuni nazariyasini o‘qib oling

Uyga vazifa

4.3 Tenglamani yechimini toping: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, yeyoki $u\big|_{t=0} = x,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0.$

4.4 Tenglamani yechimini toping $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, yoki $u\big|_{t=0} = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = x^3.$

1. $U_{tt} = a^2U_{xx}, a = 2, U(0,x) = (l-x)\sin\frac{\pi x}{l}, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0, U(t,0) = U(t,l) = 0.$

2. $U_{tt} = a^2U_{xx,} a = 3, U(0,x) = x\sin(l-x), \frac{\partial y}{\partial t}(0,x) = 0, U(t,0) = U(t,l) = 0$

3)$U_{tt} = a^2U_{xx}, a = 4, U(0,x) = 2(l-x)\sin x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0$

4)$U_{tt} = a^2U_{xx}, a = 10, U(0,x) = 10x, U(t,0) = U(t,l) = 0, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0.$

Tavsiya etiladigan adabiyotlar

Asosiy

1. ***Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O'zbekistan», 2002, 448 b.***
2. ***Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,***
3. ***Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.***
4. ***Bisadzs L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.***
5. ***Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.***

Qo'shimcha

1. ***Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.***
2. ***Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.***
3. ***Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.***
4. ***Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.***
5. ***Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.***
6. ***Mixlnn S.G. Leksii po lineynыm integralnыm uravneniyam. M. 1959.***
7. ***Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.***
8. ***Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.***
9. ***Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.***

Mavzu bo'yicha yangi tushunchalar uchun savollar.

5. Dalamber formulasini yozing.
6. Xususiy xosilali tenglamaga uchun klassifikasiyani keltiring.
7. Tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasi.

Mavzu 6. Shturm-Liuvil masalasi

Amaliy mashg'ulotlar rejasi
Fan: " Matematik fizika tenglamalari".

O‘quv soati: 2 s. (amaliy)
O‘quv mashg’ulotlar turi: kartochka, topshiriq, o‘quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg’ulotlar.
O‘quv mashg’ulotlar rejasi:
- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o‘quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

O‘quv mashg’ulotlar maqsadi:
Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg’ulotlar bilan chuqurlashtirish
O‘quv mashg’ulotlar vazifasi:
- *o‘qituvchi:* mavzu bo‘yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o‘rganish tajribasini oshirish,Xususiy hosilali tenglamalarnazariyasini o‘rganish, analiz va o‘rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg’otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo‘ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma’suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o‘rgatish.

O‘qitish texnologiyasi:
- *o‘qitish metodlari*: individual savol-javob; birga o‘qitish;o‘quv qo‘llanmalarga asoslanib teoremalarni isbotlash, misollar echish mahoratini o‘rgatish
- *o‘qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o‘qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko‘rsatmalar
- *o‘qtish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og’zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

Pedagogik masalalar :
- mavzu bo‘yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o‘rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo‘yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o‘rganishni shakllantirish;

O‘quv faoliyati natijalari:
- kurs mavzulari bo‘yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o‘rgangan tushunchalar bilan amaliy mashgulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremalar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo‘llashni mustaqil o‘rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

1.2 Amaliy mashg’ulotning xronologik xaritasi.

1 bosqich. O‘quv mashg’ulotlarga kirish (10 daqiqa);

- *o‘qituvchi faoliyati:* tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qatiyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo‘llanmalar,kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish ; o‘quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlalar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari;o‘quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;

- *talaba faoliyati:* o‘quv joyini tayyorlash (o‘quvchilarning borligi; tashqi ko‘rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o‘quv dars maqsadi; o‘quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari:* og’zaki nazorat, individual savol-javob; ob’yektlar bilan ishlash; konspektlash;

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);

- *o‘qituvchi faoliyati:* mavzuni kiritish,Matematik fizika tenglamalarini o‘rganish bilan bog’liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg’ulotlar matnini tarqatish; qo‘shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg’ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;
- *talaba faoliyati:* oldingi mavzu bo‘yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari:* og’zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)

- *o‘qituvchi faoliyati:* mavzu bo‘yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o‘tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o‘quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati:* ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o‘zaro baholash o‘tkazish; yo‘l qo‘yilgan xatolarnini aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari:* guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

1.3 O‘quv-uslubiy qo‘llanma

O‘quv mashg’ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o‘quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

Misol va mashqlar namoishi

Shturm-Liuvil masalasi

1.Misol Shturm-Liuvil masalasini yeching

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(3/2) = y'(1/2) = 0. \end{cases}$$

Faraz qilaylik $\lambda = \omega^2 \ (\omega > 0)$. U holda tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo‘ladi

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$$

va

$$y' = -\omega C_1 \sin \omega x + \omega C_2 \sin \omega x.$$

Quyidagi sestimani hosil qilamiz

$$\begin{cases} C_1 \cos \frac{3}{2}\omega + C_2 \sin \frac{3}{2}\omega = 0, \\ -\omega C_1 \sin \frac{\omega}{2} + \omega C_2 \sin \frac{\omega}{2} = 0. \end{cases}$$

Quyidagi tenglamani yechamiz

$$\begin{vmatrix} -\sin \frac{\omega}{2} & \cos \frac{\omega}{2} \\ \cos \frac{3}{2}\omega & \sin \frac{3}{2}\omega \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \cos \omega = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

U holda xos qiymat quyidagiga teng

$$\lambda = \omega^2 = \pi^2 \left(\frac{1}{2} + n \right)^2.$$

Kiyinchalik:

$$-C_1 \sin \frac{\omega_n}{2} + C_2 \cos \omega_n 2 = 0,$$

$$\frac{C_2}{C_1} = \operatorname{tg} \frac{\omega_n}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \right) = (-1)^n = \frac{\sin(\omega_n/2)}{\cos(\omega_n/2)}.$$

Xos funksialarni quyidagi shartdan topamiz

$$y = y_n = C_1 \cos \omega_n x + C_2 \sin \omega_n x.$$

C_1 Va C_2: ni topamiz

$$C_1 = C \cos \frac{\omega_n}{2}, \quad C_2 = C \sin \frac{\omega_n}{2}, \quad C = 1.$$

U holda

$$y = y_n = \cos \frac{\omega_n}{2} \cos \omega_n x + \sin \frac{\omega_n}{2} \sin \omega_n x = \cos \left[\omega_n \left(x - \frac{1}{2} \right) \right].$$

Shturm-Liuvil masalasi ,xosfunksiali qatorlar

Quyidagi bir jinsli chiziqli defferensial tenglamani qaraymiz

$$-y''(x) + q(x)y'(x) - \lambda\, y(x) = 0 \tag{6.1}$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \tag{6.2}$$

Chegaraviy shartlar

Bu yerda $q(x)$ - $[a,b]$ da uzluksiz $q(x)\geq 0$;

$\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0,\quad \beta_1^2+\beta_2^2\neq 0.$

Shunday λ -ni qiymatini kerakli (6.1) tenglamani noldan farqli (interval)yechimlari mavjud bo‘lsin va (6.2) shartni qanoatlantirsin.

Shunday λ -ni qiymatiki,bu holda (6.1) - (6.2) tenglamaning notrival yechimlari mavjud,chegaraviy masalaning xos qiymatlari diyiladi unga mos notrival yechimlar esa –xos funksialar deyiladi.Quydagi tasdiq urinli:

1)Xos qiymatlar ketmaketliklardan iborat

$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_n<\ldots,<\lambda_n\to\infty, n\to\infty.$,xar bir λ_n songa, yagona $y_n(x).$ -xos funksia mos keladi.

2)Barcha $n\neq m$ uchun

3)Faraz qilaylik shartlar bajarilsin.U holda

$$\int^b y_n(x)y_m(x)dx=0.$$

chegaraviy masalaning barcha xos sonlarni musbat

1.3.Teorima Har qanday $f(x)$ funksiya (6.2) tenglamaning chegaraviy shartlarini qanoatlantruvchi ,birinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega va $[a,b]$ da ikkinchi tartibli qism uzluksiz hosilaga ega funksiya ,xos funksialar buyicha absalyut va tekis yaqinlashuvchi qatorga yoyiladi.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n y_n(x),\quad C_n=\int_a^b f(x)y_n(x)dx\bigg/\int_a^b y_n^2(x)dx. \tag{6.3}$$

1.1Misol.Chegaraviy masalani barcha yechimlarini toping.

Yechim:Bu yerda $q(x)=0,\quad \alpha_1=\beta_1=0.$ 3 xossaga asosan $\lambda\geq 0.$ Ikki holni qaraymiz.

a) $\lambda=0.$ $y''=0$ Tenglama quyidagi umumiy yechimga ega ixtiyoriy $y=C_1x+C_2; C_1, C_2$ -ixtiyoriy o‘zgarmas Chxegaraviy shartdan

$$C_1=0\; y=C_2=const$$

b) $\lambda>0.$ Tenglamaning umumiy yechimi quyidaghicha :

$$y=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x;$$

$$y' = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x,$$

,bu yerda A, B -ixtiyoriy o‘zgarmas.

Chegaraviy shartlardan :

$$-A\sin\sqrt{\lambda} + B\cos\sqrt{\lambda} = 0, \quad -A\sin 3\sqrt{\lambda} + B\cos 3\sqrt{\lambda} = 0. \qquad (6.4)$$

Bu yerdan va o‘zgarmaslardan nisbatan bir jinsli chiziqli tenglamalar sestimasining qulga kiritdik Ya’ni (6.4) nolga teng bo‘lmagan yechimga ega bo‘lish kerak,uning detirminanti Δ nolga teng bo‘lishi kerak

$$\Delta = -\sin\sqrt{\lambda}\cos 3\sqrt{\lambda} + \sin 3\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(3\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \sin 2\sqrt{\lambda} = 0.$$

Buyerdan $\lambda = \dfrac{\pi^2 n^2}{4}, \; n = 1,2,\ldots, \; y = A\cos\dfrac{\pi nx}{2} + B\sin\dfrac{\pi nx}{2}.$

Kiyinchalik (6.4) –ni birinchi tenglamasidan $B = Atg\sqrt{\lambda} = Atg\dfrac{\pi n}{2},$

shuning uchun $y = A\cos\dfrac{\pi nx}{2} + Atg\dfrac{\pi n}{2}\sin\dfrac{\pi nx}{2}.$

$$y = A\cos\frac{\pi nx}{2} + Atg\frac{\pi n}{2}\sin\frac{\pi nx}{2}.$$

Quyidagiga ega bo‘lamiz $y = C_n y_n = C_n \cos\dfrac{\pi n}{2}(x-1), \; n = 1,2,\ldots.$

1.2 Misol $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ funksiyani 1.1 Misolning chegaraviy shartlaridan foydalanib xos funksiyalar bo‘yicha qator yig’indisi shaklida ifodalang.

Echish $f(x)$ funksiya $f'(1) = f'(3) = 0,$ shartlarni qanoatlantradi uning hosilalari $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ va $f''(x) = 6x - 12$ uzluksizdirlar.

(6.3)dagi integrallarni hisoblaymiz (3,5,7 formuladan foydalanamiz).

$$\int_1^3 \underset{n\neq 0}{f(x)\, y_n(x)dx} = \int_1^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)\cos\frac{\pi n}{2}(x-1)dx =$$

$$= \int_1^3 x^3\cos\frac{\pi n}{2}(x-1)dx - 6\int_1^3 x^2\cos\frac{\pi n}{2}(x-1)dx + 9\int_1^3 x\cos\frac{\pi n}{2}(x-1)dx =$$

$$=\left(\frac{3x^2}{\alpha_n^2}-\frac{6}{\alpha_n^4}-\frac{12x}{\alpha_n^2}+\frac{9}{\alpha_n^2}\right)\cos\alpha_n(x-1)\Big|_1^3=\frac{6}{\alpha_n^4}(1-\cos\pi n)=$$

$$=\begin{cases}0, & n-\text{четное}\\ \frac{12}{\alpha_n^4}, & n-\text{нечетное}\end{cases}$$

Bu yerda $\alpha_n=\frac{\pi n}{2}$. Kiyinchalik $n=0$ bo‘lganda

$$\int_1^3 f(x)y_0(x)dx=\int_1^3(x^3-6x^2+9x)dx=4,\quad \int_1^3 y_0^2(x)dx=2$$

Bundan tashqari $\int_1^3 y_n^2(x)dx=\int_1^3\cos^2\frac{\pi n}{2}(x-1)dx=\frac{1}{2}\int_1^3\left[1+\cos\pi n(x-1)\right]dx=$

$$=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{\pi n}\sin\pi n(x-1)\right]_1^3=1,\quad n\neq 0.$$

(6.3) formula qo`ysak, u holda

$C_0=\frac{4}{2}=2;$bo`lganda $C_n=\frac{12}{\alpha_n^4}=12\left(\frac{2}{\pi n}\right)^4=\frac{192}{\pi^4 n^4}$. xuddi shunday,

$$f(x)=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{192}{\pi^4 n^4}\cos\frac{\pi n}{2}(x-1)=$$

n-нечетное

$$=2+\frac{192}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)}\cos\pi(k-\frac{1}{2})(x-1),\ 1\le x\le 3$$

Berilgan qator [1;3] kesmada tekis va absolyut yaqinlashuvchidir.

O‘quv mashqlar

–misol va masalalarni eching
–teoremani isbotlang
–shu mavzuni nazariyasini o‘qib oling

Uyga vazifa

1. Shturm-Liuvill masalasi.

A operatorning $D(A) = C_0^2[0,l]$ da $X_1(x),\dots,X_k(x),\dots$ vektorlarni topamiz.

$$\begin{cases} AX_k = \lambda_k X_k; \\ X_k \in D(A), \quad X_k \neq 0. \end{cases} \tag{6.5}$$

To`laroq (6.5) shuni anglatadiki

$$\begin{cases} X_k''(x) = \lambda_k X_k(x), \quad 0 < x < l, \\ X_k(0) = X_k(l) = 0, \quad X_k(x) \not\equiv 0. \end{cases} \tag{6.6}$$

A operator bu $\frac{d^2}{dx^2}$, $D(A) = C_0^2[0,l]$ soha

2 (6.5) Shturm-Liuvill masalasining yechimi (6.6) tenglamadan,

$$X_k(x) = A_k e^{\sqrt{\lambda_k}x} + B_k e^{-\sqrt{\lambda_k}x}. \tag{6.7}$$

$$\begin{cases} A_k + B_k = 0, \\ A_k e^{\sqrt{\lambda_k}l} + B_k e^{-\sqrt{\lambda_k}l} = 0. \end{cases} \tag{6.8}$$

(6.6) chegaraviy shartlarni qo`ysak Bu sistemaning matrisasi tug`ma bo`lishi kerak, bo`lmasa $A_k = B_k = 0$ va $X_k(x) \equiv 0$, bu (6.6) ga zid. Ya`ni, λ_k xarakteristik tenglamani qanoatlantiradi.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda_k}l} & e^{-\sqrt{\lambda_k}l} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{\lambda_k}l} - e^{\sqrt{\lambda_k}l} = 0. \tag{6.9 }$$

Bu yerdan

$$e^{-\sqrt{\lambda_k}l} = e^{\sqrt{\lambda_k}l} \Rightarrow e^{2\sqrt{\lambda_k}l} = 1. \tag{6.10}$$

Ya`ni $2\sqrt{\lambda_k}l = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$$\sqrt{\lambda_k} = \frac{k\pi i}{l} \Rightarrow \lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2; \tag{6.11}$$

Bu yerda $k \geq 0$ deb o`tamiz. Shu narsa kutilgan edi, $\lambda_k \leq 0$.

Demak, λ_k xos sonlarni topdik.

Endi $X_k(x)$. xos funksiyani topamiz. Buning uchun (6.8) sistemani tug`ma deb faraz qilamiz

Ya`ni tenglamada faqat ularning bittasini hisobga olish etarli: $B_k = -A_k$.shuning uchun (6.7) dan (6.11) ko`rinishiga ega bo`lamiz

Bu yerda biz Eyler formulasini qo`lladik:

$$X_k(x) = A_k(e^{\frac{k\pi i}{l}x} - e^{-\frac{k\pi i}{l}x}) = A_k 2i \sin\frac{k\pi x}{l}. \qquad (6.12)$$

$e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\sin\varphi$. Biroq $X_k$xos funksiya to sonli ko`paytuvchilar aniqlik bilan topilgan, u holda

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l}; \quad k = 1, 2, \ldots. \qquad (6.13)$$

Bu yerda $k > 0$,deb $k = 0$da $X_0(x) \equiv 0$.

Masala: Shturm-Liuvill masalasini yeching, xos funksiyalarni toping

$$X_k(0) = X_k'(l) = 0, \qquad (6.14)$$
$$X_k'(0) = X_k(l) = 0, \qquad (6.15)$$
$$X_k'(0) = X_k'(l) = 0. \qquad (6.16)$$

Shartlar (6.15), (6.16)

Masala: har bir (6.14)-(6.16) chegarabiy shart uchun mashqlarni bajaring. Javob (6.14) uchun 65 –rasmga qarang

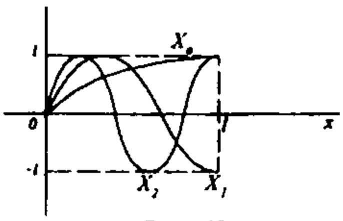


Рис. 65

$$\lambda_k = -\left(\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{l}\right)^2,$$
$$X_k(x) = \sin\frac{(k+\frac{1}{2})\pi x}{l},$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots.$$

(6.15) uchun 66 – rasmga qarang.

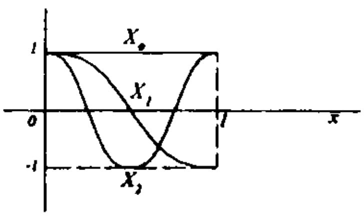


Рис. 67

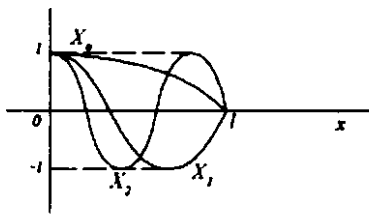


Рис. 66

$$\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2,$$
$$X_k(x) = \cos\frac{k\pi x}{l},$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots.$$

(6.16) 67 – rasmga qarang.

$$\lambda_k = -(\frac{k\pi}{l})^2,$$
$$X_k(x) = \cos\frac{k\pi x}{l},$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

Shuningdek qo`yidagi ixtiyoriy chegaraviy shartlarni qarashi mumkin (6.16)

$\alpha_{0.1}, \beta_{0.1}$- haqiqiy sonlar

Tavsiya etiladigan adabiyotlar

Asosiy

1. ***Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O'zbekistan», 2002, 448 b.***
2. ***Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,***
3. ***Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.***
4. ***Bisadzs L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.***
5. ***Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.***

Qo'shimcha

6. ***Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.***
7. ***Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.***
8. ***Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.***
9. ***Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.***
10. ***Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.***
11. ***Mixlnn S.G. Leksii po lineynыm integralnыm uravneniyam. M. 1959.***
12. ***Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.***
13. ***Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.***

14. ***Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.***

Mavzu bo‘yicha yangi tushunchalar uchun savollar.

4. Bir jinsli chegaraviy shartlar bilan berilgan bir jinsli tebranish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalani keltiring.
5. Shturm – Liuvill masalasi.
6. Mavjudlik teoremasi.

Mavzu 7. Tor tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalasi

Amaliy mashg'ulotlar rejasi
Fan: " Matematik fizika tenglamalari".
O'quv soati: 2 s. (amaliy)
O'quv mashg'ulotlar turi: kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.
O'quv mashg'ulotlar rejasi:
- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

O'quv mashg'ulotlar maqsadi:

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

O'quv mashg'ulotlar vazifasi:
- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish,Xususiy hosilali tenglamalarnazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

O'qitish texnologiyasi:
- *o'qitish metodlari*: individual savol-javob; birga o'qitish;o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremalarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qtish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

Pedagogik masalalar :
- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

O'quv faoliyati natijalari:
- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashgulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremalar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.

1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati:* tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qatiyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo'llanmalar,kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish ; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlalar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari;o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati:* o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari:* og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati:* mavzuni kiritish,Matematik fizika tenglamalarini o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;
- *talaba faoliyati:* oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari:* og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)

- *o'qituvchi faoliyati:* mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati:* ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarnini aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari:* guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

Misol va mashqlar namoishi

Tor tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalasi

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, dif-l tenglama $u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)$ boshlang'ich shartlari va $u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0,$ chegaraviy shartlar bilan berilgan bo'lsa, u holda uning yechimi cheksiz qator yig'indisi ko'rinishida ifodalanish mumkin.

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\cdot \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad \text{bu yerda}$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx, \quad b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

Chegaraviy shartlarga tor tebranishining uzunligi l mos keladiki ,y x=0 va x=l nuqtalarga maxkamlangan.

1.Uzunligi l bo'lgan torning oxirlari mahkamlangan.Boshlang'ich moment vaqtida u $x = \frac{l}{2}$ nuqtadan $\frac{l}{10}$ masofaga tortilgan keyin qimirlatmasdan qo'yib yuborilgan. Furi metodi orqali u(x,t) tortilish nuqtalarini ixtiyoriy vaqt momentida aniqlang

Echish Qo'yilgan masalada biz ,ikkila tomondan maxkamlangan torning erkin tebranishi bilan ish olib boramiz .Uning yechimi quyidagi matematik masala keltiriladi.

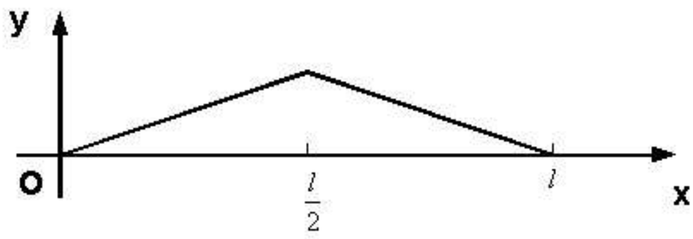
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (bu yerda $a^2 = \frac{T}{\rho}$, -t-torning taranglanishi s-tor zichligi) tenglama yechimini toppish kerakki, quyidagi boshlang'ich chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin:

1).Boshlang'ich shartlar:

a) $$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} \frac{x}{5}, & npu \;\; 0 \le x \le \frac{l}{2}, \\ -\frac{1}{5}(x-l), & npu \; \frac{l}{2} \le x \le l. \end{cases}$$

bo'lganda.

b) $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x) = 0$-(tor qimirlamasdaqn qo‘yib yuborilgan ,demak nuqtadagi boshlang’ichtezlik nolga teng)



2)Chegaraviy shartlar : u(0,t)=0, u(l,t)=0 fizik ma’nosi shuki,

X=0 va x=l nuqtalarda u mahkamlangan a_n,-ni hisoblaymiz ,u holda

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{l}\frac{1}{5}\left(\int_0^{l/2} x\sin\frac{\pi n x}{l}dx + \int_{l/2}^{l}(l-x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx\right) =$$

$$= \frac{4}{5l}\cdot\frac{l^2}{\pi^2 n^2}\cdot\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Bu yul bilan, $a_n = \dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{l}{\pi^2 n^2}\cdot\sin\dfrac{\pi n}{2}$ $(n=1,2,\ldots.)$.Ta’kidlaymizki,n-juft bo‘lganda , $a_n = 0,$.ya’ni $\sin\dfrac{\pi n}{2} = \sin\dfrac{2\pi k}{2} = 0$.n-toq bo‘lganda ,ya’ni n=2k-

$\sin\dfrac{\pi n}{2} = \sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2} = (-1)^{k-1}$ $(k=1,2,\ldots)$.natijada a_n koefsentlari uchun

$a_{2n-1} = (-1)^{n-1}\dfrac{4l}{5\pi^2(2n-1)^2}$ $(n=1,2,\ldots)$.formulani hosil qilamiz.

Qaralayotgan masalada $\psi(x)=0,$ u holda $b_n = 0$ $(n=1,2,\ldots)$.

Ya’ni,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{\pi a n}{l}t\cdot\sin\frac{\pi n x}{l} = \frac{4l}{5\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^2}\cdot\cos\frac{\pi a n}{l}t\cdot\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

2.Tenglamani yeching $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bshx$

$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0.$ boshlang'ich va chegaraviy shartlar.

$shx=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}, \quad chx=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

Ko'rsatma .Echimi $u(x,t)=v(x)+w(x,t),$ yig'indi ko'rinishda izlaymiz,bu yerda v(x),

$a^{2}v''(x)+bshx=0,$ tenglamani yechimi bo'lib

$v(0)=v(l)=0,$ chegaraviy shartlarni qanoatlantradi w- bulsa

$\frac{\partial^{2}w}{\partial t^{2}}=a^{2}\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}$ tenglamani yechimi

$w(0,t)=0, \; w(l,t)=0,$ bo'lganda

$$-\frac{2b\pi shl}{a^{2}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n^{2}\pi^{2}+l^{2}}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

$$w(x,0)=-v(x), \quad \frac{\partial w(x,0)}{\partial t}=0.$$

Javob : $u(x,t)=\frac{b}{a^{2}}\left(\frac{x}{l}shl-shx\right)+\frac{2b}{a^{2}\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}-$

O'quv mashqlar

–misol va masalalarni eching
–teoremani isbotlang
–shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

Uyga vazifa

1.uzunligi l gat eng tor, oxirlaridan mahkamlangan bo'lib, shunday tortilganki u $u=2\sin\frac{\pi x}{l}$, sinusaida ko'rinishni olib,boshlang'ich tezliksiz qo'yib yuborilgan .Torning tebranish qonunini toping.

Javob: $u(x,t)=2\cos\frac{\pi at}{l}\sin\frac{\pi x}{l}.$

2.oxirlari x=0 va x =l maxkamlangan tor boshlang'ich vaqt momentida

$u(x,0)=2\sin\frac{5\pi x}{l}$. tenglama bilan aniqlanadigan formaga ega.

Torning nuqtalaridagi boshlang'ich tezligi quyidagi formula bilan aniqlanadi.

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=3\sin\frac{4\pi x}{l}.$$

u(x,t)-tor nuqtalarining aralashmasini toping.

Javob $u(x,t)=\frac{3l}{4\pi a}\sin\frac{4\pi at}{l}\sin\frac{4\pi x}{l}+2\cos\frac{5\pi at}{l}\sin\frac{5\pi x}{l}$.

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+bx(x-l)$ tenglamani $u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0.$ boshlang'ich va chegaraviy shartlarda yeching .

Javob:

$$u(x,t)=-\frac{bx}{12}(x^3-2x^2l+l^3)+\frac{8l^4}{\pi^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi t}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^5}.-$$

4.Torning tebranish qonuni topingki ,uning oxirlari X=-L vaX=L nuqtalarda maxkamlangan boshlang'ich vaqt moment esa, tor nuqtalari parabola buyicha torning markazi nisbatan sennitrik tasvirlangan biroq Boshlang'ich maksimal aralashma b gat eng.

Javob: $u(x,t)=\frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\cos\frac{2n+1}{2l}\pi x\cdot\cos\frac{2n+1}{2l}\pi at.$

Tavsiya etiladigan adabiyotlar

Asosiy

1. ***Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O'zbekistan», 2002, 448 b.***
2. ***Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,***
3. ***Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.***
4. ***Bisadzs L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.***

5. ***Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.***

Qo‘shimcha

1. ***Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.***

2. ***Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.***

3. ***Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.***

4. ***Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.***

5. ***Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.***

6. ***Mixlnn S.G. Leksii po lineynыm integralnыm uravneniyam. M. 1959.***

7. ***Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.***

8. ***Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.***

9. ***Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.***

Mavzu bo‘yicha yangi tushunchalar uchun savollar.

8. Tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasi.
9. Tebranish tenglamasi uchun masalaning quyilishi.
10. Ideal torning tebranish tenglamasini keltiring.

Mavzu 8. Bir jinsli bo‘lmagan tebranish teglamasi uchun chegaraviy masala

Amaliy mashg’ulotlar rejasi
Fan: “ Matematik fizika tenglamalari“.
O‘quv soati: 2 s. (amaliy)
O‘quv mashg’ulotlar turi: kartochka, topshiriq, o‘quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg’ulotlar.
O‘quv mashg’ulotlar rejasi:
- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o‘quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

O‘quv mashg’ulotlar maqsadi:

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

O'quv mashg'ulotlar vazifasi:

- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish,Xususiy hosilali tenglamalarnazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

O'qitish texnologiyasi:

- *o'qitish metodlari*: individual savol-javob; birga o'qitish;o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremalarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qtish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

Pedagogik masalalar :

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

O'quv faoliyati natijalari:

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashgulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremalar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.

1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati:* tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qatiyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo'llanmalar,kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish ; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlalar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari;o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati:* o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari:* og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati:* mavzuni kiritish,Matematik fizika tenglamalarini o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;
- *talaba faoliyati:* oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari:* og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)

- *o'qituvchi faoliyati:* mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati:* ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarnini aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari:* guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

Misol va mashqlar namoishi

Bir jinsli bo'lmagan tebranish teglamasi uchun chegaraviy masala

Quyidagi bir jinsli bo'lmagan tebranish tenglamasi bilan cheklanamiz;

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f_1(x) f_2(t) \tag{8.1}$$

Uning boshlang'ich va chegaraviy shartlari, ya'ni

$$U(0,x) = \frac{\partial U(0,x)}{\partial t} = U(t,0) = U(t,l) = 0.$$

bo'lsin. (8.1) tebnglamaning yechimini u(t,x) qator ko'rinishida izlab, x- bo'yicha Fure qatoriga yoyamiz.

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{\pi n}{l} x \tag{8.2}$$

(8.2) ni (8.1) ga qo‘yib , noma’lum fuksiya uchun Koshi masalasini hosil qilamiz.

$$T_n(t): T_n'' + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 T_n = d_n f_2(t), T_n(0) = T_n'(0) = 0, d_n = \frac{2}{l}\int_0^l f_1(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx.$$

Bu masalaning yechimini $T_n(t)$ belgilab va (8.2) yoyilmaga qo‘yib U(t,x) funksiyani hosil qilamiz.

1.Misol . bir jinsli bo‘lmagan tebranish tenglamasi uchun chegaraviy maslani yeching.

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} = xt, a = 1$$

$$U(0,x) = \frac{\partial U(0,x)}{\partial t} = U(t,0) = U(t,l) = 0.$$

$T_n(t)$ dagi noma’lum funksiyalar Koshi masalasini qanoatlantiradi.

$$T_n'' + \frac{n^2\pi^2}{l^2}T_n = d_n t,$$

$$d_n = \frac{2}{l}\int_0^l x\sin\frac{\pi n}{l}xdx = -\frac{2}{\pi n}\int_0^l xd\cos\frac{\pi n}{l}x = -\frac{2}{\pi n}x\cos\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^l + \frac{2}{\pi n}\int_0^l \cos\frac{\pi n}{l}xdx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}l\cos\pi n + \frac{2l}{(\pi n)^2}\sin\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^l = \frac{2l}{\pi n}(-1)^{n+1}$$

ya’ni , $\quad T_n'' + \frac{\pi^2 n^2}{l^2}T_n = \frac{2l}{\pi n}(-1)^{n+1}t$

(8.3)

tenglamaga ega bo‘ldik. Uning umumiy yechimi

$$T_n'' + \frac{\pi^2 n^2}{l^2}T_n = 0 \tag{8.4}$$

Bir jinsli tenglama umumiy yechimining yig’indisi va (8.3) tenglamaning xususiy yechimidan iborat. (8.4) tenglamaning xarakteristik tenglamasi quyidagicha:

$$K^2 + \frac{\pi^2 n^2}{l^2} = 0, \text{ ya’ni } K_{1,2} = \pm\frac{\pi n}{l}i.$$

(8.4) tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$T_n = d_1\cos\frac{\pi n}{l}t + d_2\sin\frac{\pi n}{l}t$$

(8.3) tenglamaning xususiy yechimini topamiz. Uni $T_n(t) = At + B$ ko‘rinishda izlab (8.3) tenglamaga qo‘ysak, u holda

$$\frac{\pi^2 n^2}{l^2}(At + B) = \frac{2l}{\pi n}(-1)^{n+1} t, B = 0, A = (-1)^{n+1}\frac{2l^3}{\pi^3 n^3}.$$

ya’ni, (8.3) tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$T_n(t) = d_1 \cos\frac{\pi n}{l}t + d_2 \sin\frac{\pi n}{l}t + (-1)^{n+1}\frac{2l^3}{\pi^3 n^3}t.$$

d_1 ,d_2 konstantalarni $T_n(0) = T_n'(0) = 0$ boshlang’ich shartlardan topamiz. Shuning uchun

$$d_1 = 0,\ d_2 = (-1)^n \frac{2l^4}{(\pi n)^4}$$

Javob $U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n \frac{2l^4}{\pi^4 n^4}\sin\frac{\pi n}{l}t + (-1)^{n+1}\frac{2l^3}{\pi^3 n^3}\right)\sin\frac{\pi n x}{l}.$

Uyga vazifa:

1. $U_{tt} = a^2 U_{xx} + t\sin\frac{\pi x}{2}, a = 5, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0,$
   $U(t,0) = U(t,l) = 0$

2) $U_{tt} = a^2 U_{xx} + (t+5)x, a = 3, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0,$
$U(t,0) = U(t,l) = 0$

3) $U_{tt} = a^2 U_{xx} + (t^2 - 1)x, a = 1, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, U(t,0) = U(t,l) = 0$

4) $U_{tt} = a^2 U_{xx} + 10(t-1)\cos 2x, a = 1, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

Tavsiya etiladigan adabiyotlar

Asosiy

1. ***Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O‘zbekistan», 2002, 448 b.***
2. ***Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,***
3. ***Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.***
4. ***Bisadzs L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.***

5. *Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.*

Qo‘shimcha

1. ***Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.***
2. ***Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.***
3. ***Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.***
4. ***Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.***
5. ***Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.***
6. ***Mixlnn S.G. Leksii po lineynыm integralnыm uravneniyam. M. 1959.***
7. ***Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.***
8. ***Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.***
9. ***Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.***

Mavzu bo‘yicha yangi tushunchalar uchun savollar.

1. Bir jinsli bo‘lmagan tebranish tenglamasi uchun masalaning quyilishi.
2. Bir jinsli bo‘lmagan tebranish tenglamasini keltiring.

Mavzu 9. To‘g’ri to‘rtburchakli memranani tebranishi

Amaliy mashg’ulotlar rejasi
Fan: “ Matematik fizika tenglamalari“.
O‘quv soati: 2 s. (amaliy)
O‘quv mashg’ulotlar turi: kartochka, topshiriq, o‘quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg’ulotlar.
O‘quv mashg’ulotlar rejasi:

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o‘quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

O‘quv mashg’ulotlar maqsadi:

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg’ulotlar bilan chuqurlashtirish

O‘quv mashg’ulotlar vazifasi:

- *o‘qituvchi:* mavzu bo‘yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o‘rganish tajribasini oshirish,Xususiy hosilali tenglamalarnazariyasini o‘rganish, analiz va o‘rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg’otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo‘ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma’suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o‘rgatish.

O‘qitish texnologiyasi:

- *o‘qitish metodlari*: individual savol-javob; birga o‘qitish;o‘quv qo‘llanmalarga asoslanib teoremalarni isbotlash, misollar echish mahoratini o‘rgatish
- *o‘qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o‘qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko‘rsatmalar
- *o‘qtish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og’zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

Pedagogik masalalar :

- mavzu bo‘yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o‘rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo‘yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o‘rganishni shakllantirish;

O‘quv faoliyati natijalari:

- kurs mavzulari bo‘yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o‘rgangan tushunchalar bilan amaliy mashgulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremalar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo‘llashni mustaqil o‘rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

1.2 Amaliy mashg’ulotning xronologik xaritasi.

1 bosqich. O‘quv mashg’ulotlarga kirish (10 daqiqa);

- *o‘qituvchi faoliyati:* tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qatiyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo‘llanmalar,kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish ; o‘quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlalar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari;o‘quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati:* o‘quv joyini tayyorlash (o‘quvchilarning borligi; tashqi ko‘rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o‘quv dars maqsadi; o‘quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari:* og’zaki nazorat, individual savol-javob; ob’yektlar bilan ishlash; konspektlash;

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);

- *o‘qituvchi faoliyati:* mavzuni kiritish,Matematik fizika tenglamalarini o‘rganish bilan bog’liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg’ulotlar matnini tarqatish; qo‘shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg’ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;

- *talaba faoliyati:* oldingi mavzu bo‘yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari:* og’zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)

- *o‘qituvchi faoliyati:* mavzu bo‘yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o‘tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o‘quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati:* ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o‘zaro baholash o‘tkazish; yo‘l qo‘yilgan xatolarnini aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari:* guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

1.3 O‘quv-uslubiy qo‘llanma

O‘quv mashg’ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o‘quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

Misol va mashqlar namoishi

To‘g’ri to‘rtburchakli memranani tebranishi

Tomonlari p va q bo‘lgan bir jinsli to‘g’ri to‘rtburchakli membirananing kichik tebranishini qarab chiqamizki, kontur buyicha mahkamlangan . Bu masala

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (9.1)$$

Tebranish tenglamasining yechimiga keladi .Chegaraviy shartlar

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=p} = 0, \quad u\big|_{y=0} = 0, \quad u\big|_{y=q} = 0 \qquad (9.2)$$

Boshlang’ich shartlar

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x,y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x,y) \qquad (9.3)$$

(9.1)tenglamaning xususiy yechimi

$$u(x,y,t)=T(t)v(x,y), \quad (9.4)$$

Ko‘rinishda izlaymiz (9.4) ni (.1) tenglamaga quysak, u holda

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{v_{xx}+v_{yy}}{v}=-k^2.$$

Bu yerdan (9.2) chegaraviy shartlarni hisobga olib quyidagilarga ega bo‘lamiz.

$$T''(t)+a^2k^2T(t)=0, \quad (9.5)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+k^2v=0, \quad (9.6)$$

$$v\big|_{x=0}=0, \quad v\big|_{x=p}=0, \quad v\big|_{y=0}=0, \quad v\big|_{y=q}=0. \quad (9.7)$$

(9.6) va (9.7) masalaning xos qiymatlari va xos funksiyalarini topamiz.

$$v(x,y)=X(x)Y(y). \quad (9.8)$$

(9.8) va (9.6) tenglamaga quysak,uholda

$\dfrac{Y''}{Y}+k^2=-\dfrac{X''}{X}$,bu yerdan ikkita tenglamani hosil qilamiz.

$$X''(x)+k_1^2X(x)=0, \quad Y''(y)+k_2^2Y(y)=0,$$

(9.9)

Bu yerda

$$k^2=k_1^2+k_2^2. \quad (9.10)$$

(9.9) tenglamani umumiy yechimi quyidagicha

$$X(x)=C_1\cos k_1x+C_2\sin k_1x; \quad Y(y)=C_3\cos k_2y+C_4\sin k_2y. \quad (9.11)$$

Chegaraviy shartlaridan:

$X(0)=0, \quad X(p)=0, \quad Y(0)=0, \quad Y(q)=0,$ bu yerdan tushinarliki $C_1=C_3=0,$ va agar biz $C_2=C_4=1,$ deb olsak, u holda $X(x)=\sin k_1x, \quad Y(y)=\sin k_2y,$ biroq

$$\sin k_1p=0, \quad \sin k_2q=0. \quad (9.12)$$

Bo‘lishi shart. (9.12) tenglamalardan shu narsa kelib chiqadi k_1 *va* k_2 cheksiz qiymatlar tuplashga ega:

$k_{1,m}=\dfrac{m\pi}{p},\quad k_{2,n}=\dfrac{n\pi}{q}\quad (m,n=1,2,3,...)$.- U holda

$$k_{m,n}^2=k_{1,m}^2+k_{2,n}^2=\pi^2\left(\frac{m^2}{p^2}+\frac{n^2}{q^2}\right). \qquad (9.13)$$

Bu yul bilan (9.13) –ng xos qiymatlariga (9.6) , (9.7) ga chegaraviy masalaning

$v_{mn}(x,y)=\sin\dfrac{m\pi x}{p}\sin\dfrac{n\pi y}{q}$ Xos funksiyasiyalari mos keladi .

Endi (9.5) tenghlamaga qaytib , shuni ko‘ramizki, har bir $k^2=k_{mn}^2$-xos qiymat uning umumiy yechimi quyidagicha bo‘ladi.

$$T_{mn}(t)=A_{mn}\cos ak_{mn}t+B_{mn}\sin ak_{mn}t, \qquad (9.14)$$

Bu yerda $A_{mn},\ va\ B_{mn}$ $-$ixtiyoriy o‘zgarmaslar.

Shunday qilib (9.1) tenglamaning xususiy yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$u_{mn}(x,y,t)=(A_{mn}\cos ak_{mn}t+B_{mn}\sin ak_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}\ (m,n=1,2,...).$$

Boshlang’ich shartlarni qanoatlantrish uchun quyidagi qatorni tuzamiz .

$$u(x,y,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}(A_{mn}\cos ak_{mn}t+B_{mn}\sin ak_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}.$$

Agar bu qator tekis yaqinlashsa, undan x,y,t bo‘yicha ikki marta hadma-had defferensiallash natijasida hosil bo‘lgan qatorlar ma’lumki, uning yig’indisi (9.1) tenglama va (9.2) chegaraviy shartlari qanoatlantradi.

$$u\big|_{t=0}=\varphi_0(x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty}ak_{mn}B_{mn}\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}.$$

Bu formulalar $\varphi_0(x,y)\ va\ \varphi_1(x,y)$ berilgtan funksiyalarni sinus bo‘yicha Fure qatoriga ifodalaydi .yoyilish koefsentlari quyidagi formulalardan aniqlanadi.

$$A_{mn}=\frac{4}{pq}\int_0^p\int_0^q \phi_0(x,y)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}\,dxdy,$$

$$B_{mn}=\frac{4}{ak_{mn}pq}\int_0^p\int_0^q \phi_1(x,y)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}\,dxdy.$$

Misollar

1.l tomonli kvadratik membrananing erkin tebranish qonuni toping , agar boshlang'ich moment tortilishi xar bir nuqtada

$u(x,y,t)\big|_{t=0}=\dfrac{l}{100}\sin\dfrac{\pi x}{l}\sin\dfrac{\pi y}{l}$. tenglik bilan aniqlansa

Boshlang'ich tezlik nolga teng. Kontur tashqarisida membrana maxkamlangan

Eyichish: Qaralayotgan holda

$\varphi_0(x,y)=\dfrac{l}{100}\sin\dfrac{\pi x}{l}\sin\dfrac{\pi y}{l},\quad \varphi_1(x,y)=0.$ bu yerdan

$$B_{mn}=0,\ m=1,2,..,\quad n=1,2,...$$

$$A_{mn}=\frac{4}{l^2}\int_0^l\int_0^l \frac{l}{100}\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{l}\,dxdy.$$

Trigonometrik funksiyalar sestimasining ortogonalligidan faqat $A_{11}\neq 0,$

$$A_{mn}=0.\quad A_{11}=\frac{4}{100l}\left(\int_0^l \sin^2\frac{\pi x}{l}\,dx\right)^2=$$

$$=\frac{4}{100l}\left(\frac{1}{2}\int_0^l\left(1-\cos\frac{2\pi x}{l}\right)dx\right)^2=\frac{1}{100l}\left(x\Big|_0^l-\frac{l}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{l}\Big|_0^l\right)^2=\frac{l}{100}.$$

Ya'ni, $u(x,y,t)=\dfrac{l}{100}\cos\dfrac{a\pi\sqrt{2}}{l}t\sin\dfrac{\pi x}{l}\sin\dfrac{\pi y}{l}.$

O'quv mashqlar

–misol va masalalarni eching
–teoremani isbotlang
–shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

Tavsiya etiladigan adabiyotlar

Asosiy

1. ***Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O‘zbekistan», 2002, 448 b.***

2. ***Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,***

3. ***Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.***

4. ***Bisadzs L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.***

5. ***Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.***

Qo‘shimcha

1. ***Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.***

2. ***Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.***

3. ***Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.***

4. ***Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.***

5. ***Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.***

6. ***Mixlnn S.G. Leksii po lineynыm integralnыm uravneniyam. M. 1959.***

7. ***Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.***

8. ***Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.***

9. ***Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.***

Mavzu bo‘yicha yangi tushunchalar uchun savollar.

1. To‘g’ri to‘rtburchakli memranani tebranish tenglamasini keltiring.
2. To‘g’ri to‘rtburchakli memrananing erkin tebranishi qonuni toping.

Mavzu 10. Bir jinsli chegaraviy shartlar bilan berilgan giperbolik tipli tenglama uchun chegaraviy masala .Fure usuli

Amaliy mashg'ulotlar rejasi

Fan: " Matematik fizika tenglamalari".
O'quv soati: 2 s. (amaliy)
O'quv mashg'ulotlar turi: kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.
O'quv mashg'ulotlar rejasi:
- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

O'quv mashg'ulotlar maqsadi:
Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish
O'quv mashg'ulotlar vazifasi:
- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish,Xususiy hosilali tenglamalarnazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

O'qitish texnologiyasi:
- *o'qitish metodlari*: individual savol-javob; birga o'qitish;o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremalarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qtish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

Pedagogik masalalar :
- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

O'quv faoliyati natijalari:
- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashgulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremalar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.

1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati:* tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qatiyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo'llanmalar,kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish ; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlalar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari;o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati:* o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari:* og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati:* mavzuni kiritish,Matematik fizika tenglamalarini o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;
- *talaba faoliyati:* oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari:* og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)

- *o'qituvchi faoliyati:* mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati:* ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarnini aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari:* guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

Misol va mashqlar namoishi

$U(x,t)$ –boshlang'ich chegaraviy masalaning yechimini toping

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases} \quad (10.1)$$

1.Qadam $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ tenglama $U(0,t) = U(l,t) = 0$chegaraviy shartlar bilan berilgan bo'lib,uning yechimini $U(x,t) = X(x)T(t)$ ko'rinishda yozamiz .Chegaraviy shartlar $X(x)$ funksiya uchun quyidagini aniqlaydi

$$X(0) = X(l) \quad (10.2)$$

$U(x,t)$ ni tenglamaga quysak,u holda

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

$X(x)T(t) \neq 0$ deb,butenglikni $a^2X(x)T(t) \neq 0$ ga bo'lamiz :

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \lambda.$$

Bu yerdan $X(x)$ funksiya uchun quyidagi masalaga ega bo'lamiz

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (10.3)$$

$$X(0) = X(l) = 0 \quad (10.4)$$

$T(t)$ funksiya uchun tenglama quyidagicha :

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \qquad t > 0. \quad (1.5)$$

(10.3) - (10.4) masala, Shturm Liuvill masalasi diyiladi (10.3) tenglamaning umumiy yeichimini ko'rinishi quyidagicha .

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}x) \qquad \text{при} \;\; \lambda > 0 \quad (10.6)$$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \qquad \text{при} \;\; \lambda < 0 \quad (10.7)$$

$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при} \;\; \lambda = 0 \quad (10.8)$$

$\lambda > 0$ bo'lganda $X(0) = o$, chegaraviy shartdan $c_2 = 0, \;\Rightarrow\; X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x)$ shuning uchun ikkinchi chegaraviy hartdan X(l)=0 , $\sqrt{\lambda}l = \pi n$-ni hosil qilamizki, ,Shturm Liuvill masalasining cheksiz xos qiymatlar to'plamiga ega bo'lamiz.

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \qquad n \in \mathbb{N}. \quad (10.9)$$

Bunga cheksiz xos funksiyalar to'plami mos keladi.

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \quad (10.10)$$

$\lambda < 0$ bo‘lganda $X(0) = 0$ chegaraviy shartdan $c_2 = -c_1$, $\Rightarrow$ $X(x) = 2c_1 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda}\, x$. .Shuning uchun ikkinchi chegaraviy shartdan $X(l) = 0$, $c_1 = 0$, ni hosil qilamiz ,ya’ni ,Shturm Liuvill masalasi manfiy xos qiymatlarga ega emas.

$z = 0$ bo‘lganda $X(0) = 0$ chegaraviy shartdan $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 x$. Shuning uchun ikkinchi chegaraviy shartdan $X(l) = 0$ $c_1 = 0$, ya’ni ,Shturm Liuvill masalasi nolga teng bo‘lgan xos qiymatga ega emas.

Shunday qilib biz (10.3) (10.4) masalalarning cheksiz netrivial yechimlari to‘plamiga ega bo‘ldik

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

(10.5) masalani qarab chiqish qoldiki ,u faqat $\lambda = \lambda_n$, bo‘lganda ma’noga ega va biz :

$$T"_n(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \qquad t > 0. \quad (10.11)$$

Masalalar oilasini hosil qilamiz

Bu bir jinsli ikkinchi tartibli chiziqli tenglamaning umumiy yeichimi quyidagicha :

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right), \qquad t > 0, \quad (10.12)$$

Bu yerda A_n, B_n -ixtiyoriy o‘zgarmaslar

2.Qadam (10.1) masalani yechamiz

(10.1) masalani yechimini $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$, т.с. ko‘rinishda izlaymiz,

Ya’ni $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\left(A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right)\right)$ (10.13)

Masala shartlaridan biz hali boshlang’ich shartlaridan foydalanmadik $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$. $U(x,t)$ funksiya uchun bular quyidagilarni ifodalaydi.

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \quad (10.14)$$

$$\psi(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n a \sqrt{\lambda_n} X_n(x). \quad (10.15)$$

Faraz qilamiz boshlang'ich shartlarga kiruvchi $\varphi(x)$ va $\psi(x)$, funksiyalar

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n X_n(x), \qquad \psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n X_n(x), \quad (10.16)$$

Qatorga yoyilsin .

Aniqlaymizki $\alpha_n,\ \beta_n.$ koeffisentlar qanday bo'lishi kerak. Bu uchun (10.16) $X_m=\sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right)$ ga $L_2[0,l]$_ma'nosiga skalyar ko'paytramiz.

$$(\varphi,X_m)=\alpha_m\int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi m x}{l}\right)dx=\frac{\alpha_m}{2}\int_0^l\left(1-\cos\left(\frac{2\pi m x}{l}\right)\right)dx=\frac{\alpha_m}{2}\int_0^l dx=\frac{l\alpha_m}{2},$$

Bu yerdan

$$\alpha_n=\frac{2}{l}(\varphi,X_n)=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx. \qquad (10.17)$$

Xuddi shunday β_n uchun:

$$\beta_n=\frac{2}{l}(\psi,X_n)=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx. \quad (10.18)$$

Shunday qilib $A_n,\ B_n$ koeffisentlari uchun (10.13) tasvirdan $U\ (x,t)$ yechimni (10.14)-(10.16) ga qo'ysak

$$A_n=\alpha_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx; \quad (10.19)$$

$$B_n=\frac{\beta_n}{a\sqrt{\lambda_n}}=\frac{2}{a\pi n}\int_0^l\psi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx. \quad (10.20)$$

Endi qolgan narsa (10.19) (10.20) dagi topilgan $A_n,\ B_n$ larni (10.13) formulaga quyish qoldi

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, \\ u(0,t)=u_x(l,t)=0, \\ u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases} \quad (10.21)$$

Tenglamaning $U\ (x,t)$yechimni toping

1. Qadam $u_{tt}=a^2u_{xx}$ tenglama $u(0,t)=u_x(l,t)=0$ chegaraviy shartlar bilan berilgan bo'lsin , u holda uning yechimi $U(x,t)=X(x)T(t).$ ko'rinishda izlaymiz . Shuni ta'kidlaymiz $X(x)$ –funksiya uchun chegaraviy masala quyidagini ifodalaydi.

$X(0)=X'(l)=0.$ (10.22) $U(x,t)$ ni tenglamaga quysak ,u holda

$$X(x)T"(t) = a^2 X"(x)T(t)$$

$X(x)T(t) \neq 0,$ deb , bu tenglamani $a^2 X(x)T(t) \neq 0:$ ga bo‘lamiz .

$$-\frac{X"(x)}{X(x)} = -\frac{T"(t)}{a^2 T(t)} = \lambda.$$

Bu yerda $X\ (x)$ funksiya uchun

$X"(x) + \lambda X(x) = 0,$ -(10.23) $X(0) = X'(l) = 0,$ (10.24)

Masalalarga ega bo‘lamiz

$T\ (t)$ funksiya uchun esa , $T"(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \qquad t > 0.$ (10.25)

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) \qquad \text{при } \lambda > 0; \qquad (10.26)$$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x} \qquad \text{при } \lambda < 0; \qquad (10.27)$$

$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \qquad (10.28)$$

$\lambda > 0$ bo‘lganda , $X(0) = 0,\ X(0) = 0$ chegaraviy shartdan

$\lambda > 0 \quad c_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) \quad \Rightarrow \quad X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} x)$ Shuning uchun ikkinchi chegaraviy shartdan $X'(l) = 0,\quad \sqrt{\lambda} l = \pi\left(\frac{1}{2} + k\right)$-ni hosil qilamizki ,u Shturm-Liuvill masalasining cheksiz xos qiymatlari to‘plamlaridan iborat bo‘lad.

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \qquad (10.29)$$

Bunga cheksiz xos funksiyalar to‘plami mos keladi:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \qquad (10.30)$$

$\lambda < 0$ *Bo'lganda* $X(0) = 0$, $X(0) = 0$ chegaraviy shartdan

$c_2 = -c_1, \quad \Rightarrow \quad X(x) = 2c_1 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda} x \quad \Rightarrow \quad X'(x) = 2c_1 \sqrt{-\lambda} \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda} x)$

Shuning uchun ikkinchi chegaraviy shartdan $X'(l) = 0\ c_1 = 0$- Ya’ni, Shturm-Liuvill masalasi manfiy xos qiymatlarga ega emas .

$\lambda = 0$ bo‘lganda $X(x) = 0$ chegaraviy shartdan $c_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad X(x) = c_1 x \quad \Rightarrow \quad X'(x) = c_1$).Shuning uchun ikkinchi chegaraviy shartdan $X'(l) = 0 \quad c_1 = 0$ ni hosil qilamiz ,ya’ni Shturm-Liuvill masalasinolga teng bo‘lganxos qiymatga ega emas

Shunday qilib ,biz (10.23) ,(10.24) masalalarining cheksiz netrivial yeichimlar to‘plamiga ega bo‘ldik

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

(10.25)masalani qarab chiqish qoldi ,u faqat ____ bo‘lganda ma’noga ega va biz

$$T''_n(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \qquad t > 0. \quad (10.31)$$

Masalalar oilasini hosil qilamiz. Bu bir jinsli ikkinchi tartibli chiziqli tenglamaning yechimi quyidagicha bo‘ladi.

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right), \qquad t > 0, \quad (10.32)$$

Bu yerda A_n, B_n -lar ixtiyoriy o‘zgarmaslar .

2. Qadam (10.21) maslani yechamiz (10.21) masalaning yechimini $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$, ko‘rinishda izlaymiz

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\left(A_n \cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)\right). \quad (10.33)$$

Masala shartlaridan biz faqat $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ boshlang’ich shartlardan foydalanmadik

$U(x,t)$ funksiya uchun u quyidagini ifodalaydi.

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \quad (10.34)$$

$$\psi(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T'_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n a\sqrt{\lambda_n} X_n(x). \quad (10.35)$$

Faraz qilamiz $\varphi(x), \psi(x)$-boshlang’ich shartlarga kiruvchilar

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n(x), \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n X_n(x), \quad (10.36)$$

Qatorga yoyilsin $\alpha_n, \ \beta_n$ koefsentlarining qanday ekanligini aniqlaymiz .Buning uchun (10.36) ni $X_m = \sin\left(\frac{\pi(2m-1)}{2l}x\right)$-ga $L_2[0,l]$ ga skalyar ko‘paytramiz.

$$(\varphi, X_m) = \alpha_m \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi(2m-1)}{2l}x\right)dx = \frac{\alpha_m}{2}\int_0^l \left(1 - \cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{l}x\right)\right)dx =$$

$$= \frac{\alpha_m}{2}\int_0^l dx = \frac{l\alpha_m}{2},$$

Bu yerdan $$\alpha_n = \frac{2}{l}(\varphi, X_n) = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx. \quad (10.37)$$

Xuddi shunday β_n uchun

$$\beta_n = \frac{2}{l}(\psi, X_n) = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx. \quad (10.38)$$

Shu yul bilan (10.33) dan $A_n,\ B_n$ koefsentlari uchun $U(x,t)$ yechim uchun quyidagilarni hosil qilamiz

$$A_n = \alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx; \quad (10.39)$$

$$B_n = \frac{\beta_n}{a\sqrt{\lambda_n}} = \frac{4}{a\pi(2n-1)}\int_0^l \psi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx. \quad (10.40)$$

Qolgan narsa ,(10.39),(10.40) dan topilga $A_n,\ B_n$ ıkoefsentlari (10.33) ga qo‘yish qoldi.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = \sin\frac{\pi x}{2l} + \sin\frac{3\pi x}{2l}. \end{cases} \quad (10.41)$$

Tenglamaning $U(x,t)$ yechimni toping

Berilgan masala №649^m. masalaning xususiy holidir .Shuning uchunbiz birdan (10.33) (10.39) (10.44) masalani javobini chiqarish uchun foydlanamiz (10.31) bo‘yicha A_n:- koefsentlarini topamiz

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l x\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx =$$

$$= \frac{2}{l}\left[-\frac{2l}{(2n-1)\pi}x\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right)\Big|_{x=0}^{x=l} + \frac{2l}{(2n-1)\pi}\int_0^l \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right)dx\right] =$$

$$= \frac{2}{l}\left[\frac{4l^2}{(2n-1)^2\pi^2}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right)\Big|_{x=0}^{x=l}\right] = \frac{2}{l}\left[\frac{4l^2}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n+1}\right] = \frac{8l}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n+1}. \quad (10.42)$$

B_n, -ni topishda $\psi(x)$-funksiya $X_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right)$funksiya bo‘yicha qatorga yoyilgandeb aytamiz

$$\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{2l} + \sin\frac{3\pi x}{2l}. \quad (10.43)$$

Shunday qilib $\beta_1 = \beta_2 = 1, \ \beta_3 = \beta_4 = \ldots = 0$bu yerdan ,yani

$$B_n = \beta_n \frac{2l}{\pi(2n-1)a}$$

$$B_1 = \frac{2l}{\pi a}, \qquad B_2 = \frac{2l}{3\pi a}, \qquad B_3 = B_4 = \ldots = 0. \quad (10.44)$$

Topilgan A_n va B_n larni

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\left(A_n \cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)\right).$$

ga qo‘yamiz.

Javobni hosil qilamiz.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\left(\frac{8l}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n+1}\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)\right) + \\ + \frac{2l}{a\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right)\sin\left(\frac{\pi a}{2l}t\right) + \frac{2l}{3a\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{2l}x\right)\sin\left(\frac{3\pi a}{2l}t\right).$$

O‘quv mashqlar

–misol va masalalarni eching
–teoremani isbotlang
–shu mavzuni nazariyasini o‘qib oling

Tavsiya etiladigan adabiyotlar

Asosiy

1. ***Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O‘zbekistan», 2002, 448 b.***
2. ***Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,***
3. ***Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.***
4. ***Bisadzs L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.***
5. ***Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.***

Qo‘shimcha

1. ***Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.***

2. ***Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.***

3. ***Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.***

4. ***Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.***

5. ***Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.***

6. ***Mixlnn S.G. Leksii po lineynыm integralnыm uravneniyam. M. 1959.***

7. ***Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.***

8. ***Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.***

9. ***Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.***

Mavzu bo‘yicha yangi tushunchalar uchun savollar.

3. Yarim to‘g’ri chiziqdagi bir jinsli chegaraviy shart bilan berilgan ikkinchi chegaraviy masala quyilishini keltiring
4. Bir jinsli chegaraviy shartlar bilan berilgan bir jinsli tebranish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalani keltiring.

Mavzu 11. O‘zgaruvchilarni ajratish uchun (umumiy hol)

Amaliy mashg’ulotlar rejasi

Fan: “ Matematik fizika tenglamalari“.

O‘quv soati: 2 s. (amaliy)

O‘quv mashg’ulotlar turi: kartochka, topshiriq, o‘quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg’ulotlar.

O‘quv mashg’ulotlar rejasi:

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o‘quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

O‘quv mashg’ulotlar maqsadi:

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg’ulotlar bilan chuqurlashtirish

O‘quv mashg’ulotlar vazifasi:

- *o‘qituvchi:* mavzu bo‘yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash

- *rivojlantiruvchi:* o‘rganish tajribasini oshirish,Xususiy hosilali tenglamalarnazariyasini o‘rganish, analiz va o‘rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg’otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo‘ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma’suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o‘rgatish.

O‘qitish texnologiyasi:

- *o‘qitish metodlari*: individual savol-javob; birga o‘qitish;o‘quv qo‘llanmalarga asoslanib teoremalarni isbotlash, misollar echish mahoratini o‘rgatish
- *o‘qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o‘qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko‘rsatmalar
- *o‘qtish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og’zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

Pedagogik masalalar :

- mavzu bo‘yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o‘rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo‘yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o‘rganishni shakllantirish;

O‘quv faoliyati natijalari:

- kurs mavzulari bo‘yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o‘rgangan tushunchalar bilan amaliy mashgulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremalar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo‘llashni mustaqil o‘rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

1.2 Amaliy mashg’ulotning xronologik xaritasi.

1 bosqich. O‘quv mashg’ulotlarga kirish (10 daqiqa);

- *o‘qituvchi faoliyati:* tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qatiyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo‘llanmalar,kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish ; o‘quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlalar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari;o‘quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati:* o‘quv joyini tayyorlash (o‘quvchilarning borligi; tashqi ko‘rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o‘quv dars maqsadi; o‘quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;

- *qabul qilish shakli metodlari:* og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati:* mavzuni kiritish,Matematik fizika tenglamalarini o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;
- *talaba faoliyati:* oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari:* og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)

- *o'qituvchi faoliyati:* mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati:* ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarnini aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari:* guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

Misol va mashqlar namoishi

O'zgaruvchilarni ajratish uchun (umumiy hol)

Faraz qilamiz

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u \quad (11.1)$$

Tenglamaning umumiy yechimini toppish kerak.

(bu yerda ρ(x), p(x), q(x))- yetarlicha silliq funksiyalar , biroq

p(x)>0, ρ(x)>0,q(x)≥0)

Bu tenglama

$$\begin{cases} \alpha u(0,t)+\beta \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0, \\ \gamma u(l,t)+\delta \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0. \end{cases} \quad (11.2)$$

Shartlarni va

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x) \quad (0\le x\le l). \quad (11.3)$$

Boshlang'ich shartlarni qanoatlantradi.

Birinchidan berilgan tenglamaning , chegaraviy shartlarini qanoatlantruvchi netrival yechimini

$$u(x,t)=T(t)X(x) \quad (11.4)$$

(11.4) ni (11.1) tenglamaga quysak,

$$\rho(x)T''(t)X(x)=T(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right)-q(x)T(t)X(x) \text{ yoki}$$

$$\frac{\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dX}{dx}\right)-q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)}=\frac{T''(t)}{T(t)}=-\lambda, \quad \text{bu yeda} \quad z \text{ - o‘zgarmas}$$

Bu yerdan.

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right)+(\lambda\rho(x)-q(x))X=0, \quad (11.5)$$

$$T''(t)+\lambda T(t)=0 \quad (11.6)$$

Shunday qilib , $T(t)\neq 0$,holda (11.4) tenglama (11.2) boshlang'ich shartlarni qanoatlantrish uchun.

$$\begin{cases} \alpha X(o)+\beta X'(0)=0, \\ \gamma X(l)+\delta X'(l)=0. \end{cases} \quad (11.7)$$

Shartlarni bajarilishi zarur va yetarli.

Shunday qilib $X(x)$ - funksiyani aniqlash uchun quyidagi oddiy defferinsial tenglama uchun chegaraviy masalaga kelamiz:

Shunday λ ni toppish kerakki , u xos qiymatga namlanib, bunda (11.5) tenglamaning netrivali yechimlari mavjud bo‘lib (11.7) shartlarni qanoatlantirsak hamda xos funksiyalar deb nomlanuv chi netrival yechimlarni toppish kerak .

Chegaraviy masaladagi xos qiymatlar va xos funksiyalar xossalari:

1. Sanoqli xos qiymatlar $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots,$ mavjud bo‘lib , unga $X_1(x), X_2(x), \ldots$ xos funksiyalar mos keladi.

2. $q(x) \geq 0$ va $\left(p(x)X_n(x)X_n'(x)\right)\Big|_{x=0}^{x=l} \leq 0$ bo‘lganda λ_n-ng barcha xos qiymatlari musbatdir.

3. Xos funksiyalar $[0, l]$ kesmada ρ(x) og’rlikdagi ortagonal va normalangan sestimani ifodalaydi,

Ya’ni

$$\int_0^l \rho(x)X_n(x)X_m(x) = \begin{cases} 0, & npu \quad m \neq n, \\ 1, & npu \quad m = n. \end{cases} \quad (11.8)$$

4. (Steklov teoremasi) Har bir $f(x)$funksiya (11.7) chegaraviy shartlarni qanoatlantradi va birinchi tartibli uzluksiz va ikkinchi tartibli qism –uzluksiz hosilalarga ega bo‘lib , $X_{n(x)}$ - xos funksiyalar bo‘yicha absolyut va tekis yaqinlashuvchi qatorga yoyiladi:

$$X_n(x): \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x), \quad a_n = \int_0^l \rho(x)X_n(x)f(x)dx.$$

Kiyinchalik, har bir λ_n -xos qiymat uchun (11.6)-tyenglamani yechamiz (11.6) tenglamaning umumiy yechimini $\lambda = \lambda_n$ (uni $T_n(t)$ bilan belgilaymiz) bo‘lganda quyidagicha belgilaymiz:

$T_n(t) = a_n \cos\sqrt{\lambda_n}\, t + b_n \sin\sqrt{\lambda_n}\, t,$ bu yerda $a_n va\ b_n$ ixtiyoriy o‘zgarmaslar.

Shunday qilib , biz (11.1) tenglamaning cheksiz yechimlari to‘plamini hosil qildik.

$$u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x) = (a_n \cos\sqrt{\lambda_n}\, t + b_n \sin\sqrt{\lambda_n}\, t)X_n(x).$$

(11.3) boshlang’ich shartni qanoatlantirish uchun

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\sqrt{\lambda_n}\,t+b_n\sin\sqrt{\lambda_n}\,t)X_n(x) \quad (11.9)$$

Qatorni tuzamiz.

Agar bu qator tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, xuddi shunday, x va t bo‘yicha ikki marta hadma-had undan hosil bo‘luvchi qator ham tekis yaqinlashuvchi va uning yig’indisi (11.1) tenglamani va (11.2) chegaraviy masalani qanoatlatradi.

(11.3) – boshlang’ich shartlarning bajarilishi uchun , $a_n va\ b_n$ koefsentlarni umumlashgan Fure qatorning ortonormalangan (X_n) funksiya sestimasi bo‘yicha $\varphi\ va\ \psi$ funksiyalarning koefsentlari yiyilmasi kabi topamiz.

Endi o‘zgaruvchilarni ajratish usulini qullash sohasida ba’zi bir umumiy izohlarni keltiramiz.

Usulning qullanishi asosida defferinsial tenglamalar va chegaraviy shartlar kabi chiziqlilik yotadi. Defferensial tenglamalarning koefsentlari yoki o‘zgarmas bo‘lishi mumkin, yoki funksiya ko‘rinishda tasvirlanadiki har biri bitta o‘zgaruvchiga ega. Masalan , ikkita erkli o‘zgaruvchiga ya’ni x va t -ga bog’liq defferensial tenglama holida , unga mos defferensial tenglama quyidagi ko‘rinishga ega.

$$A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+C(x)\frac{\partial u}{\partial x}+D(t)\frac{\partial u}{\partial t}+(F_1(x)+F_2(t))u=0 \quad \text{yoki}$$

Bu holga keltiriladi. Agar bu masalada bu shartlar birjinsli bo‘lmasa , uni birjinsliga keltirish kerak . Ikki o‘lchovli holda (vaqtni hisobga olmagan holda) qaralayotgan masala chegarasining sohasi kordinata chiziqlaridan (uch o‘lchovli hol uchun – fazoviy- kodinatalardan) iborat bo‘lishi kerak .Shunday qilib , agar dekart kordinata sestimasi ishlatilsa sohaning chegarasi kordinata o‘qlariga parallel to‘g’ri kesmalardan iborat;

Qutbiy kordinata sestimasi ishlatilganda soha chegarasi – qutibdan chiquvchi markazi qutib va kesma nurlaridan iborat aylana yoyini tashkil etadi va h-a.

Bu hol usulning kuchli ekanligini cheklanadi.Fazodagi to‘lqin tarqalishi masalasi va potenseallar nazaryasida o‘zgaruvchilarni ajratish usullarining faqat eng oddiy konfiguratsiyalarini qaralayotgan sohada qaraymiz.

Ikkinchi tartibli birjinsli chegaraviy shartlar bilan berilgan to‘lqin tebranish tenglamasi uchun birjinsli bo‘lmagan boshlang’ich chegaraviy masala

Ikkinchi tartibli birjinsli chegaraviy shartlar bilan berilgan to‘lqin tebranish tenglamasi uchun birjinsli bo‘lmagan boshlang’ich chegaraviy masalani yeching?

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \quad (11.10)$$

$$u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \qquad t > 0, \quad (11.11)$$

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in [0,l]. \quad (11.12)$$

$$u_t(x,0) = 0, \qquad x \in [0,l]. \quad (11.13)$$

1.Qadam Shturm-Liuvill masalasining yechimi Bu qadamni biz masalada yechgan edik

Natija: cheksiz netrival yechimlar to‘plami

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.Qadam $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$ chegaraviy shartlar bilan berilgan $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$ tenglamaning yechimini $u(x,t) = \sum_{n}^{\infty} X_n T_n(t),$ ko‘rinishda izlaymiz, bu yerda $X_n(x)$ funksiya quyidagicha ko‘rinishga ega:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right). \quad (11.14)$$

Faraz qilamiz $f(x,t)$ funksiya har bir $t \in [0,T]$ uchun Fure qatoriga $X_n(x)$ - funksiya bo‘yicha yoyilgan :

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) f_n(t). \quad (11.15)$$

Bunda , berilgan Fure qatorining koefsentlari quyidagi formula orqali topiladi:

$$f_n(t) = (f, X_n) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) dx. \quad (11.16)$$

(11.10) tenglama quyidagi ko‘rinishga ega :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(X_n(x)T"_n(t) - a^2 X"_n(x) T_n(t)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right).$$

Uning bajarilishi uchun ,

$$X_n(x)T"_n(t) - a^2 X"_n(x) T_n(t) = f_n(t)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) \qquad \text{для} \quad n \in \mathbb{N},$$

uchun

Bo‘lishi yetarli , u holda

$$\left(T''_n(t)+\frac{\pi^2(2n-1)^2a^2}{4l^2}T_n(t)\right)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right)=f_n(t)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right)\quad \text{для}\ \ n\in\mathbb{N}.$$

uchun

Bu bajariladi ,agar

$$T''_n(t)+\frac{\pi^2(2n-1)^2a^2}{4l^2}T_n(t)=f_n(t)\qquad \text{для}\ \ n\in\mathbb{N},\ (11.17)$$

Ya’ni , biz $T_n(t)$ -funksiya uchun yetarli shartga ega bo‘ldikki

$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)$ (agar qator yaxshi bo‘lsa) funksiya

$u_x(0,t)=u_x(l,t)=0.$ chegaraviy shartlar bilan berilgan

$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)$ tenglamaning yechimi bo‘lsin .

3.Qadam (11.1)-(11.13) masalani yechamiz .

(11.10)-(11.13) masala shartlaridan biz hali $U(x,o)=0,\quad U_t(x,0)=0$ boshlang’ich shartlardan foydalanmadik. $\varphi(x)\equiv 0,\ \psi(x)\equiv 0$ boshlang’ich shartlarga kiruvchi funksiyalar , $X_n(x)$ funksiyasi bo‘yicha qatorga yoyiladi.

$$\varphi(x)\equiv 0=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right),\qquad x\in[0,l]\quad \text{где}\ \ \varphi_n=0,\quad (11.18)$$

$$\psi(x)\equiv 0=\frac{\psi_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right),\qquad x\in[0,l]\quad \text{где}\ \ \psi_n=0\quad (11.19)$$

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right)$ funksiyani (ya’ni qatorni yaxshi deb) boshlang’ich shartlarga quyamiz.

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right)=0;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}T'_n(0)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right)=0.$$

Bu tenglamani bajarilishi uchun ,

$$T_n(0)=\varphi_n=0\ \ T'_n(0)=\psi_n=0\quad \text{для}\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Bo‘lihi yetarli .

Shunday qilib , (11.17) va (11.18) –(11.19) lardan $T_n(t)$ –funksiya uchun koshi masalasiga ega bo‘lamiz

$$\begin{cases} T"_n(t) + \frac{\pi^2(2n-1)^2a^2}{4l^2}T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = 0 \\ T'_n(0) = 0 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (11.20)$$

Bu koshi masalalari ixtiyoriy $f_n \in C[0,T]$ va ixtiyoriy $\varphi_n \in \mathbb{R}, \ \psi_n \in \mathbb{R}.$ qiymatlar uchun yagona yechimga ega,

Birinchidan

$$T"_n(t) + \frac{\pi^2(2n-1)^2a^2}{4l^2}T_n(t) = 0.$$

Tenglamani yechamiz:

Uning umumiy yechimi quyidagicha :

$$T_n(t) = c_1 \sin\frac{\pi(2n-1)at}{2l} + c_2 \cos\frac{\pi(2n-1)at}{2l}.$$

O‘zgaruvchilarni variatsialash usilidan (11.11) tenglamaning yechimini

$T_n(t) = c_1(t) \sin\frac{\pi(2n-1)at}{2l} + c_2(t) \cos\frac{\pi(2n-1)at}{2l}$ ko‘rinishda izlaymiz,

Bu yerda$c_{1,2}(t)$ -quyidagi sestimaning yechimidir:

$$\begin{cases} c_1'(t)\sin\frac{\pi(2n-1)at}{2l} + c_2'(t)\cos\frac{\pi(2n-1)at}{2l} = 0; \\ \frac{\pi(2n-1)a}{2l}\left(c_1'(t)\cos\frac{\pi(2n-1)at}{2l} - c_2'(t)\sin\frac{\pi(2n-1)at}{2l}\right) = f_n(t). \end{cases}$$

Bu yedan

$$c_1'(t) = \frac{2l}{\pi(2n-1)a} f_n(t)\cos\frac{\pi(2n-1)at}{2l}, \quad c_2'(t) = -\frac{2l}{\pi(2n-1)a} f_n(t)\sin\frac{\pi(2n-1)at}{2l}.$$

Boshlang’ich shartlarni hisobga olsak :_ $T_n(0) = \varphi_n = 0,$, $T_n'(0) = \psi_n = 0$ va quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$c_1(t) = \frac{2l}{\pi(2n-1)a}\int_0^t f_n(\tau)\cos\frac{\pi(2n-1)a\tau}{2l}d\tau, \quad c_2(t) = -\frac{2l}{\pi(2n-1)a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{\pi(2n-1)a\tau}{2l}d\tau. \quad (11.21)$$

Shunday qilib,

$$T_n(t) = \frac{2l}{\pi(2n-1)a}\left(\sin\frac{\pi(2n-1)at}{2l}\int_0^t f_n(\tau)\cos\frac{\pi(2n-1)a\tau}{2l}d\tau - \right.$$

$$\left. - \cos\frac{\pi(2n-1)at}{2l}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{\pi(2n-1)a\tau}{2l}d\tau\right). \quad (11.22)$$

Qolgan narsa , (11.13) –ni quyidagi formulaga quyish kerak:

№_1,Masalaning $U(x,t)$ –yechimni toping.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \qquad (11.23)$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad t > 0, \qquad (11.24)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,l]. \qquad (11.25)$$

$$u_t(x,0) = 0, \qquad x \in [0,l]. \qquad (11.26)$$

Yechim: №1 ga qarang (klassik usul)

№_II masalaning $U(x,t)$ – yechimini toping:

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x), \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \qquad (11.27)$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad t > 0, \qquad (11.28)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,l]. \qquad (11.29)$$

Yechim: №1 ga qarang (klassik usul)

№_II masalaning $U(x,t)$ – yechimini toping:

$$1) U_{tt} = a^2 U_{xx} + x\cos 2t, a = 2, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0, l = \pi.$$

$$2) U_t = U_{xx} + t^2 \sin x, U(x,0) = 2x, U(0,t) = t, U(l,t) = \sqrt{t},$$
$$x \in [0;1], t \in [0,1].$$

$$3) U_{tt} = a^2 U_{xx} + 2x\cos t, a = 1{,}5, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0, l = \pi.$$

$$4) U_t = U_{xx} + t\sin x, U(x,0) = x^4, U(0,t) = t, U(l,t) = t^2,$$
$$x \in [0;1], t \in [0,1].$$

$$5) U_{tt} = a^2 U_{xx} + e^x \sin t, a = 4, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0, l = 1.$$

$$6) U_t = U_{xx} + tx, U(x,0) = x, U(0,t) = 2t, U(l,t) = t,$$
$$x \in [0;1], t \in [0,1].$$

O‘quv mashqlar

–misol va masalalarni eching
–teoremani isbotlang
–shu mavzuni nazariyasini o‘qib oling

Tavsiya etiladigan adabiyotlar

Asosiy

1. ***Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O'zbekistan», 2002, 448 b.***
2. ***Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,***
3. ***Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.***
4. ***Bisadzs L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.***
5. ***Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.***

Qo'shimcha

1. ***Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.***
2. ***Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.***
3. ***Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.***
4. ***Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.***
5. ***Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.***
6. ***Mixlnn S.G. Leksii po lineynыm integralnыm uravneniyam. M. 1959.***
7. ***Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.***
8. ***Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.***
9. ***Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.***

Mavzu bo'yicha yangi tushunchalar uchun savollar.

1. O'zgaruvchilarni ajratish usuli.
2. Shturm – Liuvill masalasi.

Mavzu 12. Birjinsli bo'lmagan chegaraviy shartni bir jinsliga keltrish;

Amaliy mashg'ulotlar rejasi

Fan: " Matematik fizika tenglamalari".

O'quv soati: 2 s. (amaliy)

O'quv mashg'ulotlar turi: kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

O‘quv mashg’ulotlar rejasi:
- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o‘quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

O‘quv mashg’ulotlar maqsadi:

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg’ulotlar bilan chuqurlashtirish

O‘quv mashg’ulotlar vazifasi:
- *o‘qituvchi:* mavzu bo‘yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o‘rganish tajribasini oshirish,Xususiy hosilali tenglamalarnazariyasini o‘rganish, analiz va o‘rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg’otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo‘ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma’suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o‘rgatish.

O‘qitish texnologiyasi:
- *o‘qitish metodlari*: individual savol-javob; birga o‘qitish;o‘quv qo‘llanmalarga asoslanib teoremalarni isbotlash, misollar echish mahoratini o‘rgatish
- *o‘qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o‘qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko‘rsatmalar
- *o‘qtish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og’zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

Pedagogik masalalar :
- mavzu bo‘yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o‘rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo‘yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o‘rganishni shakllantirish;

O‘quv faoliyati natijalari:
- kurs mavzulari bo‘yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o‘rgangan tushunchalar bilan amaliy mashgulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremalar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo‘llashni mustaqil o‘rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

1.2 Amaliy mashg’ulotning xronologik xaritasi.

1 bosqich. O‘quv mashg’ulotlarga kirish (10 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati:* tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qatiyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo'llanmalar,kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish ; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlalar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari;o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati:* o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari:* og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati:* mavzuni kiritish,Matematik fizika tenglamalarini o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;
- *talaba faoliyati:* oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari:* og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)

- *o'qituvchi faoliyati:* mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati:* ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarnini aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari:* guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

Birjinsli bo‘lmagan chegaraviy shartni bir jinsliga keltrish;

Birinchi tartibli birjinsli bo‘lmagan issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun birjinsli bo‘lmagan boshlang’ich chegararaviy nasalani qaraymiz.

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \quad (12.1)$$

$$u(0,t) = \mu(t) \qquad t > 0, \quad (12.2)$$

$$u(l,t) = \nu(t), \qquad t > 0, \quad (12.3)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,l]. \quad (12.4)$$

Bu masalani birjinsli chegaraviy masalaga osongina keltirish mumkin . bu o‘zgaruvchilarni almashtirish yordamida amalga oshiriladi:

$$v(x,\ t) = u(x,\ t) - \left(\frac{l-x}{l}\,\mu(t) + \frac{x}{l}\,\nu(t)\right). \quad (12.5)$$

Ayni holda $x = 0$

$$v(0,\ t) = u(0,\ t) - \left(\frac{l}{l}\,\mu(t) + \frac{0}{l}\,\nu(t)\right) = \mu(t) - \mu(t) = 0.$$

Va $x = l$

$$v(l,\ t) = u(l,\ t) - \left(\frac{l-l}{l}\,\mu(t) + \frac{l}{l}\,\nu(t)\right) = \nu(t) - \nu(t) =$$

O‘zgaruvchilarni almashtirgandan kiyin boshlang’ich shartlar bilan berilgan tenglamada nima ruy beradi?

Savolni mulohoza qilamiz.

$$u_t = v_t + \left(\frac{l-x}{l}\,\mu'(t) + \frac{x}{l}\,\nu'(t)\right), \qquad u_{xx} = v_{xx},$$

Bo‘lganligidan tenglama quyidagi ko‘rinishni oladi.

$$v_t - a^2 v_{xx} = f(x,t) - \left(\frac{l-x}{l}\,\mu'(t) + \frac{x}{l}\,\nu'(t)\right) = f_1(x,t).$$

Boshlang’ich shart quyidagicha ifodalanadi:

$$v(x,0) = \varphi(x) - \left(\frac{l-x}{l}\,\mu(0) + \frac{x}{l}\,\nu(0)\right) = \varphi_1(x).$$

Demak , berilgan masala birjinsli chegaraviy masala bilan berilgan $v(x,t)$ funksiyani topishga olib keldi.

$$
\begin{aligned}
&v_t - a^2 v_{xx} = f_1(x,t), && x \in (0,l), \quad t > 0,\\
&v(0,t) = 0 && t > 0,\\
&v(l,t) = 0, && t > 0,\\
&v(x,0) = \varphi_1(x), && x \in [0,l],
\end{aligned}
$$

$$f_1(x,t) = f(x,t) - \left(\frac{l-x}{l}\,\mu'(t) + \frac{x}{l}\,\nu'(t)\right), \quad \varphi_1(x) = \varphi(x) - \left(\frac{l-x}{l}\,\mu(0) + \frac{x}{l}\,\nu(0)\right).$$

1,1Izoh. Ixtiyoriy chegaraviy shartlar hamda , II-tartibli shartdan tashqari kesmaning oxirlarida quyidagi

$$w(x,\ t) = (a_1 x + b_1)\mu(t) + (a_2 x + b_2)\nu(t)$$

Funksiyani shunday olish kerakki , $v(x,\ t) = u(x,\ t) - w(x,\ t)$ funksiya uchun birjinsli chegaraviy masala bajarilsin. Ajoyib hollardan biri , kesmaning oxiridagi II-tartibli shartlardir. Bu holda vaqt topib bo‘lmaydi , lekin uni

$$w(x,t) = (a_1 x^2 + b_1 x)\mu(t) + (a_2 x^2 + b_2 x)\nu(t).$$

Ko‘rinishda toppish mumkin .

1.2 misol Ikkinchi tartibli chegaraviy shartlar

$$u_x(0,t) = \mu(t), \qquad u_x(l,t) = \nu(t)$$

Birjinsliga quyidagicha keltirdik:

$w(x,t) = (a_1 x^2 + b_1 x)\mu(t) + (a_2 x^2 + b_2 x)\nu(t)$Chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin.

$$w_x(0,t) = \mu(t), \qquad w_x(l,t) = \nu(t)$$

$$w_x(0,t) = b_1\mu(t) + b_2\nu(t), \qquad w_x(l,t) = (2a_1 l + b_1)\mu(t) + (2a_2 l + b_2)\nu(t).$$

Birinchi chegaraviy shartdan

$$\mu(t) = b_1\mu(t) + b_2\nu(t)$$

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 0.$$

-ni topamiz.

Ikkinchi chegaraviy shartdan topilgan $b_{1,2}$ larni hisobga olsak:

$$\nu(t) = (2a_1 l + b_1)\mu(t) + (2a_2 l + b_2)\nu(t) = (2a_1 l + 1)\mu(t) + 2a_2 l\nu(t)$$

$$a_1 = -\frac{1}{2l}, \quad a_2 = \frac{1}{2l}.$$

Ya’ni

$$w(x,t) = \left(x - \frac{x^2}{2l}\right)\mu(t) + \frac{x^2}{2l}\nu(t).$$

Masalaning $U(x,t)$ yechimni toping.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x), \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{12.6}$$

$$u_x(0,t) = \alpha, \quad u_x(l,t) = \beta, \qquad t > 0, \tag{12.7}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,l]. \tag{12.8}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in [0,l]. \tag{12.9}$$

O'quv mashqlar

–misol va masalalarni eching
–teoremani isbotlang
–shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

Tavsiya etiladigan adabiyotlar

Asosiy

1. ***Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O'zbekistan», 2002, 448 b.***
2. ***Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,***
3. ***Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.***
4. ***Bisadzs L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.***
5. ***Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.***

Qo'shimcha

1. ***Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.***
2. ***Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.***
3. ***Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.***
4. ***Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.***
5. ***Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.***
6. ***Mixlnn S.G. Leksii po lineynыm integralnыm uravneniyam. M. 1959.***
7. ***Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.***

8. ***Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.***

9. ***Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.***

Mavzu bo‘yicha yangi tushunchalar uchun savollar.

1. Bir jinsli bo‘lmagan issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasini keltiring.
2. Bir jinsli bo‘lmagan issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasini bir jinsliga keltiring.

Mavzu 13. Laplas va Puasson tenglamasi uchun o‘zgaruvchilarni ajratish usuli

Amaliy mashg’ulotlar rejasi

Fan: “ Matematik fizika tenglamalari“.

O‘quv soati: 2 s. (amaliy)

O‘quv mashg’ulotlar turi: kartochka, topshiriq, o‘quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg’ulotlar.

O‘quv mashg’ulotlar rejasi:

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o‘quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

O‘quv mashg’ulotlar maqsadi:

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg’ulotlar bilan chuqurlashtirish

O‘quv mashg’ulotlar vazifasi:

- *o‘qituvchi:* mavzu bo‘yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o‘rganish tajribasini oshirish,Xususiy hosilali tenglamalarnazariyasini o‘rganish, analiz va o‘rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg’otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo‘ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma’suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o‘rgatish.

O‘qitish texnologiyasi:

- *o‘qitish metodlari*: individual savol-javob; birga o‘qitish;o‘quv qo‘llanmalarga asoslanib teoremalarni isbotlash, misollar echish mahoratini o‘rgatish
- *o‘qitish shakllari:* individual, kollektiv.

- *o‘qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko‘rsatmalar
- *o‘qtish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og’zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

Pedagogik masalalar :

- mavzu bo‘yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o‘rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo‘yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o‘rganishni shakllantirish;

O‘quv faoliyati natijalari:

- kurs mavzulari bo‘yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o‘rgangan tushunchalar bilan amaliy mashgulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremalar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo‘llashni mustaqil o‘rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

1.2 Amaliy mashg’ulotning xronologik xaritasi.

1 bosqich. O‘quv mashg’ulotlarga kirish (10 daqiqa);

- *o‘qituvchi faoliyati:* tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qatiyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo‘llanmalar,kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish ; o‘quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlalar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari;o‘quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati:* o‘quv joyini tayyorlash (o‘quvchilarning borligi; tashqi ko‘rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o‘quv dars maqsadi; o‘quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari:* og’zaki nazorat, individual savol-javob; ob’yektlar bilan ishlash; konspektlash;

2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);

- *o‘qituvchi faoliyati:* mavzuni kiritish,Matematik fizika tenglamalarini o‘rganish bilan bog’liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg’ulotlar matnini tarqatish; qo‘shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg’ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;

- *talaba faoliyati:* oldingi mavzu bo‘yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi

- *qabul qilish shakli metodlari:* og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)

- *o'qituvchi faoliyati:* mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati:* ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarnini aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari:* guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

Misol va mashqlar namoishi

Laplas va Puasson tenglamasi uchun o'zgaruvchilarni ajratish usuli

a) X bo'yicha bir jinisli bo'lmagan chegaraviy masala

Chegaraviy masalaning $u(x,t)$ echimini toping.

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in(0,\ l),\ \ y\in(0,\ s), \\ u(0,y)=0, \quad u(l,y)=Ty, & y\in(0,\ s), \\ u(x,0)=0, \quad u(x,s)=\frac{sTx}{l}, & x\in(0,\ l). \end{cases} \qquad (13.1)$$

Chegaraviy masalalarni $x=0$, $x=l$ bo'lganda birjinsliga keltirish.

Birjinsli bo'gan chegaraviy shartlar bilan berilgan parabolic va inerbolik tenglamalar uchun,

$$w(x,y)=(a_1x+b_1)\mu(y)+(a_2x+b_2)\nu(y).$$

Funksiyani toppish mumkin

$$w(0,y)=\mu(y), \quad w(l,y)=\nu(y).$$

bo'lsin

$\mu(y)=0, \ \ \nu(y)=Ty$ bolganda $w(x,y)$ funksiya quydagi ko'rinishni oladi.

$$w(x,y)=\frac{Txy}{l}. \qquad (13.2)$$

$w(x,y)$ berilgan funksiya quydagi tengliklarni qanoatlantiradi.

$$\begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0, & x \in (0,\ l),\ \ y \in (0,\ s), \\ w(0,y) = 0, \quad w(l,y) = Ty, & y \in (0,\ s), \\ w(x,0) = 0, \quad w(x,s) = \frac{Txs}{l}, & x \in (0,\ l). \end{cases} \qquad (13.3)$$

Shuning uchun

$$v(x,y) = u(x,y) - w(x,y)$$

Quydagi masalani hosil qilamiz :

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0, & x \in (0,\ l),\ \ y \in (0,\ s), \\ v(0,y) = 0, \quad v(l,y) = 0, & y \in (0,\ s), \\ v(x,0) = 0, \quad v(x,s) = 0, & x \in (0,\ l). \end{cases} \qquad (13.4)$$

2. (13.4) msalani echimini. Berilgan holda masala echimi bu usul bilan izlash zaruriyati yo‘q (13.4) masala quydagi echimga ega.

$$v(x,t) \equiv 0, \qquad x \in (0,\ l),\ \ y \in (0,\ s).$$

Chegaraviy masalalar nazariyasidan ma’lumki, bunday masalalarning echimi yagonadir (bu chegaraviy shartlar ikkinchi tartibli bo‘lgan h0l uchun). Shuning uchun

Jovobni yozish qoldi.

$$v(x,t) \equiv 0, \qquad x \in (0,\ l),\ \ y \in (0,\ s).$$

Chegaraviy masalaning $u(x,t)$ echimini toping.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in (0,\ +\infty),\ \ y \in (0,\ l), \\ u(0,y) = f(y), \quad u(\infty,y) = 0, & y \in (0,\ l), \\ u(x,0) = u_y(x,l) = 0, & x \in (0,\ +\infty). \end{cases} \qquad (13.5)$$

Berilgan hol uchun masala yarimqatlamda qo‘yilgan, ikkita o‘zgarmaslardan faqat kesmaning oxirlarida biz faqat $Y(y)$. Shturm-Liuvill masalasini hosil qilamiz.

Iy(x,t)=0 chegaraviy shartlar bilan berilgan $u_{xx} + u_{yy} = 0$

Tenglamaning echimi $U(x,y) = X(x)Y(y)$. **ko‘rinishda izlaymiz.**

Shuning ta’kitlaymizki, chegaraviy shartlar $y = 0,\ y = l$ **bo‘lganda**

$Y(y)$ funksiya uchun quydagilarni ifodalaydi

$$Y(0) = Y'(l) = 0. \qquad (13.6)$$

$U(x,y)$ ni tenglamaga qo‘yamiz:

$$X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y)$$

$X(x)Y(y) \neq 0$, deb ,bu tenglikni $X(x)Y(y) \neq 0$: ga bo‘lamiz::

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda.$$

$Y(y)$ funksiya uchun quydagi masalaga ega bo‘lamiz.

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \quad (13.7)$$

$$Y(0) = Y'(l) = 0, \quad (13.8)$$

$X(x)$ funksiya uchun tenglama quydagicha bo‘ladi:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \qquad x \in (0,\ \infty). \quad (13.9)$$

(13.8)-(13.9) lar Shturm-Liuvill masala deyiladi. Uning echimini biz № 71 masalaga ko‘rdik va bu masala cheksiz nexrival echimlar to‘plamiga ega:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \quad Y_n(y) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}y\right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (13.10)$$

masala faqat $\lambda = \lambda_n$ bo‘lganda ma’noga ega va buz quydagi masalani hosil qilamiz:

$$X''_n(x) - \lambda_n X_n(x) = 0, \qquad x \in (0,\ \infty), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (13.11)$$

Bu birjinsli birinchi birinchi tartibli tenglamaning echimi quydagicha:

$$X_n(x) = A_n e^{\frac{\pi(2n-1)}{2l}x} + B_n e^{-\frac{\pi(2n-1)}{2l}x}, \qquad y \in (0,s), \quad n \in \mathbb{N} \quad (13.12)$$

bu erda An,-Bn- ixtiyoriy o‘zgarmaslar.

2.Qadam.

(13.6) masalani echamiz:

(13.6) masalaning echimini $u(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y)$ ko‘rinishda izlaymiz.

Ya’ni,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}y\right)\left(A_n e^{\frac{\pi(2n-1)}{2l}x} + B_n e^{-\frac{\pi(2n-1)}{2l}x}\right) \quad (13.13)$$

Masala shartlardan, hali x bo‘yicha chegaraviy shartdan foydalanmadik:

$$u(0,y) = f(y), \quad u(\infty,y) = 0, \qquad y \in (0,\ l).$$

$u(x,y)$ -ni echimi birinchi shartdan :

$$f(y) = u(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(0)Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n)\, Y_n(y), \quad (13.14)$$

$u(x,y)$ =0 shart, faqat

$$A_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

bo‘lganda bajarilishi mumkin, shunday qilib echim.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}y\right) e^{-\frac{\pi(2n-1)}{2l}x}. \quad (13.15)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

$$f(y)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n Y_n(y), \quad (13.16)$$

№-717 masaladagi kabi fn koeffisentlarining ko‘rinishlari quydagicha:

$$f_n=\frac{2}{l}(f,Y_n)=\frac{2}{l}\int_0^l f(y)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}y\right)dx. \quad (13.17)$$

B_n koeffisentlari uchun (13.14)-(13.17) laridan:

$$B_n=f_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(y)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}y\right)dx. \quad (13.18)$$

Endi (13.18) dan topilgan koeffisentlarni (13.15) formulaga qo‘yish qoldi:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}y\right) e^{-\frac{\pi(2n-1)}{2l}x}, \quad (13.19)$$

(13.17) tenglik bilan aniqlangan .

b)Chegaraviy masalaning $u(x,t)$ echimini toping.

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in(0,\ l),\ \ y\in(0,\ s),\\ u(0,y)=0,\quad u_x(l,y)=q, & y\in(0,\ s),\\ u(x,0)=0,\quad u(x,s)=U, & x\in(0,\ l).\end{cases}$$

Chegaraviy masalaning $u(x,t)$ yechimini toping:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in(0,\ +\infty),\ \ y\in(0,\ l),\\ u(0,y)=f(y),\quad u(\infty,y)=0, & y\in(0,\ l),\\ u_y(x,0)=u_y(x,l)+hu(x,l)=0, & x\in(0,\ +\infty),\quad h>0.\end{cases}$$

b) Cheg/m $u(x,t)$

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in(0,\ +\infty),\ \ y\in(0,\ l),\\ u(0,y)=f(y),\quad u(\infty,y)=0, & y\in(0,\ l),\\ u_y(x,0)=u_y(x,l)+hu(x,l)=0, & x\in(0,\ +\infty),\quad h>0.\end{cases}$$

Cheg/m $u(x,t)$ toping.

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in(0,\ +\infty),\ \ y\in(0,\ l),\\ u(0,y)=y(l-y),\quad u(\infty,y)=0, & y\in(0,\ l),\\ u(x,0)=u(x,l)=0, & x\in(0,\ +\infty).\end{cases}$$

O‘quv mashqlar

–misol va masalalarni eching
–teoremani isbotlang
–shu mavzuni nazariyasini o‘qib oling

Tavsiya etiladigan adabiyotlar
Asosiy

1. ***Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamolari. T., «O‘zbekistan», 2002, 448 b.***
2. ***Mixlin S.G. Kurs matematicheskoy fiziki. M, 1968,***
3. ***Sobole» SL. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966.***
4. ***Bisadzs L.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1976.***
5. ***Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1977.***

Qo‘shimcha

1. ***Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1968.***
2. ***Koshlyakov B.C., Glipsr E.B., Smirnov M.M. Osnovnыye differensialnыye uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1962.***
3. ***Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1981.***
4. ***Polojii G.11. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1964.***
5. ***Petrovskiy I.G. Leksii ob uravneniyax s chastnыmi proizvodnыmi. M., 1961.***
6. ***Mixlnn S.G. Leksii po lineynыm integralnыm uravneniyam. M. 1959.***
7. ***Smirnov M.M. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki.***
8. ***Budak B.M., Samarskiy A.A., Tixonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike. M. 1972.***
9. ***Vladimirov 13.S, Mixaylov V.P. i dr. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 1974.***

Mavzu bo‘yicha yangi tushunchalar uchun savollar.

1. Laplas tenglamasi.
2. Puasson tenglamasi.
3. Laplas tenglamasining fundamental yechimi.

Xususiy hosilali tenglamalarfanidan amaliy matematika va informatika yo‘nalishi talabalari uchun seminar mashg‘ulotlari ishlanmasi

Guliston 2010

Seminar ishlarini tashkil etish bo`yicha ko`rsatmalar

Seminar mashg‘ulotlardan maqsad hozirgi zamonaviy komp'yuterlar yordamida ba`zi bir fizik jarayonlarni talabaning ko`z o`ngida sodir bo`lishini, ushbu masalalarning differentsial tenglamalarini tuzish, ularni integrallash, analitik, sonli echimlarini olish, harakat traektoriyalari grafiklarini ilmiy tahlil qilish ko`zda tutilgan.

Seminar mashg‘ulotlariga 10 soat ajratilgan.

№	Mavzu	soat	Adabiyot
1.	Korrekt (to‘g‘ri) va nokorrekt qo`yilgan masala tushunchasi.	**2**	**[1-5; 8;14; 16;18]**
2.	Giperbolik tipdagi tenglamaga olib kelinadigan oddiy masalalar. To`lqin tarqalish usuli.	**2**	**[1-5; 8;14; 16;18]**
3.	Issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasi.	**2**	**[1-5;8;14; 16;18]**
4.	Aralash masalalar.	**2**	**[1-5; 8;14; 16;18]**
5.	Maxsus funksiyalar.	**2**	**[1-5; 8;14; 16;18]**
	Jami	**10**	

Dasturning informatsion-uslubiy ta`minoti

EHM yordamida matematik fizika tenglamalarining ba`zi masalalarini yechish, chegaraviy masalalarni sonli integrallashda, chekli ayirmalar usuli, variatsion usullar, Dirixle printsipi. Ritts usullarini o`rganishda dasturlar to`plami (Maple, MathCad, Mathlab va h.k.) laridan foydalanish.

№ 1 seminar

Korrekt (to`g‘ri) va nokorrekt qo`yilgan masala tushunchasi.

Maqsad va vazifalar:

Seminarda korrekt va nokorrekt qo‘yilgan masalalar qaraladi, ya’ni quyidagilar:

1. **Adamar misoli**. Ushbu
   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$
   Laplas tenglamasining $y>0$ yarim tekislikda
   $$u(x,0)=0,\ \ u_y(x,0)=e^{-\sqrt{k}}\cos kx$$
   boshlang‘ich shartlarni qanoatlantruvchi regulyar yechimi topilsin.
2. Ushbu $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$ tenglamaning $u\,|_{y=+0}=\varphi_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial y}\,|_{y=+0}=\varphi_1(x)$

   boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.
3. $C^2(t>0)\cap C^1(t\geq 0)$ sinfdan shunday $u(x,t)$ funksiya topilsinki, bu funksiya $t>0$ da
   $$u_{tt}=a^2\Delta u+f(x,t)$$

tenglamani va quyidagi boshlang‘ich shartlani qanoatlantirsin:

$$u|_{t=+0}=u_0(x),\ u_t\ |_{t=+0}=u_1(x),$$

Bu yerda f,u_0,u_1 - berilgan funksiyalar.

Seminar masalaning yechimi boshlang‘ich berilganlarga qanchalik bog‘liqligini aniqlashga bag‘ishlanadi.

Nazariy qism:

1. Korrekt va no korrekt masalalar tushunchasi haqida ma’lumot berish.
2. Ixtiyoriy funksiyalar bilan berilgan yechimni yozish.
3. MathCad, MathLab va h.z. dasturlar yordamida masala yechimining grafigini qurish.
4. Korrekt va nokorrekt masalalar ta’riflarini berish. Masala yechimiga boshlang‘ich berilganlar qanday ta’sir ko‘rsatishini aniqlash

Amaliy qism:

1. Yuqoridagi 3 ta masalani qarab chiqish. Laplas tenglamasiga Koshi masalasi qo‘yilganda qanday xatolikka yo‘l qo‘yilganini aniqlash. Xarakteristikalarda qaysi hollardaboshlang‘ich shartlar qo‘yilishi mumkinligini aniqlash.
2. Koshi masalasini yechish. Bu holda masala korrekt qo‘yilganini aniqlash.

Seminar mashg‘ulotiga kirishning zaruriy sharti:
Nazariy va amaliy topshriqlarning yozma bajarilganligi.

Seminar mashg‘ulotini bajarishning zaruriy sharti:
Amaliy topshiriqlarning va qo‘shimcha savollarga javobning komputerda bajarilishi.

Seminar mashg‘ulotini bajarishning yetarli sharti:

1. Nazariy, amaliy topshiriqlarning bajarilishini va sonli eksperiment natijalarining hisobotini taqdim etish.
2. Hisobot bo‘yicha Seminar ishini himoya qilish.

Topshiriq:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
№	$\varphi_0(x)$	$\varphi_1(x)$	$u_0(x)$	$u_1(x)$	$f(x,t)$	a
1	nx	x^n	***sinnx***	***cosnx***	***nxt***	***n***

3. Bu yerda $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $f(x,t)$, a – parametrlar, mos masalalarni yechishda inobatga olinishi kerak, n-talabaning jurnaldagi tartib raqami

Adabiyotlar:

[1] Салоҳиддинов М. Математик физика тенгламалари.Т. “Ўзбекистон”.2002.
[2]В.Я.Арсенин «Методы математической физики и специальные функции»
[3] И.Г.Арманович, В.И.Левин «Уравнения математической физики»

[4] Б.М.Будак, А.А.Самарский, А.Н.Тихонов «Сборник задач по математической физике»
[5] В.С.Владимиров «Уравнения математической физики»
[6] Н.С.Кошляков, Э.Б.Глинер, М.М.Смирнов «Уравнения в частных производных математической физики»
[7] А.Н.Тихонов, А.А.Самарский «Уравнения математической физики»
[8] Т.Жураев, С.Абдиназаров. Математик физика тенгламалари. Т.2003. 332b.

[9] Merajova Sh. Xususiy hosilali tenglamalarfanidan mashqlar to`plami. Buxoro 2007
Internet resurslari: WWW.INTUIT.RU; http://www.mcmee.ru;

http://lib.mexmat.ru; http://www.exponenta.ru.; www.lib.homelinex.org/math/;

www.eknigu.com/lib/Mathematics/; www.eknigu.com/info/M_Mathematics/MC;

www.allmath.ru/highermath/

№ 2 seminar

Giperbolik tipdagi tenglamaga olib kelinadigan oddiy masalalar. To`lqin tarqalish usuli.

Maqsad va vazifalar:

Ushbu Seminar mashg'ulotida giperbolik tipdagi tenglamaga olib keladigan oddiy masalalar qaraladi. To'lqin tarqalish tenglamalariga qo'yilgan Koshi masalasi qaraladi:

$C^2(t>0)\cap C^1(t\geq 0)$ sinfdan shunday $u(x,t)$ funksiya topilsinki, bu funksiya $t>0$ da

$$u_{tt}=a^2\Delta u+f(x,t)$$

tenglamani va quyidagi boshlang'ich shartlani qanoatlantirsin:

$$u|_{t=+0}=u_0(x),\ u_t\ |_{t=+0}=u_1(x),$$

Bu yerda f, u_0, u_1 - berilgan funksiyalar.

Bu masalaga **Koshining klassik masalasi** deyiladi.

Agar quyidagi shartlar bajarilsa,

$f\in C^1(t\geq 0),\ u_0\in C^2(R^1),\ u_1\in C^1(R^1)$, n=1;

$f\in C^2(t\geq 0),\ u_0\in C^3(R^n),\ u_1\in C^2(R^n)$, n=2,3;

u vaqtda Koshining klassik masalasining yechimi mavjud, yagona va quyidagi formulalar orqali topiladi:

Dalamber formulasi bilan, agar n=1 bo'lsa:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[u_0(x+at)+u_0(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}u_1(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau\,. \tag{1}$$

Puasson formulasi bilan, agar n=2 bo'lsa:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\int_{|\xi-x|<a(t-\tau)}\frac{f(\xi,\tau)d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|\xi-x|^2}}+\frac{1}{2\pi a}\int_{|\xi-x|<at}\frac{u_1(\xi)d\xi}{\sqrt{a^2t^2-|\xi-x|^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{|\xi-x|<at}\frac{u_0(\xi)d\xi}{\sqrt{a^2t^2-|\xi-x|^2}}\ . \qquad (2)$$

Kirxgof formulasi bilan, agar n=3 bo‘lsa:

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\int_{|\xi-x|<at)}\frac{1}{|\xi-x|}f\left(\xi,t-\frac{|\xi-x|}{a}\right)d\xi+\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{|\xi-x|=at}u_1(\xi)dS+\frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t}\int_{|\xi-x|=at}u_0(\xi)dS\right]$$

. (3)

$n\geq 2$ bo‘lganda ushbu formulalarning o‘rniga quyidagi formuladan ham foydalansa bo‘ladi:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{t^{2k}}{(2k)!}a^{2k}\Delta^k u_0(x_1,...,x_n)+\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}a^{2k}\Delta^k u_1(x_1,...,x_n)+\frac{a^{2k}}{(2k+1)!}\int_0^t(t-\tau)^{2k+1}\Delta^k f(x_1,...,x_n,\tau)d\tau\right],$$

(4)

bu yerda Δ - Laplas operatori bo‘lib, $k=0,1,2,...$ marta mos ravishda u_0,u_1,f - funksiyalarga qo‘llanilgan.

Laboratotiya ishi Koshi masalalarini yechib, to‘lqin tarqalishini aniqlashga bag‘ishlanadi.

Nazariy qism:

1. To‘lqin tenglamasi uchun Koshi masalasi haqida ma’lumot berish.
2. Berilgan masalani yechish.
3. MathCad, MathLab va h.z. dasturlar yordamida masala yechimining grafigini qurish.

Amaliy qism:

1. Koshi masalasini yechish.
2. Grafigini chizish

Seminar mashg‘ulotiga kirishning zaruriy sharti:
Nazariy va amaliy topshriqlarning yozma bajarilganligi.

Seminar mashg‘ulotini bajarishning zaruriy sharti:
Amaliy topshiriqlarning va qo‘shimcha savollarga javobning komputerda bajarilishi.

Seminar mashg‘ulotini bajarishning yetarli sharti:

4. Nazariy, amaliy topshiriqlarning bajarilishini va sonli eksperiment natijalarining hisobotini taqdim etish.
5. Hisobot bo‘yicha Seminar mashg’ulotini himoya qilish.

Topshiriq:

Quyidagi Koshi masalasi berilgan:

$u_{tt}=\Delta u+x^3-3xy^2;\ \ u|_{t=0}=e^{nx}\cos ny;\ u_t|_{t=0}=e^{ny}\sin nx$

n-talabaning jurnaldagi tartib raqami

Adabiyotlar:
[1] Салоҳиддинов М. Математик физика тенгламалари.Т. "Ўзбекистон".2002.
[2]В.Я.Арсенин «Методы математической физики и специальные функции»
[3] И.Г.Арманович, В.И.Левин «Уравнения математической физики»
[4] Б.М.Будак, А.А.Самарский, А.Н.Тихонов «Сборник задач по математической физике»
[5] В.С.Владимиров «Уравнения математической физики»
[6] Н.С.Кошляков, Э.Б.Глинер, М.М.Смирнов «Уравнения в частных производных математической физики»
[7] А.Н.Тихонов, А.А.Самарский «Уравнения математической физики»
[8] Т.Жураев, С.Абдиназаров. Математик физика тенгламалари. Т.2003. 332b.

[9] Merajova Sh. Xususiy hosilali tenglamalarfanidan mashqlar to`plami. Buxoro 2007
Internet resurslari: WWW.INTUIT.RU; http://www.mcmee.ru;

http://lib.mexmat.ru; http://www.exponenta.ru.; www.lib.homelinex.org/math/;

www.eknigu.com/lib/Mathematics/; www.eknigu.com/info/M_Mathematics/MC;

www.allmath.ru/highermath/

№ 3 seminar

Issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasi.

Maqsad va vazifalar:

Ushbu Seminar mashg'ulotida issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun Koshi masalasi qaraladi,

$C^2(t>0)\cap C(t\ge 0)$ sinfdan shunday $u(x,t)$ funksiya topilsinki, bu funksiya $x\in R^n$, $t>0$ da

$$u_t = a^2\Delta u + f(x,t)$$

tenglamani va quyidagi boshlang'ich shartni qanoatlantirsin:

$$u|_{t=+0} = u_0(x),$$

bu yerda f, u_0 - berilgan funksiyalar.

Bu masalaga issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun **Koshining klassik masalasi** deyiladi.

Agar $f\in C^2(t\ge 0)$ funksiya va uning barcha ikkinchi tartibigacha hosilalari har bir $0\le t\le T$ sohada chegaralangan, $u_0\in C(R^n)$ funksiya chegaralangan bo'lsa, u vaqtda Koshining klassik masalasining yechimi mavjud, yagona va quyidagi Puasson formulasi orqali topiladi:

$$u(x,t)=\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}\int_{R^n} u_0(\xi)e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}}d\xi+\int_0^t\int_{R^n}\frac{f(\xi,\tau)}{\left[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right]^n}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau\ . \tag{1}$$

Quyidagi formuladan ham foydalansa bo'ladi:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{t^k}{(k)!}\Delta^k u_0(x_1,...,x_n)+\frac{1}{(2k+1)!}\int_0^t (t-\tau)^{2k+1}\Delta^k f(x_1,...,x_n,\tau)d\tau\right].$$
(2)

Laboratotiya ishi Koshi masalalarini yechib, issiqlik tarqalishini o‘rganishga bag‘ishlanadi.

Nazariy qism:

1. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun Koshi masalasi haqida ma’lumot berish.
2. Berilgan masalani yechish.
3. MathCad, MathLab va h.z. dasturlar yordamida masala yechimining grafigini qurish.

Amaliy qism:

1. Koshi masalasini yechish.
2. Grafigini chizish

Seminar mashg‘ulotiga kirishning zaruriy sharti:
Nazariy va amaliy topshriqlarning yozma bajarilganligi.

Seminar mashg‘ulotini bajarishning zaruriy sharti:
Amaliy topshiriqlarning va qo‘shimcha savollarga javobning komputerda bajarilishi.

Seminar mashg‘ulotini bajarishning yetarli sharti:

6. Nazariy, amaliy topshiriqlarning bajarilishini va sonli eksperiment natijalarining hisobotini taqdim etish.
7. Hisobot bo‘yicha Seminar mashg’ulotini himoya qilish.

Topshiriq:

Quyidagi Koshi masalasi berilgan:

$u_t=\Delta u$, $\quad u|_{t=0}=u_0(x)$, $x\in R^n$

bu yerda u_0 quyidagicha aniqlanadi:

$$u_0=\cos\sum_{k=1}^{n}x_k$$

n-talabaning jurnaldagi tartib raqami

Adabiyotlar:

[1] Салоҳиддинов М. Математик физика тенгламалари.Т. “Ўзбекистон”.2002.
[2]В.Я.Арсенин «Методы математической физики и специальные функции»
[3] И.Г.Арманович, В.И.Левин «Уравнения математической физики»
[4] Б.М.Будак, А.А.Самарский, А.Н.Тихонов «Сборник задач по математической физике»
[5] В.С.Владимиров «Уравнения математической физики»
[6] Н.С.Кошляков, Э.Б.Глинер, М.М.Смирнов «Уравнения в частных производных математической физики»
[7] А.Н.Тихонов, А.А.Самарский «Уравнения математической физики»

[8] Т.Жураев, С.Абдиназаров. Математик физика тенгламалари. Т.2003. 332b.

[9] Merajova Sh. Xususiy hosilali tenglamalarfanidan mashqlar to`plami. Buxoro 2007
Internet resurslari: WWW.INTUIT.RU; http://www.mcmee.ru;

http://lib.mexmat.ru; http://www.exponenta.ru.; www.lib.homelinex.org/math/;

www.eknigu.com/lib/Mathematics/; www.eknigu.com/info/M_Mathematics/MC;

www.allmath.ru/highermath/

№ 4 seminar

Aralash masalalar.

Maqsad va vazifalar:

Ushbu Seminar mashg'ulotida giperbolik va parabolik tipdagi tenglamalar uchun aralash masalalar qaraladi:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - bu + f(x,t)$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)$$
$$\alpha u(0,t) - \beta u_x(0,t) = \mu(t),\ \alpha > 0, \beta > 0,\ \alpha + \beta \geq 0$$
$$\gamma u(l,t) + \delta u_x(l,t) = \nu(t),\ \gamma > 0, \delta > 0, \gamma + \delta \geq 0$$
$$u_t = a^2 u_{xx} - bu + f(x,t)$$
$$u(x,0) = \varphi(x)$$
$$\alpha u(0,t) - \beta u_x(0,t) = \mu(t),\ \alpha > 0, \beta > 0,\ \alpha + \beta \geq 0$$
$$\gamma u(l,t) + \delta u_x(l,t) = \nu(t),\ \gamma > 0, \delta > 0, \gamma + \delta \geq 0$$

Laboratotiya ishi aralash masalalarni yechishga bag'ishlanadi.

Nazariy qism:

1. Giperbolik va parabolik tipdagi tenglamalar uchun aralash masalaning qo'yilishi va ularning yechish usullari haqida ma'lumot berish.
2. Berilgan masalalarni yechish.
3. MathCad, MathLab va h.z. dasturlar yordamida masala yechimining grafigini qurish.

Amaliy qism:

1. Aralash masalalarni yechish.
2. Grafigini chizish

Seminar mashg'ulotiga kirishning zaruriy sharti:
Nazariy va amaliy topshriqlarning yozma bajarilganligi.

Seminar mashg'ulotini bajarishning zaruriy sharti:
Amaliy topshiriqlarning va qo'shimcha savollarga javobning komputerda bajarilishi.

Seminar mashg'ulotini bajarishning yetarli sharti:

1. Nazariy, amaliy topshiriqlarning bajarilishini va sonli eksperiment natijalarining hisobotini taqdim etish.
2. Hisobot bo'yicha Seminar mashg'ulotini himoya qilish.

Topshiriq:

1. $u_{tt}-u_{xx}+2u_t=4x+8e^t\cos nx$ $(0<x<\pi/2)$; $u_x|_{x=0}=nt$, $u|_{\frac{\pi}{2}} = \pi \cdot t$; $u|_{t=0}=\cos x$, $u_t|_{t=0}=2x$.
2. $u_t=u_{xx}+6u+x^2(1-6t)-2(t+3x)+\sin nx$, $0<x<\pi$ $u_x|_{x=0}=n$, $u_x|_{x=\pi}=2\pi t+1$, $u|_{t=0}=x$.
   n-talabaning jurnaldagi tartib raqami

Adabiyotlar:
[1] Салоҳиддинов М. Математик физика тенгламалари.Т. “Ўзбекистон”.2002.
[2]В.Я.Арсенин «Методы математической физики и специальные функции»
[3] И.Г.Арманович, В.И.Левин «Уравнения математической физики»
[4] Б.М.Будак, А.А.Самарский, А.Н.Тихонов «Сборник задач по математической физике»
[5] В.С.Владимиров «Уравнения математической физики»
[6] Н.С.Кошляков, Э.Б.Глинер, М.М.Смирнов «Уравнения в частных производных математической физики»
[7] А.Н.Тихонов, А.А.Самарский «Уравнения математической физики»
[8] Т.Жураев, С.Абдиназаров. Математик физика тенгламалари. Т.2003. 332b.

[9] Merajova Sh. Xususiy hosilali tenglamalarfanidan mashqlar to`plami. Buxoro 2007
Internet resurslari: WWW.INTUIT.RU; http://www.mcmee.ru;

http://lib.mexmat.ru; http://www.exponenta.ru.; www.lib.homelinex.org/math/;

www.eknigu.com/lib/Mathematics/; www.eknigu.com/info/M_Mathematics/MC;

www.allmath.ru/highermath/

№ 5 seminar

Maxsus funksiyalar.

Maqsad va vazifalar:

Ushbu Seminar mashg’ulotida Eyler integrallari, gipergeometrik funksiya, Bessel funksiyalari haqida ma’lumot berib, gipergeometrik (Gauss) vaBessel tenglamalarini yechishdan iborat

Nazariy qism:
1. Eyler integrallari, gipergeometrik funksiya, Bessel funksiyalari haqida ma’lumot berish.
2. Berilgan masalalarni yechish.
3. MathCad, MathLab va h.z. dasturlar yordamida masala yechimining grafigini qurish.

Amaliy qism:
1. Gipergeometrik (Gauss) vaBessel tenglamalarini yechish
2. Grafigini chizish

Seminar mashg‘ulotiga kirishning zaruriy sharti:

Nazariy va amaliy topshriqlarning yozma bajarilganligi.

Seminar mashg'ulotini bajarishning zaruriy sharti:
Amaliy topshiriqlarning va qo'shimcha savollarga javobning komputerda bajarilishi.

Seminar mashg'ulotini bajarishning yetarli sharti:

1. Nazariy, amaliy topshiriqlarning bajarilishini va sonli eksperiment natijalarining hisobotini taqdim etish.
2. Hisobot bo'yicha Seminar mashg'ulotini himoya qilish.

Topshiriq:

Quyidagi tenglamalar o'rganilsin:

1. $x(1-x)y''+[c-(a+b+1)x]y'-aby=0$
2. $y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0$

Adabiyotlar:

[1] Салоҳиддинов М. Математик физика тенгламалари.Т. "Ўзбекистон".2002.
[2]В.Я.Арсенин «Методы математической физики и специальные функции»
[3] И.Г.Арманович, В.И.Левин «Уравнения математической физики»
[4] Б.М.Будак, А.А.Самарский, А.Н.Тихонов «Сборник задач по математической физике»
[5] В.С.Владимиров «Уравнения математической физики»
[6] Н.С.Кошляков, Э.Б.Глинер, М.М.Смирнов «Уравнения в частных производных математической физики»
[7] А.Н.Тихонов, А.А.Самарский «Уравнения математической физики»
[8] Т.Жураев, С.Абдиназаров. Математик физика тенгламалари. Т.2003. 332b.

[9] Merajova Sh. Xususiy hosilali tenglamalarfanidan mashqlar to`plami. Buxoro 2007

Internet resurslari: WWW.INTUIT.RU; http://www.mcmee.ru;

http://lib.mexmat.ru; http://www.exponenta.ru.; www.lib.homelinex.org/math/;

www.eknigu.com/lib/Mathematics/; www.eknigu.com/info/M_Mathematics/MC;

www.allmath.ru/highermath/

Фойдаланиладиган асосий дарсликлар ва

ўқув қўлланмалар рўйхати

Асосий дарсликлар ва ўқув қўлланмалар

1.Тихонов А.Н.,Самарский А.А. Уравнения математической физики. М. "Наука".1972.

2.Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М. “Наука”.1988.
3.Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М. “Наука”.1961.
4.Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М. “Наука”.1982.
5.Салоҳиддинов М. Математик физика тенгламалари.Т. “Ўзбекистон”.2002.

Қўшимча адабиётлар

6.Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М. “Наука”.1977.
7.Владимиров В.С., Михайлов В.П., Вашарин А.А., Каримова Х.Х., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. Сборник задач по уравнениям математической физики. М. “Наука”.1982.
8.Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М. “Наука”.1981.
9.Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М. “Наука”.1979.
10.Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.1985.
11.Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. М. “Наука”.1975.
12.Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М. “Наука”.1980.
13.Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. М. Из-во МГУ.1984.
14.Тешабоева Н.Х. Математик физика усуллари.Т.1966.
15.Годунов С.К. Уравнения математической физики. М. “Наука”.1971.
16. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, Т. 1-4. 1977- 1982, http://www.mcmee.ru, http://lib.mexmat.ru
17. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М. 1970. http://www.mcmee.ru, http://lib.mexmat.ru
18. Т.Жураев, С.Абдиназаров. Математик физика тенгламалари. Т.2003. 332b.
19. Merajova SH. Xususiy hosilali tenglamalarfanidan mashqlar to`plami. Buxoro 2007

Internet resurslari: WWW.INTUIT.RU; http://www.mcmee.ru;

http://lib.mexmat.ru; http://www.exponenta.ru.; www.lib.homelinex.org/math/;

www.eknigu.com/lib/Mathematics/; www.eknigu.com/info/M_Mathematics/MC;

www.allmath.ru/highermath/

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va O‘rta maxsus ta’lim vazirligi
Alisher Navoiy nomidagi Guliston davlat universiteti

Mexanika – matematika fakulteti
Amaliy matematika va informatika yo‘nalishi
uchinchi kurs talabalari uchun
“**Matematik fizika tenglamalari**” fanidan

MUSTAQIL ISh

Differensial tenglamalar kafedrasining 2010 yil 29 avgustdagi bo‘lib o‘tgan yig’ilishi №1 qarori bilan tasdiqlangan

Guliston-2010

2-chi tartibli chiziqli tenglamalar.2-chi tartibli xususiy xosilali differensial tenglamalar.klassifikasiya(giperbolik tip)

1.Xususiy hosilali tenglamaning umumiy yechimi haqida tushincha.

n-chi tartibli oddiy defferensial tenglamani qarab chiqamiz $f(x, y, y', y'',..., y^{(n)}) = 0.$ Uning umumiy integrali n-ta ixtyiyoriy o'zgarmas funksialar oilasini tashkil etadi

$F(x, y, C_1, C_2,..., C_n) = 0.$ Ixtiyoriy xususiy yechimlarni -

$C_1, C_2,..., C_n$ parametrlarini aniq qiymati berilgan holda hosil qilish mumkin.

1.1Misol Faraz qilaylik $\boldsymbol{u_x = 0}$ tenglama berilgan bo'lsin .Bu tenglama shuni anglatadiki, $\boldsymbol{u(x, y)}$ -funksiya x –dan bog'liq emas. Ya'ni echimlar $\boldsymbol{u(x, y) = y^2 + 2y}, \quad \boldsymbol{u(x, y) = e^y + \sin y}$ funksialardan iborat .Umumiy yechim: $u(x, y) = C(y)$,bo'lsa bu yerda $\boldsymbol{C}$,y-o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan funksiya .

1.2Misol $\boldsymbol{u_x = f(x, y)}$ tenglamani qaraymiz .Bu tenglama yechimini topish uchun,uni x-bo'yicha integrallaymiz $\boldsymbol{\int u_x dx = \int f(x, y)dx + C.}$ (1.2)

x-bo'yicha integrallashda ,biz y-ni o'zgarmas deb olamiz va shuning uchun (1.2) dan C-ixtiyoriy o'zgarmas y-dan bog'liq bo'lishi mumkin.Xuddi shunday umumiy yechim quyidagicha.

$$\boldsymbol{u(x, y) = \int f(x, y)dx + C(y).}$$

1.3Misol faraz qilaylik $\boldsymbol{u_{xy} = 0}$ tenglama berilgan 1.1 Misoldan shu narsa kelib chiqadiki $\boldsymbol{u_y = C(y)}$.Bu tenglama (1.2) misol kabi quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\boldsymbol{u(x, y) = \int C(y)dy + C_1(x).}$$

$\boldsymbol{C_2(y) = \int C(y)dy}$ deb olamiz .U holda umumiy yechim quyidagicha

$$\boldsymbol{u(x, y) = C_1(x) + C_2(y).}$$

Shuni takidlaymizki , ixtiyoriy o'zgarmasga bog'liq bo'lgan oddiy defferensial tenglamalarning umumiy yechimidan farqli xususiy hosilali tenglamalarning umumiy yechimi ixtiyoriy funksiyadan bog'liq bo'ladi

Xususiy hosilali defferensial tenglamalarning umumiy yechimida ixtiyoriy funksiya bor , ularning soni tenglamaning tartibiga teng

Farazx qilaylik
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0. \qquad (1.1)$$
tenglama berilgan bo'lsin.

Buning uchun tenglamani $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0.$ ko‘rinishga yozamiz. X-bo‘yicha hosila nolga

tengligidan uni y-ixtiyoriy funksiyaga bog’liq diyish mumkin $\frac{\partial u}{\partial y}=f(y).$ Shuning uchun

$u(x,y)=\int f(y)dy.$ Lekin ixtiyoriy $f(y),$ funksiyani integrallab,ixtiyoriy yangi

$F(y),$ funksiyani,

plyus ixtiyoriy $f(y),$ -ni hosil qilamiz.Xuddi shunday (1.1) tenglamaning umumiy integrali

$u(x,y)=\phi(x)+F(y)$

Ikkita ixtiyoriy funksiyaga ega. Endi $u(x;y)$ -ng umumiy yechimidan xususiy yechimini topish uchun $\phi(x)$ va $F(y)$ konkret ko‘rinishini toppish kerak .Biroq shu yerda oddiy defferensial tenglamalar va xususiy hosilali differensial tenglamalarning umumiy yechimini topish farqi shundan iboratki xususiy hosilali defferensial tenglamalarning umumiy yechimini umumiyligi tufayli konkret yechimni topish qiyinlashadi.

1.Xususiy hosilali defferensialtenglamaning umumiy yechimini toping:

$\frac{\partial^2 u(x;y)}{\partial x^2}=0$ bu yerda $u(x;y)$-ikki o‘zgaruvchili noma’lum funksiya

Echish:Tenglamani $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0.$ ko‘rinishga yozamiz .Bu yerda $\frac{\partial u}{\partial x}$,

x dan bog’liq emas ,ya’ni undan x bo‘yicha xususiy hosila nolga teng

Shuning uchun , $\frac{\partial u}{\partial x}=C_1(y)$,bu yerda $C_1(y)$-y-ga bog’liq ixtiyoriy funksiya

$\frac{\partial u}{\partial x}=C_1(y)$ tenglamada $\frac{\partial u}{\partial x}$ -xususiy hosila x bo‘yicha olinib ,y-o‘zgarmas sanaladi .Chap va O‘ng tomonni integrallab,qo‘yilgan masalaning yechimini qo‘lga kiritamiz.

$u(x,y)=\int C_1(y)dx=xC_1(y)+C_2(y),$ Bu yerda $C_1(y)$ va $C_2(y)$ -ga bog’liq ixtiyoriy funksiya .Agar topilgan $u(x,y)$ funksiyani ikki marta x-bo‘yicha defferensiallasak,u xolda $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$ bo‘ladi ,demak topilgan funksiya tenglamani umumiy yechimi ekan.

2.Tenglamaning umumiy yechimini toping $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 - y.$

Echish:Tenglamani $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = x^2 - y$ ko‘rinishga yozib uning chap va o‘ng tomonlarini y-bo‘yicha integrallasak ,(x-o‘zgarmas sanaladi) ,u holda ;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int (x^2 - y)dy = x^2 y - \frac{y^2}{2} + C_1(x).$$

Endi x-bo‘yicha integrallaymiz (y-o‘zgarmas sanaladi),ya’ni

$u(x,y) = \int (x^2 y - \frac{y^2}{2} + C_1(x))dx = \frac{x^3 y}{3} - \frac{y^2 x}{2} + C_1^*(x) + C_2(y).$ Bu yerda

$C_1^*(x) = \int C_1(x)dx.$ Xuddi shunday, qaralayotgan tenglamani umumiy yechimi quyidagicha :

$$u(x,y) = \int (x^2 y - \frac{y^2}{2} + C_1(x))dx = \frac{x^3 y}{3} - \frac{y^2 x}{2} + C_1^*(x) + C_2(y).$$

Bu yerda $C_1^*(x) = \int C_1(x)dx.$ Ixtiyoriy funksiyalar bo‘lib, $C_1^*(x)$ - defferensiallanuvchi.

3.Xususiy hosilali defferensial tenglamani yeching : $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2\frac{\partial u}{\partial x}.$

Echish: Tenglamani $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - 2u\right) = 0$ ko‘rinishda yozib chap va o‘ng tomonlarini x-bo‘yicha integrallaymiz .U holda $\frac{\partial u}{\partial y} - 2u = C_1(y).$ Bu tenglamada $\frac{\partial u}{\partial y}$ ni y-bo‘yicha oddiy hosila kabi qarab,x-ni parametr deb sanaymiz .U holda tenglama $\frac{du}{dy} - 2u = C_1(y).$ ko‘rinishda bo‘ladi. Biz birjinsli bo‘lmagan birinchi tartibli chiziqli tenglamaga ega bo‘ldik .Uni yechsak :

$$u(x,y) = e^{\int 2dy}\left(C_2(x) + \int C_1(y)e^{-\int 2dy}dy\right) = C_2(x)e^{2y} + C_1^*(y).$$

Shuday qilib , $u(x,y) = C_2(x)e^{2y} + C_1^*(y),$ bu yerda $C_2(x)$ va $C_1^*(y)$ -ixtiyoriy funksiyalar.

2.Xuddi hosilali ikkinchi tartibli tenglamalar klassifikasiyasi.

O‘zgaruvchilarni almashtirish yordamida

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (2.1)$$

Tenglamani soddaroq ko‘rinishga keltiramiz $c\neq 0,$ deb yangi

$\xi = x+\lambda_1 y, \quad \eta = x+\lambda_2 y,$ o‘zgaruvchilarni kiritamiz ,bu yerda λ_1 va λ_2 hozircha o‘zgarmaslar bo‘lib turli xil (aks holda ξ va η bir biriga erkli funksiyaga bo‘lmaydi) son shunday qilib ,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}$$ va

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=\lambda_1\frac{\partial u}{\partial \xi}+\lambda_2\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

U holda quyidagi munosabat o‘rinli . $\frac{\partial}{\partial x}\to\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\to\lambda_1\frac{\partial}{\partial \xi}+\lambda_2\frac{\partial}{\partial \eta}.$

Shuning uchun

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\left(\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\lambda_1\frac{\partial u}{\partial \xi}+\lambda_2\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\lambda_1\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(\lambda_1\frac{\partial}{\partial \xi}+\lambda_2\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\lambda_1\frac{\partial u}{\partial \xi}+\lambda_2\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\lambda_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\lambda_1\lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\lambda_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Bu ikkinchi tartibli hosilalarni a,2b va c- ga ko‘paytirib qo‘shamiz .U holda (2.1) tenglamaning chap tomoni quyidagicha bo‘ladi .

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$ Bu yerda

$$A=a+2b\lambda_1+c\lambda_1^2, \quad B=a+b(\lambda_1+\lambda_2)+c\lambda_1\lambda_2, \quad C=a+2b\lambda_2+c\lambda_2^2.$$

Endi yordamchi kvadrat tenglamani qaraymiz .

$c\lambda^2 + 2b\lambda + a = 0.$ Uning ildizlari $\lambda_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{c}.$

$D = b^2 - ac$ diskriminantning qiymatiga qarab uch hol bo‘ladi:

Agar qaralayotgan sohada $b^2 - ac > 0,$ bo‘lsa u holda tenglama gepirbolik tipli ,agar $b^2 - ac = 0,$ bo‘lsa u holda (2.1) tenglama parabolic tipli ,agar $b^2 - ac < 0,$ bo‘lsa, tenglama elliptic tipli bo‘ladi.

U holda gipirbolik tipli tenglamaning kanonik ko‘rinishi quyidagicha

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y, z, z'_x, z'_y),$ (yoki $\dfrac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} = \Phi\left(\alpha, \beta, z, \dfrac{\partial z}{\partial \alpha}, \dfrac{\partial z}{\partial \beta}\right),$)

Bu yerda $\alpha = \dfrac{x - y}{2}, \beta = \dfrac{x + y}{2}$);

Parabolik tipli uchun: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y, z, z'_x, z'_y);$

Elliptik tipli uchun: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y, z, z'_x, z'_y)$

Umumiy holda yangi $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y).$ -o‘zgaruvchilar kiritiladi, $\xi(x, y)$ va $\eta(x, y)$ -ikki marta uzliksiz defferensialanuvchi funksiyalar va $\begin{vmatrix} \xi'_x & \xi'_y \\ \eta'_x & \eta'_y \end{vmatrix} \neq 0.$

$a\,dy^2 - 2b\,dxdy + c\,dx^2 = 0$ defferensiyal tenglama

$a\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y, z, \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}).$ tenglamaning xarakteristik tenglamasi diyiladi.

Misollar

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$ tenglamani qaraymiz. Bu tenglamani gepirbolik tipli, Yani $b^2 - ac = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$ Xarakteristik tenglamani tuzamiz $dy^2 + 2\sin x dx dy - \cos^2 x dx^2 = 0$ yoki tenglamaning chap qismida $dxdy - dxdy + \sin x dx^2 - \sin x dx^2$ yozib va uni guruxlasak, u holda $\left(dy + (1+\sin x)dx\right)(dy - (1-\sin x)dx) = 0.$ Tenglamani integrallasak $dy + (1+\sin x)dx = 0$ va $dy - (1-\sin x)dx = 0$ u holda $x + y - \cos x = C_1,\ x - y + \cos x = C_2.$ Yangi o‘zgaruvchilarni $\xi = x + y - \cos x,\ \eta = x - y + \cos x.$ formulalar buyicha kiritamiz. Uholda yangi o‘zgaruvchili tenglama $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0.$ ko‘rinishda bo‘ladi .

$\xi = \alpha + \beta,\ \eta = \alpha - \beta,$ deb, kanonik ko‘rinishdagi tenglamaga kelamiz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} = 0.$$

Javob: Berilgan gepirbolik tipli tenglamaning kanonik ko‘rinishi: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} = 0.$

2.Tenglamani kanonik ko‘rinishga keltiring

$$\boldsymbol{u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0.}$$

2)Xarakteristik tenglamani yozamiz

$$\boldsymbol{\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.}$$

Bu yerda $\boldsymbol{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2}$ Tenglama gepirbolik tipli, shuning uchun

$\boldsymbol{\xi = y - x,\quad \eta = y - 2x}$ yoki $\boldsymbol{\xi = y - \frac{3}{2}x,\quad \eta = x.}$ almashtrish olamiz. O‘zgaruvchilarni almashtrishdan kiyin tenglama $\boldsymbol{u_{\xi\eta} = 0}$ yoki $\boldsymbol{u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = 0.}$ ko‘rinishni oladi. Shuni ta’kidlaymizki $\boldsymbol{u_{\xi\eta} = 0}$ tenglamani yechimi 1.3 misolda qaralgan edi. Xuddi shunday, biz (r) tenglamaning umumiy yechimini quyidagicha yozamiz .

$$\boldsymbol{u = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(y - x) + \psi(y - 2x).}$$

2-chi tartibli xususiy hosilali d.t. klassifikasiya (parabolic tip)

2-chi tartibli hosilali defferensial tenglamalar klassfikasiasi (parabolic tip)

Faraz qilaylik U=U(x,y)-ikkita x va y o‘zgaruvchili noma’lum funksia bo‘lsin.

Uholda 2-chi tartibli tenglama deb quyidagicha aytamiz.

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})=0$$

Tenglamani tepi $\Delta = b^2 - ac$ ga qarab aniqlanadi.

Agar $\Delta > 0$ bo‘lsa, tenglama giperbolik tipli

Agar $\Delta = 0$ bo‘lsa, tenglama parabolic tipli

Agar $\Delta < 0$ bo‘lsa, elliptik tipli

(4)ni kanonik ko‘rinishga keltirish uchun uning xarakteritek tenglamasini yozish kerak.

$$\begin{cases} ady-(b+\sqrt{b^2-ac})dx=0, \\ ady-(b-\sqrt{b^2-ac})dx=0. \end{cases} \qquad (5)$$

So‘ngra uning umumiy yechimini toppish kerak

$b^2-ac>0$ Bo‘lganda,tenglama giperbolik tipli (5)-tenglama sestimasining umumiy integrallarini $\varphi(x,y)=c_1;\psi(x,y)=c_2,$

Bilan ifodalab,yangi ξ,η -o‘zgaruvchilarni $\xi=\varphi(x,y);\eta=\psi(x,y).$

formula bilan kiritamiz. U holda (4) tenglama $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=F(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta})$ kurinishini oladi .Bu gepirbolik tipdagi tenglamaning kanonik ko‘rinishidir.

$b^2-ac=0$ Bo‘lganda, tenglama parabolic tipli.(5) tenglamalar sestimasini umumiy integrallari $\varphi(x,y)=\tilde{c}$ bilan ustma-ust tushadi .Yani ξ,η -o‘zgaruvchilarni $\xi=\varphi(x,y);\eta=\eta(x,y),$ formula bilan kiritamiz,bu yerda $\eta(x,y)$ -funksia quydagi

shartni qanoatlantiradi $\begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial x} \\ \frac{\partial\xi}{\partial y} & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix}\neq 0,$ masalan $\eta=x.$

U holda (4)tenglama $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+F(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta})=0$ ko‘rinishni oladi bu parabolic tipdagi tenglamaning kanonik ko;rinishidir.

$b^2-ac<0.$ Bo‘lganda ,tenglama elliptic tipli (5)tenglamalar sestimasining umumiy integrallari quyidagicha $\varphi(x,y)\pm i\psi(x,y)=\tilde{c}$

Yangi ξ va $\eta.$ -o‘zgaruvchilarni $\xi=\varphi(x,y);\eta=\psi(x,y).$ orqali kiritamiz.U holda (4) tenglama $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+F(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta})=0$ ko‘rinishni oladiki,bu elliptic tipdagi tenglamalarni kanonik ko‘rinishidir.

1.Tenglamani kanonik ko‘rinishiga keltiring $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

Echish:Buyerda a= $a=x^2, b=xy, c=y^2, b^2-ac=x^2y^2-x^2y^2=0;$ ya’ni tenglama parabolic tipli.Xarakteristik tenglamani tuzamiz

$x^2dy^2-2xydxdy+y^2dx^2=0.$ Bu xolda ikkita xarakteristikalar oilasi ustma-ust tushadi $xdy=ydx.$tenglamani qaraymiz.O‘zgaruvchilarni ajratib uni integrallaymiz

$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$ yoki $\ln|y|-\ln|x|=\ln|C|,\ \frac{y}{x}=C.$.Yangi uzgaruvchilarni kiritamiz . $\eta.$ ni shunday tanlaymizki $\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}-\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\neq 0.$ shart bajarilsin

.Yani ξ va $\eta.$ uzgaruvchi olib,u holda berilgan tenglamani kanonik ko‘rinishi quyidagicha

$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}=0.$

2.misol; 2. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+9u_x+9u_y=0$

Xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$a_{11}=1 \quad a_{12}=-1 \quad a_{22}=1$

$\lambda^2+2\lambda+1=0$

$(\lambda+1)^2=0$

Bu yerda $\lambda_{1,2}=-1$ bulganligi uchun bu parabolik tipdagi tenglama. U xolda kuyidagi almashtirish kiritamiz:

$$\begin{cases}\xi = y - \lambda x \\ \eta = x\end{cases} \qquad \begin{cases}\xi = y + x \\ \eta = x\end{cases}$$

$$u_x = u_\xi + u_\eta$$
$$u_y = u_\xi$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} + u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$
$$u_{xy} = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}$$
$$u_{yy} = u_{\xi\xi}$$

Tenglama urniga kuyamiz:

$$u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} - 2u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\xi\xi} + 9u_\xi + 9u_\eta + 9u_\xi = u_{\eta\eta} + 18u_\xi + 9u_\eta$$

Demak, parabolik tipdagi tenglamamiz kanonik shakli kuyidagicha:

$$u_{\eta\eta} + 18u_\xi + 9u_\eta = 0$$

3.misol:Tenglamani kanonik ko‘rinishga keltiring $\boldsymbol{u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 0.}$

(8,4)

Xarakteristik tenglamani yechib $\boldsymbol{\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,}$, $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = 1}$ ga ega bulamiz.Yani,(8,4) tenglama parabolic tipli.

$\boldsymbol{\xi = y - x, \eta = x}$ Almashtirish kiritamiz,uholda

$$\boldsymbol{u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\eta - u_\xi,}$$
$$\boldsymbol{u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi,}$$
$$\boldsymbol{u_{xx} = (u_\eta - u_\xi)_\xi \xi_x + (u_\eta - u_\xi)_\eta \eta_x = -(u_{\eta\xi} - u_{\xi\xi}) + (u_{\eta\eta} - u_{\xi\eta}) = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},}$$
$$\boldsymbol{u_{yy} = (u_\xi)_\xi \xi_y + (u_\xi)_\eta \eta_y = u_{\xi\xi},}$$
$$\boldsymbol{u_{xy} = (u_\eta - u_\xi)_\xi \xi_y + (u_\eta - u_\xi)_\eta \eta_y = u_{\xi\eta} - u_{\xi\xi}.}$$

Hosil bo‘lgan ifodani (8,4) tenglamaga quyib ,o‘xshash hadlarini ixchamlasak,

$$\boldsymbol{u_{\eta\eta} + u_\eta = 0.}$$

Hosil bo‘ladi.Shuni takidlaymizki,biz bu tenglamani _parametriga bog’likq bo‘lgan oddiy defrensial tenglamadik qarash mumkin.Uniyechsak:

$$u = C_1(\xi) + C_2(\xi)e^{-\eta} = C_1(y-x) + C_2(y-x)e^{-x}.$$

Teorema:Agar $z = \varphi(x, y)$ funksia quyidagitenglamaning

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{11}z_x z_y + a_{22}z_y^2 = 0, \qquad (1.7)$$

Yechim bo‘lsa, uholda $\varphi(x, y) = C$ (C-ixtiyoriy konstanta)

$$a_{11}(y')^2 - 2a_{12}y' + a_{22} = 0 \qquad (1.8)$$

Umimiy integrali hisoblanadi.(bu yerda u $y = y(x), y' = dy/dx$).).

Teskarisi,agar$\varphi(x, y) = C$ (1,8)tenglamaning umumiy integrali bo‘lsa,u holda u $z = \varphi(x, y)$,(1.7)tenglamaning yechimi bo‘ladi.Ikki o‘zgaruvchili 2-chi tartibli xususiy xosilali chiziqli tenglama $u = u(x, y)$ funksiani ko‘rinishi quyidagicha

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0 \qquad (1.1)$$

Bu yerda $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ f- x va y o‘zgaruvchili funksia,bundan tashqari $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ larning koefsentlari orasida noldan farqli bor. X va y – o‘zgaruvchili (1.1) tenglamada,ya’ni ξ, η -o‘zgaruvchiga $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$, formula orqali o‘tamiz.Faraz qilaylik $\varphi(x, y), \psi(x, y)$, funksialar,D sohaning x O y tekisligida ikki marta differensialanuvchi va o‘tish yakobiani noldan farqli bo‘lsin

Sohaning har bir nuqtasida

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$$

U holda quydagilar o‘rinli:

$$\begin{aligned} &u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x, \quad u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y, \\ &u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x^2 + 2u_\eta \cdot \xi_x\eta_x + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x^2 + u_\xi \cdot \xi_{xx} + u_\eta \cdot \eta_{xx}, \\ &u_{xy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x \cdot \xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \cdot \xi_{xy} + u_\eta \cdot \eta_{xy}, \\ &u_{xy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \cdot \xi_{yy} + u_\eta \cdot \eta_{yy}, \end{aligned} \qquad (1.2)$$

$$\overline{a_{11}}u_{\xi\xi} + 2\overline{a_{12}}u_{\xi\eta} + \overline{a_{22}}u_{\eta\eta} + F = 0, \qquad (1.3)$$

$$\overline{a_{11}} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2, \qquad (1.4)$$

$$\overline{a_{12}} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y, \qquad (1.5)$$

$$\overline{a_{22}} = a_\eta\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2, \qquad (1.6)$$

Bu holda F bilan U-funksianing ikkinchi tartibli hosilasiga bog’liq bo‘lmagan ifoda belgilangan

3.31 Masala. Tenglamani umumiy yechimini toping va uni kanonib ko‘rinishga keltiring .

Yechish $a_{11} = 2, a_{12} = \frac{5}{2}, a_{22} = -3, a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = \frac{49}{4} > 0$.

gaega bo‘lamiz.Demak butun x O y tekislikida gipirbolik tipli tenglama.(1.8) tenglamaning xarakteristik tenglamasi quyidagicha $2(y')^2-5y'-3=0$. $t=y'$, deb,

$2t^2-5t-3=0$ kvadrat tenglamaga kelamiz.Uning yecimlari $t_1=3, t_2=-\frac{1}{2}$ (turli haqiqiy yechimlar), y' ga qaytib,ikkita 1-chi tartibli oddiy defglamaga ega bo‘lamiz: $y'=3$ va $y'=-1/2$ Bularni echamiz

$$y'=3 \Leftrightarrow y=3x+C \Leftrightarrow y-3x=C,$$
$$y'=-0{,}5 \Leftrightarrow t=-0{,}5x+C \Leftrightarrow y+0{,}5x=C.$$

Xarakteristik metodga asosan yani ξ,η - o‘zgaruvchilarni $\xi=y-3x, \eta=y+0{,}5x$. formula orqali kirirtamiz xususiy hosilalarni hisoblaymiz $\xi_x=-3, \xi_y=1, \xi_{xx}=0, \xi_{xy}=0, \xi_{yy}=0$,

$\eta_x=0{,}5, \eta_y=1, \eta_{xx}=0, \eta_{xy}=0, \eta_{yy}=0$. hosilalarni (1.2)ga quysak:

$$u_x=-3u_\xi+u_\eta\cdot 0{,}5,\ u_x=u_\xi+u_\eta,\ u_{xx}=9u_{\xi\xi}-3u_{\xi\eta}+0{,}25u_{\eta\eta},$$
$$u_{xy}=-3u_{\xi\xi}-2{,}5u_{\xi\eta}+0{,}5u_{\eta\eta},\ u_{yy}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}.$$

(1.13)ga u_{xx}, u_{yy}, u_{xy} larni qo‘ysak,u holda

$$2(9u_{\xi\xi}-3u_{\xi n}+0{,}25u_{nn})+5(-3u_{\xi\xi}-2{,}5u_{\xi n}+0{,}5u_{nn})-3(u_{\xi\xi}+2u_{\xi n}+u_{nn})=0.$$

O‘xshash hadlarni ixchamlab,tenglamaning kanonik shaklini hosil qilamiz

:$-24{,}5u_{\xi\eta}=0$ yoki $u_{\xi\eta}=0$

Bu tenglamani yechish uchun uni $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$ yoki $\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0$ .ko‘rinishga yozamiz.Bu yerdan ,bu yerda $\frac{\partial u}{\partial\eta}=h(\eta)$-ixtiyoriy faqat η bog’liq funksia η -o‘zgaruvchi bo‘yicha integrallab $u=u(\xi,\eta)=\int h(\eta)d\eta= \ =f(\eta)+g(\xi)$

Bu yerda $f'(\eta)=h(\eta)$ g-funksia bo‘lsa,faqat ξ dan bog’liq.Ya’ni (1.13) tenglamani umumiy yechimi $u(x,y)=f(y+0{,}5x)+g(y-3x)$ Bu yerda f va g ixtiyoriy ikki marta defferensialanuvchifunksia

2.Faraz qilamizki sohada $D: a_{12}^2-a_{11}\cdot a_{22}=0$ ya’ni (1.1) tenglama, parabolic tipli bo‘lsin Xarateristik tenglama faqat bitta $y'=\frac{a_{12}}{a_{11}}$ faraz kilaylik $\varphi(x,y)=C$ uning umumiy integrali $\xi=\varphi(x,y)$,deb olamiz $\eta=\psi(x,y)$ funksia sifatida ixtiyoriy shunday funksiani olamizki $J(x,y)=\xi_x\cdot\eta_y-\xi_y\cdot\eta_x\neq 0$. bo‘lsa.U holda (1.1) tenglama $u_{\eta\eta}=\Phi$. ko‘rinishga ega

2.31Masala Tenglamaning umumiy yechimini toping

$$49u_{xx}-14u_{xy}+u_{yy}+14u_x-2u_y=0. \qquad (1.14)$$

Yechish: Bu yerda $a_{11}=49, a_{12}=-7, a_{22}=1, b_1=14, b_2=-2, c=f=0,$,

Tenglama parabolic tipli.Xarakteristik tenglamasi: $49(y')^2+14y'+1=0$.

Bu tenglamaning diskriminanti nolga teng. $y'=\frac{1}{7},\ y=-\frac{x}{7}+C,\ y+\frac{x}{7}=C$

Faqat bir guruh xarakteristikalar. $\xi=y+\frac{x}{7}$.

Deb olamiz η funksiani ixtiyoriy tanlaymiz $\eta=x$ (biroq $J(x,y)=\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x=\frac{1}{7}0-1\cdot 1=-1\neq 0$). shartni tekshiramiz).xususiy hosilalarni topamiz

$$\xi_x=\frac{1}{7},\ \xi_y=1,\ \xi_{xx}=0,\ \xi_{yy}=0,\ \xi_{xy}=0,\ \ \eta_x=1, \eta_y=0,\ \eta_{xy}=0, \eta_{yy}=$$

Va bularni (1.2)formulaga quyamiz,u holda

$$u_{xx}=\frac{1}{49}u_{\xi\xi}+\frac{2}{7}u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}, u_{xy}=\frac{1}{7}u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}, u_{yy}=u_{\xi\xi}, u_x=\frac{1}{7}u_\xi+u_\eta, u_y=u_\xi.$$

$u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ larni (1.14)tenglamaga quysak

$$49\left(\frac{1}{49}u_{\xi\xi}+\frac{2}{7}u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\right)-14\left(\frac{1}{7}u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\right)+u_{\xi\xi}+14\left(\frac{1}{7}u_\xi+u_\eta\right)-2u_\xi=0.$$

Qavslarni ochib,o‘xshash hadlarni ixchamlasak,kanonik shakldagi tenglamaga kelamiz

$49u_{\eta\eta}+14u_\eta=0$ yoki $7u_{\eta\eta}+2u_\eta=0$

Xar bir £ uchun, bu 2-chi tartibli o‘zgarmas koefsentli chiziqli bir jinsli tenglamadir:uning xarakteristik tenglamalari esa $7r^2+2r=0$ yoki $r_1=0, r_2=-\frac{2}{7}$;

Shuning uchun umumiy yechim quydagicha $u=u(\xi,\eta)C_1(\xi)+C_2(\xi)e^{-2\eta/7}$ bu yerda $C_1(\xi)$ va $C_2(\xi)$ O‘zgaruvchiga bog’liq ixtiyoriy funksia.Eski o‘zgaruvchilarga qaytib,

$$u(x,y)C_1\left(y+\frac{x}{7}\right)+C_2\left(y+\frac{x}{7}\right)e^{-2x/7}$$ Bu yerda

$C_1 C_2$ - Ikki marta differensialanuvchi funksiada

Faraz qilaylik $D: a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} < 0$ (1.1)tenglama elliptic tipli bo‘lsin,uning xarakteristik tenglamasi 2-ta turli kompleks tenglamalardan iborat.Bulardan faqat bittasini qaraymiz,faraz qilamiz $\varphi(x, y) = C$ uning umumiy integrali $\xi = \operatorname{Re} \varphi(x, y)$, $\eta = Jm\,\psi(x, y)$ deb olamiz (η-haqiqiy qism, η-esa $\varphi(x, y)$) funksianing mavhum qismi)U holda (1.1)tenglama $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi$ ko‘rinishi oladi .

- 1.1Misol.Tenglamani kanonik ko‘rinishga keltiring

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0. \qquad (1.15)$$

Yechish.Xarakteristik tenglamasi $(y')^2 + 2y' + 2 = 0$ $t = y'$ belgilash olib, $t^2 + 2t + 2 = 0$kvadrat tenglamani hosil qilamiz.Uning yechimi $t_{12} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i$ -kompleks sonlar.Uholda $y' = -1 \pm i$ Faqat bitta tenglamani qaraymiz $y' = -1 + i$ uning umumiy yechimi $y = (-1 + i)x + C$ yoki $y + x - ix = C$

Buyerda $\varphi(x, y) = y + x - ix$

$\xi = \operatorname{Re} \varphi(x, y) = y + x$, $\eta = Jm\,\varphi(x, y) = -x$ Deb olamiz hosilalarni topamiz $\xi_x = \xi_y = 1, \eta_x = -1, \eta_y = 0$,ikkinchi tartibli hosilalar nolga teng (1.2)formulaga asosan

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, u_{xy} = u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta}, u_{yy} = u_{\xi\xi}.$$

(1.15)quysak $\left(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\right) - 2\left(u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta}\right) + 2u_{\xi\xi}$

Umumiy yechimni toping.

1. $ctgx\frac{\partial U}{\partial x}+(y+2\cos^2 xctgx)\frac{\partial u}{\partial x}=0$
2. $x\frac{\partial U}{\partial x}+y\ln\frac{y}{x}\frac{\partial U}{\partial y}=0$
3. $x\frac{\partial U}{\partial x}+(2y-x^2)\frac{\partial U}{\partial y}=0$
4. $(x^2-1)\frac{\partial U}{\partial x}+(xy+x^4-1)\frac{\partial U}{\partial y}=0$
5. $(2x-y)\frac{\partial U}{\partial x}+(x+y)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$
6. $x^2\frac{\partial U}{\partial x}+(2xy+3)\frac{\partial U}{\partial x}=0.$
7. $(2x+y+1)\frac{\partial U}{\partial x}+(x-y)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$
8. $(x-y+2)\frac{\partial U}{\partial x}+(2x+3y-1)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$
9. $(x+2y+1)\frac{\partial U}{\partial x}+(x-2y)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$
10. $(x+y+2)\frac{\partial U}{\partial x}+(2x+3y+1)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$
11. $2y\frac{\partial U}{\partial x}+(\sin x-y^2)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$
12. $2y\frac{\partial U}{\partial x}+(y^2tgx+\sin 2x)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$
13. $(x^2+y^2)\frac{\partial U}{\partial x}+xy\frac{\partial U}{\partial y}=0.$
14. $(x^2+y^2)\frac{\partial U}{\partial x}+(x^2-3y^2)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$
15. $(x+y+3)\frac{\partial U}{\partial x}+(x-y+1)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$
16. $\frac{\partial U}{\partial x}+(x-ytgx)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$
17. $x\frac{\partial U}{\partial x}+(xy+xe^x)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$
18. $x\frac{\partial U}{\partial x}+(x^2\sqrt{y}-yx)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$
19. $(x^2-y^2)\frac{\partial U}{\partial x}+2xy\frac{\partial U}{\partial y}=0.$
20. $(x^2-1)\frac{\partial U}{\partial x}+(-x+yx)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$
21. $x\frac{\partial U}{\partial x}+(2y-x^2)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$

22. $2y\frac{\partial U}{\partial x}+(y^2 tgx+\sin 2x)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$

23. $(x-y)\frac{\partial U}{\partial x}+(x+2y)\frac{\partial U}{\partial y}=0.$

Kanonik shaklga keltiring.

1. $u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y-x^2y=0.$
2. $u_{xx}+2u_{xy}+5u_{yy}-32u_y=0.$
3. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+9u_x+9u_y=0.$
4. $2u_{xx}+3u_{xy}+u_{yy}+7u_x+4u_y=0.$
5. $u_{xx}+u_{xy}-2u_{yy}-3u_x-15u_y+27x=0.$
6. $9u_{xx}-6u_{xy}+u_{yy}+10u_x-15u_y+x-2y=0.$
7. $u_{xx}+2u_{xy}+10u_{yy}-24u_x+42u_y+2(x+y)=0.$
8. $u_{xx}+4u_{xy}+13u_{yy}+3u_x+24u_y+9(x+y)=0.$
9. $u_{xx}-4u_{xy}+5u_{yy}-3u_x+u_y=0.$
10. $u_{xx}-6u_{xy}+9u_{yy}-u_x+2u_y=0.$
11. $2u_{xy}-4u_{yy}+u_x-2u_y+x=0.$
12. $u_{xy}+2u_{yy}-u_x+4u_y=0.$
13. $2u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+4u_x+4u_y=0.$
14. $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+3u_x-5u_y=0.$

15. $u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y = 0.$

16. $u_{xx} + u_{xy} - u_y + 4x = 0.$

17. $3u_{xx} + u_{xy} + 3u_x + u_y + y = 0.$

18. $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} - 2u_x - 2u_y = 0.$

19. $5u_{xx} + 16u_{xy} + 16u_{yy} + 24u_x + 32u_y = 0.$

20. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + 12u_y = 0.$

21. $2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} - u_x + u_y + 2x = 0.$

22. $2u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0.$

23. $3u_{xx} - 10u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 4u_y + 2y = 0.$

24. $3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} + u_x + u_y + 2x + y = 0.$

25. $u_{yy} - 2u_{xy} + 2u_x - u_y - 4e^x = 0.$

26. $u_{xx} - 6u_{xy} + 8u_{yy} + u_x - 2u_y + x = 0.$

27. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_x + 4e^y = 0.$

28. $3u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + u_y = 0.$

29. $(1 + x^2)^2 u_{xx} + u_{yy} + 2x(1 + x^2)u_x = 0.$

30. $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2 u_{yy} = 0.$

31. $u_{xx} - (1 + y^2)^2 u_{yy} - 2y(1 + y^2)u_y = 0.$

32. $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0.$

33. $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} - 2yu_x = 0.$

34. $u_{xx} - 2sinx \cdot u_{xy} - cox^2 x \cdot u_{yy} - cosx \cdot u_y = 0.$

35. $e^{2x} u_{xx} + 2e^{x+y} u_{xy} + e^{2y} u_{yy} - xu = 0.$

36. $u_{xx} - 2xu_{xy} = 0.$

37. $u_{xx} + 2sinx \cdot u_{xy} - (cos^2 x - sin^2 x)u_{yy} + cosx \cdot u_y = 0.$

38. $u_{xx} - 2cosx \cdot u_{xy} - (3 + sin^2 x)u_{yy} + u_x + (sinx - cosx - 2)u_y = 0.$

39. $e^{-2x} u_{xx} - e^{-2y} u_{yy} - e^{-2x} u_x + e^{-2y} u_y + 8e^y = 0.$

40. $4y^2 u_{xx} + 2(1 - y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1+y^2}(2u_x - u_y) = 0.$

41. $u_{xx} + 2cosx \cdot u_{xy} - sin^2 x \cdot u_{yy} - sinx \cdot u_y = 0.$

42. $U_{xx} - 9U_{yy} = 0$

43. $U_{xx} - 6U_{xy} + 2U_y = 0$

44. $U_{xx} + 8U_{xy} + 3U_x = 0$

45. $U_{xx}-4U_{yy}+10U_x=0.$

46. $2U_{xx}-6U_{xy}+4U_{yy}=0.$

47. $4U_{xy}-U_{yy}+U_x-2U_y=0.$

48. $2U_{xx}+2U_{xy}+5U_{yy}=0.$

49. $U_{xx}-9U_{yy}+3U_y=0.$

50. $U_{xx}-2U_{xy}-8U_{yy}+U_x-U_y=0.$

51. $2U_{xx}-10U_{xy}+12U_{yy}+U_y=0.$

52. $U_{xx}-10U_{yy}+5U_x-U_y=0.$

53. $U_{xx}+6U_{xy}+8U_{yy}=0.$

54. $U_{xx}+10U_{xy}+25U_{yy}=0.$

55. $U_{xy}-2U_{yy}+3U_y=0.$

56. $U_{xx}-9U_{yy}+2U_x=0.$

57. $U_{xx}-U_{xy}+U_{yy}+2U_y=0.$

58. $U_{xx}+2U_{xy}+10U_{yy}=0.$

59. $U_{xy}-U_{yy}+2U_x-U_y=0.$

60. $U_{xx}-4U_{xy}-1=0.$

61. $3U_{xx}+U_{xy}+U_y=0.$

62. $U_{xx}-8U_{xy}+U_y-U_x=0.$

63. $U_{xx}-4U_{yy}+U_x=0.$

64. $U_{xx}-2U_{xy}+U_{yy}+U_y=0.$

Dalamber formulasi

To‘lqin tenglamasi uchun Koshi masasalasi

$$u_{tt}=a^2\Delta u+f(x,\,t)$$

Boshlang`ich shartlarda

$$u\big|_{t=0}=u_0(x),\quad u_t\big|_{t=0}=u_1(x),$$

Bu yerda $f,\ u_0,\ u_1$ berilgan funksiyalar bo`lib, Dalamber formulasi orqali topiladi

$$u(x,\,t)=\frac{1}{2}\big[u_0(x+at)+u_0(x-at)\big]+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}u_1(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\,\tau)\,d\xi d\tau.$$

4.1 Misol. $u_{tt} = 4u_{xx}\ u\big|_{t=0} = x^2,\ u_t\big|_{t=0} = x$. tenglamaning yeching. Tenglamada

$a = 2,\ u_0(x) = x^2,\ u_1(x) = x,$

U holda $u_1(\xi) = \xi$.

Dalamber formulasini qo`llasak

$$u(x,\,t) = \frac{1}{2}\left[(x+2t)^2 + (x-2t)^2\right] + \frac{1}{4}\int\limits_{x-2t}^{x+2t} \xi\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2t^2 + 8t^2\right) + \frac{1}{4}\xi^2\Big|_{x-2t}^{x+2t} = x^2 + 4t^2 + 4xt = (x+2t)^2\,.$$

4.2 Misol. $u_{tt} = 4u_{xx} + e^x + t$ при $u\big|_{t=0} = x,\ u_t\big|_{t=0} = \frac{\ln x}{x}$. tenglamani yeching

Dalamber formulasidan:

$$u(x,\,t) = \frac{1}{2}\left[(x+2t) + (x-2t)\right] + \frac{1}{4}\int\limits_{x-2t}^{x+2t} \frac{\ln\xi}{\xi}\,d\xi + \frac{1}{4}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} \left(e^{\xi} + \tau\right)\,d\xi\,d\tau =$$

$$= x + \frac{1}{8}\ln^2\xi\Big|_{x-2t}^{x+2t} + \frac{1}{4}\int\limits_0^t \left(e^{\xi} + \xi\tau\right)\Big|_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} d\tau = x + \frac{1}{8}\left[\ln^2(x+2t) - \ln^2(x-2t)\right] +$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^t \left[e^{x+2(t-\tau)} + \left(x + 2(t-\tau)\right)\tau - e^{x-2(t-\tau)} - \left(x - 2(t-\tau)\right)\tau\right]\,dt =$$

$$= x + \frac{1}{8}\left[\ln^2(x+2t) + \ln^2(x-2t)\right] - \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{8}\left(e^{x+2t} + e^{x-2t}\right).$$

ya`ni, torni erkin tebranishi uchun biz qo`yidafi bir jinsli tenglamani

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.1}$$

$$u\big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x), \tag{4.2}$$

boshlang`ich shartlarda yechish kerak, bu yerda $f(x)$ va $F(x)$ butun sonli o`qda berilgan funksiyalardir. Bunday masala boshlang`ich shartli masala`ki Koshi masalasi deyiladi. Bu masalani to`lqin yugirishi metodi bilan yechish mumkin. (4.1) tenglama umumiy yechimining ko`rinishi qo`yidagicha:

$$u(x,t)=\varphi(x-at)+\psi(x+at), \tag{4.3}$$

bu yerda φ va ψ ikki marta differensiallanuvchi sanaladi. φ va ψ ni shunday tanlaymizki $u=u(x,t)$ funksiya (4.2) boshlang`ich shartlarni qanoatlantirsak, u holda differensial tenglamaning yechishini keltirib chiqamiz.

$$u=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(z)dz.$$

Uyga vazfa

4.3 tenglamaning yechimini toping. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

Agar $u\big|_{t=0}=x,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0.$ bo‘lsa

Yechish. Ya`ni a=1, F(x)=0, u holda

$u=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}$ Bu yerda $u=\frac{x-t+x+t}{2}$

va u=x

Javob: u=x

4.4 Tenglamaning yechimini toping $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, agar $u\big|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=x^3.$

Yechish. Bu yerda $f(x)=0,\ \ F(x)=x^3.$

$$u=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} z^3dz=\frac{1}{8a}z^4\Big|_{x-at}^{x+at}=\frac{1}{8a}\left((x+at)^4-(x-at)^4\right)=$$

$$=\frac{1}{8a}(x^2+2axt+a^2t^2+x^2-2axt+a^2t^2)(x^2+2axt+a^2t^2-x^2+2axt-a^2t^2)=$$

$$=\frac{1}{8a}(2x^2+2a^2t^2)\cdot 2\cdot 2axt=\frac{1}{a}(x^3at+xa^3t^3)=x^3t+xt^3a^2.$$

Javob: $u=x^3t+xt^3a^2.$

2.3 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, tenglama bilan aniqlanadigan torning formasini toping

$t=\pi,$ momentda

Agar $u\big|_{t=0}=\cos x,\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=x.$

Yechish

$$u=\frac{\cos(x+at)+\cos(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} z\ dz=$$

$$=\cos x\cos at+\frac{1}{2a}\cdot\frac{z^2}{2}\Bigg|_{x-at}^{x+at}=\cos x\cos at+\frac{1}{4a}\cdot 4atx=\cos x\cos at+xt.$$

Agar $t=\pi,$ bo`lsa, u holda $u=\cos a\pi\cdot\cos x+\pi x.$

Javob: $u=\cos a\pi\cdot\cos x+\pi x.$

Bir jinsli tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masala

$u_{tt}=a^2u_{xx},$ birjinsli to`lqin tenglamasi $u(0,x)=\varphi(x), \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t}=\psi(x)$ boshlang`ich

shartlar va $U(t,0)=U(t,l)=0.$ va chegaraviy shartlar bilan berilgan bo`lsin

Berilgan masala Fure metodi bilan yechiladi agarda yechim $U(t,x)=X(x)T(t).$ ko`rinishda ifodalansa $U(t,x)$ berilgan tenglamaga qo`yib $X(x)$ va $T(t)$ funksiyhala uchun tenglamaga ega bo`lamiz. $X''=-\lambda^2 X$ tenglamani $X(x)$ ga $X(0)=X(l)=0$ chegaraviy shartlarga nisbatan yechsak

$$X(x)=X_n(x)=A_n\sin\frac{\pi n}{l}x, \lambda=\lambda_n=\frac{\pi n}{l}.$$

$T''=-\lambda^2 a^2 T$ tenglamani T(t) nisbatan yechsak,

$$T(t)=T_n(t)=C_n\sin\frac{a\pi n}{l}t+D_n\cos\frac{a\pi n}{l}t,$$

bu yerda, A_n, C_n, D_n konstantalar. Tenglamaning birjinsligidan $A_n=1.$ deb olish mumkin.

Demak, berilgan tenglamaning umumiy yechimi qo`yidagicha:

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\sin\frac{a\pi n}{l}t+D_n\cos\frac{a\pi n}{l}t)\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

C_n, D_n Konstantalarni topish uchun boshlang`ich shartlardan foydalanamiz.

$$U(0,x)=\varphi(x), \frac{\partial U(0,x)}{\partial x}=\psi(x).$$

U holda qo`yidagi tenglamalarga ega bo`lamiz

$$\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\frac{\pi n}{l}x=\varphi(x), \qquad D_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{a\pi n}{l}\sin\frac{\pi n}{l}x=\psi(x), \qquad C_n=\frac{2}{a\pi n}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx.$$

1.Misol. Bir jinsli to`lqin tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$U_{tt}=a^2U_{xx}, a=1{,}5$$
$$U(0,x)=x(l-x), \frac{\partial U(0,x)}{\partial t}=0, U(t,0)=U(t,l)=0.$$

Yechim qo`yidagi ko`rinishga yoziladi.

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\sin\frac{a\pi n}{l}t+D_n\cos\frac{a\pi n}{l}t)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$ bu yerda

$$C_n=0, \psi(x)=0,\ D_n=\frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx,\ \varphi(x)=x(l-x),\ D_n$$

Hisoblashlarni ikki marta qismlarga integrallashlardan boshlaymiz

$$D_n=\frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx=-\frac{2}{\pi n}\int_0^l x(l-x)d\cos\frac{\pi n}{l}x=-\frac{2}{\pi n}x(l-x)\cos\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^l+$$
$$+\frac{2}{\pi n}\int_0^l\cos\frac{\pi n}{l}x(l-2x)dx=\frac{2l}{(\pi n)^2}\int_0^l(l-2x)d\sin\frac{\pi n}{l}x=\frac{2l}{(\pi n)^2}(l-2x)\sin\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^l+$$
$$+\frac{4l}{(\pi n)^2}\int_0^l\sin\frac{\pi n}{l}xdx=-\frac{4l^2}{(\pi n)^3}\cos\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^l=-\frac{4l^2}{(\pi n)^3}\cos\pi n+\frac{4l^2}{(\pi n)^3}=\frac{4l^2}{(\pi n)^3}[1-\cos\pi n]=$$
$$=\frac{4l^2}{(\pi n)^3}\left[1+(-1)^{n+1}\right].$$

Jabob: $U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4l^2}{(\pi n)^3}\left[1+(-1)^{n+1}\right]\cos\frac{1{,}5\pi n}{l}t\sin\frac{\pi n}{l}x.$

Shturm-Liuvil masalasi

1.Misol Shturm-Liuvil masalasini yeching

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(3/2) = y'(1/2) = 0. \end{cases}$$

Faraz qilaylik $\lambda = \omega^2\ (\omega > 0)$. U holda tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo‘ladi

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$$ va

$$y' = -\omega C_1 \sin \omega x + \omega C_2 \sin \omega x.$$

Quyidagi sestimani hosil qilamiz
$$\begin{cases} C_1 \cos \frac{3}{2}\omega + C_2 \sin \frac{3}{2}\omega = 0, \\ -\omega C_1 \sin \frac{\omega}{2} + \omega C_2 \sin \frac{\omega}{2} = 0. \end{cases}$$

Quyidagi tenglamani yechamiz

$$\begin{vmatrix} -\sin \frac{\omega}{2} & \cos \frac{\omega}{2} \\ \cos \frac{3}{2}\omega & \sin \frac{3}{2}\omega \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \cos \omega = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

U holda xos qiymat quyidagiga teng

$$\lambda = \omega^2 = \pi^2 \left(\frac{1}{2} + n\right)^2.$$

Kiyinchalik:

$$-C_1 \sin \frac{\omega_n}{2} + C_2 \cos \omega_n 2 = 0,$$
$$\frac{C_2}{C_1} = \operatorname{tg} \frac{\omega_n}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right) = (-1)^n = \frac{\sin(\omega_n/2)}{\cos(\omega_n/2)}.$$

Xos funksialarni quyidagi shartdan topamiz

$$y = y_n = C_1 \cos \omega_n x + C_2 \sin \omega_n x.$$

C_1 Va C_2: ni topamiz

$$C_1 = C \cos \frac{\omega_n}{2}, \quad C_2 = C \sin \frac{\omega_n}{2}, \quad C = 1.$$

U holda

$$y = y_n = \cos\frac{\omega_n}{2}\cos\omega_n x + \sin\frac{\omega_n}{2}\sin\omega_n x = \cos\left[\omega_n\left(x - \frac{1}{2}\right)\right].$$

Shturm-Liuvil masalasi ,xosfunksiali qatorlar

Quyidagi bir jinsli chiziqli defferensial tenglamani qaraymiz

$$-y''(x) + q(x)y'(x) - \lambda y(x) = 0 \qquad (1.15)$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \qquad (1.16)$$

Chegaraviy shartlar

Bu yerda $q(x)$ - $[a,b]$ da uzluksiz $q(x) \geq 0$;

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0.$$

Shunday λ -ni qiymatini kerakli (1.15)tenglamani noldan farqli (interval)yechimlari mavjud bo‘lsin va (1016)shartni qanoatlantirsin.

Shunday λ -ni qiymatiki,bu holda(1.15)-(1.16)tenglamaning notrival yechimlari mavjud,chegaraviy masalaning xos qiymatlari diyiladi unga mos notrival yechimlar esa –xos funksialar deyiladi.Quydagi tasdiq urinli:

1)Xos qiymatlar ketmaketliklardan iborat

$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_n < \ldots, < \lambda_n \to \infty, n \to \infty.$,xar bir λ_n songa, yagona $y_n(x).$ -xos funksia mos keladi.

2)Barcha $n \neq m$ uchun

3)Faraz qilaylik shartlar bajarilsin.U holda

$$\int^b y_n(x)y_m(x)dx = 0.$$

chegaraviy masalaning barcha xos sonlarni musbat

1.3.Teorima Har qanday $f(x)$ funksiya (1.16) tenglamaning chegaraviy shartlarini qanoatlantruvchi ,birinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega va $[a,b]$ da ikkinchi tartibli qism uzluksiz hosilaga ega funksiya ,xos funksialar buyicha absalyut va tekis yaqinlashuvchi qatorga yoyiladi.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n y_n(x), \quad C_n = \int_a^b f(x)y_n(x)dx \Big/ \int_a^b y_n^2(x)dx. \qquad (1.17)$$

1.1Misol.Chegaraviy masalani barcha yechimlarini toping.

Yechim:Bu yerda $q(x)=0, \quad \alpha_1=\beta_1=0$. 3 xossaga asosan $\lambda \geq 0$. Ikki holni qaraymiz.

c) $\lambda=0$. $y''=0$ Tenglama quyidagi umumiy yechimga ega

ixtiyoriy $y=C_1x+C_2; C_1, C_2$ -ixtiyoriy o‘zgarmas Chxegaraviy shartdan

$C_1=0$ $y=C_2=const$

d) $\lambda>0$. Tenglamaning umumiy yechimi quyidaghicha :

$$y = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x;$$

$$y' = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x,$$

,bu yerda A, B -ixtiyoriy o‘zgarmas.

Chegaraviy shartlardan :

$$-A\sin\sqrt{\lambda} + B\cos\sqrt{\lambda} = 0, \quad -A\sin 3\sqrt{\lambda} + B\cos 3\sqrt{\lambda} = 0. \qquad (1.18)$$

Bu yerdan va o‘zgarmaslardan nisbatan bir jinsli chiziqli tenglamalar sestimasining qulga kiritdik Ya’ni (1.18) nolga teng bo‘lmagan yechimga ega bo‘lish kerak,uning detirminanti Δ nolga teng bo‘lishi kerak

$$\Delta = -\sin\sqrt{\lambda}\cos 3\sqrt{\lambda} + \sin 3\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(3\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \sin 2\sqrt{\lambda} = 0.$$

Buyerdan $\lambda = \dfrac{\pi^2 n^2}{4}, \ n = 1,2,\ldots, \ y = A\cos\dfrac{\pi nx}{2} + B\sin\dfrac{\pi nx}{2}$.

Kiyinchalik (1.18) –ni birinchi tenglamasidan $B = Atg\sqrt{\lambda} = Atg\dfrac{\pi n}{2}$,

shuning uchun $y = A\cos\dfrac{\pi nx}{2} + Atg\dfrac{\pi n}{2}\sin\dfrac{\pi nx}{2}$.

$$y = A\cos\frac{\pi nx}{2} + Atg\frac{\pi n}{2}\sin\frac{\pi nx}{2}.$$

Quyidagiga ega bo‘lamiz $y = C_n y_n = C_n\cos\dfrac{\pi n}{2}(x-1), \ n = 1,2,\ldots$

1.2Misol $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ funksiyani 1.1 Misolning chegaraviy shartlaridan foydalanib xos funksiyalar bo‘yicha qator yig’indisi shaklida ifodalang.

Echish $f(x)$ funksiya $f'(1) = f'(3) = 0$, shartlarni qanoatlantradi uning hosilalari $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ va $f''(x) = 6x - 12$ uzluksizdirlar.

(1.17)dagi integrallarni hisoblaymiz (3,5 ,7 formuladan foydalanamiz).

$$\int_1^3 f(x)\, y_n(x)dx_{n\neq 0} = \int_1^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)\cos\frac{\pi n}{2}(x-1)dx =$$

$$= \int_1^3 x^3 \cos\frac{\pi n}{2}(x-1)dx - 6\int_1^3 x^2 \cos\frac{\pi n}{2}(x-1)dx + 9\int_1^3 x\cos\frac{\pi n}{2}(x-1)dx =$$

$$= \left(\frac{3x^2}{\alpha_n^2} - \frac{6}{\alpha_n^4} - \frac{12x}{\alpha_n^2} + \frac{9}{\alpha_n^2}\right)\cos\alpha_n(x-1)\Bigg|_1^3 = \frac{6}{\alpha_n^4}(1 - \cos\pi n) =$$

$$= \begin{cases} 0, & n - \text{четное} \\ \dfrac{12}{\alpha_n^4}, & n - \text{нечетное} \end{cases}$$

Bu yerda $\alpha_n = \frac{\pi n}{2}$. Kiyinchalik $n = 0$ bo‘lganda

$$\int_1^3 f(x) y_0(x)dx = \int_1^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)dx = 4, \quad \int_1^3 y_0^2(x)dx = 2$$

Bundan tashqari

$$\int_1^3 y_n^2(x)dx = \int_1^3 \cos^2\frac{\pi n}{2}(x-1)dx = \frac{1}{2}\int_1^3 [1 + \cos\pi n(x-1)]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{\pi n}\sin\pi n(x-1)\right]_1^3 = 1, \quad n \neq 0.$$

(1.17) formula qo`ysak, u holda

$C_0 = \frac{4}{2} = 2;$bo`lganda $C_n = \frac{12}{\alpha_n^4} = 12\left(\frac{2}{\pi n}\right)^4 = \frac{192}{\pi^4 n^4}$. xuddi shunday,

$$f(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{192}{\pi^4 n^4} \cos\frac{\pi n}{2}(x-1) =$$

n-нечетное

$$= 2 + \frac{192}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \cos \pi\left(k - \frac{1}{2}\right)(x-1),\ 1 \le x \le 3$$

Berilgan qator [1;3] kesmada tekis va absolyut yaqinlashuvchidir.

Uyga vazifa

2. Shturm-Liuvill masalasi.

A operatorning $D(A) = C_0^2[0,l]$da $X_1(x),\dots,X_k(x),\dots$ vektorlarni topamiz.

$$\begin{cases} AX_k = \lambda_k X_k; \\ X_k \in D(A), \quad X_k \ne 0. \end{cases} \qquad (3.1)$$

To`laroq (3.1) shuni anglatadiki

$$\begin{cases} X_k''(x) = \lambda_k X_k(x), \quad 0 < x < l, \\ X_k(0) = X_k(l) = 0, \quad X_k(x) \not\equiv 0. \end{cases} \qquad (3.2)$$

A operator bu $\frac{d^2}{dx^2}$, $D(A) = C_0^2[0,l]$ soha

2 (3.1) Shturm-Liuvill masalasining yechimi (3.2) tenglamadan,

$$X_k(x) = A_k e^{\sqrt{\lambda_k} x} + B_k e^{-\sqrt{\lambda_k} x}. \qquad (3.13)$$

3.13)

(3.2) chegaraviy shartlarni qo`ysak

$$\begin{cases} A_k + B_k = 0, \\ A_k e^{\sqrt{\lambda_k} l} + B_k e^{-\sqrt{\lambda_k} l} = 0. \end{cases} \qquad (3.14)$$

Bu sistemaning matrisasi tug`ma bo`lishi kerak, bo`lmasa $A_k = B_k = 0$ va $X_k(x) \equiv 0$,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda_k} l} & e^{-\sqrt{\lambda_k} l} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{\lambda_k} l} - e^{\sqrt{\lambda_k} l} = 0. \qquad (3.15)$$

bu (3.2) ga zid. Ya`ni, λ_k xarakteristik tenglamani qanoatlantiradi.

Bu yerdan

$$e^{-\sqrt{\lambda_k} l} = e^{\sqrt{\lambda_k} l} \Rightarrow e^{2\sqrt{\lambda_k} l} = 1. \qquad (3.16)$$

Ya`ni $2\sqrt{\lambda_k}l = 2k\pi i, \quad k \in \mathbf{Z} \Rightarrow$

$$\sqrt{\lambda_k} = \frac{k\pi i}{l} \Rightarrow \lambda_k = -(\frac{k\pi}{l})^2; \qquad (3.17)$$

Bu yerda $k \geq 0$ deb o`tamiz. Shu narsa kutilgan edi, $\lambda_k \leq 0$.

Demak, λ_k xos sonlarni topdik.

Endi $X_k(x)$.xos funksiyani topamiz. Buning uchun (3.14) sistemani tug`ma deb faraz qilamiz

Ya`ni tenglamada faqat ularning bittasini hisobga olish etarli: $B_k = -A_k$.shuning uchun (3.13) dan (3.17) ko`rinishiga ega bo`lamiz

$$X_k(x) = A_k(e^{\frac{k\pi i}{l}x} - e^{-\frac{k\pi i}{l}x}) = A_k 2i \sin\frac{k\pi x}{l}. \qquad (3.18)$$

Bu yerda biz Eyler formulasini qo`lladik:

$$e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\sin\varphi.$$

Biroq X_k xos funksiya to sonly ko`paytuvchilar aniqlik bilan topilgan, u holda

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l}; \quad k = 1, 2, \ldots. \qquad (3.19)$$

Bu yerda $k > 0$,deb $k = 0$ da $X_0(x) \equiv 0$.

Masala: Shturm-Liuvill masalasini yeching, xos funksiyalarni toping

$$X_k(0) = X_k'(l) = 0, \qquad (3.23$$
$$X_k'(0) = X_k(l) = 0, \qquad (3.24$$
$$X_k'(0) = X_k'(l) = 0. \qquad (3.25$$

(3.23)

Shartlar (3.24) (3.25)

Masala: har bir (3.23)-(3.25) chegarabiy shart uchun mashqlarni bajaring.

Javob☹3.23) uchun 65 –rasmga qarang

$$\lambda_k = -(\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{l})^2,$$
$$X_k(x) = \sin\frac{(k+\frac{1}{2})\pi x}{l},$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots.$$

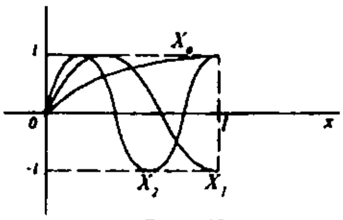


Рис. 65

(3.24) uchun 66 – rasmga qarang.

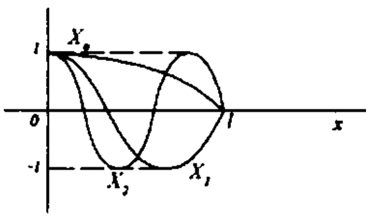


Рис. 66

$$\lambda_k = -(\frac{k\pi}{l})^2,$$
$$X_k(x) = \cos\frac{k\pi x}{l},$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots.$$

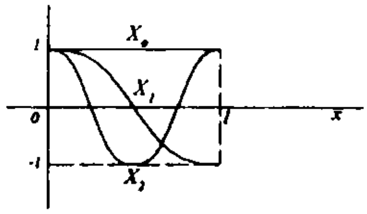


Рис. 67

(3.25) 67 – rasmga qarang.

$$\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2,$$
$$X_k(x) = \cos\frac{k\pi x}{l},$$
$$k = 0, 1, 2, \dots .$$

Shuningdek qo`yidagi ixtiyoriy chegaraviy shartlarni qarashi mumkin (3.26)
$\alpha_{0.1}\beta_{0.1}$- haqiqiy sonlar

Bir jinsli chegaraviy shartlar bilan berilgan giperbolik tipli tenglama uchun chegaraviy masala .Fure usuli

$U(x,t)$ –boshlang'ich chegaraviy masalaning yechimini toping

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

1.Qadam $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ tenglama $U(0,t) = U(l,t) = 0$chegaraviy shartlar bilan berilgan bo‘lib,uning yechimini $U(x,t) = X(x)T(t)$ ko‘rinishda yozamiz .Chegaraviy shartlar $X(x)$ funksiya uchun quyidagini aniqlaydi

$$X(0) = X(l) \quad (1.2)$$

$U(x,t)$ ni tenglamaga quysak,u holda

$X(x)T"(t) = a^2 X"(x)T(t)$

$X(x)T(t) \neq 0$ deb,butenglikni $a^2 X(x)T(t) \neq 0$ ga bo‘lamiz :

$$-\frac{X"(x)}{X(x)} = -\frac{T"(t)}{a^2 T(t)} = \lambda.$$

Bu yerdan $X(x)$ funksiya uchun quyidagi masalaga ega bo‘lamiz

$X"(x) + \lambda X(x) = 0$ (1.3)

$X(0) = X(l) = 0$ (1.4)

$T(t)$ funksiya uchun tenglama quyidagicha :

$T"(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \qquad t > 0.$ (1.5)

(1.3)-(1.4) masala,Shturm Liuvill masalasi diyiladi (1.3) tenglamaning umumiy yeichimini ko‘rinishi quyidagicha .

$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) \qquad \text{при } \lambda > 0$ (1.6)

$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x} \qquad \text{при } \lambda < 0$ (1.7)

$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0$ (1.8)

$\lambda > 0$ bo‘lganda $X(0) = o$, chegaraviy shartdan

$c_2 = 0, \ \Rightarrow \ X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x)$ shuning uchun ikkinchi chegaraviy hartdan

X(l)=0 , $\sqrt{\lambda}l = \pi n$ -ni hosil qilamizki, ,Shturm Liuvill masalasining cheksiz xos qiymatlar to‘plamiga ega bo‘lamiz.

$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$ (1.9) Bunga

Cheksiz xos funksiyalar to‘plami mos keladi.

$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$ (1.10)

$\lambda < 0$ bo‘lganda $X(0) = 0$ chegaraviy shartdan $c_2 = -c_1, \quad \Rightarrow \quad X(x) = 2c_1 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}\,x.$ .Shuning uchun ikkinchi chegaraviy shartdan $X(l) = 0$, $c_1 = 0$, ni hosil qilamiz ,ya’ni ,Shturm Liuvill masalasi manfiy xos qiymatlarga ega emas.

$z = 0$ bo‘lganda $X(0) = 0$ chegaraviy shartdan $c_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad X(x) = c_1 x.$ Shuning uchun ikkinchi chegaraviy shartdan $X(l) = 0$ $c_1 = 0,$ ya’ni ,Shturm Liuvill masalasi nolga teng bo‘lgan xos qiymatga ega emas.

Shunday qilib biz (1.3) (1.4) masalalarning cheksiz netrivial yechimlari to‘plamiga ega bo‘ldik

$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$

(1.5) masalani qarab chiqish qoldiki ,u faqat $\lambda = \lambda_n,$ bo‘lganda ma’noga ega va biz :

$T''_n(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \qquad t > 0.$ (1.11)

Masalalar oilasini hosil qilamiz

Bu bir jinsli ikkinchi tartibli chiziqli tenglamaning umumiy yeichimi quyidagicha :

$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l}t\right), \qquad t > 0,$ (1.12)

Bu yerda A_n, B_n -ixtiyoriy o‘zgarmaslar

2.Qadam (1.1) masalani yechamiz

(1.1) masalani yechimini $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t),$ т.е. ko‘rinishda izlaymiz, Ya'ni $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\left(A_n\cos\left(\frac{\pi n a}{l}t\right)+B_n\sin\left(\frac{\pi n a}{l}t\right)\right)$ (1.13)

Masala shartlaridan biz hali boshlang'ich shartlaridan foydalanmadik $u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x)$.. $U(x,t)$ funksiya uchun bular quyidagilarni ifodalaydi.

$$\varphi(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nX_n(x),\quad (1.14)$$

$$\psi(x)=u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n'(0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_na\sqrt{\lambda_n}X_n(x).\quad (1.15)$$

Faraz qilamiz boshlang'ich shartlarga kiruvchi $\varphi(x)$ va $\psi(x)$, funksiyalar

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_nX_n(x),\qquad \psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_nX_n(x),\quad (1.16)$$

Qatorga yoyilsin .

Aniqlaymizki $\alpha_n,\ \beta_n$. koeffisentlar qanday bo'lishi kerak. Bu uchun (1.16) $X_m=\sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right)$ ga $L_2[0,l]$_ma'nosiga skalyar ko'paytramiz.

$$(\varphi,X_m)=\alpha_m\int_0^l\sin^2\left(\frac{\pi m x}{l}\right)dx=\frac{\alpha_m}{2}\int_0^l\left(1-\cos\left(\frac{2\pi m x}{l}\right)\right)dx=\frac{\alpha_m}{2}\int_0^l dx=\frac{l\alpha_m}{2},$$

Bu yerdan

$$\alpha_n=\frac{2}{l}(\varphi,X_n)=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx.\qquad (1.17)$$

Xuddi shunday β_n uchun:

$$\beta_n=\frac{2}{l}(\psi,X_n)=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx.\quad (1.18)$$

Shunday qilib $A_n,\ B_n$ koeffisentlari uchun (1.13) tasvirdan $U(x,t)$ yechimni (1.14)-(1.16) ga quysak

$$A_n=\alpha_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx;\quad (1.19)$$

$$B_n=\frac{\beta_n}{a\sqrt{\lambda_n}}=\frac{2}{a\pi n}\int_0^l\psi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx.\quad (1.20)$$

Endi qolgan narsa (1.19) (1.20) dagi topilgan A_n, B_n larni (1.13) formulaga quyish qoldi

№ 649[m].

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \quad (1.21)$$

Tenglamaning $U\ (x,t)$yechimni toping

3. Qadam $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ tenglama $u(0,t) = u_x(l,t) = 0$ chegaraviy shartlar bilan berilgan bo‘lsin , u holda uning yechimi $U(x,t) = X(x)T(t)$. ko‘rinishda izlaymiz . Shuni ta’kidlaymiz $X(x)$ –funksiya uchun chegaraviy masala quyidagini ifodalaydi.

$X(0) = X'(l) = 0.$ (1.22) $U(x,t)$ ni tenglamaga quysak ,u holda

$X(x)T"(t) = a^2 X"(x)T(t)$

$X(x)T(t) \neq 0,$ deb , bu tenglamani $a^2 X(x)T(t) \neq 0$: ga bo‘lamiz .

$$-\frac{X"(x)}{X(x)} = -\frac{T"(t)}{a^2 T(t)} = \lambda.$$

Bu yerda $X\ (x)$ funksiya uchun

$X"(x) + \lambda X(x) = 0,$ -(1.23) $X(0) = X'(l) = 0,$ (1.24)

Masalalarga ega bo‘lamiz

$T\ (t)$ funksiya uchun esa , $T"(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \qquad t > 0.$ 1.25)

$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}x) \qquad \text{при} \ \ \lambda > 0;$ (1.26)

$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \qquad \text{при} \ \ \lambda < 0;$ (1.27)

$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при} \ \ \lambda = 0;$ (1.28)

$\lambda > 0$ bo‘lganda , $X(0) = 0$, $X(0) = 0$ chegaraviy shartdan

$c_2 = 0, \Rightarrow X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) \Rightarrow X'(x) = c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$ Shuning uchun ikkinchi chegaraviy shartdan $X'(l) = 0$, $\sqrt{\lambda}l = \pi\left(\frac{1}{2} + k\right)$-ni hosil qilamizki ,u Shturm-Liuvill masalasining cheksiz xos qiymatlari to‘plamlaridan iborat bo‘lad.

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \quad (1.29)$$

Bunga cheksiz xos funksiyalar to‘plami mos keladi:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \quad (1.30)$$

$\lambda < 0$ *Bo'lganda* $X(0) = 0$, $X(0) = 0$ chegaraviy shartdan

$c_2 = -c_1, \quad \Rightarrow \quad X(x) = 2c_1 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}x \quad \Rightarrow \quad X'(x) = 2c_1\sqrt{-\lambda}\operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}x)$

Shuning uchun ikkinchi chegaraviy shartdan$X'(l) = 0$ $c_1 = 0$- Ya’ni, Shturm-Liuvill masalasi manfiy xos qiymatlarga ega emas .

$\lambda = 0$ bo‘lganda $X(x) = 0$ chegaraviy shartdan

$c_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad X(x) = c_1 x \quad \Rightarrow \quad X'(x) = c_1$).Shuning uchun ikkinchi chegaraviy shartdan$X'(l) = 0$ $c_1 = 0$ ni hosil qilamiz ,ya’ni Shturm-Liuvill masalasinolga teng bo‘lganxos qiymatga ega emas

Shunday qilib ,biz (1.23) ,(1.24) masalalarining cheksiz netrivial yeichimlar to‘plamiga ega bo‘ldik

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

(1.25)masalani qarab chiqish qoldi ,u faqat ____ bo‘lganda ma’noga ega va biz

$$T''_n(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \qquad t > 0. \quad (1.31)$$

Masalalar oilasini hosil qilamiz. Bu bir jinsli ikkinchi tartibli chiziqli tenglamaning yechimi quyidagicha bo‘ladi.

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right), \qquad t > 0, \quad (1.32)$$

Bu yerda A_n, B_n -lar ixtiyoriy o‘zgarmaslar .

4. Qadam (1.21) maslani yechamiz (1.21) masalaning yechimini

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$, ko‘rinishda izlaymiz

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\left(A_n\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)+B_n\sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)\right).$$
(1.33)

Masala shartlaridan biz faqat $u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x)$ boshlang'ich shartlardan foydalanmadik

$U(x,t)$ funksiya uchun u quyidagini ifodalaydi.

$$\varphi(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nX_n(x), \quad (1.34)$$

$$\psi(x)=u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n'(0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_na\sqrt{\lambda_n}X_n(x). \quad (1.35)$$

Faraz qilamiz $\varphi(x)$, $\psi(x)$-boshlang'ich shartlarga kiruvchilar

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_nX_n(x), \qquad \psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_nX_n(x), \quad (1.36)$$

Qatorga yoyilsin $\alpha_n, \ \beta_n$ koefsentlarining qanday ekanligini aniqlaymiz .Buning uchun (1.36) ni $X_m=\sin\left(\frac{\pi(2m-1)}{2l}x\right)$-ga $L_2[0,l]$ga skalyar ko'paytramiz.

$$(\varphi,X_m)=\alpha_m\int_0^l\sin^2\left(\frac{\pi(2m-1)}{2l}x\right)dx=\frac{\alpha_m}{2}\int_0^l\left(1-\cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{l}x\right)\right)dx=$$

$$=\frac{\alpha_m}{2}\int_0^l dx=\frac{l\alpha_m}{2},$$

Bu yerdan $$\alpha_n=\frac{2}{l}(\varphi,X_n)=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx. \quad (1.37)$$

Xuddi shunday β_n uchun

$$\beta_n=\frac{2}{l}(\psi,X_n)=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx. \quad (1.38)$$

Shu yul bilan (1.33) dan $A_n, \ B_n$ koefsentlari uchun $U(x,t)$ yechim uchun quyidagilarni hosil qilamiz

$$A_n = \alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx; \quad (1.39)$$

$$B_n = \frac{\beta_n}{a\sqrt{\lambda_n}} = \frac{4}{a\pi(2n-1)}\int_0^l \psi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx. \quad (1.40)$$

Qolgan narsa ,(1.39),(1.40) dan topilga $A_n,\ B_n$ koefsentlari (1.33) ga qo‘yish qoldi.

645

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = \sin\frac{\pi x}{2l} + \sin\frac{3\pi x}{2l}. \end{cases} \quad (1.41)$$

Tenglamaning $U(x,t)$ yechimni toping

Berilgan masala №649^{m}. masalaning xususiy holidir .Shuning uchunbiz birdan (1.33) (1.39) (1.44) masalani javobini chiqarish uchun foydlanamiz (1.31) bo‘yicha A_n:- koefsentlarini topamiz

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l x\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx =$$

$$= \frac{2}{l}\left[-\frac{2l}{(2n-1)\pi}x\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right)\Big|_{x=0}^{x=l} + \frac{2l}{(2n-1)\pi}\int_0^l \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right)dx\right] =$$

$$= \frac{2}{l}\left[\frac{4l^2}{(2n-1)^2\pi^2}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right)\Big|_{x=0}^{x=l}\right] = \frac{2}{l}\left[\frac{4l^2}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n+1}\right] = \frac{8l}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n}$$

(1.42)

B_n, -ni topishda $\psi(x)$-funksiya $X_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right)$funksiya bo‘yicha qatorga yoyilgandeb aytamiz

$$\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{2l} + \sin\frac{3\pi x}{2l}. \quad (1.43)$$

Shunday qilib $\beta_1 = \beta_2 = 1,\ \ \beta_3 = \beta_4 = \ldots = 0$bu yerdan ,yani

$B_n = \beta_n \frac{2l}{\pi(2n-1)a}$

$$B_1 = \frac{2l}{\pi a}, \qquad B_2 = \frac{2l}{3\pi a}, \qquad B_3 = B_4 = \ldots = 0. \quad (1.44)$$

Topilgan A_n va B_n larni

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\left(A_n\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)+B_n\sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)\right).$$

Ga quyamiz.

Javobni hosil qilamiz.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\left(\frac{8l}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n+1}\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)\right)+$$
$$+\frac{2l}{a\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right)\sin\left(\frac{\pi a}{2l}t\right)+\frac{2l}{3a\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{2l}x\right)\sin\left(\frac{3\pi a}{2l}t\right).$$

1 Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda
$u_{tt}=a^2u_{xx}, 0<x<l, t>0$ tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u(0,t)=u(l,t)=0,$$
$$u(x,0)=sin\tfrac{\pi}{l}x,\ u_t(x,0)=sin\tfrac{\pi}{l}x+sin\tfrac{3\pi}{l}x.$$

Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda $u_{tt}=a^2u_{xx}, 0<x<l, t>0$ bir jinsli bo‘lmagan tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+(Ax+B)sint+Cx+D,\quad 0<x<l,\ t>0,$$
$$u(0,t)=U_1(t),\ u(l,t)=U_2(t),$$
$$u(x,0)=l^{-1}(U_2(0)-U_1(0))x+U_1(0),\ u_t(x,0)=V,$$

г)$A=1,\ B=0,\ C=2,\ D=1,\ U_1=sint,\ U_2=2,$
д)$A=0,\ B=-1,\ C=1,\ D=0,\ U_1=cost,\ U_2=lsint.$

2 Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda
$u_{tt}=a^2u_{xx}, 0<x<l, t>0$ tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u_x(0,t)=u(l,t)=0,$$
$$u(x,0)=cos\tfrac{\pi}{2l}x+cos\tfrac{3\pi}{2l}x,\ u_t(x,0)=cos\tfrac{3\pi}{2l}x.$$

$$u_t=a^2u_{xx}+2x+1,\quad 0<x<1,\ t>0,$$
$$u(0,t)=1,\ u_x(1,t)=2,$$
$$u(x,0)=2x+1.$$

$$u_t=a^2u_{xx}+x+1,\quad 0<x<1,\ t>0,$$
$$u(0,t)=0,\ u(1,t)=1,$$
$$u(x,0)=x.$$

3 Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda
$u_{tt}=a^2u_{xx}, 0<x<l, t>0$ tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u(0,t)=u_x(l,t)=0,$$
$$u(x,0)=sin\tfrac{\pi}{2l}x,\ u_t(x,0)=sin\tfrac{\pi}{2l}x+sin\tfrac{3\pi}{2l}x.$$

$$u_t = a^2 u_{xx} + 2x + 1, \quad 0 < x < 1,\ t > 0,$$
$$u_x(0,t) = 2,\ u(1,t) = 1,$$
$$u(x,0) = 2x - 1.$$

$$u_t = a^2 u_{xx} + x + 2, \quad 0 < x < 1,\ t > 0,$$
$$u(0,t) = 0,\ u_x(1,t) = 1,$$
$$u(x,0) = x.$$

4 Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda $u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$ tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = 2 + cos\tfrac{\pi}{l}x,\ u_t(x,0) = 1 + cos\tfrac{2\pi}{l}x.$$

$$u_t = a^2 u_{xx} + t, \quad 0 < x < 1,\ t > 0,$$
$$u(0,t) = 2t,\ u(1,t) = 1,$$
$$u(x,0) = x - 3sin2\pi x.$$

$$u_t = a^2 u_{xx} + 2xt, \quad 0 < x < 1,\ t > 0,$$
$$u_x(0,t) = -1,\ u(1,t) = t,$$
$$u(x,0) = 1 - x - cos\tfrac{7\pi}{2}x.$$

5 Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda $u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$ tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = sin\tfrac{2\pi}{l}x,\ u_t(x,0) = x.$$

$$u_t = a^2 u_{xx} + 2t^3, \quad 0 < x < 1,\ t > 0,$$
$$u(0,t) = 1,\ u_x(1,t) = 2t,$$
$$u(x,0) = 1 + sin\tfrac{5\pi}{2}x.$$

$$u_t = u_{xx} + t^2 - 1, \quad 0 < x < 1,\ t > 0,$$
$$u_x(0,t) = 5,\ u_x(1,t) = -1,$$
$$u(x,0) = 2 + 5x - 3x^2.$$

6 Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda $u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$ tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u_x(0,t) = u(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = cos\tfrac{3\pi}{2l}x + cos\tfrac{5\pi}{2l}x.$$

$$u_t = a^2 u_{xx} + 2t^2, \quad 0 < x < 1,\ t > 0,$$
$$u(0,t) = t,\ u(1,t) = 2t,$$
$$u(x,0) = 2sin\pi x - sin3\pi x.$$

$$u_t = a^2u_{xx} + t, \quad 0 < x < 1, t > 0,$$
$$u_x(0,t) = 2t, \ u(1,t) = 1,$$
$$u(x,0) = 1 + 2cos\tfrac{5\pi}{2}x.$$

7 Qo'yidagi chegaraviy va boshlang'ich shartlarda

$u_{tt} = a^2u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$ tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = 1 + cos\tfrac{2\pi}{l}x, \ u_t(x,0) = cos\tfrac{\pi}{l}x + cos\tfrac{2\pi}{l}x.$$

$$u_t = a^2u_{xx} + 2xt, \quad 0 < x < 1, t > 0,$$
$$u(0,t) = 2t, \ u_x(1,t) = 1,$$
$$u(x,0) = x - 2sin\tfrac{3\pi}{2}x.$$

$$u_t = u_{xx} + 3t - 1, \quad 0 < x < 1, t > 0,$$
$$u_x(0,t) = 2, \ u_x(1,t) = 2,$$
$$u(x,0) = 1 + 2x - 2cos3\pi x.$$

8 Qo'yidagi chegaraviy va boshlang'ich shartlarda

$u_{tt} = a^2u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$ tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = sin\tfrac{2\pi}{l}x + sin\tfrac{3\pi}{l}x, \ u_t(x,0) = sin\tfrac{2\pi}{l}x.$$

$$u_t = a^2u_{xx} + 2x + 1, \quad 0 < x < 1, t > 0,$$
$$u(0,t) = 1, \ u(1,t) = 2,$$
$$u(x,0) = x + 1.$$

$$u_t = a^2u_{xx} + x + 2, \quad 0 < x < 1, t > 0,$$
$$u_x(0,t) = 1, \ u(1,t) = 0,$$
$$u(x,0) = x - 1.$$

9 Qo'yidagi chegaraviy va boshlang'ich shartlarda

$u_{tt} = a^2u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$ tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = sin\tfrac{\pi}{l}x, \ u_t(x,0) = sin\tfrac{\pi}{l}x + sin\tfrac{3\pi}{l}x.$$

$$u_t = a^2u_{xx} + 3t, \quad 0 < x < 1, t > 0,$$
$$u(0,t) = 1, \ u(1,t) = t,$$
$$u(x,0) = 1 - x + sin4\pi x.$$

$$u_t = a^2u_{xx} + 2xt, \quad 0 < x < 1, t > 0,$$
$$u_x(0,t) = 2t, \ u(1,t) = t,$$
$$u(x,0) = 4cos\tfrac{3\pi}{2}x.$$

10 Qo'yidagi chegaraviy va boshlang'ich shartlarda

$u_{tt} = a^2u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$ tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u_x(0,t)=u(l,t)=0,$$
$$u(x,0)=cos\tfrac{\pi}{2l}x+cos\tfrac{3\pi}{2l}x,\ u_t(x,0)=cos\tfrac{3\pi}{2l}x.$$

$$u_t=a^2u_{xx}+t^2,\quad 0<x<1,\ t>0,$$
$$u(0,t)=t,\ u_x(1,t)=2t,$$
$$u(x,0)=4sin\tfrac{9\pi}{2}x.$$

$$u_t=u_{xx}+2t,\quad 0<x<1,\ t>0,$$
$$u_x(0,t)=3,\ u_x(1,t)=1,$$
$$u(x,0)=1+3x-x^2.$$

11 Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda
$u_{tt}=a^2u_{xx},0<x<l,t>0$ tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching
$$u(0,t)=u_x(l,t)=0,$$
$$u(x,0)=sin\tfrac{\pi}{2l}x,\ u_t(x,0)=sin\tfrac{\pi}{2l}x+sin\tfrac{3\pi}{2l}x.$$

12 Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda
$u_{tt}=a^2u_{xx},0<x<l,t>0$ tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching
$$u_x(0,t)=u_x(l,t)=0,$$
$$u(x,0)=2+cos\tfrac{\pi}{l}x,\ u_t(x,0)=1+cos\tfrac{2\pi}{l}x.$$

$$u_t=a^2u_{xx}+2t,\quad 0<x<1,\ t>0,$$
$$u(0,t)=t^2,\ u(1,t)=1,$$
$$u(x,0)=x-sin\pi x+2sin5\pi x.$$

$$u_t=a^2u_{xx}+t,\quad 0<x<1,\ t>0,$$
$$u_x(0,t)=2,\ u(1,t)=t^2,$$
$$u(x,0)=2x-2+cos\tfrac{5\pi}{2}x.$$

13 Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda
$u_{tt}=a^2u_{xx},0<x<l,t>0$ tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching
$$u(0,t)=u(l,t)=0,$$
$$u(x,0)=sin\tfrac{2\pi}{l}x,\ u_t(x,0)=x.$$

$$u_t=a^2u_{xx}+x+t,\quad 0<x<1,\ t>0,$$
$$u(0,t)=2t^2,\ u_x(1,t)=t,$$
$$u(x,0)=sin\tfrac{\pi}{2}x-3sin\tfrac{3\pi}{2}x.$$

$$u_t=u_{xx}+t-2,\quad 0<x<1,\ t>0,$$
$$u_x(0,t)=0,\ u_x(1,t)=2,$$
$$u(x,0)=1+x^2-cos3\pi x+2cos4\pi x.$$

14 Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda
$u_{tt}=a^2u_{xx},0<x<l,t>0$ tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u_x(0,t) = u(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = cos\tfrac{3\pi}{2l}x + cos\tfrac{5\pi}{2l}x.$$

$$u_t = a^2u_{xx} - 2x + 2, \quad 0 < x < 1,\ t > 0,$$
$$u(0,t) = 2t,\ u(1,t) = t^2,$$
$$u(x,0) = sin2\pi x - 2sin3\pi x.$$

$$u_t = a^2u_{xx} + tx - 1, \quad 0 < x < 1,\ t > 0,$$
$$u_x(0,t) = t^2,\ u(1,t) = 1,$$
$$u(x,0) = 1 - cos\tfrac{\pi}{2}x\ .$$

15 Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda
$u_{tt} = a^2u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$ tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = 1 + cos\tfrac{2\pi}{l}x,\ u_t(x,0) = cos\tfrac{\pi}{l}x + cos\tfrac{2\pi}{l}x.$$

$$u_t = a^2u_{xx} + 5xt, \quad 0 < x < 1,\ t > 0,$$
$$u(0,t) = 1,\ u_x(1,t) = 2t^2,$$
$$u(x,0) = 1 + sin\tfrac{5\pi}{2}x.$$

$$u_t = u_{xx} + 2t^2 + 3, \quad 0 < x < 1,\ t > 0,$$
$$u_x(0,t) = 2,\ u_x(1,t) = 0,$$
$$u(x,0) = 2 + 2x - x^2 - 4cos2\pi x.$$

16 Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda
$u_{tt} = a^2u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$ tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = sin\tfrac{2\pi}{l}x + sin\tfrac{3\pi}{l}x,\ u_t(x,0) = sin\tfrac{2\pi}{l}x.$$

$$u_t = a^2u_{xx} + 4xt, \quad 0 < x < 1,\ t > 0,$$
$$u(0,t) = 3,\ u(1,t) = t^2,$$
$$u(x,0) = 3 - 3x + 2sin\pi x.$$

$$u_t = a^2u_{xx} + 4xt + 1, \quad 0 < x < 1,\ t > 0,$$
$$u_x(0,t) = 2t^2,\ u(1,t) = t,$$
$$u(x,0) = cos\tfrac{5\pi}{2}x - cos\tfrac{7\pi}{2}x.$$

17 Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda $u_{tt} = a^2u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$ bir jinsli bo‘lmagan tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + Ax + B, \quad 0 < x < l,\ t > 0,$$
$$u(0,t) = U_1, u(l,t) = U_2,$$
$$u(x,0) = U_1(1 - l^{-1}x) + U_2l^{-1}x,\ u_t(x,0) = 0,$$

а)$A = 2,\ B = 1,\ U_1 = 1,\ U_2 = 0,$
б)$A = 1,\ B = 2,\ U_1 = 0,\ U_2 = 1,$
в)$A = 1,\ B = 0.$

18 Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda $u_{tt} = a^2u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$ bir jinsli bo‘lmagan tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + Ax + B, \quad 0 < x < l,\ t > 0,$$
$$u_x(0,t) = 0, \quad u(l,t) = U,$$
$$u(x,0) = U,\ u_t(x,0) = V,$$

а)$A = 2,\ B = 1,\ U = 1,\ V = 0$
б)$A = 3,\ B = 1,\ U = 2,\ V = 1$
в)$A = 1,\ B = 0,\ U = 1,\ V = 2.$

19 Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda $u_{tt} = a^2u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$ bir jinsli bo‘lmagan tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + Ax + B, \quad 0 < x < l,\ t > 0,$$
$$u(0,t) = U,\ u_x(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = U,\ u_t(x,0) = V,$$

а)$A = 2,\ B = 1,\ U = 1,\ V = 0$
б)$A = 4,\ B = 1,\ U = 2,\ V = 1$
в)$A = 1,\ B = 0,\ U = 1,\ V = 2.$

20 Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda $u_{tt} = a^2u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$ bir jinsli bo‘lmagan tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + Asinx + B, \quad 0 < x < l,\ t > 0,$$
$$u(0,t) = U_1,\ u(l,t) = U_2,$$
$$u(x,0) = U_1(1 - l^{-1}x) + U_2l^{-1}x,\ u_t(x,0) = V,$$

а)$A = 2,\ B = 1,\ U_1 = 1,\ U_2 = 0,$
б)$A = 1,\ B = 2,\ U_1 = 0,\ U_2 = 1,$
в)$A = 1,\ B = 0.$

21 Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda $u_{tt} = a^2u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$ bir jinsli bo‘lmagan tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + A\cos x + B, \quad 0 < x < l,\ t > 0,$$
$$u_x(0,t) = 0,\ u(l,t) = U,$$
$$u(x,0) = U,\ u_t(x,0) = V,$$

а)$A = 3,\ B = 1,\ U = 1,\ V = 0$
б)$A = 1,\ B = 2,\ U = 2,\ V = 3$
в)$A = 1,\ B = 0,\ U = 1,\ V = 2.$

22 Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda $u_{tt} = a^2u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$ bir jinsli bo‘lmagan tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + A\sin x + B, \quad 0 < x < l,\ t > 0,$$
$$u(0,t) = U,\ u_x(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = U,\ u_t(x,0) = V,$$

а)$A = 1,\ B = 3,\ U = 1,\ V = 0$
б)$A = 2,\ B = 1,\ U = 2,\ V = 1$
в)$A = 1,\ B = 0,\ U = 1,\ V = 2.$

23 Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda $u_{tt} = a^2u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$ bir jinsli bo‘lmagan tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + A\cos x + B, \quad 0 < x < l,\ t > 0,$$
$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = U,\ u_t(x,0) = V,$$

а)$A = 3,\ B = 1,\ U = 1,\ V = 0$
б)$A = 1,\ B = 2,\ U = 2,\ V = 3$
в)$A = 1,\ B = 0,\ U = 1,\ V = 2.$

24 Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda $u_{tt} = a^2u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$ bir jinsli bo‘lmagan tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + (Ax + B)\sin t + Cx + D, \quad 0 < x < l,\ t > 0,$$
$$u(0,t) = U_1(t),\ u(l,t) = U_2(t),$$
$$u(x,0) = l^{-1}(U_2(0) - U_1(0))x + U_1(0),\ u_t(x,0) = V,$$

а)$A = 2,\ B = 1,\ C = 4,\ D = 3,\ U_1, U_2 = const,$
б)$A = 0,\ B = 2,\ C = 2,\ D = 1,\ U_1 = \sin t,\ U_2 = 1,$
в)$A = 0,\ B = 0,\ C = 0,\ D = 1,\ U_1 = \sin t,\ U_2 = \cos t,$

25 Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda $u_{tt} = a^2u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$ bir jinsli bo‘lmagan tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + (Ax + B)sint + Cx + D, \quad 0 < x < l,\ t > 0,$$
$$u_x(0,t) = 0,\ u(l,t) = U(t),$$
$$u(x,0) = U(0),\ u_t(x,0) = V,$$

а)$A = 2,\ B = 1,\ C = 4,\ D = 0,\ U = const,$
б)$A = 1,\ B = 0,\ C = 2,\ D = 1,\ U = sint,$
в)$A = 2,\ B = 0,\ C = 1,\ D = 0,\ U = sint + 1,$

26 Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda $u_{tt} = a^2u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$ bir jinsli bo‘lmagan tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + (Ax + B)sint + Cx + D, \quad 0 < x < l,\ t > 0,$$
$$u(0,t) = U(t),\ u_x(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = U(0),\ u_t(x,0) = V,$$

а)$A = 2,\ B = 1,\ C = 3,\ D = 1,\ U = const,$
б)$A = 1,\ B = 1,\ C = 0,\ D = 1,\ U = 2sint,$
в)$A = 4,\ B = 0,\ C = 1,\ D = 0,\ U = 2sint + 1,$

27 Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda $u_{tt} = a^2u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$ bir jinsli bo‘lmagan tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + (Ax + B)sint + (Cx + D)cos2t, \quad 0 < x < l,\ t > 0,$$
$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = V,$$

а)$A = 2,\ B = 1,\ C = 0,\ D = 1,$
б)$A = 1,\ B = 2,\ C = 1,\ D = 0,$
в)$A = 1,\ B = 0,\ C = 0,\ D = 2,$

28 Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda $u_{tt} = a^2u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$ bir jinsli bo‘lmagan tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + (Ax + B)cost + Csinx + D, \quad 0 < x < l,\ t > 0,$$
$$u(0,t) = U_1(t),\ u(l,t) = U_2(t),$$
$$u(x,0) = l^{-1}(U_2(0) - U_1(0))x + U_1(0),\ u_t(x,0) = 0,$$

а)$A = 2,\ B = 1,\ C = 3,\ D = 0,\ U_1, U_2 = const,$
б)$A = 0,\ B = 1,\ C = 4,\ D = 1,\ U_1 = cost,\ U_2 = 2,$
в)$A = 0,\ B = 0,\ C = 0,\ D = 1,\ U_1 = sint,\ U_2 = cost,$

29 Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda $u_{tt} = a^2u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$ bir jinsli bo‘lmagan tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + (Ax + B)cost + Csinx + D, \quad 0 < x < l,\, t > 0,$$
$$u_x(0,t) = 0,\, u(l,t) = U(t),$$
$$u(x,0) = U(0),\, u_t(x,0) = 0,$$

а)$A = 2,\, B = 1,\, C = 3,\, D = 1,\, U = const,$
б)$A = 1,\, B = 0,\, C = 4,\, D = 1,\, U = cost,$
в)$A = 3,\, B = 0,\, C = 1,\, D = 0,\, U = 2cost + 1,$

30 Qo‘yidagi chegaraviy va boshlang’ich shartlarda $u_{tt} = a^2u_{xx}\, ,0 < x < l, t > 0$ bir jinsli bo‘lmagan tebranish tenglamasi uchun chegaraviy masalani yeching

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + (Ax + B)cost + Ccosx + D, \quad 0 < x < l,\, t > 0,$$
$$u(0,t) = U(t),\, u_x(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = U(0),\, u_t(x,0) = 0,$$

а)$A = 1,\, B = 1,\, C = 4,\, D = 0,\, U = const,$
б)$A = 1,\, B = 2,\, C = 2,\, D = 1,\, U = cost,$
в)$A = 1,\, B = 0,\, C = 1,\, D = 0,\, U = 2cost - 1,$

1)$U_{tt} = a^2U_{xx}, a = 2, U(0,x) = (l-x)\sin\frac{\pi x}{l}, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0, U(t,0) = U(t,l) = 0.$

2)$U_{tt} = a^2U_{xx} + t\sin\frac{\pi x}{2}, a = 5, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, U(t,0) = U(t,l) = 0$

3)$U_t = U_{xx} + \cos\frac{\pi x}{2}, U(x,0) = x^2\sin\pi x, U(0,t) = 0, U(l,t) = 0, x \in [0,1], t \in [0;0.4]$

1)$U_{tt} = a^2U_{xx,} a = 3, U(0,x) = x\sin(l-x), \frac{\partial y}{\partial t}(0,x) = 0, U(t,0) = U(t,l) = 0$

2)$U_{tt} = a^2U_{xx} + (t+5)x, a = 3, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, U(t,0) = U(t,l) = 0$

3)$U_t = U_{xx} + \sin\frac{\pi x}{2}, U(x,0) = 1,2x^2\sin\pi x, U(0,t) = 0, U(l,t) = e^{-0,1}\sin\frac{\pi t}{4}, x \in [o,2], t \in [0;0,1].$

1)$U_{tt} = a^2U_{xx}, a = 4, U(0,x) = 2(l-x)\sin x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0$

2)$U_{tt} = a^2U_{xx} + (t^2-1)x, a = 1, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, U(t,0) = U(t,l) = 0$

3)$U_t = U_{xx} + \sin\frac{\pi x}{2}, U(0,x) = 4x\sin\pi x, U(0,t) = 1, U(l,t) = 2.x \in [0,1], t \in [0,1].$

1)$U_{tt} = a^2U_{xx}, a = 10, U(0,x) = 10x, U(t,0) = U(t,l) = 0, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0.$

2)$U_{tt} = a^2U_{xx} + 10(t-1)\cos 2x, a = 1, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

3)$U_t = U_{xx} + 2x + t, U(x,0) = 0,5x^4 + 1, U(0,t) = t, U(l,t) = \sin 2t, x \in [0,1], t \in [0,2].$

$1) U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 1,5, U(0,x) = 2(x+3), \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \sin x, U(t,0) = U(t,l) = 1.$

$2) U_{tt} = a^2 U_{xx} + tx^2, a = 2, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

$3) U_t = U_{xx} + t\sin x, U(x,0) = x(1-x), U(0,t) = \sqrt{t}, U(l,t) = t, x \in [0;0,5], t \in [0,1]$

$1) U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 2, U(0,x) = \cos 2x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = x, U(t,0) = U(t,l) = t.$

$2) U_{tt} = a^2 U_{xx} + t^2 x, a = 3, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

$3) U_t = U_{xx} + e^{-0,3x}\sin x, U(x,0) = x^2, U(0,t) = 1, U(l,t) = 5t, x \in [0;1], t \in [0,3]$

$1) U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 3, U(0,x) = x^2, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \frac{1}{x}, U(t,0) = U(t,l) = 0.$

$2) U_{tt} = a^2 U_{xx} - 50(l-x)\sin 4t, a = 1,5, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

$3) U_t = U_{xx} + \sin\frac{\pi x}{12}, U(x,0) = x\sin \pi x, U(0,t) = 0,5, U(l,t) = e^{-t}, x \in [0;1], t \in [0,2].$

$1) U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 1, U(0,x) = \frac{x}{2}, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0,$

$2) U_{tt} = a^2 U_{xx} + t^2 x^2, a = 3,5, \; U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

$3) U_t = U_{xx} + t\sin 2x, U(x,0) = 3x\left(2-x\right), U(0,t) = t^2, \; U(l,t) = \cos t, x \in [0;1], t \in [0,2].$

$1) U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 2, \; U(0,x) = 2\cos 2,5x, \; \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

$2) U_{tt} = a^2 U_{xx} + t, a = 1,5, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

$3) U_t = U_{xx} + \sin\frac{\pi x}{6}, U(x,0) = 4x^2, U(0,t) = t+1, \; U(l,t) = \sin t, x \in [0;1], t \in [0,2].$

$1) U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 1.5, U(0,x) = x\sin\frac{\pi x}{l}, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

$2) U_{tt} = a^2 U_{xx} + (t^2+1)\sin 2x, a = 1, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

$3) U_t = U_{xx} + e^{-x}, U(x,0) = \sqrt{x}, U(0,t) = 2t-1, U(l,t) = 2\sin t, x \in [0;1], t \in [0,1].$

$1) U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 3, U(0,x) = 2\left(l-x\right)\sin x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

$2) U_{tt} = a^2 U_{xx} + 2x\cos t, a = 1,5, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

$3) U_t = U_{xx} + t\sin 3x, U(x,0) = 2x, U(0,t) = -1, U(l,t) = t+1, x \in [0;1], t \in [0,1].$

$1) U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 2.5, \; U(0,x) = x\cos\frac{\pi x}{2l}, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, U(t,0) = U(t,l) = 0.$

$2) U_{tt} = a^2 U_{xx} + (x+2)\sin t, a = 2, l = \pi, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

$3) U_t = U_{xx} + \left(t+1\right)\sin x, U(x,0) = x\left(1-x\right), U(0,t) = t, U(l,t) = \cos\sqrt{t}, x \in [0;1], t \in [0,1].$

$1) U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 3, U(0,x) = x+2, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

$2) U_{tt} = a^2 U_{xx} + t^2 x, a = 2, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

$3) U_t = U_{xx} + t\sin 3x, U(x,0) = x^4, U(0,t) = 0{,}1t, U(l,t) = e^{-0.3t}, x \in [0;2], t \in [0,1].$

$1) U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 3, U(0,x) = e^x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

$2) U_{tt} = a^2 U_{xx} + \sin t, a = 1{,}5, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0, l = \pi.$

$3) U_t = U_{xx} + t + x, U(x,0) = \sqrt{x}, U(0,t) = t, U(l,t) = 4, x \in [0;1], t \in [0,1].$

$1) U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 2, U(0,x) = e^{x+1}, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 1, U(t,0) = U(t,l) = 0.$

$2) U_{tt} = a^2 U_{xx} + (x+4)\cos 3t, a = 1, l = \frac{\pi}{2}, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

$3) U_t = U_{xx} + xt, U(x,0) = x^2, U(0,t) = t, U(l,t) = 1, x \in [0;1], t \in [0,1].$

$1) U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 2, U(0,x) = x^2, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0, l = \pi.$

$2) U_{tt} = a^2 U_{xx} + t^2, a = 1, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

$3) U_t = U_{xx} + tx, U(x,0) = 3x, U(0,t) = t-1, U(l,t) = \sin 2t, x \in [0;1], t \in [0,1].$

$1) U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 4, U(0,x) = x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0, l = \frac{\pi}{2}.$

$2) U_{tt} = a^2 U_{xx} + x\sin 2t, a = 1, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0, l = 1.$

$3) U_t = U_{xx} + 2x\left(t+1\right), U(x,0) = x, U(0,t) = t, U(l,t) = \sin t, x \in [0;1], t \in [0,1].$

$1) U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 2, U(0,x) = 2x+1, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0, l = \pi.$

$2) U_{tt} = a^2 U_{xx} + te^x, a = 1, l = 2 U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

$3) U_t = U_{xx} + t\sqrt{x}, U(x,0) = x^2, U(0,t) = t+1, U(l,t) = e^{-t}, x \in [0;1], t \in [0,1].$

$1) U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 3, U(0,x) = x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0, l = 2.$

$2) U_{tt} = a^2 U_{xx} + e^x \sin t, a = 1, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

$3) U_t = U_{xx} + t^2 x, U(x,0) = x, U(0,t) = t-1, U(l,t) = \sqrt{t}, x \in [0;1], t \in [0,1].$

$1) U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 2, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0, l = \pi.$

$2) U_{tt} = a^2 U_{xx} + e^x \cos 2t, a = 4, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0, l = \pi.$

$3) U_t = U_{xx} - x^3 t, U(x,0) = t, U(0,t) = 1, U(l,t) = 2x, \quad x \in [0;1], t \in [0,1].$

$1) U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 3, U(0,x) = \sin 2x, \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0, l = \dfrac{\pi}{2}.$

$2) U_{tt} = a^2 U_{xx} + 2x\cos t, a = 1{,}5, U(0,x) = \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0, l = \pi.$

$3) U_t = U_{xx} + t\sin x, U(x,0) = x^4, U(0,t) = t, U(l,t) = t^2,$
$x \in [0;1], t \in [0,1].$

$1) U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 4, U(0,x) = x\cos\dfrac{\pi x}{l}, \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0, l = \pi.$

$2) U_{tt} = a^2 U_{xx} + x\cos 2t, a = 3, U(0,x) = \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0, l = \pi.$

$3) U_t = U_{xx} + t^2\sin x, U(x,0) = 3x, U(0,t) = 2t, U(l,t) = \sqrt{t}, x \in [0;1], t \in [0,1].$

$1) U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 3, U(0,x) = x(l-x), \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0, l = 1.$

$2) U_{tt} = a^2 U_{xx} + e^x\sin t, a = 2, U(0,x) = \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0, l = 1.$

$3) U_t = U_{xx} + tx, U(x,0) = x, U(0,t) = 3t, U(l,t) = t/2, x \in [0;1], t \in [0,1].$

$u_t = a^2 u_{xx} + 6t, \quad 0 < x < 1, t > 0,$
$u(0,t) = 4t^2, u_x(1,t) = 1,$
$u(x,0) = x + 4sin\frac{3\pi}{2}x.$

$u_t = u_{xx} + t - 2, \quad 0 < x < 1, t > 0,$
$u_x(0,t) = 1, u_x(1,t) = 3,$
$u(x,0) = 3 + x + x^2 - 2cos4\pi x.$

$u_t = a^2 u_{xx} - 2x(t-2), \quad 0 < x < 1, t > 0,$
$u(0,t) = t^2, u(1,t) = 4t,$
$u(x,0) = 4sin3\pi x - 3sin5\pi x.$

$u_t = a^2 u_{xx} + 1, \quad 0 < x < 1, t > 0,$
$u(0,t) = t, u_x(1,t) = t^2,$
$u(x,0) = 3sin\frac{\pi}{2}x - sin\frac{11\pi}{2}x.$

$u_t = a^2 u_{xx} + xt^2, \quad 0 < x < 1, t > 0,$
$u(0,t) = 2, u(1,t) = t^3,$
$u(x,0) = 2 - 2x - sin5\pi x.$

$u_t = a^2 u_{xx} + 2, \quad 0 < x < 1, t > 0,$
$u(0,t) = 2t, u_x(1,t) = t^3,$
$u(x,0) = sin\frac{3\pi}{2}x - 2sin\frac{7\pi}{2}x.$

$$u_t = u_{xx} + t + 1, \quad 0 < x < 1, t > 0,$$
$$u_x(0,t) = -1,\ u_x(1,t) = 1,$$
$$u(x,0) = 2 - x + x^2 - 3cos4\pi x.$$

Oraliq nazorat savollari.

1. Xususiy xosilali differensial tenglamalar. Asosiy ta’riflar.
2. Birinchi tartibli kvazichizqli tenglamalar (Bir jinsli, bir jinsli bulmagan, umumiy yechim)
3. Ikkinchi tartibli ikki o‘zgaruvchili differensial tenglamalarni ta’rifi va kanonik shakliga keltirish (giperbolik tenglamalar).
4. Ikkinchi tartibli ikki o‘zgaruvchili differensial tenglamalarni ta’rifi va kanonik shakliga keltirish (elliptik tenglamalar).
5. Ikkinchi tartibli ikki o‘zgaruvchili differensial tenglamalarni ta’rifi va kanonik shakliga keltirish (parabolik tenglamalar).
6. Ikkinchi tarbibli xususiy xosilali tenglamalarning klassifikasiyasi (umumiy, kvazichiziqli, chizikli, bir jinsli, bir jinsli bulmagan tenglamalarning ta’riflari, tenglamalarning tiplari).
7. Tebranish tenglamalar uchun masalalarning qo‘yilishi (Ideal tor tebranish tenglamasi, elastik membrana tebranish tenglamasi, boshlang’ich shartlar, chegaraviy shartlar, birinchi chegaraviy masala, yarim to‘g’ri chiziq, Koshi masalasi).
8. Tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimining mafjudligi, yagonaligi va turg’unligi. Dalamber formulasi.
9. Ikkinchi tarbibli xususiy xosilali tenglamalarning xarakteristikasi (xarakteristik tenglama, xarakteristik uchburchak, Dalamber formulasi, issiqlikni o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun Koshi masalasi)
10. Tebranish tenglamasi uchun yarim to‘g’ri chizqdagi masala. Davom ettirish usuli. Birinchi chegaraviy masala (tebranish tenglamasi, Koshi masalasi, Dalamber formulasi).
11. Tebranish tenglamasi uchun yarim to‘g’ri chizqdagi masala. Davom ettirish usuli. Ikkinchi chegaraviy masala (tebranish tenglamasi, Koshi masalasi, Dalamber formulasi).
12. Tebranish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masala. Yechimini mavjudgini isbotlash uchun o‘zgaruvchilarni ajratish usuli.
13. Tebranish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masala. Mavjudlik teoremasi.
14. Energiya integrali. Tebranish tenglamasi uchun umumiy birinchi chegaraviy masalalarning yechimini mavjudligi.
15. Chiziqli bo‘lmagan giperbolik tenglama. Xarakteristikalarda berilgan ma’lumotlar masalasi. Integral tenglamalarning ekvivalent sistemasi (Gursa masalasi, chizikli bulmagan giperbolik tenglama)

16. Chiziqli bo‘lmagan giperbolik tenglama. Xarakteristikalarda berilgan ma’lumotlar masalasi yechimining mavjudligi.
17. Chiziqli bo‘lmagan giperbolik tenglama. Xarakteristikalarda berilgan ma’lumotlar masalasi yechimining yagonaligi.
18. Qo‘shma differensial operator (differensial operator, qo‘shma operator, o‘z-o‘ziga qo‘shma operator)
19. Chizikli algebrada berilgan qo‘shma operator va qo‘shma differensial operatorlarnin bog’lanishi.
20. Riman usuli.
21. Umumlashgan yechim. Limitga o‘tish ko‘rinishdagi umumlashgan yechim.
22. Umumlashgan yechim. Integral ayniyat manosida berilgan umumlashgan yechim.
23. Parabolik tipdagi tenglamalar. Fazoda issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining chiqarilishi.
24. Parabolik tipdagi tenglamalar. Bir fazoviy o‘zgaruvchili issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi. Asosiy masalalarning qo‘yilishi.
25. Parabolik tipdagi tenglamalar. Birinchi chegaraviy masala. Birinchi chegaraviy masalasi yechimining mavjudligi.
26. Parabolik tipdagi tenglamalar. O‘zgaruvchilarning ajratish usuli.
27. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun maksimal qiymat prinsipi.
28. Parabolik tipdagi tenglamalar. Birinchi chegaraviy masalasi yechimining yagonaligi.
29. Parabolik tipdagi tenglamalar. Birinchi chegaraviy masalasi yechimining turg’unligi.
30. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun umumiy chegaraviy masalani yechimining yagonaligi (bir jinsli bulmagan tenglama)
31. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun bir jinsli Koshi masalasi
32. Chegaralangan va uzluksiz boshlang’ich shartlar uchun Koshi masalaning yechimining mavjudligi (Bir jinsli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi) ($u(x,t)$ funksiya va uning xususiy xosilalari $\bar{\Pi}_{L,t_0,T}$. sohada uzluksiligini isbotlash.)
33. Chegaralangan va uzluksiz boshlang’ich shartlar uchun Koshi masalaning yechimining mavjudligi (Bir jinsli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi) ($\forall x_0 \in \mathbb{R} \lim_{\substack{t \to 0+ \\ x \to x_0}} u(x,t) = \phi(x_0).$)
34. Chegaralangan va uzluksiz boshlang’ich shartlar uchun Koshi masalaning yechimining mavjudligi (Bir jinsli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi) (teoremani keltirib natijalarni isbotlash)
35. Chegaralangan va uzluksiz boshlang’ich shartlar uchun Koshi masalaning yechimining yagonaligi
36. Yarim to‘g’ri chiziqdagi issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalani yechimining mavjudligi
37. Yarim to‘g’ri chiziqdagi issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun ikkinchi chegaraviy masalani yechimining mavjudligi
38. Birinchi chegaraviy masalasi uchun Grina funksiyasi. 1 va 2 xossalar
39. Birinchi chegaraviy masalasi uchun Grina funksiyasi. 3 va 4 xossalar
40. Laplas va Puasson tenglamalari. Garmonik funksiya

41. Chegaraviy masalalar qo‘yilishi. E^3 va E^2 fazolarda Dirixle va Neyman masalalari.
42. Laplas teglamasining fundamental yechimi
43. Birinchi va ikkinchi Grin formulalar.
44. Uchinchi Grin formulasi. Ikki ulchovli fazoda Grin formulalar.
45. Garmonik funksiyalarning xossalari 1 i 2 (o‘rta qymat hakidagi teorema) xossalar
46. Garmonik funksiyalar. Uchinchi xossa. Garmonik funksiyalar uchun ekstremum prinsipi
47. Dirixle ichki masalani yechimining yagonaligi.
48. Dirixle ichki masalani yechimining turg’unligini isbotlash uchun zarur bulgan Lemma
49. Dirixle ichki masalani yechimining turg’unligi
50. Fazoda Dirixle tashqi masalasi. Yagonalik teoremasi
51. Tekislikda Dirixle tashqi masalasi. Yagonalik teoremasi
52. Neyman ichki masalasi. Yechiluvchanlikning zaruriy sharti
53. Neyman ichki masalasi. Yechimning yagonaligi.
54. Laplas tenglamasi uchun Grin funksiyasi va uning xossalari. Dirixle ichki masalasi uchun Grin funksiyasi
55. Grin funksiyaning xossalari. 1. $G(M,P) > 0, \quad M,P \in \Omega,\ P \neq M.$
56. Grin funksiyaning xossalari. 2.

$$G(M,P) = G(P,M) \quad \forall M,P \in \Omega,\ M \neq P.$$

57. Oddiy va ikkilangan qatlam potensiali. Birlik zichklik bilan berilgan ikkilangan qatlam potensiali
58. Tekislikdagi ikkilangan qatlam

$$u(M) = -\int_L f(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\right)\,dl_P.$$

potensiali:

59. Tekis yaqinlashuvchi integralning ta’rifi va qo‘yidagi $\int_l F(P,M)\,dl_P$ integral uzluksuzligi haqidagi teorema
60. Potensial xossalari. ($u(M) - f(M_0)u_e(M)$ funksiya M_0- nuqtada usluksizligi haqidagi teorema)
61. Dirixle ichki masalani 2-chi tur Fredgolm integral tenglamaga keltirish.
62. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} - 2xu_x + 4yu_y + 16x^2u = 0.$
63. $tg^2xu_{xx} - 2ytgxu_{xy} + y^2u_{yy} + tg^3xu_x = 0.$
64. $u_{xx} - 2sinx \cdot u_{xy} - (3 + cos^2x)u_{yy} - cosx \cdot u_y = 0.$
65. $e^yu_{xy} - u_{yy} + u_y = 0.$
66. $u_{xx} + 2cosx \cdot u_{xy} - sin^2x \cdot u_{yy} - sinx \cdot u_y = 0.$
67. $4y^2u_{xx} + 2(1 - y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1+y^2}(2u_x - u_y) = 0.$
68. $U_{xy} - U_{yy} + 2U_x - U_y = 0.$

69. $3U_{xx}+U_{xy}+U_y=0.$

70. $U_{xx}-8U_{xy}+U_y-U_x=0.$

71. $U_{xx}-4U_{yy}+U_x=0.$

72. $U_{xx}-2U_{xy}+U_{yy}+U_y=0.$

73. $2U_{xx}+2U_{xy}+5U_{yy}=0.$

74. $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}-2yu_x=0.$

75. $(1+x^2)u_{xx}+(1+y^2)u_{yy}+xu_x+yu_y=0.$

76. $u_{xx}-(1+y^2)^2u_{yy}-2y(1+y^2)u_y=0.$

77. $y^2u_{xx}+2xyu_{xy}+x^2u_{yy}=0.$

78. $(1+x^2)^2u_{xx}+u_{yy}+2x(1+x^2)u_x=0.$

79. $3u_{xx}-4u_{xy}+u_{yy}-3u_x+u_y=0.$

80. $e^{-2x}u_{xx}-e^{-2y}u_{yy}-e^{-2x}u_x+e^{-2y}u_y+8e^y=0.$

81. $u_{xx}-2cosx\cdot u_{xy}-(3+sin^2x)u_{yy}+u_x+(sinx-cosx-2)u_y=0.$

82. $u_{xx}+2sinx\cdot u_{xy}-(cos^2x-sin^2x)u_{yy}+cosx\cdot u_y=0.$

83. $e^{2x}u_{xx}+2e^{x+y}u_{xy}+e^{2y}u_{yy}-xu=0.$

84. $u_{xx}-2sinx\cdot u_{xy}-cox^2x\cdot u_{yy}-cosx\cdot u_y=0.$

85. $u_{xx}-2xu_{xy}=0.$

86. $2u_{xx}-5u_{xy}+3u_{yy}-u_x+u_y+2x=0.$

87. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}-3u_x+12u_y=0.$

88. $5u_{xx}+16u_{xy}+16u_{yy}+24u_x+32u_y=0.$

89. $u_{xx}+4u_{xy}+5u_{yy}-2u_x-2u_y=0.$

90. $3u_{xx}+u_{xy}+3u_x+u_y+y=0.$

91. $u_{xx}+u_{xy}-u_y+4x=0.$

92. $u_{xx}-2u_{xy}+u_x+4e^y=0.$

93. $u_{xx}-6u_{xy}+8u_{yy}+u_x-2u_y+x=0.$

94. $u_{yy}-2u_{xy}+2u_x-u_y-4e^x=0.$

95. $3u_{xx}+10u_{xy}+3u_{yy}+u_x+u_y+2x+y=0.$

96. $3u_{xx}-10u_{xy}+3u_{yy}-2u_x+4u_y+2y=0.$

97. $2u_{xx}+6u_{xy}+4u_{yy}+u_x+u_y=0.$

98. $2u_{xy}-4u_{yy}+u_x-2u_y+x=0.$

99. $u_{xx}-6u_{xy}+9u_{yy}-u_x+2u_y=0.$

100. $u_{xx}-4u_{xy}+5u_{yy}-3u_x+u_y=0.$

101. $u_{xx}+4u_{xy}+13u_{yy}+3u_x+24u_y+9(x+y)=0.$

102. $u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y = 0.$

103. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 5u_y = 0.$

104. $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x + 4u_y = 0.$

105. $u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + 4u_y = 0.$

106. $u_{xx} + 2u_{xy} + 10u_{yy} - 24u_x + 42u_y + 2(x+y) = 0.$

107. $9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 10u_x - 15u_y + x - 2y = 0.$

108. $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0.$

109. $2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y = 0.$

110. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y = 0.$

111. $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u_y = 0.$

112. $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y - x^2 y = 0.$

113. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ \dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{5\pi}{2}, \\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = y\left(\dfrac{5\pi}{2}\right) = 0. \end{cases}$

114. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ bu tenglamani qo‘yidagi ko‘rinishga keltiring:

$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F_2(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}).$

115. $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

116. $4u_{xx} + 3u_{xy} - u_{yy} = 0,$

117. $36u_{xx} - 12u_{xy} + u_{yy} + 18u_x - 3u_y = 0$,

118. $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

119. $(1+x^2)\, u_{xx} + (1+y^2)\, u_{yy} + y u_y = 0\,;$

120. $x^2 u_{xx} - 2x u_{xy} + u_{yy} = 0\,;$

121. $y^2 u_{xx} + 2y u_{xy} + u_{yy} = 0\,;$

122. $4y^2 u_{xx} - e^{2x} u_{yy} = 0\,;$

123. $x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} = 0\,;$

124. $x u_{xx} - y u_{yy} = 0\,;$

125. $u_{xx} - y u_{yy} = 0\,;$

126. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + u_x = 0$

127. Chegaralangan va uzluksiz boshlang'ich shartlar uchun Koshi masalaning yechimining mavjudligi (Bir jinsli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi) ($u(x,t)$ funksiya va uning xususiy xosilalari $\bar{\Pi}_{L,t_0,T}$. sohada uzluksiligini isbotlash.)
128. Chegaralangan va uzluksiz boshlang'ich shartlar uchun Koshi masalaning yechimining mavjudligi (Bir jinsli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi) ($\forall x_0 \in \mathbb{R} \lim_{\substack{t \to 0+ \\ x \to x_0}} u(x,t) = \phi(x_0).$)
129. Chegaralangan va uzluksiz boshlang'ich shartlar uchun Koshi masalaning yechimining mavjudligi (Bir jinsli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi) (teoremani keltirib natijalarni isbotlash)
130. Chegaralangan va uzluksiz boshlang'ich shartlar uchun Koshi masalaning yechimining yagonaligi
131. Yarim to'g'ri chiziqdagi issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalani yechimining mavjudligi
132. Yarim to'g'ri chiziqdagi issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun ikkinchi chegaraviy masalani yechimining mavjudligi
133. Parabolik tipdagi tenglamalar. O'zgaruvchilarning ajratish usuli.
134. Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun maksimal qiymat prinsipi.
135. Parabolik tipdagi tenglamalar. Birinchi chegaraviy masalasi yechimining yagonaligi.
136. Parabolik tipdagi tenglamalar. Birinchi chegaraviy masalasi yechimining turg'unligi.
137. Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun umumiy chegaraviy masalani yechimining yagonaligi (bir jinsli bulmagan tenglama)
138. Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun bir jinsli Koshi masalasi.
139. Uchinchi Grin formulasi. Ikki ulchovli fazoda Grin formulalar.
140. Garmonik funksiyalarning xossalari 1 i 2 (o'rta qymat hakidagi teorema) xossalar
141. Garmonik funksiyalar. Uchinchi xossa. Garmonik funksiyalar uchun ekstremum prinsipi
142. Dirixle ichki masalani yechimining yagonaligi.
143. Dirixle ichki masalani yechimining turg'unligini isbotlash uchun zarur bulgan Lemma
144. Dirixle ichki masalani yechimining turg'unligi
145. Birinchi chegaraviy masalasi uchun Grina funksiyasi. 1 va 2 xossalar
146. Birinchi chegaraviy masalasi uchun Grina funksiyasi. 3 va 4 xossalar
147. Laplas va Puasson tenglamalari. Garmonik funksiya
148. Chegaraviy masalalar qo'yilishi. E^3 va E^2 fazolarda Dirixle va Neyman masalalari.
149. Laplas teglamasining fundamental yechimi
150. Birinchi va ikkinchi Grin formulalar.
151. Grin funksiyaning xossalari.
   2. $G(M,P) = G(P,M) \quad \forall M, P \in \Omega, \ M \neq P.$
152. Oddiy va ikkilangan qatlam potensiali. Birlik zichklik bilan berilgan ikkilangan qatlam potensiali

153. Tekislikdagi ikkilangan qatlam potensiali: $$u(M) = -\int_L f(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\right)\,dl_P.$$

154. Tekis yaqinlashuvchi integralning ta'rifi va qo'yidagi $\int_l F(P,M)\,dl_P$ integral uzluksuzligi haqidagi teorema

155. Potensial xossalari. ($u(M) - f(M_0)u_e(M)$ funksiya M_0- nuqtada usluksizligi haqidagi teorema)

156. Dirixle ichki masalani 2-chi tur Fredgolm integral tenglamaga keltirish

157. Fazoda Dirixle tashqi masalasi. Yagonalik teoremasi

158. Tekislikda Dirixle tashqi masalasi. Yagonalik teoremasi

159. Neyman ichki masalasi. Yechiluvchanlikning zaruriy sharti.

160. Neyman ichki masalasi. Yechimning yagonaligi

161. Laplas tenglamasi uchun Grin funksiyasi va uning xossalari. Dirixle ichki masalasi uchun Grin funksiyasi

162. Grin funksiyaning xossalari. $G(M,P) > 0, \quad M, P \in \Omega,\ P \neq M.$

163. Ikkinchi tartibli ikki o'zgaruvchili differensial tenglamalarni ta'rifi va kanonik shakliga keltirish (parabolik tenglamalar).

164. Ikkinchi tarbibli xususiy xosilali tenglamalarning klassifikasiyasi (umumiy, kvazichiziqli, chizikli, bir jinsli, bir jinsli bulmagan tenglamalarning ta'riflari, tenglamalarning tiplari).

165. Tebranish tenglamalar uchun masalalarning qo'yilishi (Ideal tor tebranish tenglamasi, elastik membrana tebranish tenglamasi, boshlang'ich shartlar, chegaraviy shartlar, birinchi chegaraviy masala, yarim to'g'ri chiziq, Koshi masalasi).

166. Tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimining mafjudligi, yagonaligi va turg'unligi. Dalamber formulasi.

167. Xususiy xosilali differensial tenglamalar. Asosiy ta'riflar.

168. Birinchi tartibli kvazichizqli tenglamalar (Bir jinsli, bir jinsli bulmagan, umumiy yechim)

169. Ikkinchi tartibli ikki o'zgaruvchili differensial tenglamalarni ta'rifi va kanonik shakliga keltirish (giperbolik tenglamalar).

170. Ikkinchi tartibli ikki o'zgaruvchili differensial tenglamalarni ta'rifi va kanonik shakliga keltirish (elliptik tenglamalar).

171. Ikkinchi tarbibli xususiy xosilali tenglamalarning xarakteristikasi (xarakteristik tenglama, xarakteristik uchburchak, Dalamber formulasi, issiqlikni o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun Koshi masalasi)

172. Tebranish tenglamasi uchun yarim to'g'ri chizqdagi masala. Davom ettirish usuli.

173. Birinchi chegaraviy masala (tebranish tenglamasi, Koshi masalasi, Dalamber formulasi).

174. Tebranish tenglamasi uchun yarim to'g'ri chizqdagi masala. Davom ettirish usuli.

175. Ikkinchi chegaraviy masala (tebranish tenglamasi, Koshi masalasi, Dalamber formulasi).

176. Tebranish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masala. Yechimini mavjudgini isbotlash uchun o‘zgaruvchilarni ajratish usuli.
177. Tebranish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masala. Mavjudlik teoremasi.
178. Energiya integrali. Tebranish tenglamasi uchun umumiy birinchi chegaraviy masalalarning yechimini mavjudligi.
179. Chiziqli bo‘lmagan giperbolik tenglama. Xarakteristikalarda berilgan ma’lumotlar masalasi. Integral tenglamalarning ekvivalent sistemasi (Gursa masalasi, chizikli bulmagan giperbolik tenglama)
180. Chiziqli bo‘lmagan giperbolik tenglama. Xarakteristikalarda berilgan ma’lumotlar masalasi yechimining mavjudligi.
181. Chiziqli bo‘lmagan giperbolik tenglama. Xarakteristikalarda berilgan ma’lumotlar masalasi yechimining yagonaligi.
182. Qo‘shma differensial operator (differensial operator, qo‘shma operator, o‘z-o‘ziga qo‘shma operator)
183. Chizikli algebrada berilgan qo‘shma operator va qo‘shma differensial operatorlarnin bog’lanishi.
184. Umumlashgan yechim. Limitga o‘tish ko‘rinishdagi umumlashgan yechim.
185. Umumlashgan yechim. Integral ayniyat manosida berilgan umumlashgan yechim.
186. Parabolik tipdagi tenglamalar. Fazoda issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining chiqarilishi.
187. Parabolik tipdagi tenglamalar. Bir fazoviy o‘zgaruvchili issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi. Asosiy masalalarning qo‘yilishi.
188. Parabolik tipdagi tenglamalar. Birinchi chegaraviy masala. Birinchi chegaraviy masalasi yechimining mavjudligi.
189. Dirixle ichki masalani yechimining turg’unligi
190. Neyman ichki masalasi. Yechimning yagonaligi
191. Oddiy va ikkilangan qatlam potensiali. Birlik zichklik bilan berilgan ikkilangan qatlam potensiali
192. Neyman ichki masalasi. Yechimning yagonaligi
193. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u + 2\cos^2 x\,, \\ u_x|_{x=0} = 0\,, \\ u_x|_{x=\pi} = 0\,, \\ u|_{t=0} = 0\,; \end{cases}$$
194. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u + \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) e^{-t} \\ u_x|_{x=0} = 0\,, \\ u|_{x=\pi/2} = 0\,, \\ u|_{t=0} = 0\,; \end{cases}$$
195. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + \cos t\,, \\ u_x|_{x=0} = 0\,, \\ u_x|_{x=\pi/2} = 0\,, \\ u|_{t=0} = \cos 2x\,; \end{cases}$$

196. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + \sin x\,, \\ u_x\big|_{x=0} = 0\,, \\ u_x\big|_{x=\pi} = 0\,, \\ u\big|_{t=0} = \cos x\,. \end{cases}$$

197. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}\,, \\ u\big|_{x=0} = 0\,, \\ u\big|_{x=1} = 0\,, \\ u\big|_{t=0} = x^2 - x\,, \\ u_t\big|_{t=0} = 0\,; \end{cases}$$

198. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 4u + 4\sin^2 x\,, \\ u_x\big|_{x=0} = 0\,, \\ u_x\big|_{x=\pi/2} = 0\,, \\ u\big|_{t=0} = 0\,, \\ u_t\big|_{t=0} = 0\,; \end{cases}$$

199. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x - \pi\,, \\ u_x\big|_{x=0} = 0\,, \\ u\big|_{x=\pi} = 0\,, \\ u\big|_{t=0} = \cos\dfrac{x}{2}\,, \\ u_t\big|_{t=0} = 0\,; \end{cases}$$

200. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 3u + 4\sin x \sin 2t\,, \\ u\big|_{x=0} = 0\,, \\ u_x\big|_{x=\pi/2} = 0\,, \\ u\big|_{t=0} = 0\,, \\ u_t\big|_{t=0} = \sin 3x\,. \end{cases}$$

201. bir jinsli chegaraviy щartlarga keltiring

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - u + t\left(x^2 - 2\right) + \sin x\,, \quad 0 < x < \pi\,, \ \ 0 < t < \infty\,, \\ u_x\big|_{x=0} = 0\,, \\ u_x\big|_{x=\pi} = 2\pi t\,, \\ u\big|_{t=0} = \cos x\,, \\ u_t\big|_{t=0} = \sin x + x^2\,. \end{cases}$$

202. $$\begin{cases} u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 4x + 8\,e^t \cos x \\ u_x\big|_{x=0} = 2t\,, \\ u\big|_{x=\pi/2} = \pi t\,, \\ u\big|_{t=0} = \cos x\,, \\ u_t\big|_{t=0} = 2x\,; \end{cases}$$

203. $$\begin{cases} u_{tt} + u_t = u_{xx}\,, \\ u\big|_{x=0} = t\,, \\ u\big|_{x=1} = 0\,, \\ u\big|_{t=0} = 0\,, \\ u_t\big|_{t=0} = 1 - x\,; \end{cases}$$

204.
$$\begin{cases} u_{tt} - 2u_t = u_{xx} + 4t\,(\sin x - x) \\ u|_{x=0} = 3\,, \\ u_x|_{x=\pi/2} = t^2 + t\,, \\ u|_{t=0} = 3\,, \\ u_t|_{t=0} = x + \sin x\,; \end{cases}$$

205.
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u\,, \\ u|_{x=0} = 0\,, \\ u|_{x=\pi} = t\,, \\ u|_{t=0} = 0\,, \\ u_t|_{t=0} = \dfrac{x}{\pi}\,. \end{cases}$$

206.
$$u_{tt} = 4u_{xx} + 3t\sin\Big(\frac{7\pi x}{2l}\Big), \quad (0 < x < l)$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 2\sin\Big(\frac{\pi x}{2l}\Big) + 7\sin\Big(\frac{5\pi x}{2l}\Big).$$

207.
$$u_{tt} = 16u_{xx} + xt, \quad (0 < x < 2)$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=2} = 0,$$
$$u|_{t=0} = \sin(\pi x) + 2\sin\Big(\frac{5\pi x}{2}\Big), \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

208.
$$u_{tt} = 25u_{xx} + \cos(17x)\operatorname{ch}(3t), \quad \big(0 < x < \frac{\pi}{2}\big)$$
$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi/2} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \cos(x) + 4\cos(9x).$$

209.
$$u_{tt} = a^2u_{xx} + 2e^{3t}\sin\Big(\frac{5\pi x}{4}\Big), \quad (0 < x < 2)$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=2} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = v_0, \ (v_0 = const).$$

210.
$$u_{tt} = 9u_{xx} + A\cos\Big(\frac{5\pi x}{2l}\Big)\sin(2t), \quad (0 < x < l\ , A = const)$$
$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 3\cos\Big(\frac{\pi x}{2l}\Big).$$

211.
$$u_{tt} = 49u_{xx} + B, \quad (0 < x < \pi\ , B = const)$$
$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 2\cos(40x), \quad u_t|_{t=0} = \cos(40x) + 6\cos(50x).$$

212.
$$u_{tt} = 4u_{xx} + t\sin(3x), \quad (0 < x < \pi)$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0,$$
$$u|_{t=0} = \begin{cases} \frac{hx}{c}, & x \in [0, c] \\ \frac{h(\pi - x)}{\pi - c}, & x \in [c, \pi] \end{cases}, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$
$$(h = const, c = const, 0 < c < \pi)$$

213.
$$u_{tt} = u_{xx} + 5\cos(4x)e^{4t}, \quad (0 < x < \pi)$$
$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 2\cos(3x) + 4\cos(10x).$$

214.
$$u_{tt} = u_{xx} + u, \quad (0 < x < 2)$$
$$u|_{x=0} = 2t, \quad u|_{x=2} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

215.
$$u_{tt} = u_{xx}, \quad (0 < x < 1)$$
$$u|_{x=0} = t + 1, \quad u|_{x=1} = t^3 + 2,$$
$$u|_{t=0} = x + 1, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

216.
$$u_{tt} = u_{xx} + 4u + 2\sin^2(x), \quad (0 < x < \pi)$$
$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

217.
$$u_{tt} = u_{xx} + Ae^{-t}\sin(\frac{\pi x}{l}), \quad (0 < x < l)$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \sin(\frac{3\pi x}{l}).$$

218.
$$u_{tt} = u_{xx}, \quad (0 < x < \pi)$$
$$u|_{x=0} = t, \quad u|_{x=\pi} = 0,$$
$$u|_{t=0} = \sin(x)\cos(x), \quad u_t|_{t=0} = 1.$$

219.
$$u_{tt} = u_{xx}, \quad (0 < x < l)$$
$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = e^{-t},$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

220.
$$u_t = a^2 u_{xx}, \ (0 < x < l)$$
$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,$$
$$u|_{t=0} = x(l - x).$$

221.
$$u_t = u_{xx} + 3\sin(2x), \ (0 < x < \pi)$$
$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 10\sin(x) + \sin(7x).$$

222. $4) U_{tt} = a^2 U_{xx} + t\sin\frac{\pi x}{2}, a = 5, U(0, x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0, x) = 0,$

$U(t,0) = U(t,l) = 0$

223. $U_{tt} = a^2 U_{xx,} a = 3, U(0, x) = x\sin(l - x), \frac{\partial y}{\partial t}(0, x) = 0,$

$U(t,0) = U(t,l) = 0$

224. $4) U_{tt} = a^2 U_{xx} + (t + 5)x, a = 3, U(0, x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0, x) = 0,$

$U(t,0) = U(t,l) = 0$

225. $U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 2, U(0, x) = (l - x)\sin\frac{\pi x}{l}, \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0$

$U(t,0) = U(t,l) = 0.$

226. $U_{tt} = a^2 U_{xx,} a = 3, U(0, x) = x\sin(l - x), \frac{\partial y}{\partial t}(0, x) = 0,$

$U(t,0) = U(t,l) = 0$

227. $4) U_{tt} = a^2 U_{xx} + (t+5)x, a = 3, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0,$
$U(t,0) = U(t,l) = 0$

228. $U_{tt} = a^2 U_{xx} + (t^2 - 1)x, a = 1, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, U(t,0) = U(t,l) = 0$

229. $U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 4, U(0,x) = 2(l - x)\sin x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0$

230. $U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 10, U(0,x) = 10x, U(t,0) = U(t,l) = 0, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0.$

231. $U_{tt} = a^2 U_{xx} + 10(t-1)\cos 2x, a = 1, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0$

232. $U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 1,5, U(0,x) = 2(x+3), \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \sin x,$
$U(t,0) = U(t,l) = 1.$

233. $U_{tt} = a^2 U_{xx} + tx^2, a = 2, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0$

234. $U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 2, U(0,x) = \cos 2x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = x,$
$U(t,0) = U(t,l) = t.$

235. $U_{tt} = a^2 U_{xx} + t^2 x, a = 3, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0$

236. $U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 3, U(0,x) = x^2, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \frac{1}{x},$
$U(t,0) = U(t,l) = 0.$

237. $U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 1, U(0,x) = \frac{x}{2}, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0,$

238. $U_{tt} = a^2 U_{xx} + t^2 x^2, a = 3,5,\ U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0$

239. $U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 2,\ U(0,x) = 2\cos 2,5x,\ \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0$

240. $U_{tt} = a^2 U_{xx} + t, a = 1,5, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

241. $U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 1.5, U(0,x) = x\sin\frac{\pi x}{l}, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

242. $U_{tt} = a^2 U_{xx} + (t^2 + 1)\sin 2x, a = 1, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0$

243. $U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 3, U(0,x) = 2\left(l - x\right)\sin x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0$

244. $U_{tt} = a^2 U_{xx} + 2x\cos t, a = 1,5, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

245. $U_{tt}=a^2U_{xx}, a=2.5,\ U(0,x)=x\cos\frac{\pi x}{2l}, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=0,$
$U(t,0)=U(t,l)=0.$

246. $U_{tt}=a^2U_{xx}+(x+2)\sin t, a=2, l=\pi,$
$U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

247. $U_{tt}=a^2U_{xx}, a=3, U(0,x)=x+2, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0$

248. $U_{tt}=a^2U_{xx}+t^2x, a=2, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

249. $U_{tt}=a^2U_{xx}, a=3, U(0,x)=e^x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

250. $U_{tt}=a^2U_{xx}+\sin t, a=1{,}5, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=\pi$

251. $U_{tt}=a^2U_{xx}, a=2, U(0,x)=e^{x+1}, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=1, U(t,0)=U(t,l)=0.$

252. $U_{tt}=a^2U_{xx}+(x+4)\cos 3t, a=1, l=\frac{\pi}{2}, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0$

253. $U_{tt}=a^2U_{xx}, a=2, U(0,x)=x^2, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=\pi$

254. $U_{tt}=a^2U_{xx}+t^2, a=1, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

255. $U_{tt}=a^2U_{xx}+x\sin 2t, a=1, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0, l=1.$

256. $U_{tt}=a^2U_{xx}, a=1{,}5$
$U(0,x)=x(l-x), \frac{\partial U(0,x)}{\partial t}=0, U(t,0)=U(t,l)=0.$

Mexanika – matematika fakulteti amaliy matematika va informatika bo'limi 3-kurs talabalari uchun Xususiy hosilali tenglamalar fanidan oraliq nazorat ishi namunaviy variantlari

Variant 1

1. Xususiy xosilali differensial tenglamalar. Asosiy ta'riflar.
2. Chegaralangan va uzluksiz boshlang'ich shartlar uchun Koshi masalaning yechimining mavjudligi (Bir jinsli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi) ($u(x,t)$ funksiya va uning xususiy xosilalari $\bar{\Pi}_{L,t_0,T}$ sohada uzluksiligini isbotlash.)
3. $$x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} - 2xu_x + 4yu_y + 16x^2u = 0.$$
4. $$\begin{cases} u_t = u_{xx}\,, \\ u|_{x=0} = 0\,, \\ u|_{x=\pi} = 0\,, \\ u|_{t=0} = \pi x - x^2\,; \end{cases}$$

Variant 2

1. Birinchi tartibli kvazichizqli tenglamalar (Bir jinsli, bir jinsli bulmagan, umumiy yechim)
1. Chegaralangan va uzluksiz boshlang'ich shartlar uchun Koshi masalaning yechimining mavjudligi (Bir jinsli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi) ($\forall x_0 \in \mathbb{R} \lim\limits_{\substack{t\to 0+\\ x\to x_0}} u(x,t) = \phi(x_0).$)
2. $$tg^2xu_{xx} - 2ytgxu_{xy} + y^2u_{yy} + tg^3xu_x = 0.$$
3. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u + 2\cos^2 x\,, \\ u_x|_{x=0} = 0\,, \\ u_x|_{x=\pi} = 0\,, \\ u|_{t=0} = 0\,; \end{cases}$$

Variant 3

1. Ikkinchi tartibli ikki o'zgaruvchili differensial tenglamalarni ta'rifi va kanonik shakliga keltirish (giperbolik tenglamalar).
2. Chegaralangan va uzluksiz boshlang'ich shartlar uchun Koshi masalaning yechimining mavjudligi (Bir jinsli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi) (teoremani keltirib natijalarni isbotlash)
3. $$u_{xx} - 2sinx \cdot u_{xy} - (3 + cos^2x)u_{yy} - cosx \cdot u_y = 0.$$
4. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u + \left(x - \frac{\pi}{2}\right) e^{-t} \\ u_x|_{x=0} = 0\,, \\ u|_{x=\pi/2} = 0\,, \\ u|_{t=0} = 0\,; \end{cases}$$

Variant 4

1. Ikkinchi tartibli ikki o'zgaruvchili differensial tenglamalarni ta'rifi va kanonik shakliga keltirish (elliptik tenglamalar).

2. Chegaralangan va uzluksiz boshlang'ich shartlar uchun Koshi masalaning yechimining yagonaligi
3. $e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0.$
4. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + \cos t\,, \\ u_x|_{x=0} = 0\,, \\ u_x|_{x=\pi/2} = 0\,, \\ u|_{t=0} = \cos 2x\,; \end{cases}$

Variant 5

1. Ikkinchi tartibli ikki o'zgaruvchili differensial tenglamalarni ta'rifi va kanonik shakliga keltirish (parabolik tenglamalar).
2. Yarim to'g'ri chiziqdagi issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalani yechimining mavjudligi
3. $u_{xx} + 2cosx \cdot u_{xy} - sin^2x \cdot u_{yy} - sinx \cdot u_y = 0.$
4. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + \sin x\,, \\ u_x|_{x=0} = 0\,, \\ u_x|_{x=\pi} = 0\,, \\ u|_{t=0} = \cos x\,. \end{cases}$

Variant 6

1. Ikkinchi tarbibli xususiy xosilali tenglamalarning klassifikasiyasi (umumiy, kvazichiziqli, chizikli, bir jinsli, bir jinsli bulmagan tenglamalarning ta'riflari, tenglamalarning tiplari).
2. Yarim to'g'ri chiziqdagi issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun ikkinchi chegaraviy masalani yechimining mavjudligi
3. $4y^2u_{xx} + 2(1-y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1+y^2}(2u_x - u_y) = 0.$
4. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}\,, \\ u|_{x=0} = 0\,, \\ u|_{x=1} = 0\,, \\ u|_{t=0} = x^2 - x\,, \\ u_t|_{t=0} = 0\,; \end{cases}$

Variant 7

1. Tebranish tenglamalar uchun masalalarning qo'yilishi (Ideal tor tebranish tenglamasi, elastik membrana tebranish tenglamasi, boshlang'ich shartlar, chegaraviy shartlar, birinchi chegaraviy masala, yarim to'g'ri chiziq, Koshi masalasi).
2. Parabolik tipdagi tenglamalar. O'zgaruvchilarning ajratish usuli.
3. $U_{xy} - U_{yy} + 2U_x - U_y = 0.$

4. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 4u + 4\sin^2 x\,, \\ u_x|_{x=0} = 0\,, \\ u_x|_{x=\pi/2} = 0\,, \\ u|_{t=0} = 0\,, \\ u_t|_{t=0} = 0\,; \end{cases}$$

Variant 8

1. Tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimining mafjudligi, yagonaligi va turg'unligi. Dalamber formulasi.
2. Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun maksimal qiymat prinsipi.
3. $3U_{xx} + U_{xy} + U_y = 0.$
4. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x - \pi\,, \\ u_x|_{x=0} = 0\,, \\ u|_{x=\pi} = 0\,, \\ u|_{t=0} = \cos\dfrac{x}{2}\,, \\ u_t|_{t=0} = 0\,; \end{cases}$$

Variant 9

1. Ikkinchi tarbibli xususiy xosilali tenglamalarning xarakteristikasi (xarakteristik tenglama, xarakteristik uchburchak, Dalamber formulasi, issiqlikni o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun Koshi masalasi)
2. Parabolik tipdagi tenglamalar. Birinchi chegaraviy masalasi yechimining yagonaligi.
3. $U_{xx} - 8U_{xy} + U_y - U_x = 0.$
4. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 3u + 4\sin x \sin 2t\,, \\ u|_{x=0} = 0\,, \\ u_x|_{x=\pi/2} = 0\,, \\ u|_{t=0} = 0\,, \\ u_t|_{t=0} = \sin 3x\,. \end{cases}$$

Variant 10

1. Tebranish tenglamasi uchun yarim to'g'ri chizqdagi masala. Davom ettirish usuli. Birinchi chegaraviy masala (tebranish tenglamasi, Koshi masalasi, Dalamber formulasi).
2. Parabolik tipdagi tenglamalar. Birinchi chegaraviy masalasi yechimining turg'unligi.
3. $U_{xx} - 4U_{yy} + U_x = 0.$
4. bir jinsli chegaraviy щartlarga keltiring

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - u + t\left(x^2 - 2\right) + \sin x\,, \quad 0 < x < \pi\,, \; 0 < t < \infty\,, \\ u_x|_{x=0} = 0\,, \\ u_x|_{x=\pi} = 2\pi t\,, \\ u|_{t=0} = \cos x\,, \\ u_t|_{t=0} = \sin x + x^2\,. \end{cases}$$

Variant 11

1. Tebranish tenglamasi uchun yarim to‘g’ri chizqdagi masala. Davom ettirish usuli. Ikkinchi chegaraviy masala (tebranish tenglamasi, Koshi masalasi, Dalamber formulasi).
2. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun umumiy chegaraviy masalani yechimining yagonaligi (bir jinsli bulmagan tenglama)
3. $U_{xx} - 2U_{xy} + U_{yy} + U_y = 0.$
4. $$\begin{cases} u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 4x + 8\,e^t \cos x \\ u_x\big|_{x=0} = 2t\,, \\ u\big|_{x=\pi/2} = \pi t\,, \\ u\big|_{t=0} = \cos x\,, \\ u_t\big|_{t=0} = 2x\,; \end{cases}$$

Variant 12

1. Tebranish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masala. Yechimini mavjudgini isbotlash uchun o‘zgaruvchilarni ajratish usuli.
2. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun bir jinsli Koshi masalasi
3. $2U_{xx} + 2U_{xy} + 5U_{yy} = 0.$
4. $$\begin{cases} u_{tt} + u_t = u_{xx}\,, \\ u\big|_{x=0} = t\,, \\ u\big|_{x=1} = 0\,, \\ u\big|_{t=0} = 0\,, \\ u_t\big|_{t=0} = 1 - x\,; \end{cases}$$

Variant 13

1. Tebranish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masala. Mavjudlik teoremasi.
2. Uchinchi Grin formulasi. Ikki ulchovli fazoda Grin formulalar.
3. $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} - 2yu_x = 0.$
4. $$\begin{cases} u_{tt} - 2u_t = u_{xx} + 4t\,(\sin x - x) \\ u\big|_{x=0} = 3\,, \\ u_x\big|_{x=\pi/2} = t^2 + t\,, \\ u\big|_{t=0} = 3\,, \\ u_t\big|_{t=0} = x + \sin x\,; \end{cases}$$

Variant 14

1. Energiya integrali. Tebranish tenglamasi uchun umumiy birinchi chegaraviy masalalarning yechimini mavjudligi.
2. Garmonik funksiyalarning xossalari 1 i 2 (o‘rta qymat hakidagi teorema) xossalar
3. $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0.$
4. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u\,, \\ u\big|_{x=0} = 0\,, \\ u\big|_{x=\pi} = t\,, \\ u\big|_{t=0} = 0\,, \\ u_t\big|_{t=0} = \dfrac{x}{\pi}\,. \end{cases}$$

Variant 15

1. Chiziqli bo‘lmagan giperbolik tenglama. Xarakteristikalarda berilgan ma’lumotlar masalasi. Integral tenglamalarning ekvivalent sistemasi (Gursa masalasi, chizikli bulmagan giperbolik tenglama)
2. Garmonik funksiyalar. Uchinchi xossa. Garmonik funksiyalar uchun ekstremum prinsipi
3. $u_{xx} - (1+y^2)^2 u_{yy} - 2y(1+y^2)u_y = 0.$
4. $$u_{tt} = 4u_{xx} + 3t\sin\left(\frac{7\pi x}{2l}\right), \quad (0 < x < l)$$ $$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0,$$ $$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 2\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) + 7\sin\left(\frac{5\pi x}{2l}\right).$$

Variant 16

1. Chiziqli bo‘lmagan giperbolik tenglama. Xarakteristikalarda berilgan ma’lumotlar masalasi yechimining mavjudligi.
2. Dirixle ichki masalani yechimining yagonaligi.
3. $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2 u_{yy} = 0.$
4. $$u_{tt} = 16u_{xx} + xt, \quad (0 < x < 2)$$ $$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=2} = 0,$$ $$u|_{t=0} = \sin(\pi x) + 2\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right), \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

Variant 17

1. Chiziqli bo‘lmagan giperbolik tenglama. Xarakteristikalarda berilgan ma’lumotlar masalasi yechimining yagonaligi.
2. Dirixle ichki masalani yechimining turg’unligini isbotlash uchun zarur bulgan Lemma
3. $(1+x^2)^2 u_{xx} + u_{yy} + 2x(1+x^2)u_x = 0.$
4. $$u_{tt} = 25u_{xx} + \cos(17x)\operatorname{ch}(3t), \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$ $$u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi/2} = 0,$$ $$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \cos(x) + 4\cos(9x).$$

Variant 18

1. Qo‘shma differensial operator (differensial operator, qo‘shma operator, o‘z-o‘ziga qo‘shma operator)
2. Dirixle ichki masalani yechimining turg’unligi
3. $3u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + u_y = 0.$
4. $$u_{tt} = a^2 u_{xx} + 2e^{3t}\sin\left(\frac{5\pi x}{4}\right), \quad (0 < x < 2)$$ $$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=2} = 0,$$ $$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = v_0, \quad (v_0 = const).$$

Variant 19

1. Chizikli algebrada berilgan qo‘shma operator va qo‘shma differensial operatorlarnin bog’lanishi.
2. Birinchi chegaraviy masalasi uchun Grina funksiyasi. 1 va 2 xossalar
3. $e^{-2x}u_{xx} - e^{-2y}u_{yy} - e^{-2x}u_x + e^{-2y}u_y + 8e^y = 0.$

$$u_{tt} = 9u_{xx} + A\cos\left(\frac{5\pi x}{2l}\right)\sin(2t), \quad (0 < x < l\ , A = const)$$
$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0,$$
4. $$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 3\cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right).$$

Variant 20

1. Riman usuli.
2. Birinchi chegaraviy masalasi uchun Grina funksiyasi. 3 va 4 xossalar
3. $$u_{xx} - 2cosx \cdot u_{xy} - (3 + sin^2 x)u_{yy} + u_x + (sinx - cosx - 2)u_y = 0.$$
4. $$u_{tt} = 49u_{xx} + B, \quad (0 < x < \pi\ , B = const)$$
$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 2\cos(40x), \quad u_t|_{t=0} = \cos(40x) + 6\cos(50x).$$

Variant 21

1. Umumlashgan yechim. Limitga o‘tish ko‘rinishdagi umumlashgan yechim.
2. Laplas va Puasson tenglamalari. Garmonik funksiya
3. $$u_{xx} + 2sinx \cdot u_{xy} - (cos^2 x - sin^2 x)u_{yy} + cosx \cdot u_y = 0.$$
4. $$u_{tt} = 4u_{xx} + t\sin(3x), \quad (0 < x < \pi)$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0,$$
$$u|_{t=0} = \begin{cases} \frac{hx}{c}, & x \in [0, c] \\ \frac{h(\pi - x)}{\pi - c}, & x \in [c, \pi] \end{cases}, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$
$$(h = const, c = const, 0 < c < \pi)$$

Variant 22

1. Umumlashgan yechim. Integral ayniyat manosida berilgan umumlashgan yechim.
2. Chegaraviy masalalar qo‘yilishi. E^3 va E^2 fazolarda Dirixle va Neyman masalalari.
3. $$e^{2x}u_{xx} + 2e^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} - xu = 0.$$
4. $$u_{tt} = u_{xx} + 5\cos(4x)e^{4t}, \quad (0 < x < \pi)$$
$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 2\cos(3x) + 4\cos(10x).$$

Variant 23

1. Parabolik tipdagi tenglamalar. Fazoda issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining chiqarilishi.
2. Laplas teglamasining fundamental yechimi
3. $$u_{xx} - 2sinx \cdot u_{xy} - cox^2 x \cdot u_{yy} - cosx \cdot u_y = 0.$$
4. $$u_{tt} = u_{xx} + u, \quad (0 < x < 2)$$
$$u|_{x=0} = 2t, \quad u|_{x=2} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

Variant 24

1. Parabolik tipdagi tenglamalar. Bir fazoviy o‘zgaruvchili issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi. Asosiy masalalarning qo‘yilishi.
2. Birinchi va ikkinchi Grin formulalar.
3. $u_{xx} - 2xu_{xy} = 0.$
4. $$u_{tt} = u_{xx}, \quad (0 < x < 1)$$ $$u|_{x=0} = t + 1, \quad u|_{x=1} = t^3 + 2,$$ $$u|_{t=0} = x + 1, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

Variant 25

1. Parabolik tipdagi tenglamalar. Birinchi chegaraviy masala. Birinchi chegaraviy masalasi yechimining mavjudligi.
2. Grin funksiyaning xossalari. 2.

$$G(M,P) = G(P,M) \quad \forall M, P \in \Omega, \ M \neq P.$$

3. $2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} - u_x + u_y + 2x = 0.$
4. $$u_{tt} = u_{xx} + 4u + 2\sin^2(x), \quad (0 < x < \pi)$$ $$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 0,$$ $$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

Mexanika – matematika fakulteti amaliy matematika va informatika

Variant 26

1. Parabolik tipdagi tenglamalar. O‘zgaruvchilarning ajratish usuli.
2. Oddiy va ikkilangan qatlam potensiali. Birlik zichklik bilan berilgan ikkilangan qatlam potensiali
3. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + 12u_y = 0.$
4. $$u_{tt} = u_{xx} + Ae^{-t}\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad (0 < x < l)$$ $$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0,$$ $$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right).$$

Variant 27

1. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun maksimal qiymat prinsipi.
2. Tekislikdagi ikkilangan qatlam potensiali:

$$u(M) = -\int_L f(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\right)\, dl_P.$$

3. $5u_{xx} + 16u_{xy} + 16u_{yy} + 24u_x + 32u_y = 0.$
4. $$u_{tt} = u_{xx}, \quad (0 < x < \pi)$$ $$u|_{x=0} = t, \quad u|_{x=\pi} = 0,$$ $$u|_{t=0} = \sin(x)\cos(x), \quad u_t|_{t=0} = 1.$$

Variant 28

1. Parabolik tipdagi tenglamalar. Birinchi chegaraviy masalasi yechimining yagonaligi.

2. Tekis yaqinlashuvchi integralning ta’rifi va qo‘yidagi $\int_l F(P,M)\,dl_P$ integral uzluksuzligi haqidagi teorema

3. $u_{xx}+4u_{xy}+5u_{yy}-2u_x-2u_y=0.$

4. $$u_{tt}=u_{xx},\quad (0<x<l)$$ $$u_x|_{x=0}=0,\quad u_x|_{x=l}=e^{-t},$$ $$u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=0.$$

Variant 29

1. Parabolik tipdagi tenglamalar. Birinchi chegaraviy masalasi yechimining
2. turg’unligi.
3. Potensial xossalari. ($u(M)-f(M_0)u_e(M)$ funksiya M_0. nuqtada usluksizligi haqidagi teorema)
4. $3u_{xx}+u_{xy}+3u_x+u_y+y=0.$

$$u_t=a^2u_{xx},\ (0<x<l)$$ $$u|_{x=0}=u|_{x=l}=0,$$ $$u|_{t=0}=x(l-x).$$

Variant 30

1. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun umumiy chegaraviy masalani yechimining yagonaligi (bir jinsli bulmagan tenglama)
2. Dirixle ichki masalani 2-chi tur Fredgolm integral tenglamaga keltirish
3. $u_{xx}+u_{xy}-u_y+4x=0.$
4. $$u_t=u_{xx}+3\sin(2x),\ (0<x<\pi)$$ $$u|_{x=0}=u|_{x=\pi}=0,$$ $$u|_{t=0}=10\sin(x)+\sin(7x).$$

Variant 31

1. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun bir jinsli Koshi masalasi
2. Fazoda Dirixle tashqi masalasi. Yagonalik teoremasi
3. $u_{xx}-2u_{xy}+u_x+4e^y=0.$
4. $4)U_{tt}=a^2U_{xx}+t\sin\dfrac{\pi x}{2}, a=5, U(0,x)=\dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x)=0,$

$U(t,0)=U(t,l)=0$

Variant 32

1. Chegaralangan va uzluksiz boshlang’ich shartlar uchun Koshi masalaning yechimining mavjudligi (Bir jinsli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi) ($u(x,t)$ funksiya va uning xususiy xosilalari $\bar{\Pi}_{L,t_0,T}$. sohada uzluksiligini isbotlash.)
2. Tekislikda Dirixle tashqi masalasi. Yagonalik teoremasi
3. $u_{xx}-6u_{xy}+8u_{yy}+u_x-2u_y+x=0.$

4. $U_{tt}=a^2U_{xx,}a=3, U(0,x)=x\sin(l-x), \frac{\partial y}{\partial t}(0,x)=0,$
$U(t,0)=U(t,l)=0$

Variant 33

1. Chegaralangan va uzluksiz boshlang'ich shartlar uchun Koshi masalaning yechimining mavjudligi (Bir jinsli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi) (teoremani keltirib natijalarni isbotlash)
2. Neyman ichki masalasi. Yechimning yagonaligi
3. $3u_{xx}+10u_{xy}+3u_{yy}+u_x+u_y+2x+y=0.$
4. $U_{tt}=a^2U_{xx}, a=2, U(0,x)=(l-x)\sin\frac{\pi x}{l}, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=0$
$U(t,0)=U(t,l)=0.$

Variant 34

1. Chegaralangan va uzluksiz boshlang'ich shartlar uchun Koshi masalaning yechimining yagonaligi
2. Laplas tenglamasi uchun Grin funksiyasi va uning xossalari. Dirixle ichki masalasi uchun Grin funksiyasi
3. $3u_{xx}-10u_{xy}+3u_{yy}-2u_x+4u_y+2y=0.$
4. $U_{tt}=a^2U_{xx,}a=3, U(0,x)=x\sin(l-x), \frac{\partial y}{\partial t}(0,x)=0,$
$U(t,0)=U(t,l)=0$

Variant 35

1. Yarim to'g'ri chiziqdagi issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalani yechimining mavjudligi
2. Grin funksiyaning xossalari. $G(M,P)>0, \quad M,P\in\Omega,\ P\neq M.$
3. $2u_{xx}+6u_{xy}+4u_{yy}+u_x+u_y=0.$
4. $4)U_{tt}=a^2U_{xx}+(t+5)x, a=3, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=0,$
$U(t,0)=U(t,l)=0$

Variant 36

1. Yarim to'g'ri chiziqdagi issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun ikkinchi chegaraviy masalani yechimining mavjudligi
2. Ikkinchi tartibli ikki o'zgaruvchili differensial tenglamalarni ta'rifi va kanonik shakliga keltirish (parabolik tenglamalar).
3. $2u_{xy}-4u_{yy}+u_x-2u_y+x=0.$
4. $U_{tt}=a^2U_{xx}+(t^2-1)x, a=1, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=0, U(t,0)=U(t,l)=0$

Variant 37

1. Birinchi chegaraviy masalasi uchun Grina funksiyasi. 1 va 2 xossalar

2. Ikkinchi tarbibli xususiy xosilali tenglamalarning klassifikasiyasi (umumiy, kvazichiziqli, chizikli, bir jinsli, bir jinsli bulmagan tenglamalarning ta'riflari, tenglamalarning tiplari).
3. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0.$
4. $U_{tt} = a^2U_{xx}, a = 4, U(0,x) = 2(l-x)\sin x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0$

Variant 38

1. Birinchi chegaraviy masalasi uchun Grina funksiyasi. 3 va 4 xossalar
2. Tebranish tenglamalar uchun masalalarning qo'yilishi (Ideal tor tebranish tenglamasi, elastik membrana tebranish tenglamasi, boshlang'ich shartlar, chegaraviy shartlar, birinchi chegaraviy masala, yarim to'g'ri chiziq, Koshi masalasi).
3. $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + u_y = 0.$
4. $U_{tt} = a^2U_{xx}, a = 10, U(0,x) = 10x, U(t,0) = U(t,l) = 0, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0.$

Variant 39

1. Laplas va Puasson tenglamalari. Garmonik funksiya
2. Tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimining mafjudligi, yagonaligi va turg'unligi. Dalamber formulasi.
3. $u_{xx} + 4u_{xy} + 13u_{yy} + 3u_x + 24u_y + 9(x+y) = 0.$
4. $U_{tt} = a^2U_{xx} + 10(t-1)\cos 2x, a = 1, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0$

Variant 40

1. Chegaraviy masalalar qo'yilishi. E^3 va E^2 fazolarda Dirixle va Neyman masalalari.
2. Xususiy xosilali differensial tenglamalar. Asosiy ta'riflar.
3. $u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y = 0.$
4. $U_{tt} = a^2U_{xx}, a = 1{,}5, U(0,x) = 2(x+3), \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \sin x,$
$U(t,0) = U(t,l) = 1.$

Variant 41

1. Laplas teglamasining fundamental yechimi
2. Birinchi tartibli kvazichizqli tenglamalar (Bir jinsli, bir jinsli bulmagan, umumiy yechim)
3. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 5u_y = 0.$
4. $U_{tt} = a^2U_{xx} + tx^2, a = 2, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0$

Variant 42

1. Birinchi va ikkinchi Grin formulalar.
2. Ikkinchi tartibli ikki o'zgaruvchili differensial tenglamalarni ta'rifi va kanonik shakliga keltirish (giperbolik tenglamalar).
3. $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x + 4u_y = 0.$

4. $U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 2, U(0,x) = \cos 2x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = x,$
$U(t,0) = U(t,l) = t.$

Variant 43

1. Uchinchi Grin formulasi. Ikki ulchovli fazoda Grin formulalar.
2. Ikkinchi tartibli ikki o‘zgaruvchili differensial tenglamalarni ta’rifi va kanonik shakliga keltirish (elliptik tenglamalar).
3. $u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + 4u_y = 0.$
4. $U_{tt} = a^2 U_{xx} + t^2 x, a = 3, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0$

Variant 44

1. Garmonik funksiyalarning xossalari 1 i 2 (o‘rta qymat hakidagi teorema) xossalar
2. Ikkinchi tarbibli xususiy xosilali tenglamalarning xarakteristikasi (xarakteristik tenglama, xarakteristik uchburchak, Dalamber formulasi, issiqlikni o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun Koshi masalasi)
3. $u_{xx} + 2u_{xy} + 10u_{yy} - 24u_x + 42u_y + 2(x+y) = 0.$
4. $U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 3, U(0,x) = x^2, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \frac{1}{x},$
$U(t,0) = U(t,l) = 0.$

Variant 45

1. Garmonik funksiyalar. Uchinchi xossa. Garmonik funksiyalar uchun ekstremum prinsipi
2. Tebranish tenglamasi uchun yarim to‘g’ri chizqdagi masala. Davom ettirish usuli. Birinchi chegaraviy masala (tebranish tenglamasi, Koshi masalasi, Dalamber formulasi).
3. $9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 10u_x - 15u_y + x - 2y = 0.$
4. $U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 1, U(0,x) = \frac{x}{2}, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0$

Variant 46

1. Dirixle ichki masalani yechimining yagonaligi.
2. Tebranish tenglamasi uchun yarim to‘g’ri chizqdagi masala. Davom ettirish usuli. Ikkinchi chegaraviy masala (tebranish tenglamasi, Koshi masalasi, Dalamber formulasi).
3. $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0.$
4. $U_{tt} = a^2 U_{xx} + t^2 x^2, a = 3{,}5,\ U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0$

Variant 47

1. Dirixle ichki masalani yechimining turg’unligini isbotlash uchun zarur bulgan Lemma
2. Tebranish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masala. Yechimini mavjudgini isbotlash uchun o‘zgaruvchilarni ajratish usuli.
3. $2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y = 0.$

4. $U_{tt}=a^2U_{xx}, a=2,\ U(0,x)=2\cos 2,5x,\ \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0$

Variant 48

1. Dirixle ichki masalani yechimining turg'unligi
2. Tebranish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masala. Mavjudlik teoremasi.
3. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+9u_x+9u_y=0.$
4. $U_{tt}=a^2U_{xx}+t, a=1,5, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

Variant 49

1. Fazoda Dirixle tashqi masalasi. Yagonalik teoremasi
2. Energiya integrali. Tebranish tenglamasi uchun umumiy birinchi chegaraviy masalalarning yechimini mavjudligi.
3. $u_{xx}+2u_{xy}+5u_{yy}-32u_y=0.$
4. $U_{tt}=a^2U_{xx}, a=1.5, U(0,x)=x\sin\frac{\pi x}{l}, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

Variant 50

1. Tekislikda Dirixle tashqi masalasi. Yagonalik teoremasi
2. Chiziqli bo'lmagan giperbolik tenglama. Xarakteristikalarda berilgan ma'lumotlar masalasi. Integral tenglamalarning ekvivalent sistemasi (Gursa masalasi, chizikli bulmagan giperbolik tenglama)
3. $u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y-x^2y=0.$
4. $U_{tt}=a^2U_{xx}+(t^2+1)\sin 2x, a=1, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0$

Variant 51

1. Neyman ichki masalasi. Yechiluvchanlikning zaruriy sharti.
2. Chiziqli bo'lmagan giperbolik tenglama. Xarakteristikalarda berilgan ma'lumotlar masalasi yechimining mavjudligi.
3. $$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \\ \frac{\pi}{2}\le x\le\frac{5\pi}{2}, \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=y\left(\frac{5\pi}{2}\right)=0. \end{cases}$$
4. $U_{tt}=a^2U_{xx}, a=3, U(0,x)=2(l-x)\sin x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0$

Variant 52

1. Neyman ichki masalasi. Yechimning yagonaligi
2. Chiziqli bo'lmagan giperbolik tenglama. Xarakteristikalarda berilgan ma'lumotlar masalasi yechimining yagonaligi.
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ bu tenglamani qo'yidagi ko'rinishga keltiring: $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=F_2(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}).$
4. $U_{tt}=a^2U_{xx}+2x\cos t, a=1,5, U(0,x)=\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=U(t,0)=U(t,l)=0.$

Variant 53

1. Laplas tenglamasi uchun Grin funksiyasi va uning xossalari. Dirixle ichki masalasi uchun Grin funksiyasi
2. Qo‘shma differensial operator (differensial operator, qo‘shma operator, o‘z-o‘ziga qo‘shma operator)
3. $$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
4. $U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 2.5,\ U(0,x) = x\cos\frac{\pi x}{2l}, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0,$
$U(t,0) = U(t,l) = 0.$

Variant 54

1. Grin funksiyaning xossalari. 1.
$$G(M,P) > 0, \quad M, P \in \Omega,\ P \neq M.$$
2. Chizikli algebrada berilgan qo‘shma operator va qo‘shma differensial operatorlarnin bog’lanishi.
3. $4u_{xx} + 3u_{xy} - u_{yy} = 0,$
4. $U_{tt} = a^2 U_{xx} + (x+2)\sin t, a = 2, l = \pi,$
$U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

Variant 55

1. Grin funksiyaning xossalari. 2.
$$G(M,P) = G(P,M) \quad \forall M, P \in \Omega,\ M \neq P.$$
2. Riman usuli.
3. $36u_{xx} - 12u_{xy} + u_{yy} + 18u_x - 3u_y = 0$,
4. $U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 3, U(0,x) = x+2, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0$

Variant 56

1. Oddiy va ikkilangan qatlam potensiali. Birlik zichklik bilan berilgan ikkilangan qatlam potensiali
2. Umumlashgan yechim. Limitga o‘tish ko‘rinishdagi umumlashgan yechim.
3. $$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
4. $U_{tt} = a^2 U_{xx} + t^2 x, a = 2, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

Variant 57

1. Tekislikdagi ikkilangan qatlam potensiali:
$$u(M) = -\int_L f(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P.$$

2. Umumlashgan yechim. Integral ayniyat manosida berilgan umumlashgan yechim.
3. $\left(1+x^2\right) u_{xx} + \left(1+y^2\right) u_{yy} + y u_y = 0$;
4. $U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 3, U(0,x) = e^x, \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

Variant 58

1. Tekis yaqinlashuvchi integralning ta'rifi va qo'yidagi $\int_l F(P,M)\,dl_P$ integral uzluksuzligi haqidagi teorema
2. Parabolik tipdagi tenglamalar. Fazoda issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasining chiqarilishi.
3. $x^2 u_{xx} - 2x u_{xy} + u_{yy} = 0$;
4. $U_{tt} = a^2 U_{xx} + \sin t, a = 1,5, U(0,x) = \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0, l = \pi$

Variant 59

1. Potensial xossalari. ($u(M) - f(M_0)u_e(M)$ funksiya M_0- nuqtada usluksizligi haqidagi teorema)
2. Parabolik tipdagi tenglamalar. Bir fazoviy o'zgaruvchili issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi. Asosiy masalalarning qo'yilishi.
3. $y^2 u_{xx} + 2y u_{xy} + u_{yy} = 0$;
4. $U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 2, U(0,x) = e^{x+1}, \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 1, U(t,0) = U(t,l) = 0.$

Variant 60

1. Dirixle ichki masalani 2-chi tur Fredgolm integral tenglamaga keltirish
2. Parabolik tipdagi tenglamalar. Birinchi chegaraviy masala. Birinchi chegaraviy masalasi yechimining mavjudligi.
3. $4y^2 u_{xx} - e^{2x} u_{yy} = 0$;
4. $U_{tt} = a^2 U_{xx} + (x+4)\cos 3t, a = 1, l = \dfrac{\pi}{2}, U(0,x) = \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0$

Variant 61

1. Parabolik tipdagi tenglamalar. Fazoda issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasining chiqarilishi.
2. Dirixle ichki masalani yechimining turg'unligi
3. $x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} = 0$;
4. $U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 2, U(0,x) = x^2, \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0, l = \pi$

Variant 62

1. Parabolik tipdagi tenglamalar. Bir fazoviy o'zgaruvchili issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi. Asosiy masalalarning qo'yilishi.
2. Neyman ichki masalasi. Yechimning yagonaligi
3. $x u_{xx} - y u_{yy} = 0$;

4. $U_{tt} = a^2U_{xx} + t^2, a = 1, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0.$

Variant 63

1. Parabolik tipdagi tenglamalar. Birinchi chegaraviy masala. Birinchi chegaraviy masalasi yechimining mavjudligi.
2. Oddiy va ikkilangan qatlam potensiali. Birlik zichklik bilan berilgan ikkilangan qatlam potensiali
3. $u_{xx} - yu_{yy} = 0$;
4. $U_{tt} = a^2U_{xx} + x\sin 2t, a = 1, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0, l = 1.$

Variant 64

1. Parabolik tipdagi tenglamalar. Birinchi chegaraviy masala. Birinchi chegaraviy masalasi yechimining mavjudligi.
2. Neyman ichki masalasi. Yechimning yagonaligi
3. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + u_x = 0$
4. $U_{tt} = a^2U_{xx}, a = 1{,}5$

   $U(0,x) = x(l-x), \frac{\partial U(0,x)}{\partial t} = 0, U(t,0) = U(t,l) = 0.$

Mexanika – matematika fakulteti amaliy matematika va informatika bo‘limi 3-kurs talabalari uchun Xususiy hosilali tenglamalar fanidan yakuniy nazorat ishi namunaviy variantlari

VARIANT 1

1. Xususiy xosilali differensial tenglamalar. Asosiy ta’riflar.
2. Chegaralangan va uzluksiz boshlang’ich shartlar uchun Koshi masalaning yechimining mavjudligi (Bir jinsli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi) ($u(x,t)$ funksiya va uning xususiy xosilalari $\bar{\Pi}_{L,t_0,T}$. soxada uzluksiligini isbotlash.)
3. Garmonik funksiyalarning xossalari 1 va 2 (o‘rta qymat haqidagi teorema) xossalar
4. $$x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} - 2xu_x + 4yu_y + 16x^2u = 0.$$
5. $$\begin{cases} u_t = u_{xx}\,, \\ u|_{x=0} = 0\,, \\ u|_{x=\pi} = 0\,, \\ u|_{t=0} = \pi x - x^2\,; \end{cases}$$

VARIANT 2

1. Birinchi tartibli kvazichizqli tenglamalar (Bir jinsli, bir jinsli bo‘lmagan, umumiy yechim)
2. Chegaralangan va uzluksiz boshlang’ich shartlar uchun Koshi masalaning yechimining mavjudligi (Bir jinsli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi) ($\forall x_0 \in \mathbb{R} \lim\limits_{\substack{t\to 0+ \\ x\to x_0}} u(x,t) = \phi(x_0).$)
3. Ikkinchi tarbibli xususiy xosilali tenglamalarning xarakteristikasi (xarakteristik tenglama, xarakteristik uchburchak, Dalamber formulasi, issiqlikni o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun Koshi masalasi)
4. $$tg^2xu_{xx} - 2ytgxu_{xy} + y^2u_{yy} + tg^3xu_x = 0.$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u + 2\cos^2 x\,, \\ u_x|_{x=0} = 0\,, \\ u_x|_{x=\pi} = 0\,, \\ u|_{t=0} = 0\,; \end{cases}$$

VARIANT 3

1. Ikkinchi tartibli ikki o‘zgaruvchili differensial tenglamalarni ta’rifi va kanonik shakliga keltirish (giperbolik tenglamalar).
2. Chegaralangan va uzluksiz boshlang’ich shartlar uchun Koshi masalaning yechimining mavjudligi (Bir jinsli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi) (teoremani keltirib natijalarni isbotlash)
3. Garmonik funksiyalar. Uchinchi xossa. Garmonik funksiyalar uchun ekstremum prinsipi.
4. $$u_{xx} - 2sinx \cdot u_{xy} - (3 + cos^2x)u_{yy} - cosx \cdot u_y = 0.$$
5. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)e^{-t} \\ u_x|_{x=0} = 0\,, \\ u|_{x=\pi/2} = 0\,, \\ u|_{t=0} = 0\,; \end{cases}$$

VARIANT 4

1. Ikkinchi tartibli ikki o‘zgaruvchili differensial tenglamalarni ta’rifi va kanonik shakliga keltirish (elliptik tenglamalar).
2. Chegaralangan va uzluksiz boshlang’ich shartlar uchun Koshi masalaning yechimining yagonaligi
3. Tebranish tenglamasi uchun yarim to‘g’ri chizqdagi masala. Davom ettirish usuli. Birinchi chegaraviy masala (tebranish tenglamasi, Koshi masalasi, Dalamber formulasi).
4. $$e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0.$$
5. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + \cos t\,, \\ u_x|_{x=0} = 0\,, \\ u_x|_{x=\pi/2} = 0\,, \\ u|_{t=0} = \cos 2x\,; \end{cases}$$

VARIANT 5

1. Ikkinchi tartibli ikki o‘zgaruvchili differensial tenglamalarni ta’rifi va kanonik shakliga keltirish (parabolik tenglamalar).
2. Yarim to‘g’ri chiziqdagi issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalani yechimining mavjudligi
3. Dirixle ichki masalani yechimining yagonaligi.
4. $$u_{xx} + 2cosx \cdot u_{xy} - sin^2x \cdot u_{yy} - sinx \cdot u_y = 0.$$
5. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + \sin x\,, \\ u_x|_{x=0} = 0\,, \\ u_x|_{x=\pi} = 0\,, \\ u|_{t=0} = \cos x\,. \end{cases}$$

VARIANT 6

1. Ikkinchi tarbibli xususiy xosilali tenglamalarning klassifikasiyasi (umumiy, kvazichiziqli, chizikli, bir jinsli, bir jinsli bulmagan tenglamalarning ta’riflari, tenglamalarning tiplari).
2. Yarim to‘g’ri chiziqdagi issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun ikkinchi chegaraviy masalani yechimining mavjudligi
3. Tebranish tenglamasi uchun yarim to‘g’ri chizqdagi masala. Davom ettirish usuli. Ikkinchi chegaraviy masala (tebranish tenglamasi, Koshi masalasi, Dalamber formulasi).
4. $$4y^2u_{xx} + 2(1-y^2)u_{xy} - u_{yy} - \tfrac{2y}{1+y^2}(2u_x - u_y) = 0.$$
5. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}\,, \\ u|_{x=0} = 0\,, \\ u|_{x=1} = 0\,, \\ u|_{t=0} = x^2 - x\,, \\ u_t|_{t=0} = 0\,; \end{cases}$$

VARIANT 7

1. Tebranish tenglamalar uchun masalalarning qo‘yilishi (Ideal tor tebranish tenglamasi, elastik membrana tebranish tenglamasi, boshlang’ich shartlar, chegaraviy shartlar, birinchi chegaraviy masala, yarim to‘g’ri chiziq, Koshi masalasi).
2. Parabolik tipdagi tenglamalar. O‘zgaruvchilarning ajratish usuli.
3. Dirixle ichki masalani yechimining turg’unligini isbotlash uchun zarur bulgan Lemma.

4. $U_{xy} - U_{yy} + 2U_x - U_y = 0.$

5. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 4u + 4\sin^2 x\,, \\ u_x|_{x=0} = 0\,, \\ u_x|_{x=\pi/2} = 0\,, \\ u|_{t=0} = 0\,, \\ u_t|_{t=0} = 0\,; \end{cases}$$

VARIANT 8

1. Tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimining mafjudligi, yagonaligi va turg'unligi. Dalamber formulasi.
2. Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun maksimal qiymat prinsi.
3. Dirixle ichki masalani yechimining turg'unligi.
4. $3U_{xx} + U_{xy} + U_y = 0.$
5. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x - \pi\,, \\ u_x|_{x=0} = 0\,, \\ u|_{x=\pi} = 0\,, \\ u|_{t=0} = \cos\dfrac{x}{2}\,, \\ u_t|_{t=0} = 0\,; \end{cases}$$

VARIANT 9

1. Ikkinchi tarbibli xususiy xosilali tenglamalarning xarakteristikasi (xarakteristik tenglama, xarakteristik uchburchak, Dalamber formulasi, issiqlikni o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun Koshi masalasi)
2. Parabolik tipdagi tenglamalar. Birinchi chegaraviy masalasi yechimining yagonaligi.
3. Tebranish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masala. Yechimini mavjudgini isbotlash uchun o'zgaruvchilarni ajratish usuli.
4. $U_{xx} - 8U_{xy} + U_y - U_x = 0.$
5. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 3u + 4\sin x \sin 2t\,, \\ u|_{x=0} = 0\,, \\ u_x|_{x=\pi/2} = 0\,, \\ u|_{t=0} = 0\,, \\ u_t|_{t=0} = \sin 3x\,. \end{cases}$$

VARIANT 10

1. Tebranish tenglamasi uchun yarim to'g'ri chizqdagi masala. Davom ettirish usuli. Birinchi chegaraviy masala (tebranish tenglamasi, Koshi masalasi, Dalamber formulasi).
2. Parabolik tipdagi tenglamalar. Birinchi chegaraviy masalasi yechimining turg'unligi.
3. Fazoda Dirixle tashqi masalasi. Yagonalik teoremasi
4. $U_{xx} - 4U_{yy} + U_x = 0.$
5. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - u + t\left(x^2 - 2\right) + \sin x\,, \quad 0 < x < \pi\,, \;\; 0 < t < \infty\,, \\ u_x|_{x=0} = 0\,, \\ u_x|_{x=\pi} = 2\pi t\,, \\ u|_{t=0} = \cos x\,, \\ u_t|_{t=0} = \sin x + x^2\,. \end{cases}$$

VARIANT 11

1. Tebranish tenglamasi uchun yarim to‘g’ri chizqdagi masala. Davom ettirish usuli. Ikkinchi chegaraviy masala (tebranish tenglamasi, Koshi masalasi, Dalamber formulasi).
2. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun umumiy chegaraviy masalani yechimining yagonaligi (bir jinsli bulmagan tenglama)
3. Tekislikda Dirixle tashqi masalasi. Yagonalik teoremasi.
4. $U_{xx} - 2U_{xy} + U_{yy} + U_y = 0.$
5. $$\begin{cases} u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 4x + 8\,e^t \cos x \\ u_x\big|_{x=0} = 2t\,, \\ u\big|_{x=\pi/2} = \pi t\,, \\ u\big|_{t=0} = \cos x\,, \\ u_t\big|_{t=0} = 2x\,; \end{cases}$$

VARIANT 12

1. Tebranish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masala. Yechimini mavjudgini isbotlash uchun o‘zgaruvchilarni ajratish usuli.
2. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun bir jinsli Koshi masalasi.
3. Chiziqli bo‘lmagan giperbolik tenglama. Xarakteristikalarda berilgan ma’lumotlar masalasi. Integral tenglamalarning ekvivalent sistemasi (Gursa masalasi, chizikli bulmagan giperbolik tenglama)
4. $2U_{xx} + 2U_{xy} + 5U_{yy} = 0.$
5. $$\begin{cases} u_{tt} + u_t = u_{xx}\,, \\ u\big|_{x=0} = t\,, \\ u\big|_{x=1} = 0\,, \\ u\big|_{t=0} = 0\,, \\ u_t\big|_{t=0} = 1 - x\,; \end{cases}$$

VARIANT 13

1. Tebranish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masala. Mavjudlik teoremasi.
2. Uchinchi Grin formulasi. Ikki ulchovli fazoda Grin formulalar.
3. Neyman ichki masalasi. Yechiluvchanlikning zaruriy sharti.
4. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} - 2yu_x = 0.$
5. $$\begin{cases} u_{tt} - 2u_t = u_{xx} + 4t\,(\sin x - x) \\ u\big|_{x=0} = 3\,, \\ u_x\big|_{x=\pi/2} = t^2 + t\,, \\ u\big|_{t=0} = 3\,, \\ u_t\big|_{t=0} = x + \sin x\,; \end{cases}$$

VARIANT 14

1. Energiya integrali. Tebranish tenglamasi uchun umumiy birinchi chegaraviy masalalarning yechimini mavjudligi.
2. Garmonik funksiyalarning xossalari 1 i 2 (o‘rta qymat hakidagi teorema) xossalar.

3. Chiziqli bo‘lmagan giperbolik tenglama. Xarakteristikalarda berilgan ma’lumotlar masalasi yechimining mavjudligi.
4. $(1+x^2)u_{xx}+(1+y^2)u_{yy}+xu_x+yu_y=0.$
5. $$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+u\,, \\ u|_{x=0}=0\,, \\ u|_{x=\pi}=t\,, \\ u|_{t=0}=0\,, \\ u_t|_{t=0}=\dfrac{x}{\pi}\,. \end{cases}$$

VARIANT 15

1. Chiziqli bo‘lmagan giperbolik tenglama. Xarakteristikalarda berilgan ma’lumotlar masalasi. Integral tenglamalarning ekvivalent sistemasi (Gursa masalasi, chizikli bulmagan giperbolik tenglama)
2. Garmonik funksiyalar. Uchinchi xossa. Garmonik funksiyalar uchun ekstremum prinsipi.
3. Neyman ichki masalasi. Yechimning yagonaligi.
4. $u_{xx}-(1+y^2)^2u_{yy}-2y(1+y^2)u_y=0.$
5. $$u_{tt}=4u_{xx}+3t\sin\left(\frac{7\pi x}{2l}\right),\quad (0<x<l)$$
$$u|_{x=0}=0,\quad u_x|_{x=l}=0,$$
$$u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=2\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)+7\sin\left(\frac{5\pi x}{2l}\right).$$

VARIANT 16

1. Chiziqli bo‘lmagan giperbolik tenglama. Xarakteristikalarda berilgan ma’lumotlar masalasi yechimining mavjudligi.
2. Dirixle ichki masalani yechimining yagonaligi.
3. Energiya integrali. Tebranish tenglamasi uchun umumiy birinchi chegaraviy masalalarning yechimini mavjudligi.
4. $y^2u_{xx}+2xyu_{xy}+x^2u_{yy}=0.$
5. $$u_{tt}=16u_{xx}+xt,\quad (0<x<2)$$
$$u|_{x=0}=0,\quad u|_{x=2}=0,$$
$$u|_{t=0}=\sin(\pi x)+2\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right),\quad u_t|_{t=0}=0.$$

VARIANT 17

1. Chiziqli bo‘lmagan giperbolik tenglama. Xarakteristikalarda berilgan ma’lumotlar masalasi yechimining yagonaligi.
2. Dirixle ichki masalani yechimining turg’unligini isbotlash uchun zarur bulgan Lemma.
3. Energiya integrali. Tebranish tenglamasi uchun umumiy birinchi chegaraviy masalalarning yechimini mavjudligi

4. $(1+x^2)^2u_{xx}+u_{yy}+2x(1+x^2)u_x=0.$

5. $$u_{tt}=25u_{xx}+\cos(17x)\operatorname{ch}(3t),\quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$
$$u_x|_{x=0}=0,\quad u|_{x=\pi/2}=0,$$
$$u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=\cos(x)+4\cos(9x).$$

VARIANT 18

1. Qo‘shma differensial operator (differensial operator, qo‘shma operator, o‘z-o‘ziga qo‘shma operator)
2. Dirixle ichki masalani yechimining turg’unligi.
3. Chiziqli bo‘lmagan giperbolik tenglama. Xarakteristikalarda berilgan ma’lumotlar masalasi yechimining yagonaligi.
4. $3u_{xx}-4u_{xy}+u_{yy}-3u_x+u_y=0.$
5. $$u_{tt}=a^2u_{xx}+2e^{3t}\sin\left(\frac{5\pi x}{4}\right),\quad (0<x<2)$$
$$u|_{x=0}=0,\quad u_x|_{x=2}=0,$$
$$u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=v_0,\ (v_0=const).$$

VARIANT 19

1. Chizikli algebrada berilgan qo‘shma operator va qo‘shma differensial operatorlarnin bog’lanishi.
2. Birinchi chegaraviy masalasi uchun Grina funksiyasi. 1 va 2 xossalar.
3. Chiziqli bo‘lmagan giperbolik tenglama. Xarakteristikalarda berilgan ma’lumotlar masalasi yechimining yagonaligi.
4. $e^{-2x}u_{xx}-e^{-2y}u_{yy}-e^{-2x}u_x+e^{-2y}u_y+8e^y=0.$
5. $$u_{tt}=9u_{xx}+A\cos\left(\frac{5\pi x}{2l}\right)\sin(2t),\quad (0<x<l\,,A=const)$$
$$u_x|_{x=0}=0,\quad u|_{x=l}=0,$$
$$u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=3\cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right).$$

VARIANT 20

1. Riman usuli.
2. Birinchi chegaraviy masalasi uchun Grina funksiyasi. 3 va 4 xossalar.
3. Qo‘shma differensial operator (differensial operator, qo‘shma operator, o‘z-o‘ziga qo‘shma operator).
4. $u_{xx}-2cosx\cdot u_{xy}-(3+sin^2x)u_{yy}+u_x+(sinx-cosx-2)u_y=0.$
5. $$u_{tt}=49u_{xx}+B,\quad (0<x<\pi\,,B=const)$$
$$u_x|_{x=0}=0,\quad u_x|_{x=\pi}=0,$$
$$u|_{t=0}=2\cos(40x),\quad u_t|_{t=0}=\cos(40x)+6\cos(50x).$$

VARIANT 21

1. Umumlashgan yechim. Limitga o‘tish ko‘rinishdagi umumlashgan yechim.
2. Laplas va Puasson tenglamalari. Garmonik funksiya.
3. Laplas tenglamasi uchun Grin funksiyasi va uning xossalari. Dirixle ichki masalasi uchun Grin funksiyasi
4. $u_{xx} + 2sinx \cdot u_{xy} - (cos^2x - sin^2x)u_{yy} + cosx \cdot u_y = 0.$
5. $$u_{tt} = 4u_{xx} + t\sin(3x), \quad (0 < x < \pi)$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0,$$
$$u|_{t=0} = \begin{cases} \frac{hx}{c}, & x \in [0,c] \\ \frac{h(\pi - x)}{\pi - c}, & x \in [c,\pi] \end{cases}, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$
$$(h = const, c = const, 0 < c < \pi)$$

VARIANT 22

1. Umumlashgan yechim. Integral ayniyat manosida berilgan umumlashgan yechim.
2. Chegaraviy masalalar qo‘yilishi. E^3 va E^2 fazolarda Dirixle va Neyman masalalari.
3. Grin funksiyaning xossalari.
4. $G(M,P) > 0, \quad M,P \in \Omega,\ P \neq M.$
5. $e^{2x}u_{xx} + 2e^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} - xu = 0.$

$$u_{tt} = u_{xx} + 5\cos(4x)e^{4t}, \quad (0 < x < \pi)$$
$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 2\cos(3x) + 4\cos(10x).$$

VARIANT 23

1. Parabolik tipdagi tenglamalar. Fazoda issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining chiqarilishi.
2. Laplas teglamasining fundamental yechimi
3. Chizikli algebrada berilgan qo‘shma operator va qo‘shma differensial operatorlarning bog’lanishi.
4. $u_{xx} - 2sinx \cdot u_{xy} - cox^2x \cdot u_{yy} - cosx \cdot u_y = 0.$
5. $$u_{tt} = u_{xx} + u, \quad (0 < x < 2)$$
$$u|_{x=0} = 2t, \quad u|_{x=2} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

VARIANT 24

1. Parabolik tipdagi tenglamalar. Bir fazoviy o‘zgaruvchili issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi. Asosiy masalalarning qo‘yilishi.
2. Birinchi va ikkinchi Grin formulalar.
3. Grin funksiyaning xossalari.

$$G(M,P) = G(P,M) \quad \forall M,P \in \Omega,\ M \neq P.$$

4. $u_{xx} - 2xu_{xy} = 0.$

5.
$$u_{tt} = u_{xx}, \quad (0 < x < 1)$$
$$u|_{x=0} = t+1, \quad u|_{x=1} = t^3 + 2,$$
$$u|_{t=0} = x+1, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

VARIANT 25

1. Parabolik tipdagi tenglamalar. Birinchi chegaraviy masala. Birinchi chegaraviy masalasi yechimining mavjudligi.
2. Grin funksiyaning xossalari.

2. $$G(M,P) = G(P,M) \quad \forall M, P \in \Omega, \; M \neq P.$$

3. Riman usuli.
4. $$2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} - u_x + u_y + 2x = 0.$$
5.
$$u_{tt} = u_{xx} + 4u + 2\sin^2(x), \quad (0 < x < \pi)$$
$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

VARIANT 26

1. Parabolik tipdagi tenglamalar. O‘zgaruvchilarning ajratish usuli.
2. Oddiy va ikkilangan qatlam potensiali. Birlik zichklik bilan berilgan ikkilangan qatlam potensiali.
3. Umumlashgan yechim. Limitga o‘tish ko‘rinishdagi umumlashgan yechim.
4. $$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + 12u_y = 0.$$
5.
$$u_{tt} = u_{xx} + Ae^{-t}\sin(\frac{\pi x}{l}), \quad (0 < x < l)$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \sin(\frac{3\pi x}{l}).$$

VARIANT 27

1. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun maksimal qiymat prinsipi.
2. Tekislikdagi ikkilangan qatlam potensiali:
3. Oddiy va ikkilangan qatlam potensiali. Birlik zichklik bilan berilgan ikkilangan qatlam potensiali

4. $$u(M) = -\int_L f(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\right)\, dl_P.$$

5. $$5u_{xx} + 16u_{xy} + 16u_{yy} + 24u_x + 32u_y = 0.$$

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad (0 < x < \pi)$$
$$u|_{x=0} = t, \quad u|_{x=\pi} = 0,$$
$$u|_{t=0} = \sin(x)\cos(x), \quad u_t|_{t=0} = 1.$$

VARIANT 28

1. Parabolik tipdagi tenglamalar. Birinchi chegaraviy masalasi yechimining yagonaligi.

2. Tekis yaqinlashuvchi integralning ta’rifi va qo‘yidagi $\int_l F(P,M)\,dl_P$ integral uzluksuzligi haqidagi teorema

3. Tekislikdagi ikkilangan qatlam potensiali: $$u(M) = -\int_L f(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\right)\,dl_P.$$

4. $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} - 2u_x - 2u_y = 0.$

5. $$u_{tt} = u_{xx}, \quad (0 < x < l)$$ $$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = e^{-t},$$ $$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

VARIANT 29

1. Parabolik tipdagi tenglamalar. Birinchi chegaraviy masalasi yechimining turg’unligi.

2. Potensial xossalari. ($u(M) - f(M_0)u_e(M)$ funksiya M_0- nuqtada usluksizligi haqidagi teorema).

3. Umumlashgan yechim. Integral ayniyat manosida berilgan umumlashgan yechim.

4. $3u_{xx} + u_{xy} + 3u_x + u_y + y = 0.$

5. $$u_t = a^2u_{xx}, \ (0 < x < l)$$ $$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,$$ $$u|_{t=0} = x(l - x).$$

VARIANT 30

1. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun umumiy chegaraviy masalani yechimining yagonaligi (bir jinsli bulmagan tenglama)
2. Dirixle ichki masalani 2-chi tur Fredgolm integral tenglamaga keltirish.
3. Tekis yaqinlashuvchi integralning ta’rifi va qo‘yidagi $\int_l F(P,M)\,dl_P$ integral uzluksuzligi haqidagi teorema
4. $u_{xx} + u_{xy} - u_y + 4x = 0.$
5. $$u_t = u_{xx} + 3\sin(2x), \ (0 < x < \pi)$$ $$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0,$$ $$u|_{t=0} = 10\sin(x) + \sin(7x).$$

VARIANT 31

1. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun bir jinsli Koshi masalasi
2. Fazoda Dirixle tashqi masalasi. Yagonalik teoremasi.

3. Potensial xossalari. ($u(M) - f(M_0)u_e(M)$ funksiya M_0- nuqtada usluksizligi haqidagi teorema)

4. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_x + 4e^y = 0.$

5. $4) U_{tt} = a^2 U_{xx} + t\sin\frac{\pi x}{2}, a = 5, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0,$
$U(t,0) = U(t,l) = 0$

VARIANT 32

1. Chegaralangan va uzluksiz boshlang'ich shartlar uchun Koshi masalaning yechimining mavjudligi (Bir jinsli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi) ($u(x,t)$ funksiya va uning xususiy xosilalari $\bar{\Pi}_{L,t_0,T}$- sohada uzluksiligini isbotlash.)
2. Tekislikda Dirixle tashqi masalasi. Yagonalik teoremasi.
3. Parabolik tipdagi tenglamalar. Bir fazoviy o'zgaruvchili issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi. Asosiy masalalarning qo'yilishi.
4. $u_{xx} - 6u_{xy} + 8u_{yy} + u_x - 2u_y + x = 0.$
5. $U_{tt} = a^2 U_{xx,} a = 3, U(0,x) = x\sin(l-x), \frac{\partial y}{\partial t}(0,x) = 0,$
$U(t,0) = U(t,l) = 0$

VARIANT 33

1. Chegaralangan va uzluksiz boshlang'ich shartlar uchun Koshi masalaning yechimining mavjudligi (Bir jinsli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi) ($\forall x_0 \in \mathbb{R} \lim_{\substack{t\to 0+ \\ x\to x_0}} u(x,t) = \phi(x_0).$)
2. Neyman ichki masalasi. Yechiluvchanlikning zaruriy sharti.
3. Dirixle ichki masalani 2-chi tur Fredgolm integral tenglamaga keltirish
4. $u_{yy} - 2u_{xy} + 2u_x - u_y - 4e^x = 0.$
5. $4) U_{tt} = a^2 U_{xx} + (t+5)x, a = 3, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0,$
$U(t,0) = U(t,l) = 0$

VARIANT 34

1. Chegaralangan va uzluksiz boshlang'ich shartlar uchun Koshi masalaning yechimining mavjudligi (Bir jinsli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi) (teoremani keltirib natijalarni isbotlash)
2. Neyman ichki masalasi. Yechimning yagonaligi.
3. Parabolik tipdagi tenglamalar. Birinchi chegaraviy masala. Birinchi chegaraviy masalasi yechimining mavjudligi
4. $3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} + u_x + u_y + 2x + y = 0.$

5. $U_{tt} = a^2U_{xx}, a = 2, U(0,x) = (l-x)\sin\frac{\pi x}{l}, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0$
$U(t,0) = U(t,l) = 0.$

VARIANT 35

1. Chegaralangan va uzluksiz boshlang’ich shartlar uchun Koshi masalaning yechimining yagonaligi
2. Laplas tenglamasi uchun Grin funksiyasi va uning xossalari. Dirixle ichki masalasi uchun Grin funksiyasi.
3. Parabolik tipdagi tenglamalar. Fazoda issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining chiqarilishi.
4. $3u_{xx} - 10u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 4u_y + 2y = 0.$
5. $U_{tt} = a^2U_{xx,} a = 3, U(0,x) = x\sin(l-x), \frac{\partial y}{\partial t}(0,x) = 0,$
$U(t,0) = U(t,l) = 0$

VARIANT 36

1. Yarim to‘g’ri chiziqdagi issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalani yechimining mavjudligi
2. Grin funksiyaning xossalari. $G(M,P) > 0, \quad M,P \in \Omega,\ P \neq M.$
3. Parabolik tipdagi tenglamalar. Fazoda issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining chiqarilishi.
4. $2u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0.$
5. $U_{tt} = a^2U_{xx} + (t+5)x, a = 3, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0,$
$U(t,0) = U(t,l) = 0$

VARIANT 37

1. Yarim to‘g’ri chiziqdagi issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun ikkinchi chegaraviy masalani yechimining mavjudligi
2. Ikkinchi tartibli ikki o‘zgaruvchili differensial tenglamalarni ta’rifi va kanonik shakliga keltirish (parabolik tenglamalar).
3. Dirixle ichki masalani yechimining turg’unligi.
4. $2u_{xy} - 4u_{yy} + u_x - 2u_y + x = 0.$
5. $U_{tt} = a^2U_{xx} + (t^2-1)x, a = 1, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, U(t,0) = U(t,l) = 0$

VARIANT 38

1. Birinchi chegaraviy masalasi uchun Grina funksiyasi. 1 va 2 xossalar

2. Ikkinchi tarbibli xususiy xosilali tenglamalarning klassifikasiyasi (umumiy, kvazichiziqli, chizikli, bir jinsli, bir jinsli bulmagan tenglamalarning ta'riflari, tenglamalarning tiplari).
3. Parabolik tipdagi tenglamalar. Bir fazoviy o'zgaruvchili issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi. Asosiy masalalarning qo'yilishi.
4. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0.$
5. $U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 4, U(0,x) = 2(l-x)\sin x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0$

VARIANT 39

1. Birinchi chegaraviy masalasi uchun Grina funksiyasi. 3 va 4 xossalar
2. Tebranish tenglamalar uchun masalalarning qo'yilishi (Ideal tor tebranish tenglamasi, elastik membrana tebranish tenglamasi, boshlang'ich shartlar, chegaraviy shartlar, birinchi chegaraviy masala, yarim to'g'ri chiziq, Koshi masalasi).
3. Neyman ichki masalasi. Yechimning yagonaligi.
4. $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + u_y = 0.$
5. $U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 10, U(0,x) = 10x, U(t,0) = U(t,l) = 0, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0.$

VARIANT 40

1. Laplas va Puasson tenglamalari. Garmonik funksiya
2. Tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimining mafjudligi, yagonaligi va turg'unligi. Dalamber formulasi.
3. Parabolik tipdagi tenglamalar. Birinchi chegaraviy masala. Birinchi chegaraviy masalasi yechimining mavjudligi.
4. $u_{xx} + 4u_{xy} + 13u_{yy} + 3u_x + 24u_y + 9(x+y) = 0.$
5. $U_{tt} = a^2 U_{xx} + 10(t-1)\cos 2x, a = 1, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0$

VARIANT 41

1. Chegaraviy masalalar qo'yilishi. E^3 va E^2 fazolarda Dirixle va Neyman masalalari.
2. Xususiy xosilali differensial tenglamalar. Asosiy ta'riflar.
3. Oddiy va ikkilangan qatlam potensiali. Birlik zichklik bilan berilgan ikkilangan qatlam potensiali.
4. $u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y = 0.$
5. $U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 1{,}5, U(0,x) = 2(x+3), \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \sin x,$
$U(t,0) = U(t,l) = 1.$

VARIANT 42

1. Laplas teglamasining fundamental yechimi

2. Birinchi tartibli kvazichizqli tenglamalar (Bir jinsli, bir jinsli bulmagan, umumiy yechim)
3. Parabolik tipdagi tenglamalar. Birinchi chegaraviy masala. Birinchi chegaraviy masalasi yechimining mavjudligi.
4. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 5u_y = 0.$
5. $U_{tt} = a^2 U_{xx} + tx^2, a = 2, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0$

VARIANT 43

1. Birinchi va ikkinchi Grin formulalar.
2. Ikkinchi tartibli ikki o‘zgaruvchili differensial tenglamalarni ta’rifi va kanonik shakliga keltirish (giperbolik tenglamalar).
3. Neyman ichki masalasi. Yechimning yagonaligi.
4. $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x + 4u_y = 0.$
5. $U_{tt} = a^2 U_{xx}, a = 2, U(0,x) = \cos 2x, \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = x,$
$U(t,0) = U(t,l) = t.$

VARIANT 44

1. Uchinchi Grin formulasi. Ikki ulchovli fazoda Grin formulalar.
2. Ikkinchi tartibli ikki o‘zgaruvchili differensial tenglamalarni ta’rifi va kanonik shakliga keltirish (elliptik tenglamalar).
3. Fazoda Dirixle tashqi masalasi. Yagonalik teoremasi.
4. $u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + 4u_y = 0.$
5. $U_{tt} = a^2 U_{xx} + t^2 x, a = 3, U(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = U(t,0) = U(t,l) = 0$

Xususiy hosilali tenglamalarfanidan testlar.

1. Tenglamaning tartibini aniqlang. $\ln|U_{xx}U_{yy}| - \ln|U_{xx}| - \ln|U_{yy}| + U_y + U_y = 0$
2; 4; 3; 5

2. Tenglamaning tartibini aniqlang. $2U_{xx}\, U_{xxy} - \frac{\partial}{\partial y} U_{xx} - 2\, U_y U_{xyy} + U_x = 0$
3; 2; 4; 1;

3. Tenglamaning tipini aniqlang. $U_{xx} + 4U_{xy} + U_{yy} + 2U_x + 2U_y - U = 0$
Giperbolik tipli; Parabolik tipli; Elliptik tipli; Tipini aniqlab bo‘lmaydi.

4. Tenglamaning tipini aniqlang. $2U_{xx} + 2U_{xy} + U_{yy} + 2U_y - U = 0$
Elliptik tipli; Parabolik tipli; Giperbolik tipli; Tipini aniqlab bo‘lmaydi.

5) Ushbu tenglamaning xarakteristik tenglamasini ko‘rsating: $xU_{xx} + yU_{yy} - U = 0.$

$xdy^2 + ydx^2 = 0$; $ydy^2 + xdx^2 = 0$; $ydy^2 - xdx^2 = 0$; $xdy^2 - ydx^2 = 0$

6) Ushbu tenglamaning xarakteristik tenglamasini ko‘rsating:
$U_{xx} - 2\sin x\, U_{xy} - \cos^2 xU_{yy} - \cos xU_y = 0.$
$dy^2 + 2\sin xdxdy - \cos^2 xdx^2 = 0$; $dy^2 - 2\sin xdxdy - \cos^2 xdx^2 = 0$;
$dy^2 + 2\sin xdxdy + \cos^2 xdx^2 = 0$; $dx^2 + 2\sin xdxdy - \cos^2 xdy^2 = 0$

7) Qaysi differensial tenglamalar uch ulchovli?
1) $xU_{xx} + yU_{yy} + 2U_x + 2U_y = 0.$
2) $U_{xx} + xyU_{yy} = 0$
3) $U_{xy} - U_{xz} + 2U_x + 2U_y = 0.$
4) $U_{xy} - U_{zz} + U_x - 2U_{yy} = 0.$
3, 4; 1,2; 2,3; 1,4

8) Qaysi differensial tenglamalar uch ulchovli?
1) $U_{xx} + 2U_{xy} - 4U_{yz} = 0$
2) $U_{xy} - 2U_{xz} + 4U_{yz} + U_x = 0$
3) $2U_{xy} - 4U_{yy} + U_x - 2U_y + U + x = 0$
4) $U_{xx} + U_{yy} - U_x + U_y - U_z = 0$
1,2, 4; 1,2; 1,3; 1,4.

9) Chiziqli differensial tenglamalarni ko‘rsating
1) $2U_{xx}^2 + (U_{xx} - 2)U_{xy} - U_{yy}^2 = 0$
2) $U_{xx} + U_x U_{yy} - 3U_{yy} = 0$
3) $U_{xx} + 2U_{xy} + U_{zz} - 8U = 0$
4) $U_{xy} - x\sin xU_{yy} + 3U_y = 0$
3,4; 1,2; 2,3; 1,4;

10) $U_{xx} + 2U_{xy} - 3U_{yy} - 9U = 0$ tenglamaning xarakteristik chiziqlarini ko‘rsating
$y + 3x = c_1$; $y - x = c_2$.; $y + 3x = c_1$; $y + 2x = c_2$.
$y - 3x = c_1$; $y + x = c_2$.; $2y - 3x = c_1$; $2y + 3x = c_2$.

11) $U_{xx} - 2\sin xU_{xy} - \cos^2 xU_{yy} - \cos xU_y = 0$ tenglamaning xarakteristik chiziqlarini ko‘rsating
$y + \cos x + x = c_1,\ y + \cos x - x = c_2$; $y - \cos x - x = c_1,\ y - \cos x + x = c_2$
$y - \sin x + x = c_1,\ y - \sin x + x = c_2$; $y + \sin x + x = c_1,\ y + \sin x + x = c_2$.

12) k ning qanday qiymatlarida $U(x, y) = x^3 + ky^2$ funksiya garmonik bo‘ladi.
-3; 2; 4; -4.

13) k ning qanday qiymatlarida $U(x, y) = x^2 + y^2 + kz^2$ funksiya garmonik bo‘ladi.
-2; 2; 4; -4.

14) Gelmgolts tenglamasini ko‘rsating.
$U_{xx}+U_{yy}+Uzz-\lambda U=0$; $U_{xx}+U_{yy}+Uzz=0$; $U_{xx}+U_{yy}+Uzz=x^2$;
$U_{xx}+U_{yy}+Uzz=y^2$.

15) Bigarmonik tenglamani ko‘rsating.
$\Delta\Delta U=0$; $\nabla\nabla U=0$; $\nabla\Delta U=0$; $2\Delta U=0$.

16) Silindrik koordinatalarni ko‘rsating.
$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=z$; $x=\rho\sin\varphi,\quad y=\rho\cos\varphi,\quad z=z$;
$x=\rho^2\cos^2\varphi,\quad y=\rho^2\sin^2\varphi,\quad z=z$; $x=\cos\varphi,\quad y=\sin\varphi,\quad z=z$ ..

17) Sferik koordinatalarni ko‘rsating.
$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta$.;
$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\cos\theta\cos\varphi,\quad z=r\cos\theta$;
$x=r\cos\theta\cos\varphi,\quad y=r\cos\theta\cos\varphi,\quad z=r\sin\varphi$; $x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta$.

18) $U_{tt}=a^2U_{xx},\quad U(0,t)=U(l,t)=0,\quad U(x,0)=\varphi(x),\quad U_t(x,0)=\psi(x)$ masalaning xos qiymatlarini ko‘rsating.
$\lambda_n=\frac{n\pi}{l},\quad n=1,2,3,...$.; $\lambda_n=\frac{nl}{\pi},\quad n=1,2,3,...$.;
$\lambda_n=\frac{(2n+1)\pi}{2l},\quad n=1,2,3,...$.; $\lambda_n=\frac{(2n-1)\pi}{2l},\quad n=1,2,3,...$.

19) $xU_x+yU_y+zU_z=0$ tenglamaning xarakteristik sistemasini tuzing.
$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$; $dx=dy=dz$; $\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{z}$; $\frac{dx}{z}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{y}$

20) $U_x+U_y+U_z=U$ tenglamaning xarakteristik sistemasini tuzing.
$dx=dy=dz=\frac{dU}{U}$; $\frac{dx}{U}=dy=dz=dU$; $dx=\frac{dy}{U}=\frac{dz}{z}=\frac{dU}{1}$; $\frac{dx}{z}=\frac{dy}{U}=\frac{dz}{x}=dU$

21) $x^2U_x+y^2U_y=U+1$ tenglamaning xarakteristik sistemasini tuzing.
$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{U+1}$; $\frac{dx}{U+1}=\frac{dx}{y^2}=\frac{dU}{x^2}$; $\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dU}{U+1}$; $\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}=dU$

22) $U_x+U_y=0$ tenglamaning xarakteristik chizig’ini ko‘rsating.
$x-y=c$; $x+y=c$; $xy=c$; $\frac{x}{y}=c$.

23) $xU_x+yU_y=0$ tenglamaning xarakteristik chizig’ini ko‘rsating.
$\frac{x}{y}=c.$; $x+y=c$; $xy=c$; $x^2y=c$

24) $x^2U_x+y^2U_y=0$ tenglamaning xarakteristik chizig’ini ko‘rsating.

$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=c.$; $x+y=c$; $x-y=c$; $xy=c$.

25) $yU_x+xU_y=0$ tenglamaning xarakteristik chizig'ini ko'rsating.

$x^2-y^2=c$; $\frac{x^2}{y^2}=c$; $x+y=c$; $x-y=c.$

26) $U_{xx}+4U_{xy}+13U_{yy}+3U_x+24U_y-9U+9(x+y)=0$ tenglamaning xarakteristik ciziqlarini toping.

$2x-y=c_1,\quad 3x=c_2.$; $2x+y=c_1,\quad 3x=c_2.$; $x-2y=c_1,\quad 3x=c_2.$;
$x+2y=c_1,\quad 3x=c_2.$

27) $U_{xx}-2\sin xU_{xy}-\cos^2 xU_{yy}-\cos xU_y=0$ tenglamaning xarakteristik ciziqlarini toping.

$x+y-\cos x=c_1,\quad -x+y-\cos x=c_2.$; $x+2y-\cos x=c_1,\quad -x+y-\cos x=c_2.$;
$2x+y-\cos x=c_1,\quad -x+2y-\cos x=c_2.$; $x+y+\cos x=c_1,\quad 2y-3x+\cos x=c_2.$

28) $x^2+y^2=r^2<R^2$ doira uchun Dirixlening ichki masalasi qanday ko'rinishga ega.

$\begin{cases}\Delta U(x,y)=0, & 0\le r<R\\ U(x,y)=g(x,y), & r=R\end{cases}$; $\begin{cases}\Delta U(x,y)=0, & 0\le r<R\\ \frac{\partial U(x,y)}{\partial \nu}=g(x,y), & r=R\end{cases}$;

$\begin{cases}\Delta U(x,y)=0, & R<r<\infty\\ U(x,y)=g(x,y), & r=R\end{cases}$; $\begin{cases}\Delta U(x,y)=0, & R<r<\infty\\ \frac{\partial U(x,y)}{\partial \nu}=g(x,y), & r=R\end{cases}$

29) $x^2+y^2=r^2\le R^2$ doira uchun Dirixlening tashqi masalasi qanday ko'rinishga ega.

$\begin{cases}\Delta U(x,y)=0, & R<r<\infty\\ U(x,y)=g(x,y), & r=R,\quad |U(x,y)|<\infty\end{cases}$; $\begin{cases}\Delta U(x,y)=0, & 0\le r<R\\ U(x,y)=g(x,y), & r=R\end{cases}$;

$\begin{cases}\Delta U(x,y)=0, & R<r<\infty\\ \frac{\partial U(x,y)}{\partial \nu}=g(x,y), & r=R\end{cases}$.; $\begin{cases}\Delta U(x,y)=0, & R<r<\infty\\ \frac{\partial U(x,y)}{\partial \nu}=g(x,y), & r=R,\quad |U(x,y)|<\infty.\end{cases}$

30) $x^2+y^2=r^2<R^2$ doira uchun $\Delta U(x,y)=0,\quad 0\le r<R$, $\frac{\partial U(x,y)}{\partial \nu}=f(x,y),\quad r=R$

Neyman ichki masalasining to'g'ri qo'yilish shartini aniqlang

$\int_0^{2\pi} f(x,y)ds=0$; $\int_0^{\infty} f(x,y)ds=0$; $\int_0^{2\pi}\frac{\partial f}{\partial \nu}ds=0$; $\int_0^{2\pi} f(x,y)ds<0$

31) $x^2+y^2=r^2<R^2$ doirada Puasson tenglamasi uchun Dirixle masalasini ko'rsating.

$\begin{cases}\Delta U(x,y)=f(x,y), & 0\le r<R\\ U(x,y)=g(x,y), & r=R.\end{cases}$; $\begin{cases}\Delta U(x,y)=0, & 0\le r<R\\ U(x,y)=g(x,y), & r=R.\end{cases}$;

$$\begin{cases}\Delta U(x,y) = f(x,y), & 0 \le r < R \\ \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial \nu} = g(x,y), & r = R.\end{cases}; \quad \begin{cases}\Delta U(x,y) = U(x,y), & 0 \le r < R \\ U(x,y) = g(x,y), & r = R.\end{cases}$$

32) $x^2 + y^2 = r^2 < R^2$ doirada Puasson tenglamasi uchun Dirixle tashqi masalasi qanday qo‘yiladi?

$$\begin{cases}\Delta U(x,y) = f(x,y), & R < r < \infty \\ U(x,y) = g(x,y), & r = R, \quad |U(x,y)| < \infty.\end{cases}; \quad \begin{cases}\Delta U(x,y) = 0, & R < r < \infty \\ U(x,y) = g(x,y), & r = R.\end{cases};$$

$$\begin{cases}\Delta U(x,y) = f(x,y), & R < r < \infty \\ \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial \nu} = g(x,y), & r = R.\end{cases}; \quad \begin{cases}\Delta U(x,y) = U(x,y), & 0 \le r < R \\ U(x,y) = g(x,y), & r = R.\end{cases}$$

33) Tekislikda aniqlangan Laplas operatorini aniqlang:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \; \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \; \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \; \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

34) Uc o‘lchovli fazoda berilgan Laplas operatorini aniqlang:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \; \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \; \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + 2\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

35) Tekislikda aniqlangan Laplas tenglamasini aniqlang:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \; \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0; \; \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xy$$

36) Uch o‘lchovli fazoda berilgan Laplas tenglamasini aniqlang:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0; \; \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xy$$

37) Tekislikda aniqlangan Puasson tenglamasini aniqlang:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x; \; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0; \; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y); \; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y.$$

38) Uc o‘lchovli fazoda berilgan Puasson tenglamasini aniqlang:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 1; \; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1; \; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xy$$

39) Qaysi javobda chekli torning erkin tebranish tenglamasi keltirilgan

$U_{tt}=a^2U_{xx}$, $U(0,t)=U(l,t)=0$, $U(x,0)=\varphi(x)$, $U_t(x,0)=\psi(x)$;
$U_t=a^2U_{xx}$, $U(0,t)=U(l,t)=0$, $U(x,0)=o$, $U_t(x,0)=\psi(x)$;
$U_t=a^2U_{xx}+f(x)$, $U(0,t)=U(l,t)=0$, $U(x,0)=\varphi(x)$, $U_t(x,0)=\psi(x)$;
$\Delta U(x,y)=0$, $0\le r<R$, $\frac{\partial U(x,y)}{\partial \nu}=f(x,y)$, $r=R$, $x^2+y^2=r^2<R^2$.

40) Qaysi tenglama gaz tarqalish va diffuziya tenglamasi bo'ladi
$\Delta U(x,y)=0$, $0\le r<R$, $U(x,y)=f(x,y)$, $r=R$, $x^2+y^2=r^2<R^2$;
$U_{tt}=a^2U_{xx}$, $U(0,t)=U(l,t)=0$, $U(x,0)=\varphi(x)$, $U_t(x,0)=\psi(x)$;
$U_{tt}=a^2U_{xx}$, $U(0,t)=U(l,t)=0$, $U(x,0)=x^2$, $U_t(x,0)=x$;
$U_t=a^2U_{xx}$, $U(0,t)=U(l,t)=0$, $U(x,0)=o$, $U_t(x,0)=\psi(x)$

.41) Qaysi tenglama issiqlik tarqalish tenglamasi bo'ladi
$U_t=a^2U_{xx}$, $U(0,t)=U(l,t)=0$, $U(x,0)=o$, $U_t(x,0)=\psi(x)$;
$\Delta U(x,y)=0$, $0\le r<R$, $U(x,y)=f(x,y)$, $r=R$, $x^2+y^2=r^2<R^2$;
$U_{tt}=a^2U_{xx}$, $U(0,t)=U(l,t)=0$, $U(x,0)=\varphi(x)$, $U_t(x,0)=\psi(x)$;
$U_{tt}=a^2U_{xx}$, $U(0,t)=U(l,t)=0$, $U(x,0)=x^2$, $U_t(x,0)=x$

42) $U_{xy}=x+y$ tenglamaning umumiy yechimini toping.
$U=\frac{x^2y}{2}+\frac{xy^2}{2}+\varphi_1(x)+\psi(y)$; $U=\frac{x^2y}{2}+\varphi_1(x)+\psi(y)$;
$U=\frac{x^2y}{2}-\frac{xy^2}{2}+\varphi_1(x)+\psi(y)$; $U=\frac{xy^2}{2}+\varphi_1(x)+\psi(y)$.

43) $U_{xy}-U_{yy}=0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.
$U=\varphi(x+y)+\psi(y-x)$; $U=\varphi(x+y)+\psi(2y-x)$;
$U=\varphi(x+e^y)+\psi(y-e^x)$; $U=\varphi(x+2y)+\psi(x-2y)$.

44) $3U_{xy}+10U_{xy}+3U_{yy}=0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.
$U=\varphi(3y-x)+\psi(y-x)$; $U=\varphi(x+y)+\psi(x-y)$;
$U=\varphi(y-3x)+\psi(y+3x)$; $U=\varphi(\frac{1}{3}y-x)+\psi(\frac{1}{3}y+3x)$.

45) $U_{xx}-6U_{xy}+5U_{yy}=0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.
$U=\varphi(y+5x)+\psi(y+x)$; $U=\varphi(x+5y)+\psi(y+x)$;
$U=\varphi(y+5x)+\psi(y-x)$; $U=\varphi(5y+4x)+\psi(4y+x)$.

46) Koshi masalasini yeching: $\begin{cases} U_{tt}=U_{xx}+U_{yy}+U_{zz} \\ U(x,y,z,0)=xyz, \quad U_t(x,y,z,0)=x^2y^2z^2 \end{cases}$
$U=xyz+(xyz)^2t+\frac{1}{3}(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)t^3+\frac{1}{15}(x^2+y^2+z^2)t^5+\frac{1}{105}t^7$; $U=xyz$.
$U=xyz+(xyz)^3t$; $U=xyz+\frac{t^7}{105}$.

47) Ushbu $\begin{cases} U_{tt} = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} \\ U(x,y,z,0) = x^2 + y^2 + z^2, \quad U_t(x,y,z,0) = xy \end{cases}$ Koshi masalasi yechimini ko‘rsating

$U = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2 + xyt$; $U = x^2 + y^2 + z^2$; $U = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$;
$U = x^2 + y^2 + z^2 - 5t^2$.

48) Ushbu $\begin{cases} U_{tt} = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} \\ U(x,y,z,0) = x^2 + y^2, \quad U_t(x,y,z,0) = 1 \end{cases}$ Koshi masalasi yechimini ko‘rsating

$U = x^2 + y^2 + t + 2t^2$; $U = x^2 + z^2 + t + 2t^2$; $U = x^2 + z^2 + t - 3t^2$; $U = y^2 + z^2 + t + 2t^2$.

49) Berilgan Koshi masalasi yechimini aniqlang: $\begin{cases} U_{tt} = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} \\ U(x,y,z,0) = x + y, \quad U_t(x,y,z,0) = 1 \end{cases}$

$U = x + y + t$; $U = x + y - t$; $U = x + y + t^2$; $U = x - y + t$.

50) Berilgan Koshi masalasini yechimini aniqlang:
$$\begin{cases} U_{tt} = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} \\ U(x,y,z,0) = x + y + z, \quad U_t(x,y,z,0) = z \end{cases}$$
$U = x + y + z + tz$; $U = (x + y + z)t^2 + tz$; $U = x + y + z + tx$; $U = x + y + z + ty$.

51) $U_x + U_y = 0$ tenglamani yechimini ko‘rsating.

$U = x - y$.

$U = xy$.

$U = \frac{x}{y}$.

$U = x^2 - y^2$.

52) $xU_x + yU_y = 0$ tenglamani yechimini ko‘rsating.

$U = \frac{x}{y}$.

$U = x + y$.

$U = xy$.

$U = x^2 - y^2$.

53) $x^2U_x + y^2U_y = 0$ tenglamani yechimini ko‘rsating.

$U = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$.

$U = x + y$.

$U = \frac{x}{y}$.

$U = x^2 + y^2$.

54) $yU_x + xU_y = 0$ tenglamani yechimini ko‘rsating.

$U = x^2 - y^2$.

$U = x - y$.

$U = \dfrac{x}{y}$.

$U = \dfrac{y}{x}$.

55) $U_x + U_y = 0$ tenglamani umumiy yechimini ko‘rsating.

$U = \Phi(x - y)$.

$U = \Phi(\dfrac{x}{y})$.

$U = \Phi(xy)$.

$U = \Phi(x^2 - y^2)$.

56) $xU_x + yU_y = 0$ tenglamani umumiy yechimini ko‘rsating.

$U = \Phi(\dfrac{x}{y})$..

$U = \Phi(x + y)$.

$U = \Phi(xy)$.

$U = \Phi(x^2 y)$.

57) $x^2U_x + y^2U_y = 0$ tenglamani umumiy yechimini ko‘rsating.

$U = \Phi(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y})$..

$U = \Phi(x + y)$.

$U = \Phi(x^2 + y^2)$.

$U = \Phi(x^2 - y^2)$.

58) $yU_x + xU_y = 0$ tenglamani umumiy yechimini ko‘rsating.

$U = \Phi(x^2 - y^2)$..

$U = \Phi(x + y)$.

$U = \Phi(\dfrac{x}{y})$.

$U = \Phi(xy)$.

59) $xU_x - yU_y = 0$ tenglamaning birinchi integralini aniqlang.

$xy = c$..

$\dfrac{x}{y} = c$.

$x - y = c$.

$x + y = c$.

60) $\begin{cases} U_{tt} = U_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ U(x,0) = x, \quad U_t(x,0) = 0, & -\infty < x < +\infty \end{cases}$ Koshi masalasi yechimini aniqalng

$U(x,t) = x$.

$U(x,t) = x + t$.

$U(x,t) = xt$.
$U(x,t) = x - t$.

61) $\begin{cases} U_{tt} = U_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ U(x,0) = \sin x, & U_t(x,0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$ Koshi masalasi yechimini aniqalng

$U(x,t) = \sin x \cos x$.
$U(x,t) = \sin x - \cos x$.
$U(x,t) = \sin x \cos t$.
$U(x,t) = \sin x + \sin t$.

62) $\begin{cases} U_{tt} = U_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ U(x,0) = 0, & U_t(x,0) = x, \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$ Koshi masalasi yechimini aniqalng

$U(x,t) = xt$.
$U(x,t) = \frac{x}{t}$.
$U(x,t) = x^2 - t^2$.
$U(x,t) = x + t$.

63) $\begin{cases} U_{tt} = U_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ U(x,0) = x, & U_t(x,0) = 1, \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$ Koshi masalasi yechimini aniqalng

$U(x,t) = x + t$.
$U(x,t) = \sin(x + t)$.
$U(x,t) = x - 2t$.
$U(x,t) = 2xt$.

64) $\begin{cases} U_{tt} = U_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ U(x,0) = \cos x, & U_t(x,0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$ Koshi masalasi yechimini aniqalng

$U(x,t) = \cos x \cos t$.
$U(x,t) = \cos x - \cos t$.
$U(x,t) = \cos x \sin t$.
$U(x,t) = \sin x \sin t$.

65) $\begin{cases} U_{tt} = U_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ U(x,0) = x^2, & U_t(x,0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$ Koshi masalasi yechimini aniqalng

$U(x,t) = x^2 + t^2$.
$U(x,t) = xt$.

$U(x,t)=\frac{x}{t}$.

$U(x,t)=\frac{x^2}{t^2}$.

66) $\begin{cases} U_{tt}=U_{xx}, & -\infty<x<+\infty, \quad t>0 \\ U(x,0)=0, & U_t(x,0)=-\sin x, \quad -\infty<x<+\infty \end{cases}$ Koshi masalasi yechimini aniqalng

$U(x,t)=-\sin x \sin t$.

$U(x,t)=\frac{\sin x \sin t}{2}$.

$U(x,t)=\sin x-\sin t$.

$U(x,t)=\sin x-\cos t$.

67) $\begin{cases} U_{tt}=U_{xx}, & -\infty<x<+\infty, \quad t>0 \\ U(x,0)=0, & U_t(x,0)=\cos x, \quad -\infty<x<+\infty \end{cases}$ Koshi masalasi yechimini aniqalng

$U(x,t)=\cos x \sin t$.

$U(x,t)=\sin x \cos t$.

$U(x,t)=\cos x-\sin t$.

$U(x,t)=\cos x+\sin t$.

68) Quyidagi tenglamalardan qaysi birini $V_{xy}+aV=0$ kurinishga keltirish mumkin.

$U_{xy}+U_x-U_y=0$

$U_{xy}+x^2U_x-2y^2U_y=0$

$U_{xy}+\frac{1}{x}U_x-\frac{1}{y}U_y=0$

$U_{xy}+\sin xU_x+\cos yU_y=0$

69) $U_{xy}+2U_x-3U_y=U$ tenglama qanday turdagi tenglamaning sodda kurinishidan iborat.

Giperbolik turdagi.
Elliptik turdagi.
Parabolik turdagi.
Elleptiko-Parabolik turdagi.

70) $U_{xx}-U_{yy}=0$ tenglama qanday turdagi tenglamaning sodda ko‘rinishidan iborat

Elliptik turdagi.
Giperbolikik turdagi.
Parabolik turdagi.
Giberbolo-Parabolik turdagi.

71) $U_{xx}+U_x-U_y=U$ tenglama qanday turdagi tenglamaning sodda ko‘rinishidan iborat

Parabolik turdagi.
Giperbolikik turdagi.
Elliptik turdagi.
Elliptiko-Giberbolik turdagi.

72) Nyuton potensialini aniqlang

$u(x)=\int_D \frac{1}{|x-y|}\mu(y)dy_1dy_2dy_3$

$u(x)=\int_\Gamma \frac{1}{|x-y|}\mu(y)d\Gamma$

$u(x)=\int_D \ln\frac{1}{x-y}\mu(y)dy_1dy_2$

$u(x)=\int_D \mu(y)\ln\frac{x}{x-y}dy_1dy_2$

73) Logarifmik potensialini aniqlang

$u(x)=\int_D \ln\frac{1}{x-y}\mu(y)dy_1dy_2$

$u(x)=\int_\Gamma \frac{1}{|x-y|}\mu(y)d\Gamma$

$u(x)=\int_D \frac{1}{|x-y|}\mu(y)dy_1dy_2dy_3$

$u(x)=\int_D \mu(y)\ln\frac{x}{x-y}dy_1dy_2$

74) Quyidagi funksiyaning qaysi biri $u(x)=\int_D \left(y_1^2+y_2^2\right)\ln\frac{1}{|x-y|}dy_1dy_2$ logarifmik potensialning zichligi bo‘ladi.

$\mu(y)=y_1^2+y_2^2$

$\mu(y)=\frac{1}{y_1^2+y_2^2}$

$\mu(y)=\frac{1}{y_1^2+y_2^2}$

$\mu(y)=1$

75) $u(x)=\int_D \frac{y_1}{y_1+y_2}\frac{1}{|x-y|}dy_1dy_2dy_3$ Nyuton potensiali zichligini aniqlang

$\mu(y)=\frac{y_1}{y_1+y_2}$

$\mu(y)=\frac{1}{y_1+y_2}$

$\mu(y)=\frac{y_1+y_2}{y_1}$

$\mu(y)=1$

76) $u_{tt}=a^2u_{xx},\quad u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x)$ masala yechimi uchun Dalamber formulasini kursating.

$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$

$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}$

$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$

$u(x,t)=\frac{\psi(x+at)+\psi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)d\xi$

77) $U_{xx}+2U_{xy}+2U_{yy}-5U_{zz}=0$ kurinishdagi elliptic tipli tenglamaning sodda ko‘rinishini aniqlang.

$V_{\xi\xi}+V_{\eta\eta}+V_{\zeta\zeta}=0$.

$V_{\xi\xi}-V_{\eta\eta}-V_{\zeta\zeta}=0$

$V_{\xi\xi}-V_{\eta\eta}+V_{\zeta\zeta}=0$.

$V_{\xi\xi}-V_{\eta\eta}-V_{\zeta\zeta}+V_{\eta}=0$.

78) Quyidagi giperbolik tipli tenglamaning sodda kurinishini aniqlang:

$3U_{xy}-2U_{xz}-2U_{yz}-U=0$

$V_{\xi\xi}-V_{\eta\eta}-V_{\zeta\zeta}+V=0$.

$V_{\xi\xi}+V_{\eta\eta}+V_{\zeta\zeta}=0$

$V_{\xi\xi}+V_{\eta\eta}+V_{\zeta\zeta}+V_{\xi}=0$.

$V_{\xi\xi}-V_{\eta\eta}-V_{\zeta\zeta}+V_{\xi}+V_{\eta}=0$.

79) Ikkinchi tartibli ko‘p o‘zgaruvchili parabolic tipli tenglamalarning sodda kurinishini ko‘rsating

$U_{xx}+4U_{yy}+U_{zz}+4U_{xy}+2U_{xz}+4U_{yz}+2U=0$.

$V_{\xi\xi}+2V=0$.

$V_{\xi\xi}+V_{\eta\eta}+V_{\zeta\zeta}=0$

$V_{\xi\xi}-V_{\eta\eta}-V_{\zeta\zeta}=0$.

$V_{\xi\xi}+V_{\eta\eta}-V_{\zeta\zeta}=0$.

80) Fazoda Laplas tenglamasining fundamental yechimini aniqlang.

$U=\frac{1}{|x-y|}$.

$U=\ln\frac{1}{|x-y|}$.

$U=|x-y|$.

$U=|x+y|$.

81) Tekislikda Laplas tenglamasining fundamental yechimini aniqlang.

$U = \ln\frac{1}{|x-y|}$.

$U = |x-y|$.

$U = |x+y|$.

$U = \frac{1}{|x-y|}$.

82) $U_{xx} + U_{yy} = 0$ tenglama uchun $\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, & 0 \le r < R \\ U(x,y) = g(x,y), & r = R \end{cases}$ Dirixle masalasi yechimini kursating.

$U = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\varphi-\psi) + r^2}d\psi$

$U = \int_0^{2\pi}\frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\varphi-\psi) + r^2}d\psi$

$U = \int_0^{2\pi}\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi-\psi) + r^2}d\psi$

$U = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\varphi-\psi) + r^2}d\psi$

83) $U_{tt} = a^2U_{xx}, \quad U(x,0) = \varphi(x), \quad U_t(x,0) = \psi(x), \quad U(0,t) = 0, \quad U_t(l,t) = 0$
masalaga mos keluvchi Shturm-Liuvill masalasini kursating

$X'' + \lambda^2 X = 0, \qquad X(0) = X(l) = 0$

$X'' + a^2\lambda^2 X = 0, \qquad X(0) = X(l) = 0$

$X'' - a^2 X = 0, \qquad X(0) = X(l) = 0$

$X'' - \lambda^2 X = 0, \qquad X(0) = X(l) = 0$

84) $U_{tt} = a^2U_{xx}, \quad U(x,0) = \varphi(x), \quad U_t(x,0) = \psi(x), \quad U(0,t) = 0, \quad U_x(l,t) = 0$
masalaga mos keluvchi Shturm-Liuvill masalasini kursating

$X'' + \lambda^2 X = 0, \qquad X(0) = X'(l) = 0$

$X'' + a^2\lambda^2 X = 0, \qquad X(0) = X(l) = 0$

$X'' - a^2 X = 0, \qquad X(0) = X(l) = 0$

$X'' - \lambda^2 X = 0, \qquad X(0) = X(l) = 0$.

85) $U_{tt} = a^2U_{xx} + f(x,t), \quad U(x,0) = \varphi(x), \quad U_t(x,0) = \psi(x), \quad U_x(0,t) = 0, \quad U_x(l,t) = 0$
masalaga mos keluvchi Shturm-Liuvill masalasini kursating

$X'' + \lambda^2 X = 0, \qquad X'(0) = X'(l) = 0$

$X'' + a^2\lambda^2 X = 0, \qquad X(0) = X'(l) = 0$

$X'' - a^2 X = 0, \qquad X'(0) = X(l) = 0$

$X'' - \lambda^2 X = 0, \qquad X'(0) = X(l) = 0$

86) Quyidagi aralash masalaga mos keluvchi Shturm-Liuvill masalasini kursating
$U_{tt}=a^2U_{xx}+f(x,t),\quad U(x,0)=\varphi(x),\quad U_t(x,0)=\psi(x),\quad U_x(0,t)-HU(0,t)=0,\quad U(l,t)=0$

$X''+\lambda^2X=0,\quad X'(0)-HX(0)=0,\quad X(l)=0$
$X''+\lambda^2X=0,\quad X(0)=X'(l)=0$
$X''+\lambda^2X=0,\quad X(0)-HX'(0)=0,\quad X(l)=0$
$X''+\lambda^2X=0,\quad X'(0)=X'(l)=0$

87) Quyidagi aralash masalaga mos keluvchi Shturm-Liuvill masalasini kursating
$U_{tt}=a^2U_{xx}+f(x,t),\quad U(x,0)=0,\quad U_t(x,0)=1,\ U(0,t)=0,\ U_x(l,t)+HU(l,t)=0$
$X''+\lambda^2X=0,\quad X(0)=0, X'(l)+HX(l)=0.$
$X''+\lambda^2X=0,\quad X(0)=X'(l)=0$
$X''+\lambda^2X=0,\quad X(0)-HX'(0)=0,\quad X(l)=0$
$X''+\lambda^2X=0,\quad X'(0)=X'(l)=0$

88) Chegaraviy sharti uchunchi tur bulgan quyidagi aralash masalaga mos Shturm-Liuvill masalasini kursating:
$U_{tt}=a^2U_{xx},\quad U(x,0)=\varphi(x),\quad U_t(x,0)=\psi(x),\ U_x(0,t)-HU(0,t)=0,\ U_x(l,t)+HU(l,t)=0$

$X''+\lambda^2X=0,\quad X'(0)-HX(0)=0,\ X'(l)-HX(l)=0\ .$
$X''+\lambda^2X=0,\quad X(0)=X(l)=0$
$X''+\lambda^2X=0,\quad X'(0)=0,\quad X'(l)=0$
$X''+\lambda^2X=0,\quad X'(0)=X(l)=0$

89) $U_{tt}=a^2U_{xx},\quad U(x,0)=0,\quad U_t(x,0)=x,\ U(0,t)=0,\ U(l,t)=0$ masalaning xos qiymatlarini kursating.

$\lambda_n=\frac{n\pi}{l},\quad n=1,2,3,...\ .$

$\lambda_n=\frac{2n\pi}{l},\quad n=1,2,3,...\ .$

$\lambda_n=\frac{(2n-1)\pi}{2l},\quad n=1,2,3,...\ .$

$\lambda_n=\frac{l}{n\pi},\quad n=1,2,3,...\ .$

90) Quyidagi chegaraviy sharti ikkinchi turdan iborat bo‘lgan aralash masalaning xos qiymatlarini kursating:
$U_{tt}=a^2U_{xx},\quad U(x,0)=x,\quad U_t(x,0)=1+x,\ U_x(0,t)=0,\ U_x(l,t)=0$

$\lambda_n=\frac{n\pi}{l},\quad n=1,2,3,...\ .$

$\lambda_n=\frac{(2n-1)\pi}{l},\quad n=1,2,3,...\ .$

$\lambda_n=\frac{l}{n\pi},\quad n=1,2,3,...\ .$

$$\lambda_n = \frac{l}{2n-1}\pi, \qquad n = 1,2,3,... \quad .$$

91) Quyidagi aralash masalaning xos qiymatlarini kursating:
$U_{tt} = a^2 U_{xx}$, $U(x,0) = \sin x$, $U_t(x,0) = \cos x$, $U\ (0,t) = 0$, $U_x(l,t) = 0$

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l}, \qquad n = 1,2,3,... \quad .$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \qquad n = 0,1,2,3,... \quad .$$

$$\lambda_n = \frac{l\pi}{n}, \qquad n = 1,2,3,... \quad .$$

$$\lambda_n = \frac{2n+1}{l}\pi, \qquad n = 0,1,2,3,... \quad .$$

92) $U_{tt} = U_{xx}$ tenglama uchun Gursa masalasi shartlarini ko‘rsating.

$$\begin{cases} U(x,t) = \varphi(x), & agar\ t + x = 0\ bo'lsa, \\ U(x,t) = \varphi(x), & agar\ t - x = 0\ bo'lsa. \end{cases}$$

$U(x,0) = \varphi(x)$, $U_t(x,0) = \psi(x)$.

$U_x(x,0) = \varphi(x)$, $U_t(x,0) = \psi(x)$.

$U_x(x,0) = \varphi(x)$, $U_x(x,0) = \psi(x)$.

93) Bir ulchovli to‘lqin tenglamasi uchun qo‘yilga Koshi masalasi yechimi qanday formula orqali beriladi?
Dalamber formulasi.
Grin formulasi.
Puasson integrali.
Krixgorf formulasi.

94) Ikki ulchovli to‘lqin tenglamasi uchun qo‘yilga Koshi masalasi yechimi qanday formula orqali beriladi?
Puasson formulasi.
Grin formulasi.
Dalamber formulasi.
Krixgorf formulasi.

95) Uch ulchovli to‘lqin tenglamasi uchun qo‘yilga Koshi masalasi yechimi qanday formula orqali beriladi?
Krixgorf formulasi.
Grin formulasi.
Puasson integrali.
Dalamber formulasi.

96) Fazoda Laplas tenglamasi uchun Grin funksiyasining kurinishi qanday buladi?

$$G(x,y) = \frac{1}{|x-y|} + g(x,y).$$

$$G(x,y) = \ln\frac{1}{|x-y|} + g(x,y).$$

$$G(x,y)=\frac{1}{|x-y|}.$$

$$G(x,y)=\ln\frac{1}{|x-y|}.$$

97) Tekislikda Laplas tenglamasi uchun Grin funksiyasining kurinishi qanday buladi?

$$G(x,y)=\ln\frac{1}{|x-y|}+g(x,y), \quad g(x,y)-garmonik\, funksiya.$$

$$G(x,y)=\frac{1}{|x-y|}+g(x,y).$$

$$G(x,y)=\frac{1}{|x-y|}.$$

$$G(x,y)=\ln\frac{1}{|x-y|}.$$

98) Fazoda Laplas tenglamasi uchun qo‘yilgan Dirixle masalasi yechimi qanday ko‘rinishda?
Puasson integrali ko‘rinishida.
Kirxgorf formulasi ko‘rinishida.
Grin formulasi ko‘rinishida.
Dalamber formulasi ko‘rinishida.

99) Tekislikda Laplas tenglamasi uchun qo‘yilgan Dirixle masalasi yechimi qanday ko‘rinishda?
Puasson integrali ko‘rinishida.
Kirxgorf formulasi ko‘rinishida.
Grin formulasi ko‘rinishida.
Dalamber formulasi ko‘rinishida.

100) Gel’mgol’ts tenglamasini ko‘rsating.

$$U_{xx}+U_{yy}+U_{zz}+k^2U=0.$$

$$U_{xx}+U_{yy}+U_{zz}=0.$$

$$U_{xx}+U_{yy}=0.$$

$$U_{tt}-U_{xx}-U_{yy}-U_{zz}=0.$$

XUSUSIY HOSILALI TENGLAMALAR

MA'RUZANING TAQDIMOT SLAYDLARI

Математик физика тенгламалари

маърузалар

Акрам Хасанович Бегматов,
профессор, ф.-м.ф.д
Дифференциал ва математик физика
тенгламалари кафедраси

1

Маъруза № 1
Ўзгармас коэффициентли 2-чи тартибли чизиқли тенгламалари

Режа:

1. Асосий таърифлар
2. 1-тартибли квазичизиқли тенгламалар
3. Мисоллар
4. Таъриф
5. Каноник кўринишга келтириш

2

Таянч иборалар

Хусусий хосилали дифференциал тенглама, тенгламанинг тарбиби, квазичизикли тенгламалар, ечим, Коши масаласи, иккинчи тартибли хусусий хосилали тенглама

3

Асосий таърифлар

- Хусусий хосилали дифференциал тенглама деб бир нечта ўзгарувчили номаълум функцияга, унинг аргументлари ва турли тартибли хусусий хосилаларига нисбатан тенгламаларга айтилади.

4

Асосий таърифлар

Агар номаълум функция ўзгарувчига боғлик бўлса, яъни $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ бўлса у холда, хусусий хосилали дифференциал тенглама

$$F\left(x_1, x_2, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0$$

кўринишга эга, бу ерда $k_1 + \dots + k_n = m$,

F – берилган функциялар. Хусусий хосилали дифференциал тенгламанинг **тартиби** деб бу тенгламага кирувчи хосилаларнинг энг юқори тартибига айтилади

5

Асосий таърифлар

n-тартибли тенглама тартиби n дан катта бўлмаган хусусий хосилаларга эга бўлади. Хусусий хосилали чизикли тенглама

$$a_1(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n)_1 \frac{\partial u}{\partial x_n} +$$

$$+ b_1(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots + b_n(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = f(x_1, \dots, x_n, u)$$

кўринишга эга. Масалан

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + xyz = 1,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$(x + \frac{\partial z}{\partial y})\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0$$

, тенгламалар чизикли булади.

1-тартибли квазичизиқли тенгламалар

Квазичизикли тенгламалар

$$a_1(x_1, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n, u)_1 \frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x_1, \dots, x_n, u) \qquad (1.1)$$

куринишга эга. Агар $f(x_1, \dots, x_n, u) \neq 0$ бўлса у холда тенглама *бир жинсли тенглама бўлмайди*, акс холда, $f(x_1, \dots, x_n, u)$ =0 бўлса, тенглама бир жинсли тенглама бўлади.

(1.1)тенглама ечиш учун

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{f} \qquad (1.2)$$

системани тузамиз. (1.2) системани ечиш жараёнида n-та биринчи интеграллар хосил қиламиз:

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_n, u) = C_i, i = 1, \dots, n$$

Тенгламани ечимини қуйидаги $F(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = 0$ функция беради, бу ерда $F(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ихтиёрий уз аргументлари буйича дифференциалланувчи функция.

7

1-тартибли квазичизиқли тенгламалар

Теорема 1.1. (1.1) тенглама ечими (1.2) оддий дифференциал тенгламалар системасининг ечимга тенг кучли, унинг n-та биринчи интеграллари ҳар биттаси алохида берилган тенгламани ечимини беради. Шунда $F(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = 0$ умумий ечим бўлади.

Теорема 1.2.

$$a_1(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n, u)_1 \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

бир жинсли тенглама ечиш учун оддий дифференциал тенгламалар системаси тузилади.

Бу системанинг ечимлари (n-1)-та биринчи интеграллардан иборат бўлади.

Қуйидаги тасдик уринли: агар $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = t$

бўлса, шунда ихтиёрий k-лар учун

$$\frac{k_1 a_1 + \dots + k_n a_n}{k_1 b_1 + \dots + k_n b_n} = t$$

(1.3) ўринли.

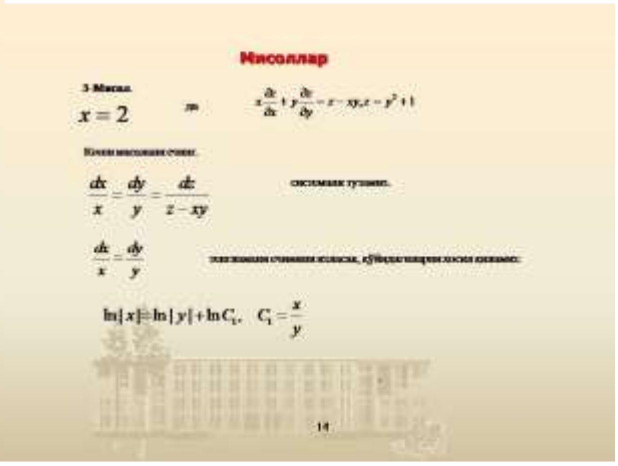
8


Мисоллар
1 Мисол.
$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial x} = 0$
$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}$
системани тузамиз. Сўнгра
$xdx + ydy = 0, \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = C, x^2 + y^2 = C$
Умумий ечими
$z = F(x^2 + y^2)$
бўлади.
9


Мисоллар
2 Мисол.
$xz\frac{\partial x}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{xy} = -xy$
$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = -\frac{dx}{xy}$
системани тузамиз.
$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \ln|x| = \ln|y| + \ln C_1$
$C_1 = \frac{z}{y}$
$\frac{k_1dx + k_2dy + k_3dz}{k_1xz + k_2yz - k_3xy} = \frac{dz}{-xy}$
10


Мисоллар
$k_1 = y, k_2 = x, k_3 = 0$
$\frac{ydx + xdy}{yxz + xyz} = \frac{dz}{-xy}, \frac{d(xy)}{2xyz} = -\frac{dz}{xy}$
Сўнгра
$d(xy) = -2zdz, xy = -z^2 + C, C = xy + z^2$
$F(x^2 + y^2, xy + z^2) = 0$
11


Мисоллар
$\begin{cases} x = x_0(t), \\ y = y_0(t), \\ z = z_0(t) \end{cases}$
$\varphi_1(x, y, z) = C_1,$
$\varphi_2(x, y, z) = C_2$
$\begin{cases} \Phi_1(t) = C_1, \\ \Phi_2(t) = C_2; \end{cases} \Leftrightarrow \Phi(C_1, C_2) = 0$
$\Phi(\varphi_1, \varphi_2) = 0$
13


Мисоллар
$x = 2$
$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy, z = y^2 + 1$
$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - xy}$
системани тузамиз.
$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$
$\ln|x| = \ln|y| + \ln C_1, \quad C_1 = \frac{x}{y}$
14

Мисоллар

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z - xy}$$

$$\frac{k_1 dx + k_2 dy + k_3 dz}{k_1 xz + k_2 yz - k_3(z - xy)} = \frac{dz}{z - xy}$$

$$k_1 = y, k_2 = x, k_3 = 0$$

$$\frac{ydx + xdy}{2xy} = \frac{dz}{z - xy}, \frac{d(xy)}{2xy} = \frac{dz}{z - xy}, \frac{1}{2}\ln|xy| = \frac{dz}{z - xy}$$

$$xy = t, dt = xdy + ydx$$

$$\frac{1}{2}\ln|t| = \frac{dt}{z - t}, \frac{1}{2}\ln|t| = \ln|z - t| + \ln C_2$$

$$C_2 = \frac{t^2}{z - t} = \frac{x^2 y^2}{z - xy}$$

$$F\left(\frac{x}{y}, \frac{x^2 y^2}{z - xy}\right) = 0$$

Мисоллар

$x = 2$ ва $z = y^2 + 1$

$$\begin{cases} 2y = C_1, \\ \dfrac{4y^2}{y^2 - 2y + 1} = C_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = C_1, \\ \dfrac{4y^2}{(y-1)^2} = C_2. \end{cases}$$

16

2 – тартибли ўзгармас коэффициентли чизикли тенгламалар

Иккинчи тартибли хусусий хосилали тенглама юкори тартибли хосилаларга нисбатан чизиқли дейилади, агар бу тенглама фақат биринчи тартибли хосилаларни ўз ичида сақласа.

$u = u(x,y)$ функцияга нисбатан иккинчи тартибли хусусий хосилали дифференциал тенглама қўйидаги умумий куринишга эга:

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \quad (1)$$

Агар $b^2 - ac > 0$ булса, (1) тенглама ***гиперболик типдаги тенглама*** (тўлкин тенглама), $b^2 - ac = 0$ бўлса, ***параболик типдаги тенглама*** (иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси), $b^2 - ac < 0$ бўлса, ***эллиптик типдаги тенглама*** (стационар тенглама)

17

2 – тартибли ўзгармас коэффициентли чизикли тенгламалар

(1) тенгламани янги ξ ва η ўзгарувчиларга формулалар бўйича ўтиш йўли билан каноник кўринишга келтириш мумкин.

x ва y ўзгарувчилари бўйича берилган хосилаларни, ξ ва η ўзгарувчилар бўйича хосилаларга алмаштирамиз. Математик физик тенгламалар курси учун характерли белгилашларни киритамиз:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

У холда

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}$$

2 – тартибли ўзгармас коэффициентли чизикли тенгламалар

$\xi(x,y)$ ва $\eta(x,y)$ функцияларни топиш учун

$$a(d\ y)^2 - 2bdxdy + c(dx)^2 + 0, \quad (2)$$

характеристик тенглама қаралади, у иккита тенгламалар системага тенг кучли:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a} \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a} \end{cases}. \qquad (3)$$

(2) эгри чизиқли интеграл тенгламалар (1) тенгламанинг характеристик тенгламалари деб аталади. Гиперболик, параболик ва эллиптик типдаги тенгламаларни каноник кўринишга келтиришни қараймиз.

19

Гиперболик типдаги тенгламаларнинг каноник шакли

1.Агар (1) тенглама гиперболик типда бўлса, (3)-чи тенгламаларнинг биринчи интеграллари

$\varphi_1(x,y) = C_1, \varphi_2(x,y) = C_2$ хақиқий ва хар хил.

Улар (1) тенгламанинг хақиқий характеристикалари иккита турли оиласини аниқлайди.

Ўгарувчиларни $\xi = \varphi_1(x,y), \eta = \varphi_2(x,y)$ алмаштириш ёрдамида, (1) тенглама гиперболик типдаги тенгламани қўйидаги **каноник** кўринишига келтирилади:

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

$\xi = \mu + \nu, \eta = \mu + \nu$ ўзгарувчиларни алмаштириш ёрдамида бошқа

$$u_{\mu\mu} - u_{\nu\nu} = \Phi(\mu, \nu, u, u_\mu, u_\nu)$$

каноник кўринишга келтирилади.

20

Мисоллар

1 мисол.

$a^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$ тенгламани каноник кўринишга келтиринг.

$b^2 - ac = 0 + x^2y^2 = x^2y^2 > 0$ бўлгани учун, бу гиперболик типдаги тенглама эканлигини аниқлаймиз. Характеристик тенглама тузамиз:

$$x^2(dy)^2\ y\ (dx)^2 = 0 \Leftrightarrow (xdy + ydx)(xdy - ydx) = 0$$

Натижа

$$(xdy + ydx) = 0, (xdy - ydx) = 0$$

дифференциал тенглама хосил қиламиз.

Ўзгарувчиларни ажратиб ва интеграллаб қўйидаги кўринишга келамиз:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0, \ln|y| + \ln|y| = \ln C_1$$

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0, \ln|y| - \ln|y| = \ln C_2$$

21

Мисоллар

Потенциаллаштиргандан кейин, икки оила характеристикалар учун тенгламаларни топамиз:

$$xy = C_1, \frac{y}{x} = C_2$$

Энди янги ўзгарувчиларни киритамиз.

$$\xi = xy, \eta = \frac{y}{x}$$

Юқорида келтирган фомулалардан фойдаланиб, эски ўзгарувчилар бўйича хусусий хосилаларни янги ўзгарувчилар бўйича хусусий хосилалар орқали ифодалаймиз:

22

Мисоллар

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = y u_\xi + \frac{y^2}{x^2} u_\eta$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = x u_\xi + \frac{1}{x} u_\eta$$

$$u_{xx} = (u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_x)y - (u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x)\frac{y}{x^2} + \frac{2y}{x^3}u_\eta = (yu_{\xi\xi} - \frac{y}{x^2}u_{\xi\eta})y -$$

$$-(yu_{\xi\eta} - \frac{y}{x^2}u_{\eta\eta})\frac{y}{x^2} + \frac{2y}{x^3}u_\eta = y^2 u_{\xi\xi} - 2\frac{y^2}{x^2}u_{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^4}u_{\eta\eta} + 2\frac{y}{x^3}u_\eta.$$

$$u_{yy} = x(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) + \frac{1}{x}(u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) = x(xu_{\xi\xi} + \frac{1}{x}u_{\xi\eta}) +$$

$$+\frac{1}{x}(xu_{\xi\eta} + \frac{1}{x}u_{\eta\eta}) = x^2 u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2}u_{\eta\eta}$$

23

Мисоллар

Берилган тенгламага хосилалар учун топилган ифодаларни қўйиб

$$x^2(y^2u_{\xi\xi} - 2\frac{y^2}{x^2}u_{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^4}u_{\eta\eta} + 2\frac{y}{x^3}u_\eta) - y^2(x^2u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2}u_{\eta\eta}) = 0$$

ни оламиз. Охирги ифодани соддалаштириб,

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi}u_\eta = 0$$

каноник кўринишга келамиз.

24

Параболик типдаги тенгламаларнинг каноник шакли

Агар (1) параболик типдаги тенглама бўлса, у холда (3) тенгламалар устма-уст тушади. Бу холда (3) система учун

битта $\varphi(x, y) = C$ биринчи интегрални хосил

қиламиз. У холда ўзгарувчиларни

$$\xi = \varphi(x,y), \eta = \psi(x,y)$$

формула буйича амалштириб оламиз, бу ерда $\psi(x, y)$ -ни

$$\begin{vmatrix} \varphi_x \ \varphi_y \\ \psi_x \psi_y \end{vmatrix} \neq 0$$

шартни қаноатлантирувчи ихтиерий функция, яъни функционал детерминант –якобиан–нолга тенг бўлмаслиги лозим.

25

Мисоллар

2-мисол. Тенгламани каноник кўринишга келтиринг.

$$z_{xx}\sin^2 x - z_{xy}2y\sin x + z_{yy}y^2 = 0$$

$b^2 - ac = y^2\sin^2 x - y^2\sin^2 x = 0$ бўлгани учун тенглама гиперболик типга қарашли.

Характеристик тенгламаси қуйидагича

$\sin^2 x(dy)^2 + 2y\sin x dxdy + y^2(dx)^2 = 0$ ёки

$(\sin xdy + ydx)^2 = 0$ кўринишга эга. Яни

$xdy + ydx = 0$ тенгламани ўзгарувчиларини ажратиб ва интеграллаб

$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0, \ln|x| + \ln tg\frac{x}{2} = \ln C, tg\frac{x}{2} = C.$ тенгламани оламиз.

26

Мисоллар

$\xi = ytg\frac{x}{2}, \eta = y$ ўзгарувчиларни алмаштириб, бу ерда y - ихтиёрий

$\begin{vmatrix} \xi_x, \xi_y \\ \eta_x, \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$ шартни қаноатлантирувчи функция. Бу функция учун хусусий хосилаларни янги ўзгарувчилар орқали ифодалаймиз.

$$z_x = z_\xi \xi_x + z_\eta \eta_x = \frac{1}{2}z_\xi y\sec^2\frac{x}{2},$$

$$z_y = z_\xi \xi_y + z_\eta \eta_y = z_\xi tg\frac{x}{2} + z_\eta,$$

$$z_{xx} = \frac{1}{2}(z_{\xi\xi}\xi_x + z_{\xi\eta}\eta_x)y\sec^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}z_\xi y\sec^2\frac{x}{2}tg\frac{x}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}z_{\xi\xi}y^2\sec^4\frac{x}{2} + \frac{1}{2}yz_\xi\sec^2\frac{x}{2}tg\frac{x}{2},$$

27

Мисоллар

$$z_{yy}=(z_{\xi\xi}\xi_y+z_{\xi\eta}\eta_y)tg\frac{x}{2}+z_{\eta\xi}\xi_y+z_{\eta\eta}\eta_y=z_{\xi\xi}tg^2\frac{x}{2}+2z_{\xi\eta}tg\frac{x}{2}+z_{\eta\eta}$$

$$z_{xy}=\frac{1}{2}(z_{\xi\xi}\xi_y+z_{\xi\eta}\eta_y)y\sec^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}z_\xi\sec^2\frac{x}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}(z_{\xi\xi}tg\frac{x}{2}+z_{\xi\eta})y\sec^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}z_\xi\sec^2\frac{x}{2}$$

ни оламиз. Олинган хусусий хосилаларини берилган дифференциал тенгламага қўямиз.

$$\frac{1}{4}z_{\xi\xi}y^2\sec^4\frac{x}{2}+\frac{1}{2}yz_\xi\sec^2\frac{x}{2}tg\frac{x}{2}-(z_{\xi\xi}tg\frac{x}{2}+z_{\xi\eta})y^2\sec^2\frac{x}{2}\sin x-$$

$$-\frac{1}{2}z_\xi y\sec^2\frac{x}{2}\sin x+y^2(z_{\xi\xi}tg^2\frac{x}{2}+2z_{\xi\eta}tg\frac{x}{2}+z_{\eta\eta})=0$$

28

Мисоллар

Соддалаштириб $\frac{1}{2}z_{\xi\xi}y\sec^2\frac{x}{2}tg\frac{x}{2}\sin^2x+y^2z_{\eta\eta}-z_\xi y\sec^2\frac{x}{2}\sin x=0$

ёки $yz_{\eta\eta}=z_\xi\sin x$ ни оламиз.

$\sin x=\dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ бўлгани учун у холда

$$tg\frac{x}{2}=\frac{\xi}{\eta},\sin x=\frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}$$

натижада $z_{\eta\eta}=\dfrac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}z_\xi$ ни хосил қиламиз

29

Эллиптик типдаги тенгламаларнинг каноник шакли

Агар (1) тенглама эллиптик типда бўлса, системанинг биринчи интеграллари қўшма комплекс кўринишда бўлади:

$$\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=C_1,\varphi(x,y)-i\psi(x,y)=C_2$$

$\xi=\varphi(x,y),\eta=\psi(x,y)$ формула буйича алмаштириш ердамида (1) тенглама

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=\Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$$

кўринишга келтирилади.

30

Мисоллар

3-мисол.

$z_{xx}-2z_{xy}+2z_{yy}=0$ тенгламани каноник кўринишга келтиринг.

$b^2-ac=1-2=-1<0$ бўлгани учун эллиптик типдаги тенглама экан.

Демак, характеристик тенглама

$$(dy)^2+2dxdy+2(dx)^2=0,y'^2+2y'+2=0$$

кўринишга эга. Уни ечиб $y+x-ix=C_1,y+x+ix=C_2$

ни топамиз. Иккита мавхум характеристикалар оилаларини хосил қиламиз:

$\xi=y+x,\eta=x$ Ўзгарувчиларни алмаштириб

$$z_x=z_\xi\xi_x+z_\eta\eta_x=z_\xi+z_\eta,$$

31

Мисоллар

$$z_y=z_\xi\xi_y+z_\eta\eta_y=z_\xi,$$

$$z_{xx}=(z_{\xi\xi}\xi_x+z_{\xi\eta}\eta_x)+(z_{\eta\xi}\xi_x+z_{\eta\eta}\eta_x)=z_{\xi\xi}+2z_{\xi\eta}+z_{\eta\eta},$$

$$z_{xy}=z_{\xi\xi}\xi_x+z_{\xi\eta}\eta_x=z_{\xi\xi}+z_{\xi\eta}$$

$$z_{yy}=z_{\xi\xi}\xi_y+z_{\xi\eta}\eta_y=z_{\xi\xi}.$$

ларга эга бўламиз. Топилган ифодаларни берилган дифференциал тенгламага қўйиб

$z_{\xi\xi}+2z_{\xi\eta}+z_{\eta\eta}-2z_{\xi\xi}-2z_{\xi\eta}+2z_{\xi\xi}=0$ ни ёки

$z_{\xi\xi}+z_{\eta\eta}=0$ ифодани оламиз.

32

Саволлар

1. *Хусусий хосилали дифференциал тенглама таъриф беринг.*
2. *Хусусий хосилали дифференциал тенглама тартиби деб нима айтилади.*
3. *Квазичизиқли дифференциал тенгалама қандай кўринишга эга?*
4. *Квазичизиқли дифференциал тенгалама умумий ечими тўғрисидаги теоремани келтиринг.*
5. *Бир жинсли ненгламанинг ечими тўғрисидаги теоремани келтиринг.*
6. *Иккинчи тартибли хусусий хосилали тенглама қачон чизиқли дейилади?*
7. *Хусусий хосилали дифференциал тенглама қачон гиперболик типдаги тенглама дейилади?*
8. *Хусусий хосилали дифференциал тенглама қачон параболик типдаги тенглама дейилади?*
9. *Хусусий хосилали дифференциал тенглама қачон эллиптик типдаги тенглама дейилади?*
10. *Математик физик тенгламалар курси учун характерли белгиларини келтиринг.*
11. *2–чи тартибли ўзгармас коэффициентли гиперболик типдаги тенгламани каноник шаклига келтириш йўлини айтинг.*
12. *2–чи тартибли ўзгармас коэффициентли параболик типдаги тенгламани каноник шаклига келтириш йўлини айтинг.*
13. *2–чи тартибли ўзгармас коэффициентли эллиптик типдаги тенгламани каноник шаклига келтириш йўлини айтинг.*

Математик физика тенгламалари

маърузалар

Маъруза № 2.

Мавзу:

ГИПЕРБОЛИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР.

Маъруза № 2
ГИПЕРБОЛИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР.

Режа:

1. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилали тенгламаларнинг классификацияси.
2. Тебраниш тенгламаси учун масаланинг қуйилиши.
3. Даламбер формуласи. Коши масаласи ечимининг мавжудлиги турғунлиги ва ягоналиги.
4. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилали тенгламаларнинг характеристикаси.
5. Ярим тўғри чизиқдаги масала. Давом эттириш методи.

Таянч иборалар

хусусий хосилали теглама,
классификация,
тебраниш тенгламаси, Даламбер формуласи,
Коши масаласи, характеристика,
давом эттириш.

1. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилали тенгламаларнинг классификацияси

Ўтган маърузада берилган таърифларни эслаймиз.

Таъриф: *E^2 фазода иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларга эга бўлган бирор бир функция* $U(x,y)$ *берилган(бунда* $U_{xy}=U_{yx}$ *) бўлсин.*

Шунда хусусий ҳосилали умумий тенглама деб

$$F\left(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{yy}\right)=0$$

тенгламага айтилади. Бунда F қандайдир функция. Квазичизиқли тенглама унинг хусусий ҳолидан иборат

$$a_{11}\left(x,y,u,u_x,u_y\right)u_{xx}+2a_{12}\left(x,y,u,u_x,u_y\right)u_{xy}+$$
$$+a_{22}\left(x,y,u,u_x,u_y\right)u_{yy}+F_1\left(x,y,u,u_x,u_y\right)=0$$

1. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилали тенгламаларнинг классификацияси

Таъриф: Агар $f = 0$ бўлса шунда (2.1) тенглама бир жинсли тенглама акс ҳолда бир жинсли бўлмаган тенглама деб айтилади.

Таъриф: (x_0, y_0) нуқтада (2. 1) тенглама қуйидагича аниқланади.

1. Агар

$$a_{12}^2(x_0, y_0) - a_{11}(x_0, y_0)a_{22}(x_0, y_0) > 0$$

бўлса **гиперболик тицдаги бўлади.**

2. Агар

$$a_{12}^2(x_0, y_0) - a_{11}(x_0, y_0)a_{22}(x_0, y_0) < 0$$

бўлса **эллиптик тицдаги бўлади.**

3. Агар

$$a_{12}^2(x_0, y_0) - a_{11}(x_0, y_0)a_{22}(x_0, y_0) = 0$$

бўлса **параболик тицдаги бўлади.**

5

1. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилали тенгламаларнинг классификацияси

Тенгламанинг типи маълум бир соҳа учун ҳам худди шундай аниқланади: (2.1) тенглама соҳада (гиперболик), (эллиптик), [параболик] тицдаги деб аталади, агар шу соҳа барча нуқталарда

$$a_{12}^2(x_0, y_0) - a_{11}(x_0, y_0)a_{22}(x_0, y_0) > 0(<0)[=0]$$

бўлса.

Агар тенглама соҳанинг ҳар хил нуқталарида ҳар хил типга эга бўлса, бунда у шу соҳада аралаш тицдаги тенглама тейилади.

6

2. Тебраниш тенгламаси учун масаланинг қуйилиши.

Бизлар гиперболик тицдаги тенгламани кўриб чиқамиз.

Фараз қилайлик $u(x,t) \in C^2 \ ((x,t): 0 < x < l, t > 0)$ бўлсин, шунда

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ ((x,t): 0 < x < l, t > 0) \quad (2.1)$$

Тенглама *идеал торнинг тебраниш тенгламаси* дейилади.

Икки фазовий ўзгарувчиларнинг функцияси $u(x, y, t)$ ҳолида:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \ (x, y) \in D, t > 0$$

бу эластик мембрананинг тебраниш тенгламаси.

(2. 1) тенгламани қараймиз. Биз қуйидаги бошланғич шартларни беришимиз мумкин:

$$\begin{cases} u \ (x,0) = \phi(x), \ 0 < x < l; \\ u_t \ (x,0) = \varphi(x), \ 0 < x < l, \end{cases}$$

– *торнинг мувозанат ҳолатидан четланишини ифодалайди;*

ва чегаравий шартларни:

$$\begin{cases} u \ (l,t) = \mu \ (t), \ t > 0; \ (\text{маҳкамланган ҳолда } \mu = 0) \\ u_x \ (l,t) = \nu \ (t), \ t > 0; \\ u \ (l,t) + \alpha \ u_x(l,t) = \theta \ (t), \ t > 0 \end{cases}$$

одатда бизлар улардан баъзиларини оламиз.

7

2. Тебраниш тенгламаси учун масаланинг қуйилиши.

Гиперболик ёки тебраниш тенгламалар учун чегаравий масалалар тузамиз. **Биринчи чегаравий масала.**

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \ 0 < t \le T; \\ u \ (x,0) = \phi \ (x), & 0 \le x \le l; \\ u_t \ (x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le l; \\ u \ (0,t) = \mu_1(t), & 0 \le t \le T; \\ u \ (l,t) = \mu_2(t), & 0 \le t \le T; \end{cases}$$

8

2. Тебраниш тенгламаси учун масаланинг қуйилиши.

Худди шуни ўзи ***ярим тўғри чизиқ*** учун:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\, u_{xx}, & x > 0,\ 0 < t \le T; \\ u\,(x,0) = \phi\,(x), & x \ge 0; \\ u_t\,(x,0) = \varphi(x), & x \ge 0; \\ u\,(0,t) = \mu(t), & 0 \le t \le T; \end{cases}$$

Шунингдек оддий **Коши масаласини** қарайш мумкин:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\, u_{xx}, & -\infty < x < +\infty,\ 0 < t \le T; \\ u\,(x,0) = \phi\,(x), & -\infty < x < +\infty; \\ u_t\,(x,0) = \varphi(x), & -\infty_0 < x < +\infty. \end{cases}$$

3. Даламбер формуласи. Коши масаласи ечимининг мавжудлиги турғунлиги ва ягоналиги.

Бизлар тебраниш тенгламаси учун Коши масаласини қараймиз.

$$[1.1]\ \begin{cases} (1)\quad u_{tt} = a^2\, u_{xx}, & -\infty < x < +\infty,\ 0 < t \le T; \\ (2)\quad u\,(x,0) = \phi\,(x), & -\infty < x < +\infty; \\ (3)\quad u_t\,(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Фараз қилайлик, $u \in C^2\left(R \times R^+\right)$ функция бўлиб, у [1.1] Коши масаласининг ечими бўлсин. Янги $\xi,\ \eta$ ўзгарувчиларни қўйидагича аниқлаймиз:

$$\begin{cases} \xi = x + at; \\ \eta = x - at; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\xi + \eta}{2}; \\ t = \dfrac{\xi - \eta}{2a}. \end{cases}$$

10

3. Даламбер формуласи. Коши масаласи ечимининг мавжудлиги турғунлиги ва ягоналиги.

Янги функцияни аниқлаймиз: $v(\xi,\eta) = u\left(\dfrac{\xi+\eta}{2}, \dfrac{\xi-\eta}{2a}\right)$

Бу функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз.

$$v_\xi = u_x\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2a}\right)\frac{1}{2} + u_t\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2a}\right)\frac{1}{2a};$$

$$v_{\xi\eta} = u_{xx}\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2a}\right)\frac{1}{4} + u_{xt}\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2a}\right)\left(-\frac{1}{4a}\right)$$

$$+u_{tx}\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2a}\right)\frac{1}{4a} + u_{tt}\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2a}\right)\left(-\frac{1}{4a}\right) =$$

$$= u_{xx}\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2a}\right)\frac{1}{4} - \frac{1}{4a}u_{tt}\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2a}\right) =$$

$$\{\textit{тебраниш тенгламаси}\} =' 0;$$

3. Даламбер формуласи. Коши масаласи ечимининг мавжудлиги турғунлиги ва ягоналиги.

Энди тескари интеграллашни амалга оширамиз:

$$v_{\xi\eta}(\xi,\eta) = 0, \quad \overset{\xi\ \text{бўйича интег-я}}{\Longrightarrow} \quad v_\eta(\xi,\eta) = \bar{f}_1(\eta) \quad \Longrightarrow$$

$$\overset{\eta\ \text{бўйича интег-я}}{\Longrightarrow} \quad v(\xi,\eta) = \int \bar{f}_1(\eta)d\eta + f_2(\xi)$$

$$\Rightarrow v(\xi,\eta) = f_1(\eta) + f_2(\xi) \Rightarrow \{u(x,t) = v(x+at, x-at)\} \Rightarrow$$

$$u(x,t) = f_1(x-at) + f_1(x+at), \quad (2.2)$$

бу ерда $\bar{f}_1, f_1, f_2$ -лар интеграллаш давомида ҳосил бўладиган функциялар.

Шундай қилиб биз тебраниш тенгламаси ечими бўлган u функциянинг умумий кўринишини ҳосил қилдик.

12

3. Даламбер формуласи. Коши масаласи ечимининг мавжудлиги турғунлиги ва ягоналиги.

Бошлангич шартлардан фойдаланиб f_1, f_2 -ларни аниқлаймиз:

$$\begin{cases} u\ (x,\ 0) = f_1(x) + f_2(x) = \phi(x); \\ u_t(x,\ 0) = -af_1'\ (x) + af_1'\ (x) = \varphi(x); \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -f_1(x) + f_2(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x} \varphi(\xi)d\xi + C \\ f_1(x) + f_2(x) = \phi(x). \end{cases}$$

Системадаги тенгламаларни қўшиб ва биридан бирини айириб қуйидагини хосил қиламиз.

13

3. Даламбер формуласи. Коши масаласи ечимининг мавжудлиги турғунлиги ва ягоналиги.

$$\begin{cases} f_2(x) = \dfrac{\phi(x)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x} \varphi(\xi)d\xi + \dfrac{c}{2}; \\ f_1(x) = \dfrac{\phi(x)}{2} - \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x} \varphi(\xi)d\xi - \dfrac{c}{2}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{u\ \ (x,\ t) = f_1(x - at) + f_2(x + at)\} \Rightarrow$$

$$u\ (x,\ t) = \frac{\phi(x-at) + \phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi)d\xi \quad (2.3)$$

(2.3) формула **Даламбер формуласи** дейилади.

14

3. Даламбер формуласи. Коши масаласи ечимининг мавжудлиги турғунлиги ва ягоналиги.

Теорема 2. 1 (Коши масаласи ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги). *Фараз қилайлик* $\phi(x) \in C^2(R),\ \varphi(x) \in C^1(R)$

[1. 1] Коши масаласининг ечимидан иборат шундай $u(x,y)$ *функция мавжуд ва ягонадирки, бунда* $u \in C^2\left(R \times \bar{R}^+\right)$

Бу ерда $\phi(x),\ \ \varphi(x)$

функциялар бошлангич шартларни аниқлайди.

Исбот: Ечимнинг ***мавжудлиги*** (1)-(3) шартлардан фойдаланиб ва теорема шартларидан фойдаланган холда бевосита ўрнига қўйиш билан текширилиб кўрилади. ***Ягоналиги*** қўйидаги мулахозалардан келиб чиқади: (1)-(3) шартларни қаноатлантирувчи ихтиёрий функция учун Даламбер формуласи бўйича ифодаси хаққонийдир, бу ифода эса фақат битта функцияни кўзда тутади. □

15

3. Даламбер формуласи. Коши масаласи ечимининг мавжудлиги турғунлиги ва ягоналиги.

Теорема 2.2 (Турғунлик теоремаси). Фараз қилайлик

$\phi_1, \phi_2\ (x) \in C^2(R),\ \varphi_1, \varphi_1\ (x) \in C^1(R)$

ва улар R фазода чегараланган бўлсин. Агар $u_1, u_2\ (x,t)$

функциялар [1.1] типдаги масаланинг ечимлари вам мос равишда $\phi_1, \phi_2, \varphi_1, \varphi_2$ бошлангич шартлар билан берилган ечимлари бўлса, шунда

$$\sup_{x\in R,\, 0\le t\le T} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \sup_{x\in R} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| + T\sup_{x\in R} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$$

бўлади. **Исбот.**

u_1, u_1 учун (2.3) Даламбер формуларидан келиб чиқадики:

16

3. Даламбер формуласи. Коши масаласи ечимининг мавжудлиги тургунлиги ва ягоналиги.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ \left((x,t): 0 < x < l, t > 0\right)$$

$$|u_1 - u_2| \le \left| \frac{\phi_1(x+at) - \phi_2(x+at)}{2} \right| + \left| \frac{\phi_1(x+at) - \phi_2(x+at)}{2} \right| +$$

$$+ \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)| d\xi \le \sup_{x \in R} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| +$$

$$+ \sup_{x \in R} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} d\xi \le \sup_{x \in R} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| + \sup_{x \in R} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| T$$

Теорема исботланди. □

17

4. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилали тенгламаларнинг характеристикалари.

Иккинчи тартибли хусусий ҳосилали классик тенглама қуйидаги кўринишга эга:

$$a_{11}(x,y)U_{xx} + 2a_{12}(x,y)U_{xy} + a_{22}(x,y)U_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y) \quad (2.4)$$

Унга бир қийматли мослик билан қўйидаги оддий дифференциал тенгламани қўямиз:

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}\,dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0 \quad (2.5)$$

Шунда (2.5)нинг ечимлари бўлган функциялар (эгри чизиқлар) (2.4) тенгламанинг ***характеристикалари*** дейилади. Масалан $a^2 U_{xx} - U_{tt} = 0$ тебраниш тенгламаси учун характеристикалар ҳосил қилинадиган тенглама $a^2(dt)^2 - (dx)^2 = 0$ кўринишга эга.

4. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилали тенгламаларнинг характеристикалари.

Ундан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{bmatrix} a\,dt + dx = 0; \\ a\,dt - dx = 0. \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x + at = const\ ; \\ x - at = const\ . \end{bmatrix}$$

Булар гиперболик типдаги тенгламаларнинг характеристикаларидан иборат икки тўғри чизиқдир.

Фараз қилайлик *u (x, t)* функция маълум бир Коши масаласининг ечими бўлсин. ОХТ текислигининг биринчи чорагида ихтиёрий (x_0, y_0) нуқта оламиз. Бу нуқтадан фақат иккита характеристика ўтади:

$$x - at = x_0 - at_0,\ x + at = x_0 + at_0$$

Улар ОХ ўқини $(x_0 + at_0, 0)$, $(x_0 - at_0, 0)$ нуқталар орқали кесиб ўтиб, бунда характеристик учбурчакни ҳосил қилади.

19

4. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилали тенгламаларнинг характеристикалари

u (x, t) функция учун $u(x_0, t_0)$ нуқтада (2.3) Даламбер формуласини ёзиб

$$u(x_0, t_0) = \frac{\phi(x_0 - t_0) + \phi(x_0 + t_0)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} \varphi(\xi) d\xi$$

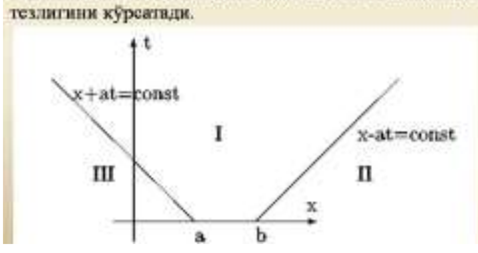
ҳосил қиламизки, *u (x, t)* функциянинг қймати фақат характеристик учбурчакнинг асосидаги $\phi(x)$, $\varphi(x)$ қийматлари билан аниқланади.

Бу гиперболик типдаги тенгламаларнинг мухим ўзига хос хусусият. Уни қўидаги мисолда тушиниб олиш мумкин.

20

4. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилали тенгламаларнинг характеристикалари

Фараз қилайлик $\phi(x)$, $\varphi(x)$ функциялар бирор [a, b] кесманинг ташқарисида 0га тенг бўлсин. Шунда II, III соҳаларда *u (x, t)* функция ҳам 0 га айнан тенг бўлади. Бу Даламбер формуласидан осонгина кўриш мумкин. Ушбу факт (далил) гиперболик тенгламадаги *u (x, t) сигнал (хабар)ни* тарқалишининг (*x* ўқи бўйича) (*t* вақт мобайнидаги) охиридаги тезлигини кўрсатади.



4. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилали тенгламаларнинг характеристикалари

Аксинча иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун берилган Коши масаласида

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x) & -\infty > x > \infty, \end{cases}$$

ечим, кейинчлик кўрсатадиганидек, қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2}\right) \phi(s) ds$$

Кўриниб типибдики, агар $\phi(s)$ функция узлуксиз, манфий бўлмаган ва бирор нуқтада 0 дан фарқли бўлса, унда $u(x,t) > 0, \quad \forall t > 0$ бўлади.

Яъни биз шуни ҳосил қилдикки иссиқлик ўказувчанлик тенгламаси ҳолида сигнал (хабар) амалда дарҳол (мгновенно) тарқалади.

22

5. Ярим тўғри чизиқдаги масалалар. Давом эттириш усули.

Биринчи чегаравий масала. Ярим тўғри чизиқдаги бир жинсли шартга эга бўлган тебраниш тенгламаси учун биринчи чегаравий масала қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{cases} (1) \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, t < 0; \\ (2) \quad u(x,t) = 0, & t < 0; \\ (3) \quad u(x,0) = \phi(x), & x \geq 0; \\ (4) \quad u_t(x,0) = \varphi(x), & x \geq 0; \end{cases}$$

$u(x, t)$ ва $u_t(x, t)$ функцияларнинг 0да узлуксизлигини таъминлаш учун

$$\begin{cases} \phi(0) = 0, \\ \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

боғланиш шартларини қўшамиз (условия сопряжения).

5. Ярим тўғри чизиқдаги масалалар. Давом эттириш усули.

Модификацияланган Коши масаласини қараймиз.

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), & -\infty < x < \infty, \ t > 0; \\ u(x,0) = \Phi(x), \\ u(x,0) = \Psi(x). \end{cases}$$

Бу ҳолда $U(x,t)$ ни топиш учун биз Даламбер формуласидан фойдаланамиз.

$$U(x, t) = \frac{\Phi(x - at) + \Phi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi.$$

$x, t \geq 0$ да бизга керакли $u(x, t)$ функция сифатида $U(x, t)$ функцияни оламиз. Кўриниб тиғибдики (1), (3) ва (4) шартлар $x, t \geq 0$ бўлганда бирданига бажарилади,

25

5. Ярим тўғри чизиқдаги масалалар. Давом эттириш усули.

бу $\Psi(x), \Phi(x)$ ларни тарифидан келиб чиқади. (2) шартнинг бажрилиши қуйидаги алмаштиришлардан келиб чиқади.

$$u(0,t) \stackrel{def}{=} U(0,t) = \frac{\Phi(-at) + \Phi(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \Psi(\xi) d\xi.$$

1-чи ва 2-чи қўшилувчилар тегишли функцияларнинг тоқлиги сабабли нольга айланади. Бу эса 2чи шартнинг бажарилишини кўрсатади. Шундай қилиб бизлар тузган $u(x, t)$ функция **биринчи чегаравий** масалаларнинг ечими эканлигини исботладик.

$\Psi(x), \Phi(x)$ функцияларни мос равишда исходные функциялар $\phi(x), \varphi(x)$ орқали ифодалаймиз:

26

5. Ярим тўғри чизиқдаги масалалар. Давом эттириш усули.

$$Агар \quad x \ge at \quad бўлса \begin{cases} \Phi(x+at) = \phi(x+at); \\ \Phi(x-at) = \phi(x-at); \\ \quad \Psi(\xi) = \varphi(\xi), \quad агар \quad \xi \in [x-at; x+at] \, бўлса \end{cases}$$

$$Агар \quad x < at \quad бўлса \begin{cases} \Phi(x+at) = \phi(x+at); \\ \Phi(x-at) = -\phi(x-at); \end{cases}$$

Биринчи чегаравий масалани ечиш учун қуйидаги ёрдамчи формулани ёзамиз.

$$Агар \ x < at \ бўлса \ унда \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)d\xi = \int_{x-at}^{0} \Psi(\xi)d\xi + \int_{0}^{x+at} \Psi(\xi)d\xi =$$

$$= \int_{x-at}^{0} -\varphi(-\xi)d\xi + \int_{0}^{x+at} \varphi(\xi)d\xi =$$

$$= \{-\xi = \xi \ деб \ оламиз\} = \int_{at-x}^{0} \varphi(\xi)d\xi + \int_{0}^{x+at} \varphi(\xi)d\xi = \int_{at-x}^{at+x} \varphi(\xi)d\xi$$

5. Ярим тўғри чизиқдаги масалалар. Давом эттириш усули.

Шунда умумий формула қуйидагича бўлади:

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\phi(x+at)+\phi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi)d\xi, & x \ge at; \\ \dfrac{\phi(at+x)-\phi(at-x)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-xt}^{at+xt} \varphi(\xi)d\xi, & x < at; \end{cases}$$

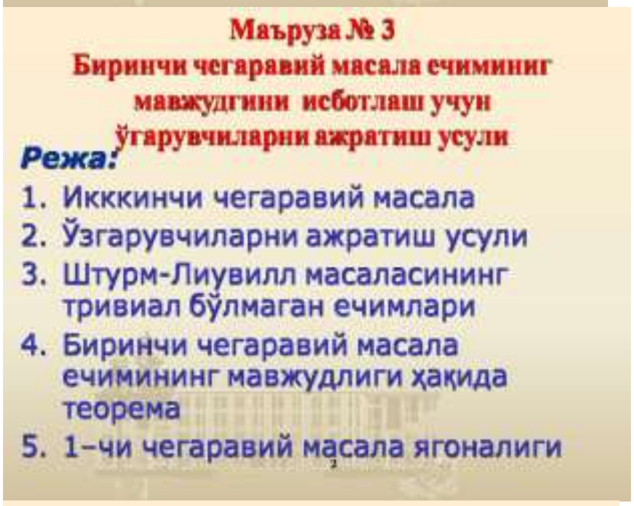
28

Саволлар.

1. *Хусусий ҳосилали умумий тенглама деб нимага айтилади?*
2. *Хусусий ҳосилали чизиқли тенгламага таъриф беринг.*
3. *Бир жинсли хусусий ҳосилали тенглама таърифини беринг.*
4. *Хусусий ҳосилали тенгламалар учун классификацияни келтиринг.*
5. *Тебраниш тенгламаси учун масаланинг қўйилиши.*
6. *Идеал торнинг тебраниш тенгламасини келтиринг.*
7. *Биринчи чегаравий масала.*
8. *Тебраниш тенгламаси учун Коши масаласи.*
9. *Даламбер формуласини ёзинг.*
10. *Коши масаласи ечимининг мавжудлиги турғунлиги ва ягоналиги тўғрисидаги теорема.*
11. *Турғунлик теоремаси*
12. *Иккинчи тартибли хусусий ҳосилали тенгламаларнинг характеристикалари*
13. *Ярим тўғри чизиқдаги бир жинсли биринчи чегаравий шартга эга бўлган тебраниш тенгламаси учун чегаравий масаланинг қўйилиши.*
14. *Биринчи чегаравий масалани ечимини келтиринг*

29


Математик физика тенгламалари
маърузалар
Маъруза № 3.
Мавзу:
Биринчи чегаравий масала
ечимининг мавжудгини исботлаш
учун ўзгарувчиларни ажратиш усули
1


Маъруза № 3
Биринчи чегаравий масала ечиминиг
мавжудгини исботлаш учун
ўгарувчиларни ажратиш усули
Режа:
1. Икккинчи чегаравий масала
2. Ўзгарувчиларни ажратиш усули
3. Штурм-Лиувилл масаласининг тривиал бўлмаган ечимлари
4. Биринчи чегаравий масала ечимининг мавжудлиги ҳақида теорема
5. 1–чи чегаравий масала ягоналиги
2


Таянч иборалар
чегаравий масала,
ўзгарувчиларни ажратиш,
усул,
Штурм-Лиувилль масаласи,
мавжудлик теоремаси,
ягоналик теоремаси
3

1. Иккинчи чегаравий масала

Ярим тўғри чизиқдаги бир жинсли чегаравий шарт билан берилган иккинчи чегаравий масала қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{cases} (1) \quad u_{tt} = a^2 U_{xx}, x > 0, t > 0 \\ (2) \quad u_x(0,t) = 0, t \ge 0; \\ (3) \quad u(x,0) = \phi(x), x \ge 0; \\ (4) \quad u_t(x,0) = \psi(x), x \ge 0. \end{cases}$$

Олдинги ҳолдагидай ҳаракат қиламиз. Лекин бизларни фақат жуфт давом эттириш қаноатлантиради:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x), x \ge 0; \\ \phi(-x), x < 0. \end{cases} \qquad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), x \ge 0; \\ \psi(-x), x < 0. \end{cases}$$

1. Иккинчи чегаравий масала

Янги Коши масаласи ва унинг учун Даламбер формуласи бўйича ечими 2-чи маърузада кўрсатганимиздек бўлади:

$$U(x,t) = \frac{\Phi(x-at) + \Phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)d\xi.$$

Олдинги ҳолдагидек,

$u(x,t) = U(x,t), \quad x, y > 0$ бўлсин. У ҳолда (1), (3), (4) шартларнинг бажарилиши аён. (2) шартни текширамиз. Даламбер формуласини дифференциалласак ва $\Psi(t)$ жуфт функциянинг ҳосиласи тоқ функция бўлишини инобатга олиб, қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$u_x(0,t) = U_x(0,t) = \frac{\Phi'(at) + \Phi'(-at)}{2} + \frac{1}{2a}[\Psi(at) - \Psi(-at)]$$

$\Phi'(t)$ тоқлигидан ва $\Psi(t)$ жуфтлигидан кўринадики иккала ҳад ҳам нолга тенг.

$u(x,t)$ учун умумий формула шуққа ўхшаш олинади.

2. Ўзгарувчиларни алмаштириш усули

$[0,l]$ кесмада ортонормаллашган функциялар системаларини қараймиз.

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin(\frac{\pi n}{l}x)\right\}, n = 1,2,3,... \qquad \left\{\frac{1}{\sqrt{l}}\sqrt{\frac{2}{l}}\cos(\frac{\pi n}{l}x)\right\}, n = 1,2,3,...$$

Фурье коэффициентларини қуйидагича аниқланади:

$$\phi_n = \int_0^l \phi(s)\sin(\frac{\pi n}{l}s)ds; \qquad \bar{\phi}_n = \int_0^l \phi(s)\cos(\frac{\pi n}{l}s)ds.$$

У ҳолда, математик анализ курсидан маълумки, агар $\phi(x) \in C[a,b]$ бўлса $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^2$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\phi}_n^2$ қаторлар яқинлашади.

2. Ўзгарувчиларни алмаштириш усули

Буни эслаб қоламиз ва бир жинсли чегаравий шартлар билан берилган бир жинсли тебраниш тенгламаси учун биринчи чегаравий масалага ўтамиз:

$$[1.2]\begin{cases} (1) \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, t > 0; \\ (2) \quad u(0,t) = u(l,t) = 0, t \ge 0; \\ (3) \quad u(x,0) = \phi(x), 0 \ge x \ge l; \\ (4) \quad u_t(x,0) = \psi(x), 0 \ge x \ge l. \end{cases}$$

Унинг ечимини қуйидаги усул билан топамиз: бирор $u(x,t)$ функцияга келтирувчи алмаштиришларни бажарамиз, сўнгра маълум бир шартларни қаноатлантирувчи $\phi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар учун бу функция мавжуд бўлишини ва берилган масала ечими эканлигини исботлаймиз.

2. Ўзгарувчиларни алмаштириш усули

Ечимни $v(x,t) = X(x)T(t)$ кўринишда излаймиз. Бу ерда айнан тенг бўлмаган функция бўлсин.

$v(x,t)$ ни тебраниш тенгламасига қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$T''(t)X(x) = a^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda$$

бу ерда λ қандайдир ўзгармас сон. Бу айниятлардан иккита тенглама келиб чиқади:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 < x < l; \\ T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, t > 0. \end{cases}$$

$X(0) = X(l) = 0$ да

$v(x,t)$ функция (2) шартни қаноатлантиради.

8

3. Штурм – Лиувилл масаласи

Қуйидаги
$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 \le x \le l; \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

Штурм – Лиувилл масаласининг тривиал бўлмаган ечимларни топамиз.

Иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун ечимни чиқаришда, қуйидаги хос қийматлар ва уларга мос хос функциялар тўғри келади (буни бизлар кейинчалик кўрсатамиз):

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2; \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), n = 1, 2, \ldots$$

Топилган λ_n ларни $T(t)$ учун тузилган тенгламага қўямиз:

$$T_n''(t) + \left(\frac{\pi n}{l} a\right)^2 T_n(t) = 0 \Rightarrow T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} at\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} at\right),$$

бу ерда a_n ва b_n лар қандайдир ўзгармаслар.

9

3. Штурм – Лиувилл масаласи

Шундай қилиб (1), (2) шартлар қаноатлантирадиган $X_n(x), T_n(t)$ функцияларни топдик. $v_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ деб оламиз. Равшанки, бу функция учун ҳам (1), (2) шартлар бажарилади. (3), (4) шартлардан a_n, b_n константаларни

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ деб оламиз;

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)\left[a_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} at\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} at\right)\right];$$

$$\phi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \Rightarrow a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds;$$

10

3. Штурм – Лиувилл масаласи

$$\psi(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \frac{\pi n a}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \Rightarrow \frac{\pi n a}{l} b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds \Rightarrow$$

$$b_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds.$$

Натижада, константаларни топдик, энди тўла формулани ёзамиз;

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\frac{2}{l} \int_0^l \cos\left(\frac{\pi n}{l} s\right) \phi(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds + \\ + \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \sin\left(\frac{\pi n}{l} at\right) \psi(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds\Big] \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \tag{1.6}$$

Энди бу формула коррект бўладиган шартларни ифодалаймиз.

11

4. Мавжудлик теоремаси

Теорема 1.3. (мавжудлик)

$$\phi(x)\in C^3[0;l],\ \phi(0)=\phi(l)=\phi''(0)=\phi''(l)=0;$$

$$\psi(x)\in C^2[0;l],\ \psi(0)=\psi(l)=0.$$

бўлсин. У ҳолда (1.6) формула билан аниқланадиган $u(x,t)$ функция қуйидаги хоссаларга эга:

$$u(x,t)\in C^2\{[0;l]\times[0;t]\}\ (T-\textit{ихтиёрий}>0)$$

ва (1)-(4) шартларни қаноатлантиради ([1.2] чегаравий масала ечими бўлади).

Исбот: $u(x,t)\in C^2\{[0;l]\times[0;T]\}$

эканлигини исботлаймиз;

4. Мавжудлик теоремаси

$$\phi_n=\int_0^l \phi(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds=\{\textit{бўлаклаб интеграллаймиз}\}=$$

$$=-\phi(s)\frac{l}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{l}s\right)\Big|_0^l+\frac{l}{\pi n}\int_0^l \phi'(s)\cos\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds=$$

$$=\{\ \textit{яна бир марта бўлаклаб интеграллаймиз}\ \}=$$

$$=\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\phi'(s)\sin\left(\frac{l}{\pi n}s\right)\Big|_0^l-\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\int_0^l \phi''(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds=$$

$$=\left(\frac{l}{\pi n}\right)^3\phi''(s)\cos\left(\frac{\pi n}{l}s\right)\Big|_0^l-\left(\frac{l}{\pi n}\right)^3\int_0^l \phi'''(s)\cos\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds.$$

$$\tilde{\phi}_n=\int_0^l \phi'''(s)\cos\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds.\qquad n^3|\phi_n|=\left(\frac{l}{\pi}\right)^3|\tilde{\phi}_n|.$$

4. Мавжудлик теоремаси

Юқорида айтиб ўтилган хоссага кўра $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\phi}_n^2$ қатор яқинлашади. Бундан $\sum_{n=1}^{\infty}n^2|\phi_n|$ қаторнинг яқинлашувчилиги келиб чиқишини кўрсатамиз:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2|\phi_n|=\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|\tilde{\phi}_n|\le\left\{ab\le\frac{a^2+b^2}{2}\right\}\le\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\left[\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\phi}_n^2\right]$$

Шундай қилиб, бизда иккала қатор ҳам яқинлашувчи қаторлар, шунинг учун $\sum_{n=1}^{\infty}n^2|\phi_n|$ қатор мажорант аломатига кўра яқинлашади. Шунга ўхшаш

$$\psi_n=\int_0^l \psi(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds=\{\ \textit{бўлаклаб интеграллаймиз}\ \}=$$

4. Мавжудлик теоремаси

$$=-\psi(s)\frac{l}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds\Big|_0^l+\frac{l}{\pi n}\int_0^l \psi'(s)\cos\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds=$$

$$=\{\ \textit{яна бир марта бўлаклаб интеграллаймиз}\}=$$

$$=\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\psi'(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)\Big|_0^l-\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\int_0^l \psi''(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds$$

Шунга ўхшаш, $\sum_{n=1}^{\infty}n|\psi_n|$ қаторнинг яқинлашишини кўрсатиш мумкин. $\left|\cos\left(\frac{\pi n}{l}st\right)\right|$ ни бир билан чегаралаб, $u(x,t)$ учун (1.6) қатор Вейерштрасс аломатига кўра текис яқинлашади (мажорант бўлиб

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}|\phi_n|+\frac{2}{\pi n a}|\psi_n|\right]$$

яқинлашувчи қатор ҳисобланади).

4. Мавжудлик теоремаси

Бундан ташқари $u(x,t)$ бу ҳолда $[0;l]\times[0;T]$ да узлуксиз. Шунга ўхшаш x бўйича биринчи ва иккинчи ҳосилалар мавжудлиги ва узлуксизлиги учун (1.6) формуладаги мос ҳосилалардан иборат қаторнинг текис яқинлашишини кўрсатиш етарли. x бўйича дифференциаллаб, қуйидагиларни оламиз.

$$u_x(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{l}\left[\frac{2}{l}\int_0^l\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)\phi(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds+\frac{2}{\pi na}\int_0^l\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)\psi(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds\right]\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

$$u_{xx}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\left[\frac{2}{l}\int_0^l\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)\phi(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds+\frac{2}{\pi na}\int_0^l\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)\psi(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds\right]\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

16

4. Мавжудлик теоремаси

У ҳолда (Вейерштрасс аломатига кўра)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{l}\left(\frac{2}{l}|\phi_n|-\frac{2}{\pi na}|\psi_n|\right),\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\left(\frac{2}{l}|\phi_n|-\frac{2}{\pi na}|\psi_n|\right)$$

қаторлар яқинлашишини кўрсатиш етарли. У $\sum_{n=1}^{\infty}n^2|\phi_n|$ ва $\sum_{n=1}^{\infty}n|\psi_n|$ қаторлар учун ҳозир исбот қилинган хоссалардан келиб чиқади.

Шунинг учун ўша мулоҳазаларни t бўйича ҳосилалар учун ўтказиб, натижада $u(x,t)\in C^2\{[0,l]\times[0,T]\}$ ни ҳосил қиламиз Бу ҳолда осон текшириш мумкинки (1.6) формула билан белгиланадиган $u(x,t)$ функция тебраниш тенгламасини қаноатлантиради (яъни (1) шартни).

17

4. Мавжудлик теоремаси

Бундай $u(x,t)$ функция (2)-(4) шартларни қаноатлантиришини кўришдан қурилади – чегаравий ва бошланғич шартлар ҳисобга олинган.

Теорема исботланди.

Шундай қилиб, ечим қурилди. Баъзи шартларда бу ечим ягона эканлигини исботлаймиз.

18

1–чи чегаравий масала ягоналиги

Қўйидаги умумий 1–чи чегаравий масалани қараймиз:

$$[1.3]\quad\begin{cases}U_{tt}=a^2U_{xx}+f(x,t), & 0<x<l,\quad 0<t<T\\ U(0,t)=\mu_1(t), & 0\le t\le T;\\ U(l,t)=\mu_2(t), & 0\le t\le T;\\ U(x,0)=\phi(x), & 0\le x\le l;\\ U_t(x,0)=\varphi(x), & 0\le x\le l;\end{cases}$$

Бу чегаравий масаланинг ечими ягоналигини исботлаймиз.

19

1–чи чегаравий масала ягоналиги

Теорема 1.4 (ягоналик). Фараз қилайлик

$u_1, u_2(x,t) \in C^2\{[0;l]\times[0;T]\}$ ва u_1, u_2

функциялар бир хил [1.3] чегаравий масаланинг ечими бўлсин, у холда

$\{[0;l]\times[0;T]\}$ сохада $u_1(x,t) = u_2(x,t)$

Исбот: кўриниб турибдики функция $v(x,t) = u_1 - u_2$

бизнинг чегаравий масаланинг $f, \varphi, \phi, \mu_1, \mu_2$

функциялар айнан 0 га тенг булгадаги ечим бўлади. Шудай қилиб

$v(x,t) \in C^2\{[0;l]\times[0;T]\}$ ва

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx},\ 0 < x < l, 0 < t < T; \\ v(0,t) = v(l,t) = v(x,o) = v_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

20

1–чи чегаравий масала ягоналиги

$v(x,t) \equiv 0$ исботлаш талаб этилади.

$$E(t) = \int_0^l \left[(v_t(x,t))^2 + a^2(v_x(x,t))^2\right]dx$$

функцияни аниқлаймиз ва уни **энергия интеграли** деб атаймиз. Мисол учун бизнинг тебранувчи торимизнинг ўзгармасгача аниқлик билан олинган тўла энергия деб физикавий интерпретация қилиш мумкин. Кўриниб турибдики, бизнинг *v* функция шартларида *E(t)* дифференциалланувчи функциядир.

Демак унинг хосиласи қуйидагича хисобланади:

$$E'(t) = \int_0^l \left[2v_t(x,t)v_{tt}(x,t) + 2a^2 v_x(x,t)\right]dx$$

21

1–чи чегаравий масала ягоналиги

Бу интегралда иккинчи қўшилувчини *x* бўйича бўлаклаб интеграллаб қуйидаги ифодага келамиз:

$$E'(t) = \int_0^l \left[2v_t(x,t)v_{tt}(x,t) - 2a^2 v_{xt}(x,t)v_{xx}(x,t)\right]dx + 2a^2 v_x(x,t)v_t(x,t)\Big|_0^l$$

v(x, t) тебраниш тенгламасини ечими эканлигини эсда тутган холда, интеграл остидаги ифода айнан 0 га тенг эканлигини аниқлаймиз. Чегаравий шартларни *t* бўйича дифференциаллаб

$$v_t(0,t) \equiv 0 \equiv v_t(l,t)$$

ни хосил қиламиз. Бундан хулоса: интеграл ташқарисидаги қўшилувчиси 0га тенг. Демак $E'(t) \equiv 0$ ёки

$$E(t) = \int_0^l \left[(v_t(x,t))^2 + a^2(v_x(x,t))^2\right]dx \equiv const$$

22

1–чи чегаравий масала ягоналиги

Умуман олганда биз ёпиқ [1.3] тенгламар билан ифодаланувчи системада энергия сақланиш қонунининг яна бир кўринишига эга бўлдик — энергия сони доимийдир. Кўриниб турибдики

$$E(t) = E(t) = \int_0^l \left[(v_t(x,t))^2 + a^2(v_x(x,t))^2\right]dx$$

Бошлангич шартлардан қуйидагига эга бўламиз.

$$v_t(x,0) = v_x(x,0) = 0, \quad 0 \geq x \geq l,$$

23

1–чи чегаравий масала ягоналиги

Демак, $E(0)=0 \Rightarrow E(t)\equiv 0$

Интеграл остидаги функцияларнинг манфий бўлмаганлиги $v_t(x,t)=v_x(x,t)=0$ га тенг эканлиги аниқланади. Бундан $v\equiv const$, бошлангич шартлардан эса $v\equiv 0$ эканлиги келиб чиқади. Теорема исботланди.

Эслатма: $\begin{cases} v_x(0,t)=0 \\ v_x(l,t)=0 \end{cases}$

иккинчи тур чегаравий шартларгага бўлган масала учун ҳам барча тасдиқларимиз ўринли. Теореманинг исботи ўзгармайди, фақат интеграл ташқарисидаги қўшилувчи нолга тенг эканлиги бошқа усулда. Бундан ташқари, теореманинг барча тасдиқлари аралаш кўринишдаги чегаравий шартлар учун ҳам ўринлидир.

24

Саволлар.

1. Ярим тўгри чизиқдаги бир жинсли чегаравий шарт билан берилган иккинчи чегаравий масала қўйилишини келтиринг
2. Иккинчи чегаравий масаланинг Даламбер формуласи бўйича ечимини келтиринг.
3. Ўзгарувчиларни алмаштириш усули.
4. Бир жинсли чегаравий шартлар билан берилган бир жинсли тебраниш тенгламаси учун биринчи чегаравий масалани келтиринг.
5. Штурм – Лиувилл масаласи.
6. Мавжудлик теоремаси.
7. Умумий 1 – чегаравий масалани қўйилишини келтиринг.
8. Умумий 1 – чегаравий масала ягонлиги.

25

Математик физика тенгламалари

маърузалар

Маъруза № 4.

Мавзу:

Энергия интегралининг тебраниш тенгламаси учун чегаравий масала ечимининг ягоналиги

1

Маъруза № 4

Энергия интегралининг тебраниш тенгламаси учун чегараий масала ечимининг ягоналиги

Режа:

1. Маълумотлар характеристикаларда берилган масала. Интеграл тенгламаларнинг эквивалент системаси.
2. Характеристикаларда берилган ечимнинг мавжудлиги.
3. Маълумотлар характеристикаларда берилган масаланинг ягоналиги.

Таянч иборалар

чегаравий масала,
характеристика,
интеграл тенглама,
тебраниш тенгламаси,
энергия интеграли

1. Маълумотлар характеристикаларда берилган масала. Интеграл тенгламаларнинг эквивалент системаси.

Қуйидаги масалани қараймиз:

$$[1.4]\quad \begin{cases} (1)\quad u_{xy}(x,y)=a(x,y)u_x(x,y)+b(x,y)u_y(x,y)+ \\ +f(x,y,u(x,y)),\quad 0<x<l_1,\quad 0<x<l_2 \\ (2)\quad u(x,0)=\phi(x),\qquad 0\le x\le l_1; \\ (3)\quad u(0,y)=\varphi(y),\qquad 0\le y\le l_2; \end{cases}$$

Бу гиперболик типдаги чизиқли бўлмаган тенглама учун берилган масала **Гурса масаласи** деб аталади. Илгари берилган таърифга кўра (1) тенгламанинг характеристикалари бу *dxdy=0* тенгламани қаноатлантирувчи функциялар бўлади. Бу эса *x=const, y=const* кўринишдаги тўғри чизиқлар оиласини билдиради. Шундай қилиб, бизнинг *u(x, y)* функциямизнинг *x=0, y=0* характеристикалардаги маълумотлар билан берилади.

1. Маълумотлар характеристикаларда берилган масала. Интеграл тенгламаларнинг эквивалент системаси.

Таъриф: *U(x, y)* функция [1.4] масаланинг ечими деб аталади, агарда $u(x,y)\in C^2\{[0;l_1]\times[0;l_2]\}$

ва (1) – (3) шартларни қаноатлантирилса.

Берилган масаланинг ечими мавжудлиги ва ягонлигини бир неча этапларда исботлаймиз. Дастлаб биз [1.4] масалани қандайдир чизиқли бўлмаган интеграл тенгламалар системасига эквивалент эканлигини кўрсатамиз.

Фараз қилайлик, *U(x, y)* функция [1.4] масаланинг ечими бўлсин. У холда (1) тенгламани дастлаб *y* бўйича кейин *x* бўйича интеграллаб, қуйидагини хосил қиламиз:

$$u_x(x,y)=u_x(x,0)+\int_0^y a(x,\eta)u_x(x,\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^y b(x,\eta)u_y(x,\eta)d\eta+\int_0^y f(x,\eta,u(x,n))d\eta;$$

$$u(x,y)=u(0,y)+u(x,0)-u(0,0)+\int_0^x\int_0^y a(\xi,\eta)u_x(\xi,\eta)d\eta d\xi+ \qquad (1.7)$$

$$+\int_0^x\int_0^y b(\xi,\eta)u_y(\xi,\eta)d\eta d\xi++\int_0^x\int_0^y f(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\eta d\xi$$

Иккита янги функцияларни киритамиз $\begin{cases} v(x,y)=u_x(x,y) \\ w(x,y)=u_y(x,y) \end{cases}$

У холда, (2)-(3) бошлангич шартларни қўллаб, (1.7) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$u(x,y)=\varphi(0,y)+\phi(x,0)-\phi(0)+ \qquad (1.8)$$

$$\int_0^x\int_0^y[a(\xi,\eta)v(\xi,\eta)+b(\xi,\eta)w(\xi,\eta)]d\xi d\eta+\int_0^x\int_0^y f(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\xi d\eta$$

Буни *x* бўйича дифференциаллаб, қуйидагини хосил қиламиз:

$$v(x,y)=\phi'(x)+\int_0^y[a(x,\eta)v(x,\eta)+b(x,\eta)w(x,\eta)]d\eta+\int_0^y f(x,\eta,u(x,\eta))d\eta \qquad (1.9)$$

Худди шундай y бўйича дифференциаллаймиз:

$$w(x,y)=\varphi'(y)+\int_0^x\left[a(\xi,y)v(\xi,y)+b(\xi,y)w(\xi,y)\right]d\xi+\int_0^x f(\xi,y,u(\xi,y))d\xi \quad (1.10)$$

Демак, агар $u(x,y)$ [1.4] масалани ечими бўлса у ҳолда (1.8) – (1.10) тенгламаларини қаноатлантирувчи $v(x, y)$, $w(x, y)$ функсиялар мавжуд бўлади. Тескариси: (1.8) – (1.10) тенгламаларнинг ечимлари бўлган u, v, w- узлуксиз функцияларнинг мавжудлигидан $v=u_x$; $w=u_y$

эканлиги келиб чиқади. Шунингдек бевосита дифференциаллашдан $u(x,y)$ функсиялар [1.4] масалани ечими эканлигини текшириб кўриш мумкин.

7

2. Характеристикаларда берилган ечимнинг мавжудлиги.

Теорема [1.5]: (Мавжудлик теоремаси)

Қуйидаги тўртта шарт бажарилган бўлсин:

1. $a(x,y),\quad b(x,y)\in C\{[0;l_1]\times[0;l_2]\}$
2. $f(x,y,p)\in C\{[0;l_1]\times[0;l_2]\times E\}$

яъни, биздар $u(x, y)$ функцияни p ихтиёрий қиймат қабул қилувчи ўзгарувчи билан алмаштирдик

3. $|f(x,y,p_1)-f(x,y,p_2)|\le L|p_1-p_2|,$
$\forall x\in[0;l_1],\quad \forall y\in[0;l_2],\quad \forall p_1,p_2\in E$

p ўзгарувчи бўйича Липшиц шартидир

4. $\phi(x)\in C^1[0;l_1],\quad \varphi(y)\in C^1[0;l_2],\quad \phi(0)=\varphi(0)$

У ҳолда [1. 4] масаланинг ечими мавжуд.

Исбот. [1.4] масала (1.8)-(1.10)га эквивалентлигини хисобга олиб, (1.8)-(1.10)ни қаноатлантирувчи (x, y), $v(x, y)$, $w(x, y)$ узлуксиз функциялар мавжудлигини исботлаймиз. Бу функцияларни итерациялар кетма-кетлиги ёрдамида топамиз. Кетма-кет интерациялар процессини қуйидагича кўрамиз:

$$\begin{cases} u_0(x,y)=v_0(x,y)=w_0(x,y)=0 \\ u_{n+1}(x,y)=\varphi(y)+\phi(x)-\phi(0)+\int_0^x\int_0^y\left[a(\xi,\eta)v_n(\xi,\eta)+b(\xi,\eta)w_n(\xi,\eta)\right]d\eta d\xi+ \\ +\int_0^x\int_0^y f(\xi,\eta,u_n(\xi,\eta))d\eta d\xi \\ u_{n+1}(x,y)+\phi'(y)+\int_0^y\left[a(x,\eta)v_n(x,\eta)+b(x,\eta)w_n(x,\eta)\right]d\eta+\int_0^y f(x,\eta,u_n(x,\eta))d\eta \\ w_{n+1}(x,y)+\varphi'(y)+\int_0^x\left[a(\xi,y)u_n(\xi,y)+b(\xi,\eta)w_n(\xi,y)\right]d\xi+\int_0^x f(\xi,y,u_n(\xi,y))d\xi \end{cases}$$

8

Бу процессни яқинлашувчи эканлигини исботлаймиз. Бунинг учун u_n, v_n, w_n кетма-кетликларнинг ҳадлари орасидаги фарқларни баҳолаймиз.

u_n учун итерация таърифидан ва теореманинг (3) шартларидан қўйидаги тенгсизлик келиб чиқади:

$$|u_{n+1}-u_n|\le\int_0^x\int_0^y\left[|a(\xi,\eta)||v_n(\xi,\eta)-v_{n-1}(\xi,\eta)|+|b(\xi,\eta)||w_n(\xi,\eta)-w_{n-1}(\xi,\eta)|\right]d\xi d\eta+$$

$$+\int_0^x\int_0^y L|u_n(\xi,\eta)-u_{n-1}(\xi,\eta)|d\xi d\eta$$

Фараз қилайлик: $(x,y)\in\{[0;l_1]\times[0;l_2]\times E\}$da

$M=\max\{\max|a(x,y)|\max|b(x,y)|,L\}$ Шунда:

$$|u_{n+1}-u_n|\le M\int_0^x\int_0^y [|v_n(\xi,\eta)-v_{n-1}(\xi,\eta)|+ \quad (1.11)$$

$$+|w_n(\xi,\eta)-w_{n-1}(\xi,\eta)|+|u_n(\xi,\eta)-u_{n-1}(\xi,\eta)|]d\xi d\eta$$

v_n, w_n функциялар учун ҳам худди шундай:

$$|u_{n+1}-u_n| \le M\int_0^y [|u_n(x,\eta)-u_{n-1}(x,\eta)|+ \tag{1.12}$$
$$+|w_n(x,\eta)-w_{n-1}(x,\eta)|+|u_n(x,\eta)-u_{n-1}(x,\eta)|]d\eta$$

$$|u_{n+1}-u_n| \le M\int_0^x [|u_n(\xi,y)-u_{n-1}(\xi,y)|+ \tag{1.13}$$
$$+|w_n(\xi,y)-w_{n-1}(\xi,y)|+|u_n(\xi,y)-u_{n-1}(\xi,y)|]d\xi$$

Итерация процессининг барча элементлари узлуксиз функциялар бўлганлиги сабабли, бундан $|u_n|, |v_n|, |w_n|$ функция қандайдир H ўзгармас билан чегараланганлиги келиб чиқади.

11

Кетма-кетликнинг нольга тенг бўлган ҳадларнинг таърифидан $|u_1-u_1| \le M, |v_1-v_1| \le M, |w_1-w_1| \le M$ келиб чиқади. Буни қўллаб қуйидаги айирмани баҳолаймиз:

$$|u_2-u_1| \le M\int_0^x\int_0^y 3H d\xi d\eta = 3HMxy \le 3HM\frac{(x+y)^2}{2}$$

$$|v_2-v_1| \le M\int_0^y 3H d\eta = 3HMy \le 3HM(x+y)^2$$

$$|w_2-w_1| \le M\int_0^x 3H d\xi = 3HMx \le 3HM(x+y)$$

12

Кетма – кетликни текис яқинлашувчи эканлигини исботлаш учун мажорант қатор кўришга тўғри келади, лекин дастлаб қуйидаги баҳони исботлаймиз.

$$|u_n(x,y)-u_{n-1}(x,y)| \le 3HM^{n-1}K^{n-2}\frac{(x+y)^2}{2};$$

$$|v_n(x,y)-v_{n-1}(x,y)| \le 3HM^{n-1}K^{n-2}\frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!};$$

$$|w_n(x,y)-w_{n-1}(x,y)| \le 3HM^{n-1}K^{n-2}\frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!};$$

Бу ерда $K=2+l_1+l_2;$

13

Исботни индукция билан кўрамиз.

Индукция базаси. Юқорида исботлангандек n=2 учун ўринли

Индукция фарази. Фараз қилайлик n учун ўринли.

$n+1$ учун исботлаймиз . **Индуктив ўтиш .**

Индукция фаразидан фойдаланиб $|u_{n+1}-u_n|$ айирмани баҳолаймиз:

$$|u_{n+1}-u_n| \le M\int_0^x\int_0^y\left[3HM^{n-1}K^{n-2}\frac{(\xi+\eta)^n}{n!}+2\cdot 3HM^{n-1}K^{n-2}\frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)}\right]d\xi d\eta \le$$
$$\le 3HM^nK^{n-2}\left[\int_0^x\frac{(\xi+\eta)^{n+1}}{(n+1)}\Big|_0^y d\xi+2\int_0^x\frac{(\xi+\eta)^n}{n!}\Big|_0^y d\xi\right]$$

Интегрални ҳисоблайлик. Бунда бошланғич интеграл чегараларини қўйишда қуйи чегарани ташлаб юборамиз. Уларни қўшилувчилари манфий бўлиб,юқоридаги айирма учун шундай баҳони юқори чегара асосида ҳосил қиламиз:

14

$$|u_{n+1}-u_n| \le 3HM^n K^{n-2}\left[\frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!}+2\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}\right]=$$

$$3HM^{n-1}K^{n-2}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}\left[\frac{x+y}{n+2}+2\right]\le$$

$$\le\left\{\frac{x+y}{n+2}+2\le l_1+l_2+2=K\right\}\le 3HM^n K^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}$$

15

Шундай қилиб u_n кетма-кетлик учун индукция фарази исботланган.

Қолган иккита кетма-кетлик учун баҳонинг исботи шунга ўхшаш бўлади.

$$|u_{n+1}-u_n| \le M\int_0^y\left[3HM^{n-1}K^{n-2}\frac{(\xi+\eta)^n}{n!}+2\cdot 3HM^{n-1}K^{n-2}\frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}\right]d\eta\le$$

$$\le 3HM^n K^{n-2}\left[\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}+2\frac{(x+y)^n}{n!}\right]=3HM^n K^{n-2}\frac{(x+y)^n}{n!}\left[\frac{x+y}{n+1}+2\right]\le$$

$$\le 3HM^n K^{n-1}\frac{(x+y)^n}{n!}$$

Демак иккинчи баҳо ҳам тўғри . Учинчи баҳонинг исботи хам шу кўринишда бўлади ,шунинг учун уни ташлаб кетамиз. Энди u_n, v_n, w_n кетма –кетликларни текис яқинлашувчи эканлигини исботлаймиз

Кўриниб турибдики бундай кетма-кетликнинг ҳар бир ҳадини тегишли қаторнинг қисмий йиғиндиси шаклида ифодалаш мумкин.

16

$$u_n(x,y)=\sum_{m=1}^{n}\left(u_m(x,y)-u_{m-1}(x,y)\right);$$

$$v_n(x,y)=\sum_{m=1}^{n}\left(v_m(x,y)-v_{m-1}(x,y)\right);$$

$$w_n(x,y)=\sum_{m-1}^{n}\left(w_m(x,y)-w_{m-1}(x,y)\right);$$

Биринчи қаторнинг қўшилувчилари учун биз баҳони исботлаган эдик.

17

$$|u_n(x,y)-u_{n-1}(x,y)|\le 3HM^{n-1}K^{n-2}\frac{(x+y)^n}{n!}\le$$

$$\le 3HM^{n-1}K^{n-2}\frac{(l_1+l_2)^n}{n1}=C\frac{a^n}{n!},\quad C,a=const.$$

Маълумки,

$\sum_{n=1}^{\infty}c\frac{a^n}{n!}$ қатор яқинлашувчи. Бундан Вейерштрасс аломатига кўра u_n кетма-кетликни текис яқинлашишини ҳосил қиламиз.

Қўшилувчиларнинг узлуксизлигидан лимитик функциянинг узлуксизлиги келиб чиқади.

Шунга ўхшаш қолган икки кетма-кетлик учун хам кўрсатиш мумкин:

$$v_n(x,y)\Rightarrow v(x,y)\in C\{[0;l_1]\times[0;l_2]\};$$

$$w_n(x,y)\Rightarrow w(x,y)\in C\{[0;l_1]\times[0;l_2]\};$$

18

2. Характеристикаларда берилган ечимнинг мавжудлиги.

Энди биз $n \to \infty$

да лимитни ҳисоблаш итерацион жараёнини ёзишга ҳақлимиз. Бу эса ушбу тенгламалар системасининг ечими бўлган u, v, w

функцияларнинг мавжудлигини билдиради. Бу тенгламалар системасини бошлангич [1.4]га эквивалент деб олсак теорема бутунлай исботланади. Теорема исботланди. □

19

3. Маълумотлар характеристикаларда берилган масаланинг ягоналиги.

Шундай қилиб[1.4] **масаланинг мавжудлигини исботладик. Энди унинг ягоналигини исботладик-равшанки бу** (1.8)-(1.10) интеграл тенгламалар системаси ечимининг ягоналигига эквивалентдир.

Теорема 1.6 (Ягоналик) *Фараз қилайлик* $\{u_1(x,y), v_1(x,y), w_1(x,y)\}$, $\{u_2(x,y), v_2(x,y), w_2(x,y)\}$,

Икки функциялар системаси мавжуд бўлиб, улар (1-8)-(1-10) интеграл тенгламалар системасининг ечимлари бўлсин ва унда [1.4] тенгламанинг ечими мавжудлиги ҳақидаги теореманы (1)-(4) шартлари бажарилган бўлсин, у ҳолда

$$U(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y), \quad V(x,y) = v_1(x,y) - v_2(x,y),$$

$$W(x,y) = w_1(x,y) - w_2(x,y)$$

функциялар

$\prod_{l_1 l_2} = \{[0;l_1] \times [0;l_2]\}$ *тўғри тўртбурчакда айнан 0 га тенг бўлади.*

Исбот. Шундай қилиб u_1, u_2 –(1.8) интеграл тенгламани ечими бўлсин.

$$u_1(x,y) = \varphi(y) + \phi(x) - \phi(0) +$$

$$+ \int_0^x \int_0^y [a(\xi,\eta)v_1(\xi,\eta) + b(\xi,\eta)w_1(\xi,\eta)] d\eta d\xi +$$

$$\int_0^x \int_0^y f(\xi,\eta,u_1(\xi,\eta)) d\eta d\xi;$$

$$u_2(x,y) = \varphi(y) + \phi(x) - \phi(0) +$$

$$+ \int_0^x \int_0^y [a(\xi,\eta)v_2(\xi,\eta) + b(\xi,\eta)w_2(\xi,\eta)] d\eta d\xi +$$

$$+ \int_0^x \int_0^y f(\xi,\eta,u_2(\xi,\eta)) d\eta d\xi.$$

Биридан иккинчисини айириб ва $f(x,y,p)$,

учун Липшиц шартини қўллаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$|u_2 - u_1| \le \int_0^x \int_0^y [M|v_2(\xi,\eta) - v_1(\xi,\eta)| +$$

$$+ M|w_2(\xi,\eta) - w_1(\xi,\eta)| + M|u_2(\xi,\eta) - u_1(\xi,\eta)|] d\eta d\xi \Rightarrow$$

$$|U(x,y)| \le \int_0^x \int_0^y [M|V(\xi,\eta)| + M|W(\xi,\eta)| + M|U(\xi,\eta)|] d\eta d\xi \qquad (1.14)$$

Шунга ўхшаш натижа $V(x,y)$, $W(x,y)$ **функциялар учун ҳам ўринли:**

$$|V(x,y)| \le \int_0^y [M|V(x,\eta)| + M|W(x,\eta)| + M|U(x,\eta)|] d\eta;$$

$$|W(x,y)| \le \int_0^x [M|V(\xi,y)| + M|W_2(\xi,y)| + M|U(\xi,y)|] d\xi.$$

Бундан ушбу функциялар П тўғри тўртбурчакда 0 га тенглиги келиб чиқишини исботлаймиз. Дастлаб улар $\prod_{x_0 y_0} = \{[0; x_0] \times [0; y_0]\}$.
тўғри тўртбурчакда 0 га тенглигини кўрсатамиз. Бу ерда x_0, y_0 қуйидаги шартларни қаноатлантиради:

$$\begin{cases} 3x_0 y_0 M < 1; \\ 3x_0 M < 1; \\ 3y_0 M < 1. \end{cases}$$

Фараз қилайлик:

$$\overline{U} = \max_{\Pi x_0 y_0} |U(x, y)|; \overline{V} = \max_{\Pi x_0 y_0} |V(x, y)|; \overline{W} = \max_{\Pi x_0 y_0} |W(x, y)|$$

Умумийликни чегараласдан, $\overline{U} \geq \max\{\overline{V}, \overline{W}\}$ бўлишини фараз қилсамиз. Бу ҳолда (1.14) тенгсизликдан қуйидаги тенгсизлик келиб чиқади:

23

$$|U(x, y)| \leq M \int_0^x \int_0^y [\overline{U} + \overline{U} + \overline{U}] ds \leq 3Mx_0 y_0 \overline{U}, (x, y) \in \Pi_{x y_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{U} \leq 3Mx_0 y_0 \overline{U}.$$

$3x_0 y_0 M < 1$ бўлганлиги сабабли, бу фақат

$\overline{U} = 0$ да бажарилади. Бундан кўриниб турибдики

$U(x, y), V(x, y), W(x, y)$ функциялар

Π_{x_0, y_0} да айнан 0 га тенг. Кейинги қадамда биз шундай

x_1 ни оламизки,

$$\begin{cases} 3(x_1 - x_0) y_0 M < 1; \\ 3(x_1 - x_0) M < 1; \\ 3y_0 M < 1. \end{cases}$$

24

ва уни $\Pi_{x_1 y_0}$ тўғри тўртбурчакда қараймиз. У ҳолда (1.14) тенгсизлик қуйидаги кўринишга эга:

$$|U(x, y)| \leq M \int_{x_0}^x \int_0^y [\overline{U} + \overline{U} + \overline{U}] ds, (x, y \in \Pi x_1 y_0)$$

Олдинги қадамга ўхшаш ҳаракат қилиб $U(x, y)$, $V(x, y)$, $W(x, y)$
Функциялар тўғри тўртбурчакда айнан 0 га тенглигини

ҳосил қиламиз. Шундай мулохозаларни давом этиб, чекли сонли қадамлардан кейин бу функцияларнинг $\Pi_{l_1 y_0}$ да 0 га тенг,

Сўнгра эса $\Pi_{l_1 l_2}$ да ҳам нолга тенг эканлигини кўрсатиш мумкин.
Теорема исботланди. □

25

Саволлар.

1. *Энергия интеграли*
2. *Маълумотлар характеристикаларда берилган масала.*
3. *Гурса масаласи.*
4. *Характеристикаларда берилган ечимнинг мавжудлиги.*
5. *Мавжудлик теоремаси.*
6. *Липшиц шарти.*
7. *Умумий I – чегаравий масала учун ягоналик теоремаси*

26

Маъруза № 5

Мавзу:

«Қўшма дифференциал оператор.

Риман усули.

Лимитга ўтиш шаклидаги умумлашган ечимлар »

Режа:

1. Қўшма дифференциал оператор

2. Чизиқли алгебрадаги қўшма оператор билан боғланиш.

3. Риман усули.

4. Лимитга ўтиш шаклидаги умумлашган ечимлар

5. Интеграллик айният маъносидаги умумлашган ечимлар

Таянч иборалар: *оператор, дифференциал оператор, қўшма оператор, чегаравий масала, Грин формуласи, Риман усули, лимит, Даламбер формуласи, Пуассон тенгламаси.*

1. Қўшма дифференциал оператор.

E^n фазони қараймиз.Фараз қилайлик

$$x = (x_1, \ldots, x_n)$$

бир сидра ўзгарувчилар, $u(x)$ эса n *ўзгарувчи функция бўлсин.*

Таъриф: Бирор $u(x) \in C^2(E^n)$ функциядан $L[u]$ дифференциал оператор қўйидагича аниқланади:

$$L[u] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} + c(x) u \quad (1.15)$$

Бу ерда $a_{ij}, b_i \in C^1(E^1)$, $c(x)$ қандайдир функциялар.
тартибли хусусий ҳосила дифференциаллаш тартибига боғлиқ бўлмаганлиги сабабли $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ бир бирига тугирликни қабул қилинади.

Таъриф. Ҳар қандай $L[u]$ дифференциал операторга ўзаро бир қийматли мослик бўйича келувчи $M[v]$ қўшма оператор олиш мумкин.

$$M[v] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}(x)v\right)_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{n}\left(b_i(x)v\right)_{x_i} + c(x)v$$

Таъриф. *Агар $L[u] = M[v]$ бўлса оператор ўз-ўзига*

бўлса оператор ўз-ўзига қўшма оператор дейил

Бизга қуйидаги формула керак бўлади.

$$vL[u] - uM[v] = \sum_{i=1}^{n}\left(p_i(x)\right)_{x_i} \quad (1.16)$$

Бу ерда $p_i(x) = \sum_{j=1}^{n}\left[va_{ij}u_{x_j} - u\left(a_{ij}v\right)_{x_j}\right] + b_i uv.$

Бу формулани исботлаш учун $p_i(x)$ ни (1.16) нинг ўнг томонига қўямиз ва қўшилувчиларни гуруҳлайми

$$\sum_{i=1}^{n}\left(p_i(x)\right)_{x_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[va_{ij}u_{x_i x_j} - u\left(a_{ij}v\right)_{x_j x_i}\right] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(va_{ij}\right)_{x_i}u_{x_j} - u_{x_i}\left(a_{ij}v\right)_{x_j}\right] +$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left[vb_i u_{x_i} + u\left(b_i v\right)_{x_i}\right] + cuv - cuv = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} va_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} vb_i u_{x_i} + cuv -$$
$$-\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u\left(a_{ij}v\right)_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} u\left(b_i v\right)_{x_i} + cuv\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(va_{ij}\right)_{x_i}u_{x_j} - u_{x_i}\left(a_{ij}v\right)_{x_j}\right] =$$
$$vL[u] - uM[v] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(va_{ij}\right)_{x_i}u_{x_j} - u_{x_i}\left(a_{ij}v\right)_{x_j}\right]$$

Қолган иккиланган йиғинди 0 га тенг –бу қўшилувчилар индексларининг симметриклигидан келиб чиқади. Бу ердан(1.16) формула тўғрилиги келиб чиқади.

2. Чизиқли алгебрадаги қўшма оператор билан боғланиш.

Чизиқли алгебрада А операторга қўшма A^* операторни деб қуйидаги $(Au, v) = (u, A^*v)$ муносабат айтилади. Бу E^n дан олинган барча u,v лар учун бажарилиши керак эди. Бизнинг таърифимиз шу берилган таъриф билан

қанчалик мос келишини кўриб чиқамиз.

Мисол 1. $\Omega \subset E^3$ бўлсин ва скаляр кўпайтма қуйидагича аниқлансин :

$$(f, g) = \iiint_{\Omega} fg\,d\tau,\ f, g \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$$

у ҳолда $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ $u, v|\Sigma = 0,$

(Σ – Ω нинг чегараси) бўлган функциялар учун қуйидаги $(v, L[u]) = (M[v], u)$ ифода тўғри бўлсин

Буни кўрсатамиз

$$(v,L[u])-(M[v],u)=\iiint_{\Omega}(vL[u]-uM[v])d\tau=\{(1.16)\}=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\frac{\partial p_2}{\partial x_2}+\frac{\partial p_3}{\partial x_3}\right)d\tau=$$

$$=\{\vec{P}=(p_1,p_2,p_3)\}=\iiint_{\Omega}div\vec{P}d\tau=\{Остроградский-Гаусс\ \ формуласи(5.3)\}=$$

$$\iint_{\Sigma}(\vec{P},\vec{n})d\sigma=\{\vec{n}=(n_x,n_y,n_z)\}=\iint_{\Sigma}(p_1n_x+p_2n_y+p_3n_z)d\sigma=0$$

$p_i|\Sigma=0,u,v$ учун чегаравий шартдан келиб чиқади.

Мисол 2. Қўшма оператор учун оддий мисол бу Лаплас оператори ҳисобланади, масалан E^3 да $l[u]=\Delta u=u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+u_{x_3x_3}$ бўлади Бу ерда

$M[u]=\Delta v$ текшириш осон.

3. Риман усули.

E^2 фазод $u(x,y)$ функция учун қуйидаги дифференциалланувчи операторни қараймиз:

$$L[u]=u_{xy}+a(x,y)u_x(x,y)+b(x,y)u_y(x,y)+c(x,y)u(x,y)$$

Таърифга кўра, унга қўшма оператор қуйидаги кўринишга эга:

$$M[v]=u_{xy}-(a(x,y)v)_x-(b(x,y)v)_x+c(x,y)v$$

Шундай қилиб, (1.15) формулада

$$a_{11}=a_{22}=0,\quad a_{12}=a_{21}=\frac{1}{2},\quad b_1=a,\quad b_2=b,\quad c=c.$$

Кўриниб турибдики (1.16) формуладаги P_1,P_2

лар қуйидагича ҳисобланади:

$$p_1=\frac{1}{2}(vu_y-uv_y)+auv;\quad p_2=\frac{1}{2}(vu_x-uv_x)+buv;$$

Энди OXY текислигида $y=f(x)$ эгри чизиқ берилган бўлсин, ва унда $\forall x$ лар учун $f'(x)<0$ Унинг графигини L_f билан белгилаймиз. Нуқталари $f(x)$ функция графигидан юқорида ётган ярим текисликни R_f^+ деб белгилаймиз:

$$R_f^+=\{(x,y):y>f(x)\},$$

Қуйидаги чегаравий масалани (шуни таъкидлаш лозимки, бу масала гиперболик типдаги тенглама учундир) кўриб чиқамиз:

$$[1.5]\quad \begin{cases}(1)\quad L[u]=F(x,y,), & (x,y)\in R_f^+;\\ (2)\quad u(x,y)=\phi(x,y), & (x,y)\in L_f;\\ (3)\quad \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,y)=\psi(x,y), & (x,y)\in L_f;\end{cases}$$

($L[u]$ (1.17) формуласи билан аниқланади.)

Келтирилган чегаравий масаланинг ечимин R_f^+ да излаймиз. Унинг ихтиёрий $A(x_0,y_0)\in R_f^+$ нуқтада қандай қилиб хисобланилишини кўрсатиберамиз. Бунинг учун биз A нуқтани L_f эгри чизиқ билан координата ўқларига парралел бўлган кесмалар воситасида бирлаштирамиз ва у орқали кесишув нуқталари $B(x, y_0)$ ва $C(x_0, y)$ ни ҳосил қиламиз.

AB, AC кесмалар ҳамда BC ёй орасида ҳосил бўлган контурни L деб, унинг ички қисмини D билан белгилаймиз. Қўшма дифференциал операт $M[v]$ нинг (бунда v - муаян бир функция). (1.16) формуласидан фойдаланамиз.

$$\iint_D (vL[u] - uM[v])ds = \iint_D \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y}\right)ds$$

Бунинг ўнг қисмини ўзгартириш учун эгри чизиқли интеграллар учун Грин формуласидан фойдаланамиз:

$$\int_L Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y ds)$$

Бу ҳолда қуйидагига эга бўламиз.

$$\iint_D (vL[u] - uM[v])ds = \int_L - p_2 dx - p_1 dy =$$

(контур қисмлари координата ўқларига парралел)

$$\int_B^C \{ \left[\tfrac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv\right]dy - \left[\tfrac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv\right]dx \} +$$

$$\int_C^A \left[\tfrac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv\right]dy + \int_B^A \left[\tfrac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv\right]dx \qquad (1.18)$$

Маълумки,

$$\int_C^A \left[\tfrac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv\right]dy + \int_B^A \left[\tfrac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv\right]dx =$$

$$\underbrace{\int_C^A \left[\tfrac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv\right]dy}_{I_{CA}} + \underbrace{\int_B^A \left[\tfrac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv\right]dx}_{I_{BA}}$$

Бунгача биз v функцияни оддийгина икки карра узлуксиз дифференциалланувчи функция деб белгилаган эдик. Энди $M[v] = 0$ бўлишини аниқроқ айтганда қуйидаги масаланинг ечими бўлиши керак:

$$\begin{cases} (4) \quad v_{xy} - (a(x,y)v)_x - (b(x,y)v)_y + c(x,y)v = 0, \quad x \le x_0, y \le y_0; \\ (5) \quad v(x_0, y) = \exp\{\int_{y_0}^{y} a(x_0, s)ds\}, \quad y \le y_0; \\ (6) \quad v(x, y_0) = \exp\{\int_{x_0}^{x} b(s, y_0)ds\}, \quad x \le x_0; \end{cases}$$

Бу масала [1.4] кўринишдаги характеристикалар ёрдамида берилган маълумотларга эга бўлган масаладир. Олдинги бўлимларда кўрсатган эдикки унинг ечимидан исбот бўлган ва ягона бўлгани (x, y) функция мавжуд. Бу функция бизга маълум деб ҳисоблаймиз ва айнан шу функциядан фойдаланамиз.

Биринчи бошланғич тенгламадан $F(x,y)$ функцияни қўйган ҳолда $u(x,y)$ учун (1.18) ифодага қайтамиз.

$$\iint_D v(x,y)F(x,y)ds = \int_B^C \left\{ \left[\tfrac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv\right]dy + \right.$$
$$\left. + \left[\tfrac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv\right]dx \right\} + I_{CA} + I_{BA}$$

I_{CA} I_{BA} интегралларда координаталаридан бири фиксирланганидан фойдаланамиз. $v(x,y)$ учун (4) шартдан $x=x_0$ бўлса, $v_y - av = 0$ бўлишини осон аниқлаш мумкин. Шундай қилиб:

$$I_{CA} = \int_C^A \left[\tfrac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv\right]dy = \int_C^A \left[\tfrac{1}{2}(vu)_y - u(v_y - av)\right]dy =$$
$$= \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_A - \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_C$$

Худди шундай, $y = y_0$ бўлганда $u_x - bu = 0$ эканлигини кўрсатиш мумкин. Демак,

$$I_{BA} = \int_B^A \left[\tfrac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv\right]dx = \int_B^A \left[\tfrac{1}{2}(vu)_x - u(v_x - bv)\right]dx =$$
$$\tfrac{1}{2}(uv)\Big|_A - \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_B$$

Шундай қилиб, (1.18) ифодани қуйидагича ёзиш мумкин.

$$\iint_D v(x,y)F(x,y)ds = \int_B^C \left\{ \left[\tfrac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv\right]dy + \right.$$
$$\left. + \left[\tfrac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv\right]dx \right\} + uv\Big|_A - \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_C - \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_B.$$

Бундан $A(x_0,y_0)$ нуқтада $u(x,y)$ функциясини қийматини аниқлаш мумкин:

$$u(x_0,y_0)v(x_0,y_0) = -\int_B^C \left\{ \left[\tfrac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv\right]dy - \right.$$
$$\left. \left[\tfrac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv\right]dx \right\} + \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_C + \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_B + \iint_D v(x,y)F(x,y)ds$$

$v(x,y)$ нинг (5), (6) чегаравий шатрлардан $v(x_0,y_0) = 1$ эканлиги келиб чиқади. У ҳолда

$$u(x_0,y_0) = -\int_B^C \left\{ \left[\tfrac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv\right]dy - \left[\tfrac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv\right]dx \right\}$$
$$+ \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_C + \tfrac{1}{2}(uv)\Big|_B + \iint_D v(x,y)F(x,y)ds$$

ҳосил бўлади.

Бу $u(x_0,y_0)$ учун якуний формуладир. Контурдаги хусусий ҳосилалар $u(x,y)$ бизга ноаниқ эканлиги кўриниши мумкин. Уларни (2),(3) чегаравий шартлардан топиш мумкинлигини кўрсатамиз:

$$\begin{cases} u(x, f(x)) = \phi(x, f(x)); \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x, f(x)) = \varphi(x, f(x)); \end{cases}$$

L_f га уринманинг бирлик вектори $\vec{\tau}$ қуйидаги кўринишга эга:

$$\vec{\tau}=\left\{\frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}};\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}\right\}.$$

Бундан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y)=\frac{\partial u}{\partial n}\frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}$$

$\frac{\partial u}{\partial \tau}$ қуйидаги ўзгартиришлардан топилади.

$$\frac{\partial}{\partial n}u(x,f(x))=u_x(x,f(x))+u_y(x,f(x))f'(x)=\sqrt{1+(f'(x))}^2\frac{\partial u}{\partial \tau}(x,y).$$

Маълумки,

$$\frac{\partial y}{\partial n}=(\vec{n},gradu).$$

L_j га нормалнинг, $\vec{\tau}$ векторга ортогонал бўлган бирлик вектори қуйидагича ҳисобланади:

$$\vec{n}=\left\{\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}};-\frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}\right\}.$$

Бундан:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y)=\frac{\partial u}{\partial n}\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}$$

Юқоридагиларга асосланиб, чегаравий шартлардан контурда $u(x,y)$ ни топиш учун системани ҳосил қиламиз.

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,f(x))=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}f'(x)\\ \varphi(x,f(x))=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}\end{cases}$$

Унинг детерминанти ҳеч қаерда 0 га тенг эмас.

Бундан келиб чиқадики, $u_x(x,y)$ $u_y(x,y)$ лар мавжуд ва улар бир қийматли аниқланиши мумкин. Шундай қилиб, биз (1.19) формула тўғрилигини асосладик. Уни ҳосил қилиш учун қўлланиладиган усул **Риман усули** дейилади.

Эслатма: Даламбер формуласи (1.19) формуланинг хусусий ҳолидан иборат узлуксиз умумлаштирилган ечим.Шундай ҳоллар бўладики, амалий масалаларнинг ечимлари бўлади. Бундай ечимлар Ушбу курсдаги стандарт формулалар ёрдамида ҳосил қилиб бўлмайди. Аммо, уларни масалан, оддий ечимларнинг чегарасидек тасвирлаш мумкин.

4. Лимитга ўтиш шаклидаги умумлашган ечимлар

Умумий ёндошув: $L[u]=0$ тенгламадан топиш лозим бўлган u функция берилган ва бунда шу функция баъзи бир F ва Ф функциялар кўринишида шартлар қўйилган бўлсин. Агар бу масала ечимга эга бўлмаса, масалан, $F\notin C^2, \Phi\notin C^2$ бўлганлиги туфайли бу ҳолда биз текис яқинлашувчи кетма-кетликлар $F_n\rightrightarrows F, \Phi_n\rightrightarrows \Phi$ ни тузамиз. Бу ерда $F\notin C^2, \Phi\notin C^2$. Шунда агар F_n ва Φ_n функцияларга мос келувчи ечим (u_n) мавжуд бўлса u сифатида u_n функцияларнинг лимитини оламиз:

$$u=\lim_{n\to\infty} u_n$$

Бунда u_n кетма-кетлик u га текис яқинлашиш шарти бажарилган.

Мисол. Бизларга берилган гиперболик тенглама учун Коши масаласини кўриб чиқамиз:

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, -\infty<x<+\infty, 0<t\le T; \\ u(x,0)=\phi(x), \quad -\infty<x<+\infty; \\ u_t(x,0)=\psi(x), \quad -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

Маълумки агар $\phi\in C^2(E), \psi\in C^1(E)$ бўлса ечим Даламбер формуласи билан берилган бўлади?

$$u(x,t)=\frac{\phi(x-at)+\phi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

Фараз қилайлик бизларга худи шундай масалада $\bar\phi, \bar\psi$ функция фақатгина узлуксиз бўлса, яъни биз Даламбер формуласидан фойдалана ололмаймиз. $0<t\le T$ полосада фикр юритамиз $[-d;d]$ кесмадан ташқарида $\bar\phi=\bar\psi=0$ бўлишиниталаб қиламиз. Бу ерда d маълум бир ўзгармас. Бундай хосса supp $\bar\phi, \bar\psi=[-d;d]$ каби белгиланади. Фараз қилайликки шундай $\phi_n(x), \psi_n(x)$ функциялар мавжуд бўлиб, $\phi_n\in C^2(E), \psi_n\in C^1(E)$ шунингдек $|x|\ge 2d$ учун $\overline{\phi_n}(x)=\overline{\psi_n}(x)=0$, ҳамда $[-2(d+aT);2(d+aT)]$ кесмада

$$\begin{cases} \phi_n(x)\rightrightarrows \bar\phi(x); \\ \psi_n(x)\rightrightarrows \bar\psi(x). \end{cases}$$

Φ_n Ψ_n функцияларга мос келувчи Коши масаласинин ечими учун Даламбер формуласи ўринлидир.

$$u_n(x,t)=\frac{\phi_n(x-at)+\phi_n(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi \quad \Rightarrow u_n(x,t)\in C^2\{E\times[0;T]\}$$

Бундай функцияларнинг лимитини бизлар ечим деб номлаймиз.

$$\bar u(x,t)=\lim_{n\to\infty} u_n(x,t)$$

Аниқлашни тўғри деб ҳисоблаш мумкин агар биз

$$\prod = \{(x,t) : -2d - aT \le x \le 2d + aT, 0 \le t \le T\}$$

Тўғри бурчакда $u_n(x,t)$ кетма-кетликнинг текис яқинлашишини кўрсата олсак (равшанки тўғри тўрт бурчакдан ташқарида кетма-кетликнинг барча ҳадлари 0 га айнан тенг). Бунинг учун u_n фундаментал кетма-кетлик эканлигини,яъни

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M : \forall m > M, \forall p > 0 \quad |u_{m+p}(x,t) - u_m(x,t)| < \varepsilon \quad \forall (x,t) \in \prod$$

Бу айирмани Даламбер формуласи орқали

баҳолаймиз.

$$|u_{m+p}(x,t) - u_m(x,t)| \le \frac{|\phi_{m+p}(x+at) - \phi_m(x+at)|}{2} + \frac{|\phi_{m+p}(x-at) - \phi_m(x-at)|}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x-at}^{x+at} |\psi_{m+p}(\xi) - \phi_m(\xi)| d\xi$$

Ҳосил қилинган йиғиндини ҳар қандай илгаридан берилган ε дан кичик қилиш мумкин –бу текис яқинлашиш шартидан,демак Φ_n ψ_n кетма-кетликларнинг фундаменталлигидан келиб чиқади. Шундан ҳосил қиламизки

$$u_n(x,t) \Rightarrow \bar{u}(x,t), (x,t) \in \prod$$

бу ерда

$$\bar{u}(x,t) \in C[\prod]$$

Бундан ташқари $u_n(\pm(2d + aT), t) = 0$, бўлгани учун $u(\pm(2d + aT), t) = 0$, ва $\prod$ тўғри бурчакдан ташқарида $\bar{u}(x,t) = 0$ бўлади.

Шундай тарзда тузилган функция лимитик ўтиш шаклидаги умумлаштирилган ечим дейилади.Бу ечи ягонами деган савол туғилади (чунки биз Φ_n, ψ_n кетма-кетликларни ихтиёрий равишда танлаган эдик)? Бу саволга жавоб бериш учун бизлар ихтиёрий икки ϕ_n^1, ϕ_n^2 *ва* ψ_n^1, ψ_n^2 жуфт кетма-кетлик оламиз ва улар

$$\begin{cases} \phi_n^1 \Rightarrow \bar{\phi}, & \phi_n^2 \Rightarrow \bar{\phi}; \\ \psi_n^1 \Rightarrow \bar{\psi}, & \psi_n^2 \Rightarrow \bar{\psi}; \end{cases}$$ бўлади.

Фараз қилайликки бу кетма-кетликларга мос равишда Даламбер формуласи бўйича ҳосил қилинган u_n^1 *ва* u_n^2 кетма-кетликлар ҳадларининг лимитларидан иборат бўлган $\bar{u}^1(x,t), \bar{u}^2(x,t)$ икки ечимлар тўғри келсин $\bar{u}^1(x,t) = \bar{u}^2(x,t)$ исботлаймиз.Бунинг учун уларнинг айирмасини бахолашимиз керак

$$\bar{u}^1(x,t) - \bar{u}^2(x,t) |\bar{u}^1(x,t) - \bar{u}^3(x,t)| \le |\bar{u}^1(x,t) - u_n^1(x,t)| + |u_n^1(x,t) - u_n^2(x,t)| + |\bar{u}^2(x,t) - u_n^2(x,t)|$$

u_n^1 *ва* u_n^2 функцияларнинг мос равишда $\bar{u}^1$ *ва* $\bar{u}^2$ функцияларга текис яқинлашиши сабабли ушбу айирманинг биринчи ва учинчи қўшилувчилари нолга интилади чунки ϕ_n^1, ϕ_n^2 *ва* ψ_n^1, ψ_n^2 кетма-кетликларга мос равишда яна ўша функциялар Φ ва ψ яқинлашади. Бу ердан $\bar{u}^1(x,t)$ *ва* $\bar{u}^2(x,t)$ функцияларнинг айнан тенглиги келиб чиқади.

6. Интеграллик айният маъносидаги умумлаш ечимлар.

Умумлашган ечимлар қўлланилишининг бошқа мисоли сифатида Пуассон тенгламасидаги $\Delta u = -f(x,y,z)$ f функция икки марта Дифференцияланмайдиган ҳолат, яъни нормал ечим мавжуд бўлмаган ҳолат бўлиши мумкин (чунки ҳамма вақт $\Delta u \in C^2$)

Умумий ёндашув. Σ чегарага эга бўлган $\Omega \in E^3$ соҳада $u(x,y,z)$ функциялар $L[u] = F$ тенглама билан аниқланадиган бўлсин, бу ерда

$$L[u] = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{i,j}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{3} b_i(x) u_{x_i} + c(x) u$$

шунда бурчакга боғланган оператор қуйидагича берилади

$$M[v] = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \left(a_{i,j}(x) v\right)_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{3} \left(b_i(x) v\right)_{x_i} + c(x) v$$

Бизлар фақат шунақа v функцияларни қараймизки, улар учун лимитда тўлиқ қуйидаги шарт бажарилиши керак. Маълумки агар $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ бўлса (1.16) формула ўринли бўлади

$$\iiint_{\Omega} (vL[u] - uM[v])\,d\tau = \iiint_{\Omega} div\,\vec{\rho}\,d\tau = \iint_{\Sigma} (\vec{p}, \vec{n})\,d\sigma$$

v га қўйилган шартлардан v, v_x, v_y, v_z функциялар демак $\vec{\rho}$ вектор функция ҳам Σ да 0 га

айланишини ҳосил қиламиз. Бундан келиб чиқадики

$$\iiint_{\Omega} (vL[u] - uM[v])\,d\tau = 0$$

$L[u] = F$ эканлигидан фойдаланамиз

$$\iiint_{\Omega} vF\,d\tau = \iiint_{\Omega} uM[v]\,d\tau \qquad (1.20)$$

u функция учун ҳосил қилинган ифода интеграл ўхшашлик маъносидаги умумлаштирилган ечим дейилади. Шундай қилиб биз узлуксиз дифференциалланиш талабини v функцияга ўтказиб, шунингдек бу функция қатъий Ω ичида ётувчи соҳадагина 0 га тенг бўлмаслиги шартини талаб этиб u функция учун тенгламани ўзгартирдик.

Саволлар.

1. Дифференциал оператор.

2. Қўшма дифференциал оператор .

3. Чизиқли алгебрадаги қўшма оператор билан боғланиш.

4. Қўшма дифференциал оператор мисол келтиринг.

5. $L[u]$ дифференциалланувчи операторни ёзинг.

6. $L[u]$ дифференциалланувчи оператор қўшма оператор қандай кўринишга эга

7. $L[u]$ дифференциалланувчи оператор учун чегаравий масалани келтиринг.

8. Эгри чизиқли интеграллар учун Грин формуласини ёзинг.

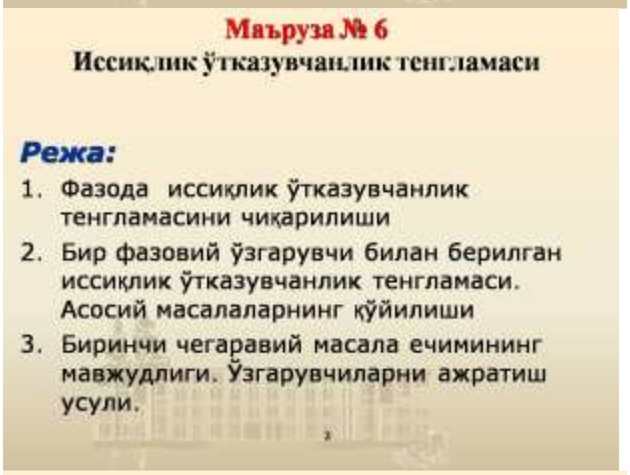
9. Лимитга ўтиш шаклидаги умумлашган ечимлар. Умумий ёндошув.

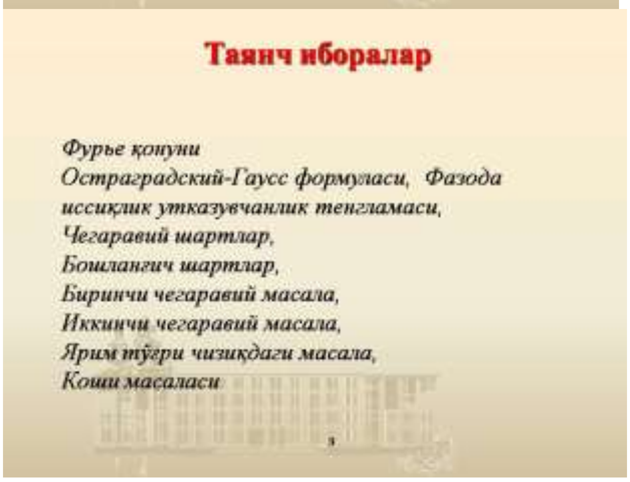
10. Гиперболик тенглама учун Коши масаласини келтиринг

11. Даламбер формуласини ёзинг.

12. Интеграллик айният маъносидаги умумлаш ечимлар. Умумий ёндашув.

13. Пуассон тенгламасини келтиринг.





1. Фазода иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасини чиқарилиши

Уч ўлчовли фазода бирор иссиқлик ўтказувчи ва координаталари (x, y, z) бўлган ихтиёрий M нуктанинг температураси t вакт моментида $u(x, y, z, t)$ функция куринишида берилувчи жисмни караймиз. Маълумки, иссиклик потоки вектори учун $\vec{W}$ куйидаги **Фурье конуни** деб аталувчи формула уринлидир.

$$\vec{W} = -k \quad grad\, u$$

Бу ерда $k(x, y, z)$ - иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти.

Агар жисм E^3

Ω соханинг чегараси Σ бўлади.

Шунда жисмнингнинг иссиқлик миқдори t вақт моментида қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$[t_1; t_2] \quad (Q(t_1) = Q_1, Q(t_2) = Q_2)$$

вақт оралигини қараймиз. Шунда

$$Q_2 - Q_1 = \iiint_{\Omega} c(M)\rho(M)u(M, t_2)d\tau_M - \iiint_{\Omega} c(m)\rho(M)u(m, t_1)d\tau_M$$

бўлади.

Иссиқлик миқдорининг ўзгариши ташқаридан иссиқлик оқиб келиш натижасида ва баъзи ички манбанинг (стокларнинг) ҳаракати туфайли рўй беради:

$$Q_2 - Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left[-\iint_{\Sigma} (\vec{W}, \vec{n})dv \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_{\Omega} F(M, t)d\tau \right] dt$$

5

Биринчи интеграл учун Остоградский-Гаусс формуласини қўллаймиз ва ўрта қиймат ҳақидаги формулани эса иккинчи интеграл учун қўллаймиз:

$$Q_2 - Q_1 = -\int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_{\Omega} (div\vec{W})d\tau \right] dt + (t_1 - t_2)\iiint_{\Omega} F(M, t_4)d\tau$$

Бу ерда $t_4 \in [t_1; t_2]$ га қаралли.

Лагранж формуласидан қуйидаги силлиқ (буни фараз қиламиз) u функция учун фойдаланамиз:

$$u(M, t_2) - u(M, t_1) = u_t(M, t_3)(t_2 - t_1), \quad t_3 \in [t_1; t_2]$$

6

Бундан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$Q_2 - Q_1 = \iiint_{\Omega} c(M)\rho(M)u(M, t_2)d\tau_M - \iiint_{\Omega} c(M)\rho(M)u(M, t_1)d\tau_M =$$

$$= (t_2 - t_1)\iiint_{\Omega} c(M)\rho(M)u_t(M, t_3)d\tau_M$$

Демак,

$$(t_2 - t_1)\iiint_{\Omega} c(M)\rho(M)u_t(M, t_3)d\tau_M =$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_{\Omega} (div\vec{W})d\tau_M \right] dt + (t_1 - t_2)\iiint_{\Omega} F(M, t_4)d\tau$$

7

Энди хамма интеграл учун умумлаштирилган ўрит қиймат формулани қўллаймиз:

$$c(M_1)\rho(M_1)u_t(M_1,t_3)V_\Omega(t_2-t_1)=-div\vec{W}\Big|_{\substack{t=t_5\\M=M_2}}V_\Omega(t_2-t_1)+F(M_3,t_4)V_\Omega(t_2-t_1),$$

Бунда $t_3\in[t_1;t_2], M_1,M_2\in\Omega,$

$V_\Omega-\Omega$ нинг хажми бўлади.

$V_\Omega(t_2t_1)$ га искартириб, Ω дан олинган бирор бир M_1,M_2 нуқталар учун қуйидагини хосил қиламиз:

$$c(M_1)\rho(M_1)u_t(M_1,t_3)V_\Omega(t_2-t_1)=-div\vec{W}\Big|_{\substack{t=t_5\\M=M_2}}+F(M_3,t_4)$$

8

Энди бирор M_0 нуқтагача Ω ни қиссак,

$[t_1,t_2]$ кесма ҳам t_0 нуқтагача қисилади. Бундан кўринадики M_1,M_2 нуқталар M_0 га ўтади, t_3,t_4,t_5 лар эса t_0 га. Бундан лимитга ўтганда қуйидаги ҳосил бўлади:

$$c(M_0)\rho(M_0)u_t(M_0,t_0)=-div\vec{W}\Big|_{\substack{t=t_0\\M=M_0}}+F(M_0,t_0)$$

$\vec{W}$ учун Фурье қонунини қўллаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$div\vec{W}=div(-kgradu)=-\frac{\partial}{\partial x}k\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}k\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial z}k\frac{\partial u}{\partial z}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(M_0)\rho(M_0)u_t(M_0,t_0)=\frac{\partial}{\partial x}k\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}k\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}k\frac{\partial u}{\partial z}+F(M_0,t_0)$$

9

M_0,t_0 нуқталарни ихтиёрий олганимиз сабабли, хосил қилинган формулани бутун $[t_1,t_2]$ ва Ω соха учун ёйиш мумкин:

$$c(x,y,z)\rho(x,y,z)u_t(x,y,z,t)=\frac{\partial}{\partial x}(k(x,y,z)u_x(x,y,z,t))+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(k(x,y,z)u_y(x,y,z,t))+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(k(x,y,z)u_z(x,y,z,t))+F(x,y,z,t)$$

Бу ифода **фазода иссиқлик утказувчанлик тенгламаси** деб номланади.

c,ρ,k ларни константа да деб олиб, қуйидаги тенглик ҳосил қиламиз:

$$u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+f(x,y,z,t),\quad a^2=\frac{k}{c\rho},\quad f=\frac{F}{c\rho}\qquad \textbf{(2.1)}$$

10

Агар u,f фақат x ва t ўзгарувчилари билан боғлиқ бўлса, у ҳолда бу тенглик қуйидагича ёзилади:

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t)\qquad \textbf{(2.2)}$$

Физик интерпритацияда бир жинсли юпқа стержинда иссиқлик ўтказувчанлик (ёйилиш) тенгламасидир. (2.2) тенгламани биз кейинчалик **иссиқлик утказувчи тенгламаси** деб юритамиз. Аналогик фикрлашни бошқа бир физик процеслар учун ҳам ўтказишимиз мумкин, масалан диффузия учун. Агар $u(x,y,z,t)$ фазода газнинг концентрацияси бўлса, у ҳолда **диффузия тенгламаси** қуйидагича бўлади:

$$cu_t=div(Dgradu)+F(x,y,z,t)$$

$$D-diffuziya\ \ koeffitsiyenti$$

$$F-biror\ bir\ \ funktsiya$$

11

2. Бир фазовий ўзгарувчи билан берилган иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси. Асосий масалаларнинг қўйилиши

Қуйидаги тенгламани қараб чиқамиз:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T$$

Агар бизга стерженнинг бошлангич вақт моментидаги температураси маълум бўлса, у ҳолда биз [illegible] эга бўламиз:

$$u(x,o) = \phi(x), \;\; 0 \le x \le l$$

Агар четларида температурани ўзгаришини билсак, у ҳолда айрим [illegible] **хосил қиламиз:**

12

Агар четларида температурани ўзгаришини билсак, у ҳолда айрим **чегаравий шартлар хосил қиламиз:**

$$x = l, 0 \le t \le T \quad \begin{cases} (1)\; u(l,t) = \mu_2(t) - birinchi\ chegaraviy\, shart \\ (2)\; u_x(l,t) = \nu_2(t) - ikkinchi\ chegaraviy\, shart \\ (3)\; u_x(l,t) = -\lambda_2[u(l,t) - \theta_2(t)] - uchinchi\ chegaraviy\, shart \end{cases}$$

$$x = 0, 0 \le t \le T \quad \begin{cases} (4)\; u(0,t) = \mu_1(t) - birinchi\ chegaraviy\, shart \\ (5)\; u_x(0,t) = \nu_1(t) - ikkinchi\ chegaraviy\, shart \\ (6)\; u_x(0,t) = -\lambda_1[u(0,t) - \theta_1(t)] - uchinchi\ chegaraviy\, shart \end{cases}$$

13

Бу шартлардан бир нечтасини танлаб ҳар хил типли масалаларни ҳосил қиламиз:

Биринчи чегаравий масала

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), 0 < x < l, 0 < t \le T \\ u(0,t) = \mu_1(t), \qquad 0 \le t \le T \\ u(l,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T \\ u(x,o) = \phi(x), \qquad 0 \le x \le l \end{cases}$$

14

[illegible]

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \; 0 < x < l, 0 < t \le T \\ u_x(0,t) = \nu_1(t), \qquad 0 \le t \le T \\ u_x(l,t) = \nu_2(t), \qquad 0 \le t \le T \\ u(x,0) = \phi(x), \qquad 0 \le x \le l \end{cases}$$

15

Ярим тўғри чизиқдаги масала

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), x > 0, 0 < t \le T \\ u(0,t) = \mu(t), \qquad 0 \le t \le T \\ u(x,0) = \phi(x), \qquad x \ge 0 \end{cases}$$

Коши масаласи

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), -\infty < x < +\infty, 0 < t \le T \\ u(x,0) = \phi(x), \qquad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

16

Биринчи чегаравий масала ечимининг мавжудлиги

Ўзгарувчиларни ажратиш усули.

Биринчи чегаравий масалага кенгроқ тўхталиб ўтамиз:

$$[2.1] \quad \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), 0 < x < l, 0 < t \le T \\ u(0,t) = \mu_1(t), \qquad 0 \le t \le T \\ u(l,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T \\ u(x,0) = \phi(x), \qquad 0 \le x \le l \end{cases}$$

17

Ечимнинг мавжуд ва ягоналигини қараб ўтамиз, шу билан бирга турғунлигини ва **Грин функциясини** қўллашини қараймиз. Биринчи чегаравий масаланинг ечима нима. Аниқки, биржинсли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси ҳолатида $\tilde{u}(x,t)$

:узилишга эга бўлган функциялар туплами қаноатлантиради

$$\tilde{u}(x,t) = const, (x,t) \in Q_T = \{(x,t) : (0;1) \times (0;T)\};$$
$$\tilde{u}(0,t) = \mu_1(t);\ 0 \le t \le T;$$
$$\tilde{u}(l,t) = \mu_2(t);\ 0 \le t \le T;$$
$$\tilde{u}(x,0) = \phi(x);\ 0 \le x \le l.$$

18

Таъриф. $u(x,t)$ функция **[2.1] иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун 1-чегаравий масаласининг ечими** дейилади, агар у қуйидаги 3 шартни қаноатлантирса:

$1.\, u \in C[\overline{Q_T}]$

$2\, u_t, u_{xx} \in C[Q_T]$

$3\, u(x,t)$ [2.2] шартларни каноатлантиради

19

Бир жинсли иссиқлик ўтазувчаснлик тенгламаси нолинчи чегаравий шартлар билан берилган биринчи чегаравий масала учун ечимни топамиз:

$$[2.2]\quad \begin{cases} (1)\, u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, 0 < t \le T; \\ (2)\, u(0,t) = 0,\ \ 0 \le t \le T; \\ (3)\, u(l,t) = 0,\ \ 0 \le t \le T; \\ (4)\, u(x,0) = \phi(x),\ 0 \le x \le l. \end{cases}$$

Ечимни қуйидаги йўл билан аниқлаймиз, аввало берилган тенгламани алмаштириш ёрдамида бирор $u(x,t)$ функцияни тузитамиз, кейин эса, бошлангич шартларга қўйилган маълум бир чекланишларда биз тузган функция 1-чи чегаравий масаланинг ечими бўлишини исботлаймиз.

20

Янги функцияни аниқлаймиз: $v(x,t) = X(x)T(t.)$

Функциямизни иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасига қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз: $X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t).$

Тенгликнинг икки томонини ҳам $a^2 X(x)T(t)$ га бўламиз:

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Ўнг ва чап томондаги функциялар ҳар хил ўзгарувчиларга боғлик бўлганлиги туфайли, аниқки уларнинг ҳар иккаласи ҳам бирор константага тенг бўлади, биз уни $-\lambda$ билан белгилаймиз:

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

21

Бундан 2 та тенгламага эга бўламз:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0; \qquad (2.3)$$

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0. \qquad (2.4)$$

$v(x,t)$ функциямиз учун чегаравий шартларни ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} v(0,t) = 0; \\ v(l,t) = 0. \end{cases} \qquad t \in [0;T].$$

22

Қуйидагини ҳосил қиламиз: $\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(l) = 0. \end{cases}$

(2.3)ни хосил бўлган система билан бирлаштирсак, **Штурм-Лиувилл масаласини** ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0; \\ X(0) = 0; \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

Барча λ ларни топиш талаб қилинади.

23

Дифференциал тенглама курсидан маълумки,

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, n \in N \\ X_n(x) = c_n^1 \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), n \in N \end{cases}$$

λ_n ни (2.4) га қўйиб, қуйидаги кўринишдаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$T_n'(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = 0.$$

Ечим

$$T_n = c_n^2 \exp\left\{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right\}$$

бўлади.

24

$X_n(x)$ *va* $T_n(t)$ ни бирлаштириб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$v_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = c_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)\exp\left\{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right\}$$

Қайд этиб ўтамизки, хамма шундай функциялар (1) иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасининг ечими ва (2), (3) чегаравий шартларни қаноатлантиради; *u(x,t)* функцияни қаторнинг йиғиндиси сифатида аниқлаймиз:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,t)$$

25

Таъкидлаб ўтамизки бу чегаравий шартларни қаноатлантиради. Консталарни шундай танлаймизки, бошлангич шартлар бажарилсин:

$$\phi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

Тенгликни $\sin\left(\frac{\pi m}{l} x\right)$ га кўпайтирамиз (m-бутун).

$x \to s$ алмаштириш оламиз ва *s* бўйича интеграллаймиз:

26

$$\int_0^l \phi(s)\sin\left(\frac{\pi m}{l}s\right)ds=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\int_0^l \sin\left(\frac{\pi m}{l}s\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds.$$

$$\int_0^l \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right)=\begin{cases}0, n\neq m;\\ \frac{l}{2}, n=m.\end{cases}\Rightarrow\int_0^l \phi(s)\sin\left(\frac{\pi m}{l}s\right)ds=\frac{l}{2}c_m\Rightarrow$$

$$c_m=\frac{2}{l}\int_0^l \phi(s)\sin\left(\frac{\pi m}{l}s\right)ds$$

27

Натижада $u(x,t)$ учун қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\left(\int_0^l \phi(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}s\right)ds\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\exp\left\{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right\}. \quad (2.5)$$

28

Саволлар.

1. Фурье қонуни
2. Остраградский-Гаусс формуласи
3. Фазода иссиқлик утказувчанлик тенгламаси
4. Чегаравий шартлар
5. Бошлангич шартлар
6. Биринчи чегаравий масала
7. Иккинчи чегаравий масала
8. Ярим тўғри чизиқдаги масала
9. Коши масаласи
10. Биринчи чегаравий масалани ечимининг таърифи.

29


Математик физика тенгламалари
маърузалар
Маъруза № 7.
Мавзу:
Максимум принципи
1


Маъруза № 7
Максимум принципи
Режа:
1. Бир фазовий ўзгарувчи билан берилган иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси. Мавжудлик теоремаси
2. Иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун максимум принципи
3. Биринчи чегаравий масалани ечимининг ягоналиги.
4. Биринчи чегаравий масалани ечимининг турғунлиги.


Таянч иборалар
иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси,
фазовий ўзгарувчи,
максимум принципи,
чегаравий масала,
ягоналик,
турғунлик
3


1. Бир фазовий ўзгарувчи билан берилган иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси. Мавжудлик теоремаси
Бизга маълумки иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун биринчи чегаравий масаланинг ечими қуйидагича:
$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\left[\int_0^l \phi(s)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\beta\right)ds\right]\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\exp\left\{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right\}$ (2.5)
Теорема 2.1(мавжудлик)
Фараз қилайлик бизга $\phi(x)$
функция берилган ва у қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:
1) $\phi(x)\in c^1[0,l]$
2) $\phi(0)=\phi(l)=0$
У холда (2.5) формула [2.2]чегаравий масалага учун ечимлар синфини аниқлайди.
4

Исботи. (1) $u(x,t)$ функциямиз $\bar{Q}_T=[0,l]*[0,T]$ сохада узлуксиз эканини кўрсатишимиз керак.

$$|u(x,t)| \le \sum |v_n(x,t)| \le \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n|$$

Бу ерда
$$\phi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \phi(s) sun\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds$$

Агар бизлар $\sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n|$ каторни якинлашишини кўрсатсак, шунда Вейерштрасс аломатига кўра $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,t)$

катор текис якинлашувчи бўлади.

5

Олинган $v_n(x,t)$ функция узлуксиз бўлганлиги сабабли $u(x,t)$ функциямиз хам узлуксиз бўлади, чунки бу функциямиз узлуксиз функциялардан тузилган текис якинлашувчи бўлган катор билан аникланади. Энди ϕ_n функцияни караймиз.

Агарда бу функцияни интегралласак куйидагича бўлади.

$$\phi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \phi(s) \sin\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds = \{\text{бўлаклаб} \quad \text{интеграллаймиз}\}$$

$$-\sqrt{\frac{2}{l}} \frac{1}{\pi n} \phi(s) \cos\left(\frac{\pi n}{l} s\right) \Big|_0^l + \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \phi'\left(\frac{l}{\pi n}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds =$$

$$= \frac{1}{n} \int_0^l \frac{l}{\pi} \phi'(s) \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds.$$

6

$$\overline{\phi_n} = \int_0^l \phi'(s) \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds$$

белгилаш оламиз.

Ортонормаллашган функциялар системасига таьлуқли бўлган Бессел тенгсизликдан фойдалансак бизлар қуйидаги тенгсизликка келамиз:

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{\pi n}{l} s\right) \right\}_{n=1}^{\infty};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\phi_n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^l \phi'(s) \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{\pi n}{l} s\right) ds \right)^2 \le \int_0^l (\phi'^2(s)) ds$$

Энди бизлар $\sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n|$ қатор учун алмаштириш олишимиз мумкин

7

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n| = \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\overline{\phi_n}| \le \left\{ ab \le \frac{a^2+b^2}{2} \right\} \le \frac{l}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\phi}_n^{\,2} \right)$$

Қавс ичидаги 1-қатор маълумки яқинлашувчи иккинчи қаторнинг яқинлашишини хозиргина кўрсатдик.

Бундан хулоса Фурье коэффицентларидан иборат бўлган $\sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n|$ қатор яқинлашувчи. Демак илгари кўрсатганимиздек $u(x,t)$ функциямиз узликсизлигини исботладик.

8

(2) Энди бизлар Q_T соҳада u_t, u_{xx} бўйича хосилаларнинг мавжудлиги ва узлуксизлигини исботлашимиз керак. Барча $0 < x < l, \quad t_0 < t < T$

(бу эрда t_0 қандайдир ихтиёрий мусбат сон) лар учун u_{xx} функциямиз мавжуд эканлигини масалан курсатамиз. Шунда бизлар

u_{xx} функциямиз Q_T тўплам устида мавжуд эканлигини исботлай оламиз. Энди бизлар (2.5) формула билан берилган $u(x,t)$

функциямизни 2 марта x бўйича дифференциаллаймиз.

У холда

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \sqrt{\frac{2}{l}} \left(-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x \right) \cdot e^{-a^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 t}$$

хосил бўлади. $e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t}$ кўпайтувчимиз бизларга

$t_0 < t < T$ да можарант қаторининг текис яқинлашувчилигини

беради. Бу ердан бизлар қуйидаги хулосага келамиз: юқорида берилган $u_{xx}(x,t)$ қатор Q_T соҳада текис яқинлашувчилиги ва мавжудлиги келиб чиқади. Энди $u_{xx}(x,t)$ ни узлуксизлигини кўрсатишимиз керак. Бу хулоса

$$\sum_{n=1}^{\infty} (v_n(x,t))_{xx}$$

қатори ҳар бир ҳадини узлуксизлигидан келиб чиқади.

(3) Энди $u(x,t)$

функциямиз [2.2] чегаравий масаланинг барча шартларини қаноатлантиради, чунки уни кўринишини чиқарганда бу шартлардан фойдаланган эдик.

2. *Иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун максимум принципи*

$Q_T = \{(x,t):(0,l)*(0,T]\}$ тўпламни қарайлик.

$\Gamma_T = \overline{Q_T} \setminus Q_T$ тўпламнинг чегараси. Бизлар $u(x,t)$

функциямиз ўзининг мах қийматига Γ_T

чегарада эришади, агарда у иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасини қаноатлантирса.

Теорема 2.2(мах принципи):Агар $u(x,t) \in C\left[\overline{Q_T}\right]$

$u_t, u_{xx} \in C[Q_T]$

Q_T соҳада $u_t = a^2 u_{xx}$ бўлсин, у холда

$$\max_{Q_T} u(x,t) = \max_{\Gamma} u(x,t)$$

$$\min_{Q_T} u(x,t) = \min_{\Gamma} u(x,t)$$

Исбот. Бизлар мах га чегарада эришишини кўрсатишимиз керак. Тескариси: фараз қиламиз $\max_{\Gamma} u(x,t)=M$ ва шундай $(x_0,t_0)\in Q_T$

мавжудки, шу нуқтада функциянинг қиймати:

$$u(x_0,t_0)=M+\varepsilon, \varepsilon>0$$

Энди янги $v(x,t)$ функцияни қуйидагича аниқлаймиз:

$$v(x,t)=u(x,t)-\frac{\varepsilon}{2T}(t-t_0) \quad (2.6)$$

Бундан қуйидаги тенгликни хосил қилиш осон:

$$v(x_0,t_0)=u(x_0,t_0)=M+\varepsilon$$

Бундан ташқари, $t\in[0,T]$ бўлганда

$$\left|\frac{\varepsilon}{2T}*(t-t_0)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}$$ булганлиги сабабли

$$\max_{\Gamma} v(x,t)=\max_{\Gamma}\left[u(x,t)-\frac{\varepsilon}{2T}(t-t_0)\right]\le M+\frac{\varepsilon}{2}$$ тенгсизлик ўринлидир.

13

Демак шундай $(x_1,t_1)\in Q_T$ нуқта мавжудки бу нуқтада $v(x,t)$

функциямиз мах га эришади. Икки марта дифференциалланувчи функциянинг максимумининг зарурий шартига кўра

$$\begin{cases} v_t(x_1,t_1)\ge 0 \\ v_{xx}(x_1,t_1)\le 0 \end{cases}$$

Агар $t_1=T$ бўлса тенгсизликлар қатий бўлади.
Энди биз (2.6) тенгликни иккала томонини t бўйича 2 марта диффіренwиаллашдан қуйидагини хосил қиламиз:

$$u_t(x,t)=v_t(x,t)+\frac{\varepsilon}{2T}$$

14

Энди x бўйича 2 марта дифференциаллаб қуйидагини хосил қиламиз:

$$u_{xx}(x,t)=v_{xx}(x,t)$$

Юқорида ёзилган тенгсизликлар системасидан қуйидаги тенгсизликларни хосил қиламиз:

$$u_t(x_1,t_1)=v_t(x,t)+\frac{\varepsilon}{2T}>0\ge a^2v_{xx}(x_1,t_1)=a^2u_{xx}(x_1,t_1)$$

бу эса иссиқлик ўтказувчанлик тегламасига зид. Биз
карама-каршиликга
келдик. Демак бизлар нотугри фараз қилган эдик. Шуниг учун

$$\max_{Q_T} u(x,t)=\max_{\Gamma} u(x,t)$$

ва биринчи қисм исботлади.

15

Теореманинг 2-қисмини исботлаш учун $u(x,t)$

функциядан $w(x,t)=-u(x,t)$

функцияга ўтиш керак. Хосил булган функция максимумга эришган нуқталарда $u(x,t)$

функция минимал қийматларга эришади. Теорема исботланди. Чегаравий масалаларга максимум принципини қўлласак, қуйидагини хосил қиламиз.

16

Энди
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, x \in (0,l), t \in (0,T] \\ u(0,t) = \mu_1(t), t \in [0,T] \\ u(l,t) = \mu_2(t), t \in [o,T] \\ u(x,0) = \phi(x), x \in [0,l] \end{cases}$$

У холда

$$\max_{Q_T} u(x,t) = max \left\{ \max_{t\in[0,T]} \mu_1(t), \max_{t\in[0,T]} \mu_2(t), \max_{x\in[0,l]} \phi(x) \right\}$$

Бу тенглик оддий физикавий маънога эга. Стерженнинг температураси унинг чегараларидаги ва бошлангич вақт моментидаги температурасидан баланд бўлиши мумкин эмас

17

3. Биринчи чегаравий масалани ечимининг ягоналиги.

Теорема 2.3(ягоналик). Бизга $u_1(x,t), u_2(x,t)$ функциялар

$$u_i \in C[\overline{Q_T}], \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u_i}{\partial t} \in C[Q_T], \quad i = 1,2$$

синфдан олинган бўлиб, бу функцияларнинг иккаласи ҳам [2.1] чегаравий масаланинг эчими бўлса , шунда қўйидаги тенглик ўринли

$$u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$$

$$[2.1] \quad \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), 0 < x < l, 0 < t \le T \\ u(0,t) = \mu_1(t), \quad 0 \le t \le T \\ u(l,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T \\ u(x,0) = \phi(x), \quad 0 \le x \le l \end{cases}$$

18

Исботи: Янги $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ функция киритамиз. Шунда $v \in C[\overline{Q_T}]$ $v_t, v_{xx} \in C[Q_T]$ бўлиши аниқ.

Бу функциямиз қуйидаги масаланинг ечими бўлади

$$\begin{cases} v_t = a^2 u_{xx}, x \in (0,l), t \in (0,T] \\ v(0,t) = 0, t \in [0,T] \\ v(l,t) = 0, t \in [o,T] \\ v(x,0) = 0, x \in [0,l] \end{cases}$$

19

$v(x,t)$ функция учун мах принципининг барча шартлари бажарилиши аниқ. Демак мах принципини қўллаганимизд

$$\begin{cases} \max_{Q_T} v(x,t) = \max_{\Gamma} v(x,t) = 0 \\ \min_{Q_T} v(x,t) = \min_{\Gamma} v(x,t) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v(x,t) \equiv 0 \Rightarrow u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$$

теорема исботланди.

20

4. Биринчи чегаравий масала тургунлиги.

Лемма 1. Бизларга $u_1(x,t)$ va $u_2(x,t)$

функциялар берилган ва қуйидаги шартлар бажарилсин:

$u_i \in C\left[\overline{Q_T}\right]$, $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \frac{\partial u_i}{\partial t} \in C\left[\overline{Q_T}\right]$, i=1,2 ва

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} \ge a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, x \in (0,l), t \in (0,T], i = 1,2 \\ u_1(0,t) \ge u_2(0,t), t \in [0,T] \\ u_1(l,t) \ge u_2(0,t), t \in [o,T] \\ u_1(x,0) \ge u_2(x,0), x \in [0,l] \end{cases}$$

ўринли бўлса, у холда $\overline{Q_T}$ сохада $u_1(x,t) \ge u_2(x,t)$

21

Исботи. Яна $v(x,t) = u_2(x,t) - u_1(x,t)$ бунда

$v \in C\left[\overline{Q_T}\right], v_t, v_{xx} \in C[Q_T]$ шу билан биргаликда

$$\begin{cases} v_t = a^2 u_{xx}(x,t), x \in (0,l), t \in (0,T] \\ v(0,t) \ge 0, t \in [0,T] \\ v(l,t) \ge 0, t \in [o,T] \\ v(x,0) \ge 0, x \in [0,l] \end{cases}$$

ўринли. Энди бизлар мах принсипининг 2-қисмидан фойдаланамиз:

$\min_{Q_T} v(x,t) = \min_{\Gamma} v(x,t) \ge 0$ демак хулоса

$u_1(x,t) \ge u_2(x,t), (x,t) \in \overline{Q}$

Лемма исботланди.

22

Теорема 2.4 (тургунлик). Бизга $u_1(x,t), u_2(x,t)$ функциялар берилган ва қуйидаги шартлар: $u_i \in C\left[\overline{Q_T}\right]$, $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \frac{\partial u_i}{\partial t} \in C\left[\overline{Q_T}\right]$, i=1,2

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, x \in (0,l), t \in (0,T], i = 1,2 \\ u_i(0,t) = \mu_1^i(t), t \in [0,T], i = 1,2 \\ u_i(l,t) = \mu_2^i(t), t \in [o,T], i = 1,2 \\ u_i(x,0) = \phi_i(x), x \in [0,l], i = 1,2 \end{cases}$$

ўринли бўлса, у холда

$$\max_{\overline{Q}} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| =$$

$$max\left\{\max_{t\in[0,T]} |\mu_1^1(t) - \mu_1^2(t)|, \max_{t\in[0,T]} |\mu_2^1(t) - \mu_2^2(t)|, \max_{x\in[0,l]} |\phi_1(x) - \phi_2(x)|\right\}$$

тенглик ўринли

23

Исботи: $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$

алмаштириш оламиз .

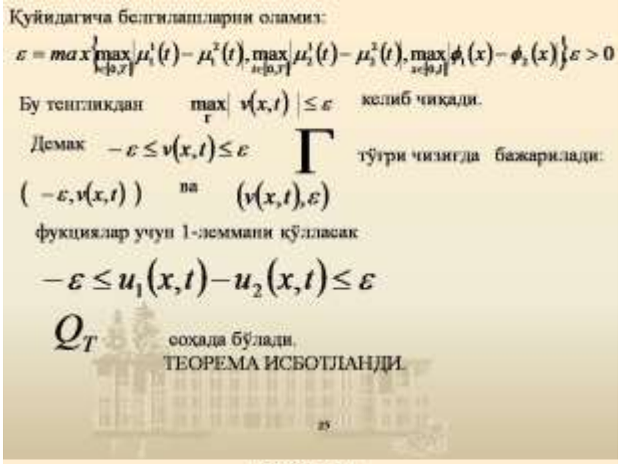
У холда $v \in C\left[\overline{Q_T}\right]$

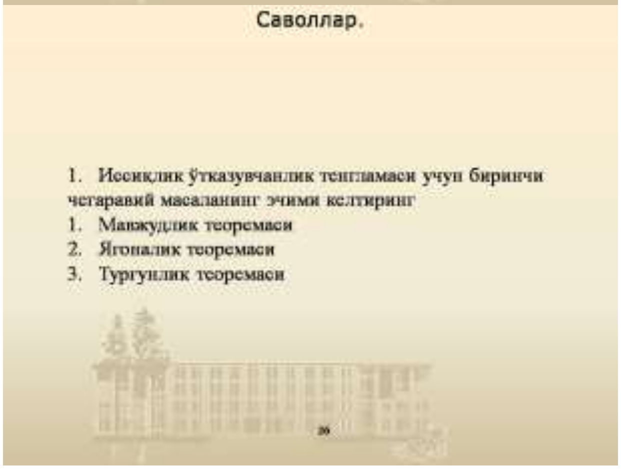
$v_t, v_{xx} \in C[Q_T]$

$v_t = a^2 u_{xx}(x,t), x \in (0,l), t \in (0,T]$

тенгликлар ўрнили.

24


Қуйидагича белгилашларни оламиз:
$\varepsilon = max\left\{\max\limits_{t\in[0,T]}\left|\mu_1^1(t)-\mu_1^2(t)\right|, \max\limits_{t\in[0,T]}\left|\mu_2^1(t)-\mu_2^2(t)\right|, \max\limits_{x\in[0,l]}\left|\phi_1(x)-\phi_2(x)\right|\right\} \varepsilon > 0$
Бу тенгликдан $\max\limits_{\Gamma}\left| v(x,t) \right| \le \varepsilon$ келиб чиқади.
Демак $-\varepsilon \le v(x,t) \le \varepsilon$ Γ тўғри чизиғда бажарилади:
$(-\varepsilon, v(x,t))$ ва $(v(x,t), \varepsilon)$
фукциялар учун 1-леммани қўлласак
$-\varepsilon \le u_1(x,t) - u_2(x,t) \le \varepsilon$
Q_T соҳада бўлади.
ТЕОРЕМА ИСБОТЛАНДИ.
25


Саволлар.
1. Иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун биринчи чегаравий масаланинг эчими келтиринг
1. Мавжудлик теоремаси
2. Ягоналик теоремаси
3. Турғунлик теоремаси
26


Математик физика тенгламалари
маърузалар
Маъруза № 8.
Мавзу:
Умумий чегаравий масала
ечимининг ягоналиги


Маъруза № 8
Умумий чегаравий масала ечимининг
ягоналиги
Режа:
1. Умумий чегаравий масаланинг
қўйилиши қўйидагича.
2. Коши масаланинг ечимининг
мавжудлиги.
3. Коши масаласи ечимининг
мавжудлиг теоремасининг исботи.


Таянч иборалар
чегаравий масала,
шартлар,
ягоналик теоремаси,
Коши масаласи

1. Умумий чегаравий масала ечимининг ягоналиги

$$
[2.3]\quad \begin{cases} u_t = a\mathrm{l}u_{xx} + f(x,t); & 0 < t \le T,\ 0 < x < l; \\ \alpha_1 u(0,t) - a_2 u_x(0,t) = p(t); & 0 \le t \le T; \\ \beta_1 u(l,t) + \beta_2 u_x(l,t) = q(t); & 0 \le t \le T; \\ u(x,0) = \varphi(x); & 0 \le x \le l; \end{cases}
$$

Бу эрда $\alpha_1 + \alpha_2 > 0;\ \ \beta_1 + \beta_2 > 0.$ -манфий бўлмаган ўзгармаслар. Бу ўзгармаслар учун қуйидаги шарт бажарилиши керак. $\alpha_1 + \alpha_2 > 0;\qquad \beta_1 + \beta_2 > 0;$

Бу чегаравий масала учун қуйидаги теорема уринли.

4

Теорема 2.5 (ягоналик). Фараз қилайлик Q_T соҳада $u_1, u_2(x,t)$ функциялар аниқланган бўлсин. Бу функциялар қуйидаги шартларни қаноатлантиради:

$$
u_i, \frac{\partial u_2}{\partial x} \in C[\overline{Q}_T], \frac{\partial \mathrm{l}u_i}{\partial x\mathrm{l}}, \frac{\partial \mathrm{l}u_i}{\partial t} \in C[Q_T], \quad \mathrm{i} = 1,2,
$$

ва бир хил [2.3] чегаравий масаланинг ечимлари бўлсин.
Шунда $\overline{Q}_t$ соҳада

$$
u_1(x,t) = u_2(x,t)
$$

5

Исбот. Ҳар доимдагидек $v(x,t) = u_1(x,\mathrm{l}) - u_2(x,t)$ функцияни киритамиз. Бу функция учун қуйидаги шартлар бажарилади:

$v, v_x \in C[\overline{Q}_T], v_t, v_{xx} \in C[Q_T]$ ва $v(x,t)$ функкциямиз қуйидаги чегаравий масалани эчими бўлади:

$$
\begin{cases} v_t = a\mathrm{l}v_{xx} & 0 < t \le T,\ 0 < x < l; \\ \alpha_1 v(0,t) - a_2 v_x(0,t) = 0; & 0 \le t \le T; \\ \beta_1 v(l,t) + \beta_2 v_x(l,t) = 0; & 0 \le t \le T; \\ v(x,0) = 0; & 0 \le x \le l; \end{cases}
$$

6

1-чи тенгламани иккала томонини $2v$ кўпайтирамиз

$2vv_t = \frac{\partial}{\partial t}(v\mathrm{l}),$ нисбатга олсак, қуйидаги тенгликни хосил қиламиз:

$$
\frac{\partial}{\partial_T}(v\mathrm{l}(x,t)) = 2a\mathrm{l}v(x,t)v_{xx}(x,\tau)
$$

Функцияларнинг тенглигидан аниқ интегралларнинг тенглиги ҳам келиб чиқади:

$$
\int_0^l\int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau}(v\mathrm{l}(x,\tau))d\tau dx = 2a\mathrm{l} \int_0^l\int_0^t v(x,\tau)v_{xx}(x,\tau)d\tau dx,
$$

Бу тенгликнинг унг томонида бизлар интеграллаш тартибини ўзгартира оламиз:

$$
\int_0^l\int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau}(v\mathrm{l}(x,\tau))d\tau dx = 2a\mathrm{l} \int_0^t\left[\int_0^l v(x,\tau)v_{xx}(x,\tau)dx\right]d\tau. \tag{2.7}
$$

7

Бочлангич шартдан фойдалансак , куйидаги тенгликга келамиз:

$$\int_0^t\int_0^l \frac{\partial}{\partial \tau}(v\mathrm{I}(x,\tau))d\tau dx = \int_0^l (v\mathrm{I}(x,\tau)dx.$$

(2.7) ни ўнг томонидаги ички интегрални бўлаклаб интеграллаймиз:

$$\int_0^l v\mathrm{I}(x,\tau)v_{xx}(x,\tau)^{v}dx = v(x,\tau)^{v}{}_{x}(x,\tau)|_0^l - \int_0^l (v_x(x,t))\mathrm{I}dx.$$

чегаравий шартлардан фойдалансак эса, ихтиёрий $t \in [o,T]$ учун:

$$v(l,t)v_x(l,t) = \begin{cases} 0, & \text{агар } \beta_1 = 0,\ \beta_2 > 0; \\ 0, & \text{агар } \beta_1 > 0,\ \beta_2 = 0; \\ -\dfrac{\beta_1}{\beta_2}v\mathrm{I}(l,t), & \text{агар } \beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0. \end{cases},$$

8

$$v(0,t)v_x(0,t) = \begin{cases} 0, & \text{агар } \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 > 0; \\ 0, & \text{агар } \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 = 0; \\ -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}v\mathrm{I}(0,t), & \text{агар } \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0. \end{cases},$$

Бундан хулоса, агар куйидаги белгилаш киритсак:

$$P(\tau) = v(x,\tau)v_x(x,\tau)|_0^l = v(l,\tau)v_x(l,\tau) - v(0,\tau)v_x(0,\tau),$$

шунда $P(\tau) \le 0, \forall \tau \in [0;T]$.

демак[2.7] тенгликни куйидаги кўринишда ёзиш мумкин.

$$\int_0^l v\mathrm{I}(x,t)dx - 2a\mathrm{I}\int_0^t P(\tau)d\tau + 2a\mathrm{I}\int_0^t\int_0^l v_x^2(x,\tau)dx\,d\tau = 0$$

9

Биринчи ва учинчи йигиндилар манфий эмас. Иккинчи интегралнинг манфий эмаслиги $P(\tau)$ функциянинг мусбат эмаслигидан келиб чиқади. Демак бизлар учта манфий бўлмаган функциянинг йигиндиси 0 га тенг эканлигини кўрсатдик. Демак ҳар биттаси 0 га тенг деб хулоса қиламиз. Теоремани исботини бошланишда бизлар $v(x,t)$ функциямиз узлуксиз эканлигини кўрсатган эдик. Иккинчи томондан $\int_0^l v\mathrm{I}(x,t)dx = 0$ тенг. Демак $v(x,t) \equiv 0$

Хулоса қилиб айтганда: $u_2(x,t) \equiv u_1(x,t)$.

Теорема исботланди.

10

Коши масаланинг ечимининг мавжудлиги.

Бир жинсли Коши масаласини қараймиз:

$$\begin{cases} (1) \quad u_t = a\mathrm{I}u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < T; \\ (2) \quad u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \qquad [2.4]$$

[2.4] 1-чегаравий масалани ечимини топаётганимиздек бу ерда ҳам олдин маълум бир алмаштиришларни ўтказамиз. Сўнгра эса ҳосил бўлган функция ечим эканлигини кўрсатамиз.

$$v(x,t) = X(x)T(t).$$

$v(x,t)$ функциядан иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасини қаноатлантиришини талаб қиламиз:

$$T'(t)X(x) = a\mathrm{I}X''(x)T(t).$$

11

Иккала томонини $a1X(x)T(t)$ га бўламиз,

шунда ҳосил бўлган тенгликлар қуйидагича:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2T(t)} = -\lambda^2;$$

Бу эрда $\lambda = const > 0$ иккита тенглама хосил бўлади:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0; \quad (2.8)$$

$$T'(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0. \quad (2.9)$$

$X(x) = e^{i\lambda x}$ функция (2.8), тенгламанинг ечими бўлади.

Худди шундай қилиб

$T(t) = e^{-a1\lambda 1t}$ функциямиз (2.9) тенгламанинг ечими бўлади.

Демак $v(x,t) = e^{i\lambda x - a1\lambda 1t}$

биринчи тенгламанинг ечими бўлади.

$u_\lambda = A(\lambda)e^{i\lambda x - a1\lambda 1t}$ функция ҳам ечим бўлади

($A(\lambda)$ -қандайдир функция)

Энди якуний функция қўйидагича аниқланади

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda)e \;\; i\lambda x - a^2\lambda^2 t d\lambda$$

бошлангич шартлани қаноатлантиришини талаб қиламиз

$$u(x,0) = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$$

Энди, Фурье алмаштиришгтиришлар назариясинидан келиб чиққан ҳолда $A(\lambda)$ қуйдагича топамиз

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda s}\varphi(s)ds$$

13

Шундай қилиб бизлар $u(x,t)$:

функция учун қуйдаги кўринишини хосил қиламиз

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda s}\varphi(s)ds\right]e^{i\lambda x - a1\lambda 1t}d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{i\lambda(x-s) - a1\lambda 1t}d\lambda\right]\varphi(s)ds.$$

$u(x,t)$: учун ечим шундай кўринишга эга:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a1t}}\exp\left\{-\frac{(x-s)1}{4a1t}\right\}\varphi(s)ds. \quad (2.10)$$

$$G(x,s,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a1t}}\exp\left\{-\frac{(x-s)1}{4a1t}\right\},$$ белгилаш киритасак:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,s,t)\varphi(s)ds.$$

14

$G(x,s,t)$ функциямиз иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасини s-фиксирланган бўлганда қаноатлантиришини кўрсатамиз:

$$G_x(x,s,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a1t}}\exp\left\{-\frac{(x-s)1}{4a1t}\right\}\left(-\frac{2(x-s)}{4a1t}\right);$$

$$G_t(x,s,t) = \frac{1}{2\sqrt{4\pi a1t^{\frac{3}{2}}}}\exp\left\{-\frac{(x-s)1}{4a1t}\right\} + \frac{1}{\sqrt{4\pi a1t}}\exp\left\{-\frac{(x-s)}{4a1t}\right\}\frac{(x-s)1}{4a1t1}$$

$$G_{xx}(x,s,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 t}}\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\}\frac{(x-s)^2}{4a^4t^2} + \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\}\left(-\frac{2}{4a^2t}\right)$$

$G(x,s,t) = a^2G_{xx}(x,s,t)$ эканлигини текшириш осон.

Энди бизлар хосил булган функциямизни кандайдир бошлангич шартларда мавжуд эканлигини куришимиз керак.

15

Коши масаласи ечимининг мавжудлик теореманинг исботи

Теорем 2.6 (мавжудлик теоремаси). *[2.4] Коши масаланинг бошлангич шартларини* $\varphi(x)$ *ёрдамиди аниклан бўлсин ва* $\varphi(x) \in C(R), |\varphi(x)| \le M, \forall x \in R.$ *Шунда 2.10 формула билан аниклан* $u(x,t)$ *функция* $x \in R, t > 0$ *булганда узлуксиз булади,* u_t, u_{xx} *узлуксиз хосилаларга эга, агарда* $x \in R, t > 0$ *бўлса,ва иссиклиқ утказувчанлик тенгламани каноатлантиради.* $x \in R, t > 0$ *ва* $\forall x_0 \in R \lim\limits_{\substack{t \to 0+ \\ x \to x_0}} u(x,t) = \varphi(x_0)$ *лар учун*

16

Изох: *Теореманинг охирги шарти куйидаги маънога эга.*

$$u(x,t) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\} \varphi(s) ds, t > 0; \\ \varphi(x), t = 0. \end{cases}$$

$(x,t): x \in R, t \ge 0$

да узлуксиз эканлигини билдиради.

17

ИСБОТ.

1.Аввалам бор $u(x,t)$ функциямиз $x \in R, t > 0$ узлуксиз эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун функциямиз

$$\Pi_{L,t_0 T} = \{(x,t): -L < x < L; t_0 < t < T\}$$

тўгри тўрт бурчакда узлуксиз эканлигини кўрсатишимиз керак. Бу ерда L, t_0, T - мусбат конститалар. Интеграл остидаги функция $\Pi_{L,t_0 T}$ тўгритуртбурчакда узлуксиз $u(x,t)$ функция $\Pi_{L,t_0 T}$ да узлуксиз эканлигини исботлаш

учун 2.10 формулада булган интеграл текис якинлашувчи эканлигини курсатишимиз керак. Текис якинлашишининг Вейерштрасс аломатидан фойдаланиш учун шундай $F(s)$ функйияни куриш керакки, бу функция куйидаги шартларни каноатлантирсин:

18

$$\begin{cases} |G(x,s,t)| \le F(s) \forall x,t \in \Pi_{L,t_0,T}; \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(s) ds \quad \text{интеграл якинлашувчи} \end{cases}$$

бунинг учун хар хил s-лар учун экспонентанинг даражасини бахолаш керак. Агар $s \le -2L$

$$\frac{(x-s)^2}{t} \ge \frac{(L+s)^2}{T} \Rightarrow -\frac{(x-s)^2}{4a^2 t} \ge \frac{(L+s)^2}{4a^2 T};$$

Агар $|s| \le 2L$ $\quad -\frac{(x-s)^2}{4a^2 t} \le 0;$

Агар $s \ge 2L$

$$\frac{(x-s)^2}{t} \ge \frac{(L-s)^2}{T} \Rightarrow -\frac{(x-s)^2}{4a^2 t} \le -\frac{(L-s)^2}{4a^2 T};$$

19

Энди $t_0 \le t \le T$ булсин. Шунда 2.10 интегралда берилган биринчи купайтирувчи учун куйидаги тенгсизликни ёзиш мумкин

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \le \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}}$$

Демак

$$|G(x,s,t)| \le F(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}}, |s| \le 2L; \\ \dfrac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}} \exp\{-\dfrac{(L-s)^2}{4a^2T} + \dfrac{L^2}{4a^2T}\}, s \ge 2L; \\ \dfrac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}} \exp\{-\dfrac{(L+s)^2}{4a^2T} + \dfrac{L^2}{4a^2T}\}, s \le 2L; \end{cases}$$

20

бу ерда $\frac{L^2}{4a^2T}$ функцияни даража курсаттичга кушиб ёзганимизнинг сабаби куйидагича: $F(s)$ функциямиз узлуксиз булиши учун кўшган функциямиз бахолашга таъсир килмайди.

$\int_{-\infty}^{+\infty} F(s)ds$ якинлашувчи тугрисидаги далолатни экспонент беради. Шундай килиб $|\varphi(x)|$ функциянинг чегаралангаклигини хисобга олиб 2.10 формулада булган интеграл остидаги ифоданинг модулини юқоридан $MF(s)$ функция

орқали бахолай олpoints. Бу функциядан олинган интеграл эса якинлашувчи. Демак Вейерштрасс аломатига кўра 2.10 формулада берилган интеграл текис якинлашувчи. Яъни $u(x,t)$ функциямиз $\Pi_{L,t_0,T}$ да тугритуртбурчакда узлуксиз эканлигини исботладик.

2. Энди бизлар юкорида кўрсатилган $\Pi_{L,t_0,T}$ тугритуртбурчак устида u_{xx} функциямиз узлуксиз эканлигини кўрсатишимиз керак. $G(x,s,t)$ функциямизнинг кўринишидан фойдаланиб куйидаги тенгликка келамиз.

$$|G_{xx}(x,s,t)| = \left| \frac{(x-s)^2}{4a^4t^2} G(x,s,t) - \frac{1}{2a^2t} G(x,s,t) \right| \le$$

$$\le F(s) \left[\frac{1}{2a^2t_0} + \frac{L^2 + 2Ls + s^2}{4a^2t_0^2} \right] = F_1(s).$$

22

кавс ичида ёзилган 2-хаднинг суратидаги ёзилган купхад $F(s)$ функциянинг интегралига таъсир килмайди. Шунда куйидаги ифодани хосил киламиз.

$$u_{xx}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{xx}(x,s,t)\varphi(s)ds \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} |G_{xx}(x,s,t)||\varphi(s)|ds \le M \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(s)ds < \infty$$

Демак хосиладан олинган интеграл текис якинлашувчи. Хулоса қилиб айтганда $u_{xx}(t)$ функциямиз хам узлуксиз. Худди шундай килиб u_t функциямиз хам узлуксиз функция эканлигини куришимиз мумкин.

23

3. $G(x,s,t)$ функциямиз иссиклик утказувчанлик тенгламани каноатлантирувчи функция эканлигини юкорида курсатган эдик. Бу ерда

$$u_t(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_t(x,s,t)\varphi(s)ds =$$

$$= a^2 u_{xx}(x,t) = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} G_{xx}(x,s,t)\varphi(s)ds$$

яни $u(x,t)$

функциямиз иссиклик утказувчанлик тенгламага мос келади.

24

4. Демак

$$\forall x_0 \in R \lim_{\substack{t\to 0+\\ x\to x_0}} u(x,t) = \varphi(x_0)$$

$$\forall x_0 \forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x,t : t, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |u(x,t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$$

Энди бизлар x_0 нуктани ва ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон фиксирлаймиз $\varphi(x)$ функциямиз узлуксизлигидан

$$\exists \Delta : |x - x_0| < \Delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

келиб чикади

25

Энди $|u(x,t) - \varphi(x_0)|$ караймиз

$$|u(x,t) - \varphi(x_0)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} G_t(x,s,t)\varphi(s)ds - \varphi(x_0)\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{-\infty}^{x_0-\Delta} G\ (x,s,t)\varphi(s)ds\right| + \left|\int_{x_0+\Delta}^{+\infty} G\ (x,s,t)\varphi(s)ds\right| +$$

$$\left|\int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} G\ (x,s,t)(\varphi(s) - \varphi(x_0))ds\right| + \left|\int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} G\ (x,s,t)\varphi(x_0)ds - \varphi(x_0)\right|$$

26

J_1, J_2, J_3 *ва* J_4*–лар*

билан интегралларни белгиласак, куйидагиларни хосил киламиз Бизлар J_3 ифодани бахолаймиз.

Δ ораликда $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4}$ - булганлиги сабабли ва

$\int_{-\infty}^{+\infty} Gds = 1$ булганлиги сабабли қўйидагини хосил қиламиз:

$$|J_3| = \left|\int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} G\ (x,s,t)(\varphi(s) - \varphi(x_0))ds\right| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4} \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} G\ (x,s,t)ds \leq \frac{\varepsilon}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} G\ (x,s,t)ds$$

27

Бундан $|J_3| \le \frac{\varepsilon}{4}$ Энди $|x - x_0| < \delta_1 < \frac{\Delta}{2}$ талаб киламиз. Келажакда олинган бахолар факат шунака x–лар учун. $|J_4|$ бахолаймиз:

$$|J_4| = \left| \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} G\ (x,s,t)\varphi(x_0)ds - \varphi(x_0) \right| \le$$

$$\le |\varphi(x_0)| \left| \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} G\ (x,s,t)ds - 1 \right| = \{z \leftrightarrow \frac{s-x}{\sqrt{4a^2t}}\} =$$

$$= |\varphi(x_0)| \left| \int_{\frac{x_0-\Delta-x}{\sqrt{4a^2t}}}^{\frac{x_0+\Delta-x}{\sqrt{4a^2t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz - 1 \right|$$

28

Энди бизлар t ни камайтирсак шунда интегралнинг куйидаги чегараси $-\infty$ га, юкоридаги чегарасига $+\infty$ интилади. Шунинг учун

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz = 1$ бўлганлиги сабабли,

$$\exists \delta_2 : t < \delta_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |J_4| \le |\varphi(x_0)| \left| \int_{\frac{x_0-\Delta-x}{\sqrt{4a^2t}}}^{\frac{x_0+\Delta-x}{\sqrt{4a^2t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz - 1 \right| \le \frac{\varepsilon}{4}$$

ўринли

29

Энди $|J_1|$ бахолаймиз.

$$|J_1| = \left| \int_{-\infty}^{x_0-\Delta} G\ (x,s,t)\varphi(s)ds \right| \le \left| \int_{-\infty}^{x_0-\Delta} \frac{1}{4\pi a^2 t} \exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\} \right.$$

$$\left. Mds \right| = \{z \leftrightarrow \frac{-(x-s)}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\} = \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{-x+x_0-\Delta}{\sqrt{4a^2t}}} e^{-z^2} dz$$

Демак шундай δ_3 мавжудки $\forall t < \delta_3$ бўлганда

$|J_1| \le \frac{\varepsilon}{4}$ бўлади. Худди шундай

$|J_2|$ бахолаш мумкин.

30

Шундай килиб

$$|u(x,t) - \varphi(x_0)| \le |J_1| + |J_2| + |J_3| + |J_4| \le \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x_0 \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3):$$

$$\forall x, t : t, |x - x_0| < \delta$$

$$|u(x,t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$$

Теорема тулик исботланди.

31

Натижа1: *Агарда теореманинг барча шартлари*

$(\varphi(x) \in C(R), |\varphi(x)| \le M)$ *бажарилса, демак биз*

$u(x,t)$

функциямиз чегараланган эканлигини хулоса килишимиз мумкин.

$$|u(x,t)| = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x,s,t)||\varphi(s)|ds \le M \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,s,t)ds = M.$$

32

Натижа2: *Худди шундай килиб* $(R \times R^{+})$ *фазода* $u(x,t)$

функциямиз чексиз узлуксиз эканлигини хосил килишимиз мумкин.

$$\frac{\partial^p u}{\partial x^k \partial t^m}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^p G}{\partial x^k \partial t^m}(x,s,t)\varphi(s)ds, \quad (k+m=p)$$

бу интеграл эса текис якинлашувчи булиб, буни теорема исботидаги тасдиклар оркали курсатиш мумкин.

33

Натижа3: *Коши масаласидаги шартларни кабул килиб, биз иссиклик таркалишининг "чексиз" тезлигига эга буламиз. Фараз килайлик* $\varphi(x) = u(x,o)$ *узлуксиз функциямиз* $[a,b]$ *ораликдан бошка барча жойда нолга тенг булсин. У холда куйидагига эга буламиз.*

$$u(x,t) = \int_a^b G(x,s,t)\varphi(s)ds > 0$$

$$\forall t > 0, \forall x \in R$$

34

Саволлар:

1. Умумий чегаравий масаланинг қўйилиши
2. Ягоналик теоремаси
3. Коши масаласи

35

Математик физика тенгламалари

маърузалар

Маъруза № 9.

Мавзу:

Ярим тўгри чизиқда иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун биринчи ва иккинчи чегаравий масаланинг ечимини мавжудлиги. Биринчи чегаравий масала учун Грин функцияси

1

Маъруза № 9

Режа:

1. Коши масаласи ечимининг ягоналиги.
2. *Ярим тўғри чизиқда қўйдаги биринчи чегаравий масала.*
3. *Ярим тўғри чизиқда қўйдаги иккинчи чегаравий масала.*
4. *Биринчи чегаравий масала учун Грин функцияси*
5. *Грин функциясининг хоссасалари*

2

Таянч иборалар

Коши масаласи,
мавжудлик теоремаси,
ягоналик теоремаси.
иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси,
биринчи чегаравий масала,
Коши масаласи,
иккинчи чегаравий масал,
Грин функцияси

3

1. Коши масаласи ечимининг ягоналиги

Юқорида биздар чегараланган ва узлуксиз бошлангич шартлар учун Коши масаланинг ечимини мавжудлигини исботлаган эдик. Энди юқоридаги шартларда биздар ягоналик теоремасини исботлаймиз.

Теорема 2.7 (ягоналик). *Коши масаласи берилган бўлсин. Фараз қилайлик $(R\times\bar{R}^{+})$ фазода бизларга 2 та узлуксиз $u_1,u_2(x,t)$ функциялар берилган бўлсин ва улар **[2.4]** масаланинг ечимлари бўлиб, қуйидаги шартларни қаноатлантирсин.*

$$|u_i(x,t)|\le M,\ \forall(x,t)\in R\times\bar{R}^{+};$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t},\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\in C(R\times R^{+})\qquad i=1,2$$

шунда

$$u_1(x,t)=u_{21}(x,t)\forall(x,t)\in(R\times\bar{R}^{+})$$

4

Исбот: Янги функция киритамиз. $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$

Аникки бу функция хам узлуксиз функция булади ва куйидаги шартларни каноатлантиради.

$$
\begin{cases}
u_t, u_{xx} \in C(R\times \overline{R}^+); \\
u_t = a^2 u_{xx}; \\
u(x,0)=0, \forall x\in R \\
|u(x,t)| \le 2M, \forall (x,t) \in (R\times \overline{R}^+);
\end{cases}
$$

5

Теоремани исботлаш учун $u(x,t)$ функциямиз айнан нолга тенг эканлигини исботлашимиз керак. Бунинг учун кандайдир ихтиёрий (x_0,t_0)

нуктада нолга тенг эканлигини курсатиш керак. Бунинг учун 2 та константа L ва T оламиз. Уларни шундай килиб олиш кераки улар куйидаги тугритуртбурчакка карашли булсин. Бу ерда $\Pi_{L,T}$

-тугритуртбурчакнинг чегараси булсин.

$$\Pi_{L,T} = \{(x,t) : |x| \le L, 0 \le t \le T\},$$

$$v_t^L, v_{xx}^L \in C[\Pi_{L,T}];$$

$$v_t^L = a^2 v_{xx}^L \in C[\Pi_{L,T}]; v^L(x,t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right)$$

6

Юкорида биз $u(x,t)$ функция учун бахоларни олган эдик. Шундан хулоса килиб айтганда $\Pi_{L,T}$ чегара устида $v^L(x,t) \ge u(x,t)$

булади.

Энди максимум принципидан фойдалансак,

$$v^L(x,t) \ge u(x,t) \forall (x,t) \in \Pi_{L,T}.$$

$$-v^L(x,t) \le u(x,t) \forall (x,t) \in \Pi_{L,T}.$$

Бундан

$$|u(x_0,t_0)| \le v^L(x_0,t_0) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x_0^2}{2} + a^2 t_0\right)$$

Энди L и чексизликка интилтирсак куйидагига эга буламиз.

$$|u(x_0,t_0)| \le v^\infty(x_0,t_0) = 0$$

7 Теорема исботланди.

Ярим тўғри чизиқда қўйдаги биринчи чегаравий масала.

Ярим тўгри чизиқда қўйдаги биринчи чегаравий масалани кўриб чиқамиз:

$$
[2.5]\begin{cases}
u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x>0, t>0; \\
u(0,t)=0, & t\ge 0; \\
u(x,0)=\phi(x), & x\ge 0.
\end{cases}
$$

бу ерда $\phi(x)=0$ Бутун Ҳақиқий ўқда бошлангич шартни берувчи $\phi(x)$ функцияни тоқ қилиб давом эттириб ечимни топамиз:

$$
\Phi(x) = \begin{cases}
\phi(x), & x\ge 0; \\
-\phi(-x), & x<0.
\end{cases}
$$

8

Мос равишда қуйидаги Коши масаласини кўриб чиқамиз:

$$[2.6]\begin{cases} U_{tt} = a^2 U_{xx}, & -\infty < x < +\infty, t > 0; \\ U(0,t) = 0, & t \ge 0; \\ U(x,0) = \Phi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Унинг ечими бизга маълум:

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\}\Phi(s)ds.$$

Айтайлик $(x,t) \in (\bar{R}^+ \times \bar{R}^+)$ да $u(x,t) = U(x,t)$

Бу функция [2.5] нинг ечими эканлигини кўрсатамиз. Коши масаласининг қўйилишига кўра,

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0; \\ u(x,0) = \phi(x), & x \ge 0. \end{cases}$$

эканлиги маълум. Чегаравий шартни бажарилишини текширамиз:

$$u(0,t) = U(0,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\{-\frac{s^2}{4a^2 t}\}\Phi(s)ds.$$

Интеграл остида жуфт ва тоқ функцияларнинг кўпайтмаси турибди, шунинг учун у нолга тенг. Чегаравий шарт бажарилади. Энди ечим учун тўлиқ формулани оламиз:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\}\Phi(s)ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\}(-\phi(-s))ds + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\}\phi(s)ds =$$

$$= -\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\}\phi(s)ds + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\}\phi(s)ds =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left[\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\} - \exp\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\}\right]\phi(s)ds.$$

Демак,

$$u(x,t) = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left[\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\} - \exp\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\}\right]\phi(s)ds. \quad (2.11)$$

бу ярим тўғри чизиқда биринчи чегаравий масаланинг ечими бўлади.

Ярим тўғри чизиқда иккинчи чегаравий масала

Ярим тўғри чизиқда иккинчи чегаравий масала қуйидаги кўринишга эга:

$$[2.7]\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0; \\ u_x(0,t) = 0, & t \ge 0; \\ u(x,0) = \phi(x), & x \ge 0. \end{cases}$$

Яна ечимни топиш учун бошланғич шартни берувчи функцияни энди жуфт қилиб давом эттирамиз:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \ge 0; \\ \phi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Бошланғич шартни ўзгартириб, қуйидаги коши масаласини оламиз:

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx}, & -\infty < x < +\infty, t > 0; \\ U(0,t) = 0, & t \ge 0; \\ U(x,0) = \Phi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Худди шундай унинг ечими

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\}\Phi(s)ds$$

функция бўлади.

Айтайлик $(x,t) \in (\bar{R}^+ \times \bar{R}^+)$ да $u(x,t) = U(x,t)$ бўлсин.

Яна
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0; \\ u(x,0) = \phi(x), & x \ge 0. \end{cases}$$
эканлиги аниқ.

13

Чегаравий масаланинг бажарилишини текширамиз:

$$u_x(x,t) = U_x(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left(-\frac{(x-s)}{2a^2 t}\right) \exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\}\Phi(s)ds \Rightarrow$$

$$u_x(0,t) = U_x(0,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left(\frac{s}{2a^2 t}\right) \exp\{-\frac{s^2}{4a^2 t}\}\Phi(s)ds \ \forall t \ge 0.$$

Ҳосил бўлган интеграл остида 2 та жуфт ва битта тоқ функциянинг кўпайтмаси турибди, демак у нольга айланади. Чегаравий шарт бажарилмоқда. [2.7] нинг ечими учун қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

14

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\}\phi(s)ds + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\}\phi(-s)ds =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left[\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\} + \exp\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\}\right]\phi(s)ds.$$

Бу ярим тўғри чизиқда 2-чегаравий масаланинг ечимидир.

15

Биринчи чегаравий масала учун Грин функцияси.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0; \\ u(0,t) = 0, & 0 \le t \le T; \\ u(l,t) = 0, & 0 \le t \le T; \\ u(x,0) = \phi(x), & 0 \le x \le l. \end{cases}$$

Маълумки, унинг ечими қуйидаги кўринишга эга:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \left(\int_0^l \phi(s) \sin(\frac{\pi n}{l} s) ds \right) \sin(\frac{\pi n}{l} x) \exp\{-a^2 (\frac{\pi n}{l})^2 t\}.$$

16

Уни Коши масаласини ечишда қуллаганимиздай бошқача кўринишда ифодалашимиз мумкин:

$$u(x,t)=\int_0^l G(x,s,t)\phi(s)ds,$$

$$G(x,s,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\sin(\frac{\pi n}{l}s)\sin(\frac{\pi n}{l}x)\exp\{-a^2(\frac{\pi n}{l})^2 t\}. \quad (2.12)$$

-бу биринчи чегаравий масала учун Грин функциясидир .

17

Грин функциясининг хоссалари

1-хосса. $G(x,s,t)=G(s,x,t).$

Бу хосса Грин функциясининг таърифидан келиб чиқади.

2-хосса. $G(x,s,t)\in C^{\infty}(R\times R\times R^{+}).$

Исботи:

(x,s,t) нуқтада узлуксизлигини исботлаймиз. Бунинг учун, $t>t_0$ да Вейерштрасс аломатига кўра текис яқинлашувчи эканлигини айтиб ўтиш етарли, чунки уни экспоненталардан \иборат яқинлашивчи қатор билан чегаралаш мумкин:

$$|G(x,s,t)|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\exp\{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t_0\}.$$

18

Дифференциалланувчилигини исботлаш учун, Ҳосилалардан иборат қатор текис яқинлашишини таъкидлаш етарли, чунки дифферинциаллаш натижасида яни кўпайтувчилар сифатида фақаттина полиномлар Ҳосил бўлади. Улар Ҳалақит бермайди, экспонента барибир яқинлашувчиликни таъминлайди.

3-хосса.

$$\begin{cases}G_t=a^2G_{xx};\\ G_t=a^2G_{ss};\end{cases}$$

Биринчи тенгламани (2.12) формулани дифференциаллаш орқали, иккинчи тенгламани эса 1-**хосса**даги тенгламани дифференциаллаш орқали текшириш мумкин.

19

4-хосса. $G(x,s,t)\ge 0, \quad x,s\in[0;l], \quad t>0.$

Исботи: Ихтиёрий (x,s_0,t) нуқта учун исботлаймиз. $\phi_h(x)$ функция $(s_0-h;s_0+h)$ интервалда қандайдир $\tilde{\phi}(x)$ мусбат функцияга, интервалдан ташқарисида эса 0 га тенг бўлсин:

$$\phi_h(x)=\begin{cases}\tilde{\phi}(x)>0 & ,x\in(s_0-h;s_0+h);\\ 0, & x\in[0,l]\setminus(s_0-h,s_0+h).\end{cases}$$

Бундан ташқари , қуйидаги шартларни қаноатлантирсин :

$$\begin{cases}\phi_h(x)\in C[0;l];\\ \int_0^l\phi_h(x)dx=1.\end{cases}$$

20

ва [2.2] турдаги қандайдир чегаравий масала учун бошланғич шартни берсин. У Ҳолда бу чегаравий масаланинг ечими бўлган $u_h(x,t)$

функция қуйидаги формула билан аниқланади:

$$u_h(x,t)=\int_0^l G(x,s,t)\phi_h(x)ds=\int_{s_0-h}^{s_0+h} G(x,s,t)\phi_h(s)ds=$$

$$=G(x,\theta,t)\int_{s_0-h}^{s_0+h}\phi_h(s)ds=G(x,\theta,t),\theta\in(s_0-h;s_0+h).\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}G(x,\theta,t)=\lim_{h\to 0}u_h(x,t)\Rightarrow$$

$$G(x,s_0,t)=\lim_{h\to 0}u_h(x,t). \qquad (2.12)$$

21

$$u_h(0,t)=0=u_h(l,t):$$

бўлган холда максимал қиймат принципини қўллаймиз:

$$\min_{\substack{x\in[0;l]\\ t\in[0,T]}} u_h(x,t)=\min\{0,0,\min_{x\in[0;l]}\phi(x)\}=0.$$

(2.13) га кўра, $G(x,s_0,t)$.

манфий эмаслигини аниқлаймиз.
4-хосса исботланди.

22

Саволлар.

1. Коши масаласи
2. Ягоналик теоремаси
3. Мавжудлик теоремаси
4. Иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун биринчи чегаравий масаланинг келтиринг.
5. Ярим тўгри чизиқда 1–чи чегаравий масаланинг ечимини келтиринг.
6. Иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун иккинчи чегаравий масаланинг келтиринг.
7. Ярим тўгри чизиқда 2–чи чегаравий масаланинг йечимини келтиринг.
8. Биринчи чегаравий масала учун Грин функцияси ёзинг.
9. Грин функциясининг 1-чи хоссасини исботланг.
10. Грин функциясининг 2-чи хоссасини исботланг.
11. Грин функциясининг 3-чи хоссасини исботланг.
12. Грин функциясининг 4-чи хоссасини исботланг.

23

Математик физика тенгламалари

маърузалар

Маъруза № 10.

Эллиптик типдаги тенгламалар

Мавзу:

Лаплас ва Пуассон тенгламалари. Грин формуласи

1

Маъруза № 10

Лаплас ва Пуассон тенгламалари. Грин формуласи

Режа:

1. *Лаплас ва Пуассон тенгламалари. Чегаравий масалаларнинг қўйилиши. Лаплас тенгламасининг фундаментал ечими.*
2. *Биринчи Грин формуласи.*
3. *Гриннинг иккинчи формуласи.*
4. *Гриннинг учинчи формуласи.*

2

Таянч иборалар

Лаплас,
Пуассон,
Грин,
тенглама,
фундаментал ечим,
формула

3

1. Лаплас ва Пуассон тенгламалари. Чегаравий масалаларнинг қўйилиши. Лаплас тенгламасининг фундаментал ечими

E^3 фазога қарашли қандайдир Ω очиқ соҳанинг чегараси Σ бўлсин. Худди шундай, E^2 фазодаги қандайдир D очиқ соҳа чегараси L бўлсин.

Иссиқликни ўтказувчанлик тенгламасини қараймиз:

$$u_t(x,y,z,t) = a^2\Delta u(x,y,z,t) + f_1(x,y,z),$$

$$(x,y,z)\in\Omega;\quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{yy};$$

$$u_t(x,y,t) = a^2\Delta u(x,y,t) + f_2(x,y),$$

$$(x,y)\in D;\quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}.$$

4

Стационар иссиқлик процесс ҳолидаги $(u_t = 0)$ эллиптик типдаги тенгламани тузамиз: $\Delta u = -f$

Бу холда умумий кўринишидан қуйидаги икки тип тенглама ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(x,y,z) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x,y) \end{cases} \quad E^2,\ E^3 \textit{фазода Пуассон тенгламаси}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \quad E^2,\ E^3 \textit{фазода Лаплас тенгламаси}$$

Бу тенгламалар кўпинча турли стационар физик майдонларни таърифлашда ёрдам беради.

5

Таъриф. $u(x,y,z)$ функция Ω *сохада гармоник дейилади, агар*

$$u \in c^2(\Omega) \quad \textit{ва} \quad \Omega \quad \textit{да} \quad \Delta u = 0$$

Комплекс ўзгарувчили функция аналитиклигидан, икки ўзгарувчили гармоник функцияни тузиш мумкин. Агар $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$

аналитик бўлса, v функция учун Коши- Риман хоссалари бажарилади:

$$\begin{cases} u_x(x,y) = v_y(x,y); \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \end{cases}$$

Юқоридаги тенгламани x бўйича, пастки тенгламани y бўйича дифференциаллаймиз:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) = v_{xy}(x,y) \\ u_{yy}(x,y) = -v_{xy}(x,y) \end{cases} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

6

Худи шундай тенгламани v функция учун ҳосил қилиш мумкин. Бундан хулоса қилиш мумкинки, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

-аналитик функция бўлса ,у ҳолда , u, v- гармоник функция бўлади.

Кейинчалик биз E^3 фазода қуйидаги масалаларни қараймиз:

Дирихле ички масаласи

$$\begin{cases} \Delta u(x,y,z) = 0, & (x,y,z) \in \Omega \\ u(x,y,z) = \mu(x,y,z), & (x,y,z) \in \Sigma \end{cases}$$

Нейман ички масаласи

$$\begin{cases} \Delta u(x,y,z) = 0, & (x,y,z) \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,y,z) = v(x,y,z), & (x,y,z) \in \Sigma \end{cases}$$

7

Дирихле ташқи масаласи

$$\begin{cases} \Delta u(x,y,z) = 0, & (x,y,z) \in E^3 \setminus \bar{\Omega} \\ u(x,y,z) = \mu(x,y,z), & (x,y,z) \in \Sigma \end{cases}$$

Нейман ташқи масаласи

$$\begin{cases} \Delta u(x,y,z) = 0, & (x,y,z) \in E^3 \setminus \bar{\Omega} \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,y,z) = v(x,y,z), & (x,y,z) \in \Sigma \end{cases}$$

Берилган масалаларни Пуассон тенглиги учун қўллаш табиийдир. Бундан ташқари, икки ўлчовли аналоглар ҳам мавжуд. Масалан:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y,z) = 0, (x,y,z) \in D; \\ u(x,y,z) = \mu(x,y,z)(x,y,z) \in L \end{cases}$$

E^2 -фазода Дирихли ички масалаcи

$$u(x,y,z)=\frac{1}{R_{MM_0}}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}^3}$$ функцияни қарайлик

R_{MM_0} – $M(x,y,z)$ ва $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нуқталар орасидаги масофа

Келтирилган функция $E^3\setminus M_0$ сохада Лаплас тенгламасининг ечими бўлишини исботлаймиз.

$$u_x=-\frac{1}{2}\frac{2(x-x_0)}{R^3{}_{MM_0}}=-\frac{x-x_0}{R^3{}_{MM_0}};u_{xx}=-\frac{3(x-x_0)^2}{R^5{}_{MM_0}}-\frac{1}{R^5{}_{MM_0}}$$

$$u_y=-\frac{1}{2}\frac{2(y-y_0)}{R^3{}_{MM0}}=-\frac{y-y_0}{R_{MM0}};u_{yy}=-\frac{3(y-y_0)}{R^5{}_{MM0}}-\frac{1}{R^5{}_{MM0}}$$

$$u_z=-\frac{1}{2}\frac{2(z-z_0)}{R^3{}_{MM0}}=-\frac{z-z_0}{R^3{}_{MM0}};u_{zz}=-\frac{3(z-z_0)}{R^5{}_{MM0}}-\frac{1}{R^5{}_{MM0}}$$

9

$$\Rightarrow\Delta\frac{1}{R_{MM0}}=\frac{3(x-x_0)^2+3(y-y_0)^2+3(z-z^2{}_0)}{R^5{}_{MM0}}-\frac{3}{5R^3{}_{MM0}}\equiv 0$$

E^2 фазода қуйидаги текшириш осон:

$$u(x,y)=\ln\frac{1}{P_{MM0}}$$ функция

$E^2\setminus M_0$ сохадада Лаплас тенгламасининг ечими бўлади. Бу ерда

$$P_{MM0}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

Бу функциялар Лаплас тенгламасининг фундаментал ечими дейилади.

10

Биринчи Грин формуласи.

Фараз қилайлик Σ чекли сондаги ёпиқ қисмлардан иборат бўлиб, ҳар бир нуқтада уринмага эга бўлиб, бу уринмалар координата ўқларига параллел бўлса, шунда улар ё чекли сондаги нуқталарда кесишади ё кесишишидан хосил бўлган ёпиқ ораликлар чекли бўлади. У ҳолда Ω соха учун

$$\vec{A}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$$

бу ерда $P,Q,R\in C^1(\overline{\Omega})$

Остроградский- Гаусс формуласи ўринли:

$$\iint_{\Sigma}(\vec{A},\vec{n})d\sigma=\iiint_{\Omega}div\vec{A}d\tau \qquad (3.1)$$

$u(x,y,z)$ ва $v(x,y,z)\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega}),\ \vec{A}=ugradv$

берилган бўлсин. Шунда (3.1) формулага кўра:

$$\iiint_{\Omega}div(ugradv)d\tau=\iint_{\Sigma}(u\ gradv,\vec{n})d\sigma=$$

$$=\left\{(gradv,\vec{n})=\frac{\partial v}{\partial n};div(u\ gradv)=(gradu,gradv)+u\Delta v\right\}=$$

$$\iint_{\Sigma}u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma\Rightarrow$$

$$\iiint_{\Omega}((gradu,gradv)+u\Delta v)d\tau=\iint_{\Sigma}u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma. \qquad (3.2)$$

Ҳосил бўлган формула Гриннинг биринчи формуласи дейилади.

12

3. Гриннинг иккинчи формуласи.

Биринчи Грин формуласидан u ва v функцияларнинг ўрнини алмаштирамиз. Ҳосил бўлган айниятни (3.2) дан айирсак, Гриннинг иккинчи формуласи келиб чиқади:

$$\iiint\limits_{\Omega}(u\Delta v - v\Delta u)d\tau = \iint\limits_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma \quad (3.3)$$

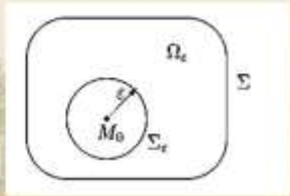
4. Гриннинг учинчи формуласи.

Юқорида кўрсатганимиздек

$$v = \frac{1}{R_{MM_0}} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

E^3 фазода Лаплас тенгламасининг ечими дейилади.

$M_0 \in \Omega$ нуқтани фиксирлаймиз ва уни ε радиусли Σ_ε сфера билан айлантириб оламиз. Шунда $v \in C^2(\overline{\Omega}_\varepsilon), \Omega_\varepsilon = \Omega \setminus S_{M_0}(\varepsilon)$



Қандайдир $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ функция оламиз. Ω_ε соха учун Гриннинг иккинчи формуласини ёзамиз:

$$\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}(u\Delta v - v\Delta u)d\tau = \iint\limits_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma +$$

$$+\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma \Rightarrow \{\Delta u = 0\} \Rightarrow$$

$$-\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}\frac{1}{R_{MM_0}}\Delta u(M)d\tau_M = \iint\limits_{\Sigma}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right) - \frac{1}{R_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial n}(M)\right)d\sigma_M +$$

$$+\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right) - \frac{1}{R_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial n}(M)\right)d\sigma_M.$$

$\varepsilon \to 0$ иккинчи икки каррали интегрални қараймиз.

Маълумки, бирлик $\overline{n}$ нормал Σ_ε сферанинг $\{x, y, z\}$ нуқтасида қуйидагича бўлади:

$$\left\{-\frac{x-x_0}{R_{MM_0}}, -\frac{Y-Y_0}{R_{MM_0}}, -\frac{Z-Z_0}{R_{MM_0}}\right\}$$ бундан,

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right) = \left(\vec{n}, grad\frac{1}{R_{MM_0}}\right) =$$

$$= \frac{(x-x_0)^2}{R^4_{MM_0}} + \frac{(y-y_0)^2}{R^4_{MM_0}} + \frac{(z-z_0)^2}{R^4_{MM_0}} = \frac{1}{R^2_{MM_0}} = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Унда бу интеграл қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\iint_{\Sigma_\varepsilon}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right)-\frac{1}{R_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\Sigma_\varepsilon}u\,d\sigma-\frac{1}{\varepsilon}\iint_{\Sigma_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=$$

$$=u\left(M_\varepsilon^{\cdot}\right)\frac{4\pi\varepsilon^2}{\varepsilon^2}-\frac{\partial u}{\partial n}\left(M_\varepsilon^{\cdot}\right)\frac{4\pi\varepsilon^2}{\varepsilon}=4\pi u\left(M'_\varepsilon\right)-4\pi\varepsilon\frac{\partial u}{\partial n}\left(M_\varepsilon^{\cdot}\right),$$

Бу ерда $M^{*}_{\varepsilon}, M'_{\varepsilon}$ - нуқталар $\sum_\varepsilon$ сферада олинган.

$\frac{\partial u}{\partial n}$ чегаравийлигини ҳисобга олган ҳолда ε нолга интилтирамиз:

$$4\pi u\left(M'_\varepsilon\right)-4\pi\varepsilon\frac{\partial u}{\partial n}\left(M^{*}_\varepsilon\right)\xrightarrow{\varepsilon\to 0}4\pi u\left(M_0\right)$$

17

Қўшилувчиларни маълум бир қисмини ўнг томонга ўтказиб,

$u(M_0)$ учун қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$4\pi u(M_0)=-\iiint_{\Omega}\frac{1}{R_{MM_0}}\Delta u(M)d\tau_M-\iint_{\Sigma}\left[u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right)-\frac{1}{R_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial n}(M)\right]d\sigma_M \qquad (3.4)$$

Бу Гриннинг учинчи формуласи деб аталади.

18

E^2 фазода аналогик таҳлиллар олиб бориб, иккинчи ва учинчи Грин формулалари учун икки ўлчовли аналоглар ҳосил қилиш осон:

$$\iint_D(u\Delta v-v\Delta u)ds=\int_L\left(u\frac{\partial u}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dl.$$

$$2\pi u(M_0)=-\iint_D\ln\left(\frac{1}{\rho MM_0}\right)\Delta u\,ds-\int_L\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{\rho MM_0}\right)-\ln\frac{1}{\rho MM_0}\frac{\partial u}{\partial n}\right]dl$$

19

Саволлар:

1. *Лаплас тенгламаси.*
2. *Пуассон тенгламаси.*
3. *Чегаравий масалаларнинг қўйилиши.*
4. *Лаплас тенгламасининг фундаментал ечими.*
5. *Биринчи Грин формуласи.*
6. *Гриннинг иккинчи формуласи.*
7. *Гриннинг учинчи формуласи.*

20


Математик физика тенгламалари
маърузалар
Маъруза № 11.
Мавзу:
Гармоник функцияларнинг хоссалари. Максимум принципи. Дирихле масаласи
1


Маъруза № 3
Гармоник функцияларнинг хоссалари.
Максимум принципи.
Дирихле масаласи
Режа:
1. Гармоник функция хоссалари
2. Гармоник функциялар учун максимум принципи.
3. Дирихле ички масаласининг ечими ягоналиги ва турғунлиги
4. Дирихле ташки масаласи ечими ягоналиги. Фазода Дирихле ташки масаласи
2


Таянч иборалар
Гармоник функция,
Дирихли ички, ташки масаласи,
Фазода Дирихли ташки масаласи
3

1. Гармоник функция хоссалари

Таъриф. Агар u функция $u\in C^2(\Omega)$ ва $\forall x\in\Omega$ учун $\Delta u=0$ бўлса, Ω соҳада гармоник дейилади.

1-хосса. Агар v функция Ω да гармоник бўлса, у ҳолда $\iint\limits_{\tilde{\Sigma}}\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma=0$ бўлади, бу ерда $\tilde{\Sigma}$: Ω да ётувчи ихтиёрий ёпиқ сирт.

Исботи.

$\tilde{\Sigma}$ билан чегараланган соҳа учун Гриннинг (3.2) 1-формуласида $\upsilon\equiv 1$ ни оламиз. (равшанки, υ -гармоник функция). Демак

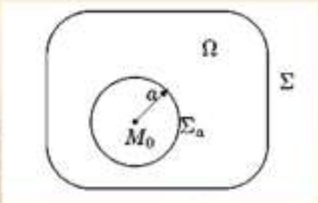
$$\iint\limits_{\tilde{\Sigma}}\frac{dv}{dn}d\sigma=0$$

4

2-хосса. (Ўрта қиймат ҳақидаги теорема) u функция Ω да гармоник бўлсин ва Ω да ётувчи маркази M_0 нўқтада радиуси a га тенг ихтиёрий Σ_a сфера учун

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi a^2}\iint\limits_{\Sigma_a}u(p)d\sigma_p \qquad (3.5)$$

формула ўринли.



Исбот.

Σ_a сферанинг ички соҳаси учун Гриннинг учинчи формуласи (3.4) ни ёзамиз:

$$4\pi u(M_0)=-\iint\limits_{\Sigma_a}[u\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{R_{MM_0}})-\frac{1}{R_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial n}]d\sigma=\{\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{R_{MM_0}})=-\frac{1}{a^2}\}=$$

$$=\frac{1}{a^2}\iint\limits_{\Sigma_a}ud\sigma+\iint\limits_{\Sigma_a}\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma$$

Гармоник функциянинг 1-хоссасига кўра иккинчи интеграл нолга айланади ва шу билан (3.5) формула исботланди.

6

3-хосса: Агар u функция- Ω да гармоник бўлса, бу ҳолда у Ω да чексиз дифференциалланувчи бўлади.

Исботи.

$u(M_0)=u(x,y,z)$ $\quad (P(P_x,P_y,P_z)\in\Sigma_a)$ учун Гриннинг 3-формуласини ёза

$$4\pi u(x,y,z)=-\iint\limits_{\Sigma}[u(P)\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{\sqrt{(x-P_x)^2+(y-P_y)^2+(z-P_z)^2}})-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(x-P_x)^2+(y-P_y)^2+(z-P_z)^2}}\frac{\partial u(P)}{\partial n}]d\sigma_P \qquad (3.4)$$

Кўриниб турибдики: агар M нўкта $\sum$ нинг чегарасида ётмаса, у ҳолда интеграл тагидаги функция x (худи шудай y ва z) аргументлари бўйича чексиз дифферинциалланувчи.

Маълумки, бу ҳолда бутун интеграл, демак, $u(M)$ функция ҳам чексиз дифферинциаллаувчи функция.

7

2 Гармоник функциялар учун максимум принципи.

Теорема 3.1 (Максимум принципи)

Агар функция $u \in C(\overline{\Omega})$ ва Ω да гармоник бўлса, бу ҳолда у ўзининг максимум(минимум) ига соҳанинг чегарасида эришади.

$$\max_{M \in \overline{\Omega}} u(M) = \max_{M \in \Sigma} u(M);$$

$$\min_{M \in \overline{\Omega}} u(M) = \min_{M \in \Sigma} u(M);$$

Исботи: фараз қилайлик $u(M)$ функция масалан, бирор M_0 ички нўқтада максимумга эришсин: $u(M_0) = \max_{M \in \overline{\Omega}} u(M)$

у ҳолда (3.5) ўрта қиймат формуласига кўра (a-етарлича кичик сон)

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_a} u(P) d\sigma_p \le \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_a} u(M_0) d\sigma = u(M_0)$$

u функция узлуксиз бўлгани учун, у ҳолда $u(P) = u(M_0)$ (яъни максимум бутун сферада эришилади).

Бу алмаштиришларни етарлича марта давом эттириб, максимум чегарада ҳам эришишини хосил қиламиз.

3. Дирихле ички масаласининг ечими ягоналиги ва турғунлиги

Бу ерда ва кейин ҳам μ, v лар қандайдир берилган функциялар.

Таъриф: $u(x,y,z)$ функция Дирихле ички масаласининг ечими дейилади, агар у қуйидаги шартларни қаноатлантирса:

$$(3.1)\begin{cases} (1) u(x,y,z) \in C(\overline{\Omega}), u \in C^2(\Omega) \\ (2) \Delta u(x,y,z) = 0, (x,y,z) \in \Omega \\ (3) u(x,y,z) = \mu(x,y,z), (x,y,z) \in \Sigma \end{cases}$$

Ω да узлуксиз ва гармоник ечимнинг ягоналик ҳақидаги теоремани исботлаймиз.

Теорема. 3.2 (ягоналиги теоремаси) $u_1(x,y,z), u_2(x,y,z)$ функция [3.1] Дирихле ички масаласининг ечимлари бўлсин. У ҳолда

$$u_1(x,y,z) = u_2(x,y,z); \forall (x,y,z) \in \overline{\Omega}$$

Исботи: $\upsilon = u_1 - u_2$ янги функцияларни аниқлаймиз. Осон кўринадики, у $\overline{\Omega}$ да узлуксиз, Ω да гармоник ва $\upsilon(x,y,z) = 0, (x,y,z) \in \Sigma$.

У ҳолда υ функция учун максимум принципининг ҳамма шартларини қаноатлантирган ва бундан қуйидаги келиб чиқади:

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{\Omega} v = \max\limits_{\Sigma} v = 0 \\ \min\limits_{\Omega} v = \min\limits_{\Sigma} v = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow v(x,y,z) \equiv 0, (x,y,z) \in \Omega$$

теорема исботланди.

Энди Дирихле ички масаласини ечими турғунлигини кўрсатамиз. Лекин ундан аввал қуйидаги леммани исбот қиламиз:

Лемма 1. $u_1(x,y,z), u_2(x,y,z)$

функциялар қуйидаги учта шартларни қаноатлантирсин:

1. $u_1, u_2 \in C(\overline{\Omega})$;
2. $u_1, u_2 - \Omega$ да гармоник
3. $u_1(x,y,z) \geq u_2(x,y,z), (x,y,z) \in \Sigma$

У холда $u_1 \geq u_2, \forall (x,y,z) \in \Omega$

12

Исботи:

$\upsilon = u_1 - u_2$ функцияни қараймиз. У холда

$\forall (x,y,z) \in \Sigma.$ $v(x,y,z) \geq 0$

Минимум принципидан фойдаланиб (равшанки барча шартлар бажарилган)

$\overline{\Omega}$ да $\min\limits_{\overline{\Omega}} v = \min\limits_{\Sigma} v \geq 0 \Rightarrow u_1 \geq u_2$ ни хосил киламиз.

Лемма исботланди.

13

Теорема 3.3 (турғунлик теоремаси).

$u_1(x,y,z), u_2(x,y,z)$ функциялар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

$$\begin{cases} (1) u_1, u_2 \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega); \\ (2) \Delta u_1(x,y,z) = \Delta u_2(x,y,z) = 0, (x,y,z) \in \Omega; \\ (3) u_i(x,y,z) = \mu_i(x,y,z), (x,y,z) \in \Sigma, i = 1,2. \end{cases}$$

У холда $\max\limits_{\Omega} |u_1 - u_2| \leq \max\limits_{\Sigma} |\mu_1 - \mu_2|$ бўлади.

14

Исботи. $\varepsilon = \max\limits_{\Sigma} |\mu_1 - \mu_2|, v = u_1 - u_2$

белгилаш оламиз. У ҳолда v функция Ω да гармоник,

$$-\varepsilon \leq v \leq \varepsilon; (x,y,z) \in \Sigma,$$

У ҳолда *(-ε, v)* ва *(ε, v)* функциялар жуфти учун леммани қўллаб (равшанки унинг шартлари бажарилади) $\overline{\Omega}$ да

$-\varepsilon \leq v \leq \varepsilon; (x,y,z) \in \overline{\Omega} \Rightarrow |u_1 - u_2| \leq \varepsilon$ ни оламиз.

теорема исботланди.

15

Натижа.

$u_n(x,y,z)$ функциялар кетма-кетлиги, хар бир функция хамда $u\,(x,y,z)$ мос $\sum$ $u_n=\mu_n$, Ω да $u=\mu$ Дирихле масаласи ечими бўлсин. У ҳолда да μ_n нинг текис яқинлашишидан $\sum$ да $\mu_n(\mu_n \Rightarrow \mu)$, Ω да $u_n \Rightarrow u$

келиб чиқади.

Эслатма. Исботланган теорема икки улчамли ҳол учун тўлик ўринли. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун шунга ухшаш мулохазалар юритиш керак. Энди Дирихли масаласининг бошқа варианти- Дирихле ташқи масаласини қараймиз.

16

4. Дирихле ташки масаласи ечими ягоналиги

Фазода Дирихли ташки масаласи

Таъриф. $u(x,y,z)$ функция фазодаги Дирихле ташки масаласининг ечими дейилади, агар у қўйидаги шартларни каноатлантирса:

$$\begin{cases} (1)u(x,y,z)\in C(\mathrm{E}^3\setminus\Omega); \\ (2)\Delta u(x,y,z)=0,(x,y,z)\in \mathrm{E}^3\setminus\overline{\Omega}; \\ (3)u(x,y,z)=\mu(x,y,z),(x,y,z)\in\Sigma. \\ (4)u(x,y,z)\Rightarrow 0,(x,y,z)\to\infty \end{cases}$$

Узлуксиз ечимнинг ягоналигини исботлаймиз.

17

Теорема 3.4 (ягоналик теоремаси).

$u_1,u_2(x,y,z)$ функциялар қўйидаги шартларни қаноатлантирсин:

$$\begin{cases} (1)u_1,u_2(x,y,z)\in C(\mathrm{E}^3\setminus\Omega); \\ (2)\Delta u_1(x,y,z)=\Delta u_2(x,y,z),(x,y,z)\in \mathrm{E}^3\setminus\overline{\Omega}; \\ (3)u_1,u_2(x,y,z)=\mu(x,y,z),(x,y,z)\in\Sigma. \\ (4)u_1,u_2(x,y,z)\Rightarrow 0,(x,y,z)\to\infty \end{cases}$$

У холда $u_1(x,y,z)=u_2(x,y,z),(x,y,z)\in\Sigma^3\setminus\overline{\Omega}$ бўлади.

18

Исботи.

$v(x,y,z)=u_{1(}(x,y,z)-u_2(x,y,z)$ бўлсин. У ҳолда v функция теореманинг $\mu(x,y,z)=0$ шартини каноатлантиради.

$v\equiv 0$ эканлигини исботлаймиз;

Тескарисини фараз қилайлик, яъни,

$\exists M_0(x_0,y_0,z_0)\in \mathrm{E}^3\setminus\overline{\Omega}: v(x_0,y_0,z_0)=A>0$ бўлсин.

19

У ҳолда текис яқинлашиш таърифига кўра M_0 нўқтани тўла уз ичига олувчи R радиусли шундай Σ_R сфера мавжудки $|v(x,y,z)| \le \frac{A}{2}, (x,y,z) \in \Sigma_R$

Бу ҳолда

$$\max_{\Sigma_R} v(x,y,z) \le \frac{A}{2};$$

$$\min_{\Sigma_R} v(x,y,z) \ge -\frac{A}{2}.$$

бўлади.

20

v функция га Ω_R очик соҳада максимал қиймат принципини қўллаб (бу соҳа ташқарисидан Σ_R билан, ичкарисидан- Σ билан чегараланган):

$$\begin{cases} \max\limits_{\Omega_R} v = \max\limits_{\Sigma \cup \Sigma_R} v \le \frac{A}{2}; \\ \min\limits_{\Omega_R} v = \min\limits_{\Sigma \cup \Sigma_R} v \le -\frac{A}{2}; \end{cases} \Rightarrow |v(x_0, y_0, z_0)| \le \frac{A}{2}.$$

ни оламиз.

$v(x_0, y_0, z_0) = A$ билан қарама-қаршиликга келамиз. У ҳолда

$v(x,y,z) = 0$ эканлиги келиб чикади. Теорема исботланди. Туртинчи шарт мухим роль уйнаяттанини куйидаги мисолда курсатамиз.

21

Мисол. $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 < a^2;$

$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$ бўлсин.

Энди қуйидаги Дирихли ташки масаласини қараймиз.

$1. u \in C(E^3 \setminus \overline{\Omega});$

$2. u - E^3 \setminus \overline{\Omega}$

$3. u(x,y,z) = C = const, (x,y,z) \in \Sigma$ да гармоник функция

Осон кўриш мумкинки $u_1(x,y,z) = C$ ва $u_2(x,y,z) = \frac{Ca}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

функциялар берилган масаланинг ечимлари бўлади, лекин $u_1 \neq u_2$

,шунинг учун бу қўйилган шартлар масала ечими ягоналигига зид.

22

Саволлар

1. Гармоник функция таърифи.
2. Гармоник функция хоссалари.
3. Максимум принципи теоремаси.
4. Дирихле ички масаласининг ечими ягоналиги теоремаси.
5. Дирихле ички масаласининг ечими тургунлиги теоремаси.
6. Дирихли ташки масаласининг ечими таърифи.
7. Дирихле ташки масаласи ечими ягоналиги теоремаси.

23

Математик физика тенгламалари
маърузалар

Маъруза № 12.

Мавзу:

Текисликда Дирихленинг ташқи масаласи

1

Маъруза № 12

Текисликда Дирихленинг ташқи масаласи

Режа:

1. Ягоналик теоремаси.
2. Нейманнинг ички масаласи
3. Нейманнинг ички масаласи ечилиши учун зарурий шартлар.
4. Ечимнинг ягоналиги.
5. Лаплас тенгламаси учун Грин функцияси ва унинг хоссалари

2

Таянч иборалар

Ягоналик теоремаси,
Нейманнинг ташки масаласи,
Лаплас тенгламаси,
Грин функцияси,
Грин функцияси хоссалари

3

Текисликда Дирихленинг ташқи масаласи

Таъриф: Агар $u(x,y)$ функция қуйидаги шартларни қаноатлантирса, шунда текисликда Дирихле ташқи масаласининг ечими дейилади:

$$[3.3]\quad \begin{cases} (1) & u(x,y)\in C(E^2\setminus D), \quad u\in C^2(E^2\setminus \overline{D}) \\ (2) & \Delta u(x,y)=0, \qquad (x,y)\in E^2\setminus \overline{D} \\ (3) & u(x,y)=\mu(x,y), \qquad (x,y)\in L \\ (4) & |u(x,y)|\le C=const, \quad (x,y)\in E^2\setminus \overline{D} \end{cases}$$

4

3.5. теорема (ягоналик). Фараз қиламиз, $u_1, u_2(x,y)$ шундай функциялар бўлсинки, улар учун

$$\begin{cases} (1) \quad u_1, u_2(x,y) \in C\left(E^2 \setminus D\right), \quad u \in C^2\left(E^2 \setminus \overline{D}\right) \\ (2) \quad \Delta u_1(x,y) = \Delta u_2(x,y), \qquad (x,y) \in E^2 \setminus \overline{D} \\ (3) \quad u_1, u_2(x,y) = \mu(x,y), \qquad (x,y) \in L \\ (4) \quad \left|u_i(x,y)\right| \le C_i = const, \qquad i = 1,2; \quad (x,y) \in E^2 \setminus \overline{D} \end{cases}$$

У ҳолда $E^2 \setminus \overline{D}$ фазода $u_1(x,y) = u_2(x,y)$ бўлади

5

Исбот:

Фараз қиламиз, $u = u_1 + u_2$ Унда v учун:

$v(x,y) = 0, \quad (x,y) \in L, \quad \left|v(x,y)\right| \le C = c_1 + c_2$ Исбот қиламизки,

$$v(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in E^2 \setminus \overline{D}$$

Тескарисини фараз қиламиз: шундай $M^*\left(x^*, y^*\right), \ \left(x^*, y^*\right) \in E^2$ мавжудки, $v\left(x^*, y^*\right) = A > 0$. У ҳолда шундай a-ни оламизки, маркази $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ нуқтада бўлган L_a айлана тўлигича D да ётсин ва шундай R танлаймизки L_R айлана D соҳани ҳам M^* нуқтани ҳам ўзида сақласин.

Ушбу

$$w_R(x,y) = C \frac{\ln \frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}{a}}{\ln \frac{R}{a}}$$

функцияни аниқлаймиз

6

Кўриниб турибдики,

1) $w_R(x,y) \in C\left(E^2 \setminus D\right)$

2) $w_R(x,y)$ функция $E^2 \setminus \overline{D}$ соҳада гармоник функция.

3) L чегарада $w_R(x,y) \ge 0$ бўлади.

4) L_R чегарада $w_R(x,y) = C$ бўлади.

Бу ердан

$$\begin{cases} \left|v(x,y)\right| \le w_R(x,y), \quad (x,y) \in L \\ \left|v(x,y)\right| \le C = w_R(x,y), \quad (x,y) \in L_R \end{cases}$$

келиб чиқади.

7

Максимумлар принципини қўллаб, ичкаридан L билан ва ташқаридан L_R билан чегараланган D_{LL_R} соҳада

$\left|v(x,y)\right| \le w_R(x,y), \quad (x,y) \in D_{LL_R}$ ни ҳосил қиламиз. Бу ердан

$$\left|v\left(x^*, y^*\right)\right| \le w_R\left(x^*, y^*\right) = w_R(x,y) = C \frac{\ln \frac{\sqrt{\left(x^* - x_0\right)^2 + \left(y^* - y_0\right)^2}}{a}}{\ln \frac{R}{a}}$$

R ни чексизликка интилтириб,

$$\left|v\left(x^*, y^*\right)\right| \le w_\infty\left(x^*, y^*\right) = 0$$ ни ҳосил қиламиз.

Бу эса, $v\left(x^*, y^*\right) = A$ деб фаразимиз қилганимиз нотўғрилигини исботлайди. Демак, $v(x,y) \equiv 0$ эканлиги келиб чиқади. Теорема исботланди.

8

(4) шарт муҳим эканини кўрсатувчи мисол келтирамиз:
Мисол:
Фараз қилайлик: $D: x^2+y^2<b^2$

$Д: x^2+y^2=b^2$

Дирихленинг ташқи масаласини қуйидагича қўямиз:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & E^2 \setminus \overline{D} \\ u(x,y) = C = const, & (x,y) \in L \end{cases}$$

Осонгина текшириб кўриш мумкинки, $u_1(x,y)=C$ ва

$$u_2(x,y) = C + \ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{b}$$

функциялар берилган масаланинг ечимлари бўлади. Аммо u_2 функция ҳеч қандай ўзгармас билан чегараланмаган, шунинг учун ҳам масаланинг бундай қўйилишида ягоналик бузилмаган.

9

Нейманнинг ички масаласи

Таъриф: Агар E^4 фазода аниқланган $u(x,y,z)$ функция қуйидаги 3 та [3.4] масаланинг шартларини қаноатлантирса, шунда у Нейман ички масаласининг ечими дейилади:

$$[3.4] \quad \begin{cases} (1) \quad u(x,y,z) \in C^1(\overline{\Omega}), & u \in C^2(\Omega) \\ (2) \quad \Delta u(x,y,z) = 0, & (x,y,z) \in \Omega \\ (3) \quad \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,y,z) = v(x,y,z), & (x,y,z) \in \Sigma \end{cases}$$

Шунга диққатингизни қаратингки, u функция $\overline{\Omega}$ соҳада ва унинг 1-чи тартибли ҳосилаларари билан биргаликда узлуксиз бўлиши кераклиги талаб қилинмоқда, ва бу билан Дирихле масаласидан фарқ қилади. Чунки, Дирихле масаласида фақат u функциянинг узлуксизлиги талаб этилган эди.

10

Нейманнинг ички масаласи ечилиши учун бўлган зарурий шарт

Фараз қиламиз, u функция [3.4] масаланинг ечими ва v – ихтиёрий икки марта дифференциалланувчи функция бўлсин. Бу функциялар учун Гриннинг 2-чи формуласини қўллаймиз:

$$\iiint\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\,d\tau = \iint\limits_{\Sigma} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$$

$v=1$ бўлганда қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma = \iint\limits_{\Sigma} v(x,y,z)\,d\sigma = 0 \qquad (3.6)$$

(3.6) тенглик Нейман ички масаласининг ечилиши учун зарурий шарт дейилади. Нейман масаласи ечимининг ягоналигини исботлаймиз. Осонгина кўриш мумкинки, агар u функция ([3.4]) масаланинг ечими бўлса, унда *(u+const)* ҳам ечимдир. Буни тривиал бир қийматли эмаслик деб атаймиз. Фақат шундай бир қийматли эмаслик бўлиши мумкинлигини исботлаймиз

11

Ечимнинг ягоналиги

3.6. теорема (ягоналик теоремаси)

Фараз қиламиз, $u_i(x,y,z)$, $i=1,2$ учун:

1) $u_i \in C^1(\Omega)$

2) Ω соҳада u_i гармоник функция

3) $\dfrac{\partial u}{\partial n}(x,y,z) = v(x,y,z)$, $(x,y,z)\in\Sigma$ ўринли.

У ҳолда $u_1 - u_2 \equiv const$

(бу шуни билдирадики,

$v\equiv 0$ да фақатгина тривиал ечим мавжуд).

12

Исбот: Грининг 1-формуласини ихтиёрий икки марта дифференциалланувчи u ва v функциялар учун ёзамиз:

$$\iiint_{\Omega}\left(u\Delta v - grad^2 u\right)d\tau = \iint_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma$$

$u_1 - u_2$ функция [3.4] масаланинг $v = 0$ бўлган ҳолдаги ечимидир. Грин формуласида $u = v = u_1 - u_2$ дейлик. Унда

$$\iiint_{\Omega}\left(u\Delta v - grad^2 u\right)d\tau = \iint_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma$$

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega}\left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right)d\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad u_x = u_y = u_z = 0 \quad \Rightarrow \quad u = const$$

Теорема исботланди.

13

Лаплас тенгламаси учун Грин функцияси ва унинг хоссалари

E^3 фазода аниқланган гармоник u функция учун Грининг 3-формуласини ёзиб оламиз:

$$u(M) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\left[\frac{1}{R_{MP}}\frac{\partial u}{\partial n} - u(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\right]d\sigma_P \qquad (3.7)$$

Бу ерда - $P \in \Sigma, \quad M \in \Omega$

Демак биз *u(M)* функция учун ифода олдик. Уни Дирихле ва Нейман масалалари учун қўллашга ҳаракат қиламиз. Грининг 2-чи формуласини ёзиб оламиз.

14

Бунда v фукнция Ω соҳада гармоник бўлган функция:

$$\iiint_{\Omega}\left(u\Delta v - grad^2 u\right)d\tau = \iint_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma$$

u ва v функциялар гармоник, демак,

$$\iint_{\Sigma}\left[u(P)\frac{\partial v}{\partial n} - v(P)\frac{\partial u}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\right]d\sigma_P = 0 \qquad (3.8)$$

(3.7) формуладан (3.8) формулани айириб,

$$u(M) = \iint_{\Sigma}\left[\left(\frac{1}{4\pi} + u(P)\right)\frac{\partial v}{\partial n}(P) - u(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi R_{MP}} + v(P)\right)\right]d\sigma_P$$

15

ни ҳосил қиламиз.

$$G(M,P) = \frac{1}{4\pi R_{MP}} + v(P)$$

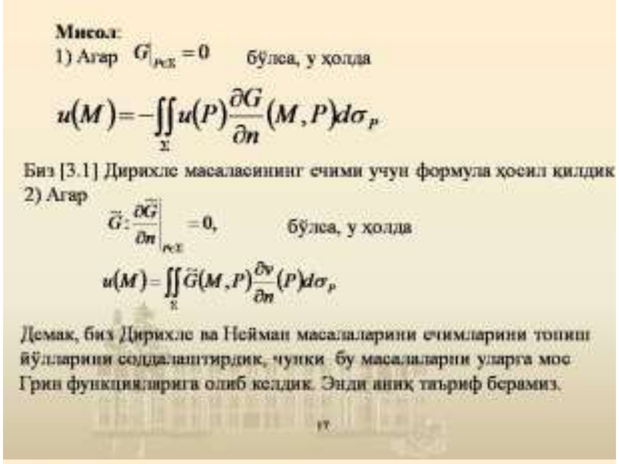
дейлик.

Унда

$$u(M) = \iint_{\Sigma}\left[G(M,P)\frac{\partial v}{\partial n}(P) - u(P)\frac{\partial G}{\partial n}(M,P)\right]d\sigma_P$$

Демак, *u(M)* функция учун ихтиёрий гармоник функция иштирок этган янги формула ҳосил қилдик. Уни ўзгартириб, турли ечимларни ҳосил қилиш мумкин.

16


Мисол:
1) Агар $G|_{P\in\Sigma}=0$ бўлса, у ҳолда
$$u(M)=-\iint_{\Sigma}u(P)\frac{\partial G}{\partial n}(M,P)d\sigma_P$$
Биз [3.1] Дирихле масаласининг ечими учун формула ҳосил қилдик
2) Агар
$\tilde{G}:\frac{\partial\tilde{G}}{\partial n}\Big|_{P\in\Sigma}=0,$ бўлса, у ҳолда
$$u(M)=\iint_{\Sigma}\tilde{G}(M,P)\frac{\partial v}{\partial n}(P)d\sigma_P$$
Демак, биз Дирихле ва Нейман масалаларини ечимларини топиш йўлларини соддалаштирдик, чунки бу масалаларни уларга мос Грин функцияларига олиб келдик. Энди аниқ таъриф берамиз.
17

Таъриф: Агар
1) $\frac{\partial^2 G}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial\zeta^2}=0,\quad \forall P\in\Omega,\quad P\neq M$
2) $G(M,P)$ қуйидаги кўринишда: $G(M,P)=\frac{1}{4\pi R_{MP}}+v$ (3.9)
бу ерда v- Ω соҳадаги гармоник функция.
3) $G(M,P)_{P\in\Sigma}=0$ шунда
$G(M,P):M(x,y,z),\quad P(\xi,\eta,\zeta)\in\overline{\Omega}$
функция Дирихле ички масаласи учун Грин функцияси дейилади.
Яъни, v функцияга қуйидаги талаблар қўйилади:
v- Ω соҳада гармоник функция ва
$$v|_{\Sigma}=-\frac{1}{4\pi R_{MP}}$$
18

Саволлар
1. Дирихле ташқи масаласининг ечимининг таърифи.
2. Ягоналик теоремаси
3. Нейманнинг ички масаласининг таърифи
4. Ечимнинг ягоналик теоремаси
5. Дирихле ички масаласи учун Грин функциясининг таърифи
19

Математик физика тенгламалари
маърузалар

Маъруза № 13.

Мавзу: Грин функциянинг хоссалари. Иккиланган қатлам потенциали

1

Маъруза № 13

Грин функциянинг хоссалари. Иккиланган қатлам потенциали

Режа

1. ***Грин функциянинг 1-чи хоссаси***
2. ***Грин функциянинг 2-чи хоссаси***
3. ***Оддий ва иккиланган қатлам потенциали. Бирлик зичлик билан берилган иккиланган қатлам потенциали***

2

Таянч иборалар

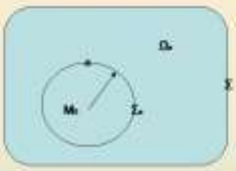
Грин функцияси,
1-чи хосса,
2-чи хосса,
оддий ва иккиланган қатлам потенциали

3

1. Грин функциянинг 1-чи хоссаси

$$G(M,P) > 0, \quad M,P \in \Omega, \ P \neq M.$$

Исбот: Ω ичида бирор $M_0(\cdot)$ нуқтани оламиз. Етарлича кичик a радиуси ва маркази M_0 да бўлган сферани ҳамда Σ ва Σ_a ўртасидаги Ω_a соҳани қараймиз.



Ωa соҳада M0, P ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган Грин функциясини қуриб чиқайлик. У ҳолда Ω а гармоникдир. Демак, max қиймат принципининг барча шартлари бажарилади. G_a(M0, P) учун ушбу ифода ўринли: (3.9)

4

1. Грин функциянинг 1-чи хоссаси

$$G(M_0,P)=\frac{1}{4\pi R_{M_0P}}+v(P),\quad \text{бу ерда}\quad \frac{1}{4\pi R_{M_0P}}\xrightarrow{R\to 0}\infty$$

v эса Ω да гармоник (демак чегараланган) функция булгани учун, шундай a ни олиш мумкинки,

$$G\mid P\in\Sigma_a<0 \quad \text{уринли булади.}$$

$$G(M,P)\mid P\in\Sigma=0 \ \text{булгани учун} \qquad G(M_0,P)\geq 0$$

ифода Ω_a даги $\forall P$ учун ўринли.

G функция константа бўлмагани учун, у Ω а ичида минимумга (яъни 0 қийматга) эришмайди. У холда (a ни ∞ кичрайтириш мумкин булгани учун)

Ω даги ихтиёрий нукталар учун $P\neq M$ $G(M,P)>0$ уринли. Тасдиқ уринли.

5

2. Грин функциянинг 2-чи хоссаси

$$G(M,P)=G(P,M)\qquad \forall M,P\in\Omega,\ \ M\neq P \qquad (3.10)$$

Исбот: M_1, M_2 нукталарни фиксирлаймиз – улар Ω даги 2 та хар хил ихтиёрий нукталар. $G(M_1,M_2)=G(M_2,M_1)$ ни исботлаш етарли.
Белгилаш киритамиз:

$$u(\xi,\eta,\zeta)=G(M_1,P);$$
$$v(\xi,\eta,\zeta)=G(M_2,P).$$

$\sum^1_\varepsilon$ етарлича кичик ε радиусли сфера (Ω^1_ε – унга мос шар) булиб, M_1 (·)ни ураб турсин, $\sum^2_\varepsilon$, Ω^2_ε эса мос холда M_2 (·) учун сфера ва шар булсин. Ω_ε - Ω сохаинг ички қисми булсин ва Ω^2_ε, Ω^1_ε шарлар бу сохага тегишли бўлмасин. u ва v функциялар учун Гриннинг 2 – формуласини ёзиб оламиз (Грин аниқланишига кўра Ω_ε да улар гармоник функциялар) ва куйидагига эга буламиз.

6

2. Грин функциянинг 2-чи хоссаси

$$\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}(u\Delta v-v\Delta u)dr=\iint\limits_{\Sigma}\left(u\frac{dv}{dn}-v\frac{dv}{dn}\right)d\sigma+\iint\limits_{\Sigma^1_\varepsilon}\left(u\frac{dv}{dn}-v\frac{du}{dn}\right)+$$

$$+\iint\limits_{\Sigma^2_\varepsilon}\left(u\frac{dv}{dn}-v\frac{du}{dn}\right)d\sigma\Rightarrow\left\{G\middle|p\in\Sigma\Rightarrow u\middle|\Sigma=v\middle|\Sigma=0\right\}\Rightarrow$$

$$\iint\limits_{\Sigma^1_\varepsilon}\left[G(M_1,P)\frac{\partial G(M_2,P)}{\partial n}-G(M_2P)\frac{\partial G(M_1,P)}{\partial n}\right]d\sigma_p+$$

$$+\iint\limits_{\Sigma^2_\varepsilon}\left[G(M1,P)\frac{\partial G(M_2,P)}{\partial n}-G(M_2,P)\frac{\partial G(M_1,P)}{\partial n}\right]d\sigma_p=0 \qquad (3.11)$$

7

2. Грин функциянинг 2-чи хоссаси

1 – интегралнинг 1- кўпайтувчини кўриб чиқамиз. Е -> 0 да (3.9) даги $G(M_2P)$ функция ифодасида катнашувчи u ва v функциялар $\sum^1_\varepsilon$ да гармоник ва чегараланган функциялар (Масалан: $\frac{\partial G(M_2,P)}{\partial n}$ C_1 ва C_2 константалар билан чегараланган). У холда ушбуга эга буламиз;

$$\iint\limits_{\Sigma^1_\varepsilon}G(M_1,P)\frac{\partial G(M_2,P)}{\partial n}d\sigma_p\leq\iint\limits_{\Sigma^1_\varepsilon}\left|\frac{1}{4\pi R_{M_1P}}\right|\left|\frac{\partial G(M_1,P)}{\partial n}\right|d\sigma_p\leq$$

$$\leq\left|\frac{C_1}{4\pi R_{M_1P}}-c_1c_2\right|d\sigma=\iint\limits_{\Sigma^1_\varepsilon}\left|\frac{c_1}{4\pi\varepsilon}+c_1c_2\right|d\sigma_p=c_1\varepsilon+4\pi c_1c_2\varepsilon^2\xrightarrow{\varepsilon\to 0}0$$

8

2. Грин функциянинг 2-чи хоссаси

2-кўпайтувчи эса мураккаброк. $G(M_1,P)$ функция учун (3,9) ифодадан фойдаланиб, уни 2 та интегралга ажратамиз:

$$\iint_{\Sigma_\varepsilon^1} G(M_2,P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi R_{M_1P}}\right)d\sigma+\iint_{\Sigma_\varepsilon^1} G(M_2,P)\frac{\partial v}{dn}d\sigma_p$$

ε кичрайиши билан 2 – интеграл ҳам 0 га интилади. (юқорида келтирилган тушунтиришларга кўра)

$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi R_{M_1P}}\right)$ кўпайтувчини текширамиз. Таърифга кура: $\frac{\partial f}{\partial n}=(\vec{n}, grad\ f)$

Бизнинг холда

$$n=\left\{-\frac{(\xi-x)}{R_{M_1P}},-\frac{(\eta-y)}{R_{M_1P}},-\frac{(\zeta-z)}{R_{M_1P}}\right\}, grad\frac{1}{R_{M_1P}}=\left\{-\frac{(\xi-x)}{R^3_{M_1P}},-\frac{(\eta-y)}{R^3_{M_1P}},-\frac{(\zeta-z)}{R^3_{M_1P}}\right\}$$

9

2. Грин функциянинг 2-чи хоссаси

Бундан келиб чиқадики,

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{M_1P}}\right)=\frac{1}{4\pi R^2_{M_1P}}\Rightarrow\iint_{\Sigma_\varepsilon^1} G(M_2P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi R_{M_1P}}\right)\partial\sigma_p=$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\iint_{\Sigma_\varepsilon^1} G(M_2P)\partial\sigma_p=$$

= {уртача қиймат ҳақидаги (5.2) формула}=

$$=\frac{G(M_2P')}{4\pi\varepsilon^2}\iint_{\Sigma_\varepsilon^1}\partial\sigma\xrightarrow{\varepsilon\to 0}G(M_2,M_1)$$

10

2. Грин функциянинг 2-чи хоссаси

(3.11) формуладаги 2 – интеграл биринчисидан ўзгарувчини алмаштириш ва ишорасини алмаштириш оркали хосил қилинади. Шунга ухшаш фикр юритиб, у $G(M_1,M_2)$ га интилишини топамиз. Бу ердан қуйидаги формулага эга буламиз:

$$G(M_2,M_1)-G(M_1,M_2)=0$$

Бу формула Ω даги барча хар хил M_1,M_2 (·) учун тўғридир. Тасдиқ исботлади.

11

3. Оддий ва иккиланган қатлам потенциали. Бирлик зичлик билан берилган иккиланган қатлам потенциал

Шундай қилиб, текислик ва фазодаги Лаплас тенгламасининг ечимлари қуйидагича:

$$E^3:\frac{1}{R_{MP}};\quad E^2:\ln\frac{1}{\rho_{MP}},$$

Бу ерда $M(x,y,z)$- фиксирланган нуқта, $P(\xi,\eta,\zeta)$ - ўзгарувчи.
Фараз қилайлик $\sum$ бу M нуқтани ўз ичига оладиган Ω соҳани чегаралаб турувчи қандайдир ёпиқ сирт бўлсин. E^3 да қуйидаги функцияни қараб чиқайлик:

$$v(M)=\iint_{\Sigma} g(P)\frac{1}{R_{MP}}\partial\sigma p$$

ва унга ***оддий қатлам потенциал*** деб ном қўямиз.

12

3. Оддий ва иккиланган қатлам потенциали

Ва шу билан бир қаторда қўйидаги функцияни қараймиз

$$u(M) = -\iint_{\Sigma} f(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\partial\sigma p$$

ва бу функцияга ***иккиланган қатламнинг потенциали*** деган ном қўямиз. Қўйидаги нарсани кўрсатамиз

$$\forall M \notin \Sigma \quad \partial a \quad \Delta v \equiv \Delta u \equiv 0$$

13

3. Оддий ва иккиланган қатлам потенциали

$$\Delta_M v = \Delta_M \iint_{\Sigma} g(P)\frac{1}{R_{MP}}d\sigma_P =$$

$$= \iint_{\Sigma} g(P)\Delta\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)d\sigma_P = 0 \quad \textit{чунки} \quad \Delta\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) \equiv 0$$

Иккиланган қатлам потенциали учун натижа худди шундай:

$$\Delta_M u = \Delta_M \iint_{\Sigma} f(P)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R_{MP}}d\sigma_P =$$

$$= \iint_{\Sigma} f(P)\frac{\partial}{\partial n}\Delta\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)d\sigma_P = 0$$

14

3. Оддий ва иккиланган қатлам потенциали

Текисликда потенциал тушунчасини аниклайлик. L – M (x,y)(·) ни ўраб турувчи ёпик эгри чизик булсин:

$$v(M) = \int_{L} g(P)\ln\frac{1}{\rho MP}dl_p$$

оддий катлам потенциали.

$$u(M) = -\int_{L} f(P)\frac{\partial}{\partial n}(\ln\frac{1}{\rho MP})dl_P$$

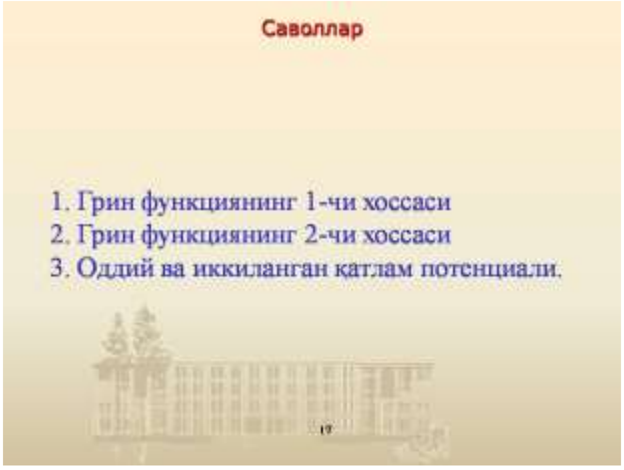
иккиланган катлам потенциали.

15

3. Оддий ва иккиланган қатлам потенциали

Шундай килиб, потенциаллар гармоник функциялардир. Бундан келиб чикадики, уларни, баъзи масалаларни ечишда, масалан Нейман масаласини ечишда қўллаш мумкин, бунинг учун мос g ва f функцияларни танлаймиз ва бу функцияларни мос потенциалларнинг **зичликлари** деб атаймиз.

16


Саволлар
1. Грин функциянинг 1-чи хоссаси
2. Грин функциянинг 2-чи хоссаси
3. Оддий ва иккиланган қатлам потенциали.


Математик физика тенгламалари
маърузалар
Маъруза № 14.
Мавзу:
Потенциал хоссалари


Маъруза № 14
Потенциал хоссалари
Режа:
1. Иккиланган қатлам потенциали
2. Потенциаллар хоссалари.


Таянч иборалар
Иккиланган қатлам потенциали,
потенциаллар хоссалари,
Дирихленинг ички масаласи

1. Иккиланган қатлам потенциали

Текисликда иккиланган қатлам потенциалини бирмунча батафсил кўриб чиқамиз.

$$u(M)=-\int_L f(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\right)dl_P \quad (3.12)$$

Фараз қиламиз L эгри чизиқ ва унга ўтказилган уринмалар (маълум маънода) узлуксиздир. Шундан келиб чиқан ҳолда

4

1. Иккиланган қатлам потенциали

$$-\frac{\partial}{\partial n}(\ln\frac{1}{\rho_{MP}}):$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\right)=\left\{\rho_{MP}=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{\rho_{MP}}\frac{1}{2}\frac{2(\xi-x)}{\rho_{MP}}=-\frac{\xi-x}{\rho^2{}_{MP}};$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\right)=-\frac{\eta-y}{\rho^2{}_{MP}};$$

5

1. Иккиланган қатлам потенциали

$$\overline{MP}=\{\xi-x,\eta-y\} \;\Rightarrow\; -\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\right)=-\left(\vec{n}, grad\ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right)\right)=$$

$$=\left(\vec{n},\frac{\overline{MP}}{\rho^2{}_{MP}}\right)=\rho_{MP} \;\Rightarrow\; u(M)=\int_L f(P)\frac{\cos\angle(\overline{MP},\vec{n})}{\rho_{MP}}dl_P \quad (3.13)$$

Зичлиги 1 га тенг бўлган потенциал бўлсин.

$$u_e(M)=\int_L\frac{\cos\angle(\overline{MP},\vec{n})}{\rho_{MP}}dl_P$$

6

1. Иккиланган қатлам потенциали

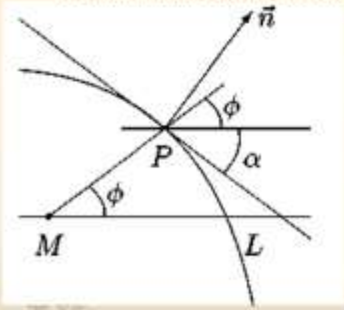
Қутб координатаси системасидан фойдаланиб ҳисоблаймиз. M нўқта орқали маълум битта ўқ ўтказамиз ва ундан φбурчакларни ҳисоблаймиз. L эгри чизиқнинг P нуқтасидан унга ўтказилган уринма билан шу ўқ ўртасидаги бурчакни $[0, \pi/2]$ оралиқда α бурчаги деб белгилаймиз. Шунда қуйидаги муносабатлар тўғри бўлади.

$$\angle(\overline{MP},\vec{n})=\frac{\pi}{2}-\phi-\alpha \;\Rightarrow\; \cos\angle(\overline{MP},\vec{n})=\sin(\phi+\alpha) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_e(M)=\int_L\frac{\sin(\phi+\alpha)}{\rho_{MP}}dl_P \quad (3.14)$$

7

1. Иккиланган қатлам потенциали



1. Иккиланган қатлам потенциали

$P(\varepsilon,\eta)$ нуқта координаталарида, тўғри бурчакли координаталар системасида қутб координаталар системасига ўтамиз.

$$\xi = r(\phi)\cos\phi;$$

$$\eta = r(\phi)\sin\phi;$$

$$\begin{aligned} d\xi &= [(r'(\phi)\cos(\phi) - r(\phi)\sin(\phi))]d\phi \\ dn &= [(r'(\phi)\sin(\phi) - r(\phi)\cos(\phi))]d\phi \end{aligned} \qquad (*)$$

Расмдан кўриниб турибдики

$$\begin{cases} d\xi = -dl\cos\alpha; \\ d\eta = dl\sin\alpha; \end{cases}$$

1. Иккиланган қатлам потенциали

(3.14) даги интеграл остидаги функцияни ўзгартирамиз.

$$\sin(\phi+\alpha)dl = \sin\phi\cos\alpha dl + \cos\phi\sin\alpha dl =$$

$$= \begin{Bmatrix} d\xi = -dl\cos\alpha \\ d\eta = dl\sin\alpha \end{Bmatrix} = \cos\phi d\eta - \sin\phi d\xi = (*) =$$

$$= (\cos\phi\sin\phi r' + r'\cos^2\phi - r'\sin\phi\cos\phi + r\sin^2\phi)d\phi =$$

$$= rd\phi \Rightarrow \cos\angle(\overrightarrow{MP},\vec{n})dl = r(\phi)d\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_e(M) = \int_L \frac{r(\phi)}{r(\phi)}d\phi = 2\pi$$

1. Иккиланган қатлам потенциали

Худди шундай ўзгартиришлар асосида нуқта соҳадан ташқарида ёки унинг чегарасида ётган бўлса қуйидаги муносабатлар ўринли бўлишини ҳосил қиламиз:

$$u_e(M) = \begin{cases} \pi, & M \in L \\ 0, & M \notin D \end{cases}$$

Шундай қилиб

$$u_e = (M) = \begin{cases} 2\pi, & M \in D \\ \pi, & M \in L \\ 0, & M \notin \overline{D} \end{cases} \qquad (3.15)$$

2. Потенциаллар хоссалари

Энди зичлиги 1 га тенг бўлган потенциал ифодасини билган ҳолда бизнинг бошланғич потенциалимизнинг баъзи хоссаларини чиқарамиз.
Бунинг учун қуйидаги таъриф керак бўлади.

Таъриф $\int_l F(P,M)dl_P$ *интеграл* $M_0 \in L$ *нуқтада текис яқинлашувчи дейилади, агар* $\forall \varepsilon > 0 \exists V(M_0)$ *— M_0 нуқтанинг атрофи ва* $l \in L$ *ёй шундаким,* $\int_l F(P,A)dl_P$ *интеграл* $\forall A \in V(M_0)$ *яқинлашувчи бўлса ва* $\left|\int_l F(P,A)dl_P\right| \le \varepsilon$

2. Потенциаллар хоссалари

Қуйидаги теоремадан исботсиз фойдаланамиз.
Теорема: 3.7

$F(P,M)$ *функция* $P \ne M$ *ҳамма нуқталарда узлуксиз бўлсин. Шунда* $\int_l F(P,M)dl_P$ *интеграл текис яқинлашадиган нуқталарда узлуксиз функциядан иборат бўлади.*
L чегарада M_0 нуқтани олиб

$u(M) - f(M_0)u_e(M)$ функцияни кўриб чиқамиз.

2. Потенциаллар хоссалари

Теорема: 3.8
(3.12) даги $f(P)$ **функция M_0 нуқтада узлуксиз бўлса**
$u(M) - f(M_0)u_e(M)$
функция M_0 нуқтада узлуксиз бўлади.

2. Потенциаллар хоссалари

Исбот:

$$u(M) - f(M_0)u_e(M) = (3.13) =$$

$$= \int_L f(P)\frac{\cos\angle\left(\overrightarrow{MP},\vec{n}\right)}{\rho_{MP}}dl_P -$$

$$- \int_L f(M_0)\frac{\cos\angle\left(\overrightarrow{MP},\vec{n}\right)}{\rho_{MP}}dl_P =$$

$$= \int_L \left(f(P) - f(M_0)\right)\frac{\cos\angle\left(\overrightarrow{MP},\vec{n}\right)}{\rho_{MP}}dl_P$$

2. Потенциаллар хоссалари

Бизнинг функциямиз узлуксизлигидан $\forall \varepsilon > 0$

M_0 нуқтанинг шундай атрофи мавжуд эканлиги келиб чиқади. У ерда

$$\left| f(P) - f(m_0) \right| \le \varepsilon$$

Демак маркази M_0 нуқтада бўлган қутб координаталарига ўтиб биз томонимиздан эгри чизиқга қўйилган шартларда

$$\left| \int_L (f(P) - f(M_0)) \frac{\cos \angle(\overrightarrow{MP}, \vec{n})}{\rho_{MP}} dl_P \right| = \left| \int_L (f(P) - f(M_0)) d\phi \right| \le \varepsilon \left| \int_L d\phi \right| = 2\pi\varepsilon$$

ҳосил қиламиз.
Теорема исботланди.

16

2. Потенциаллар хоссалари

Энди $u_p(M)$ функция учун (3.15) формуладан фойдаланиб теорема даъвосини ҳисобга олиб $u(M)$ функция M_0 нуқтадаги куриниши $u_e(M) f(M_0)$ фукциянинг кўринишига тенг эканлигини ҳосил қиламиз. Биз биринчи натижани ҳосил қилдик.

17

2. Потенциаллар хоссалари

1.Натижа

$$u_{ичкі}(M_0) = \lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \in D}} u(M)$$

$$u_{ташқ}(M_0) = \lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \notin D}} u(M)$$

Шунда

$$u_{ичкі}(M_0) = \lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \in D}} u(M) + \pi f(M_0);$$

$$u_{ташқ}(M_0) = \lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \notin D}} u(M) - \pi f(M_0)$$

18

2. Потенциаллар хоссалари

Шундай қилиб, потенциални контурда шундай тасвирлаш мумкин.

$$u(M_0) = \frac{u_{ичкі}(M_0) + u_{ташқ}(M_0)}{2}$$

Натижа 2.
агар $f(P)$ функция L узлуксиз бўлса, u(M) функция $M \in L$ узлуксиз бўлади.
Исб
Биз контурда

$$f(M) u_e(M) = \pi f(M); \quad u(M) - f(M_0) u_e(M) = \psi(M)$$

Узлуксиз функцияга эга бўламиз. Шунда u(M) функция қуйидаги кўринишга келади

$$u(M) = \pi f(M) + \psi(M)$$

19

Фойдаланиладиган асосий дарсликлар ва ўқув қўлланмалар рўйхати

Асосий дарсликлар ва ўқув қўлланмалар

1.Тихонов А.Н.,Самарский А.А. Уравнения математической физики. М. “Наука”.1972.
2.Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М. “Наука”.1988.
3.Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М. “Наука”.1961.
4.Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М. “Наука”.1982.
5.Салоҳиддинов М. Математик физика тенгламалари.Т. “Ўзбекистон”.2002.

Қўшимча адабиётлар

6.Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М. “Наука”.1977.
7.Владимиров В.С., Михайлов В.П., Вашарин А.А., Каримова Х.Х., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. Сборник задач по уравнениям математической физики. М. “Наука”.1982.
8.Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М. “Наука”.1981.
9.Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М. “Наука”.1979.
10.Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.1985.
11.Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. М. “Наука”.1975.
12.Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М. “Наука”.1980.
13.Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. М. Из-во МГУ.1984.
14.Тешабоева Н.Х. Математик физика усуллари.Т.1966.
15.Годунов С.К. Уравнения математической физики. М. “Наука”.1971.
16. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, Т. 1-4. 1977- 1982, http://www.mcmee.ru, http://lib.mexmat.ru
17. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М. 1970. http://www.mcmee.ru, http://lib.mexmat.ru

Xususiy hosilali tenglamalarfanidan glossariy.

Xususiy xosilali differensial tenglama deb bir nechta o‘zgaruvchili noma’lum funksiyaga , uning argumentlari va turli tartibli xususiy xosilalariga nisbatan tenglamalarga aytiladi. Xususiy xosilali differensial tenglamaning **tartibi** deb bu tenglamaga kiruvchi xosilalarning eng yuqori tartibiga aytiladi .
Kvazichizikli tenglamalar

$$a_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+a_n(x_1,...,x_n,u)_1\frac{\partial u}{\partial x_n}=f(x_1,...,x_n,u).$$

Ko‘rinishga ega.
Agar $f(x_1,...,x_n,u)\neq 0$ bo‘lsa u xolda tenglama **bir jinsli tenglama** bo‘lmaydi, aks xolda $f(x_1,...,x_n,u)$=0 bulsa, tenglama **bir jinsli tenglama** bo‘ladi.

Ikkinchi tartibli xususiy xosilali tenglama yuqori tartibli xosilalarga nisbatan chiziqli deyiladi, agar bu tenglama faqat birinchi tartibli xosilalarni o‘z ichida saqlasa.
Xarakteristik tenglama $a(d\ y)^2-2bdxdy+c(dx)^2+0$.
Xususiy hosilali umumiy tenglama deb
$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{yy})=0$ tenglamaga aytiladi.
Tenglama chiziqli deyiladi, agar u nafaqat yuqori tartibli hosilalari u_{xx},u_{xy},u_{yy} ga nisbatan balki u funksiya va uning birinchi tartibli hosilalariga nisbatan chiziqli bo‘lsa.
Agar $f\equiv 0$ bo‘lsa shunda

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu+f=0$$

tenglama **bir jinsli tenglama** aks holda **bir jinsli bo‘lmagan tenglama** deb aytiladi.
Xususiy hosilali umumiy tenglama deb
$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{yy})=0$ tenglamaga aytiladi.
Tenglama chiziqli deyiladi, agar u nafaqat yuqori tartibli hosilalari u_{xx},u_{xy},u_{yy} ga nisbatan balki u funksiya va uning birinchi tartibli hosilalariga nisbatan chiziqli bo‘lsa.

$E(t)=\int_0^l\left[(v_t(x,t))^2+a^2(v_x(x,t))^2\right]dx$ funksiyaga **energiya integrali** deyiladi

Biror $u(x)\in C^2(E^n)$ funksiyadan $L[u]$ **differensial operator** qo‘yidagicha aniqlanadi :

$$L[u]=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i}+c(x)u$$

Agar $L[u]=M[v]$ bo‘lsa operator **o‘z-o‘ziga qo‘shma operator** deyiladi.
Chiziqli algebrada **A operatorga qo‘shma** A^* **operator** deb quyidagi $(Au,v)=(u,A^*v)$ munosabat aytiladi.

Grin formulasi deb $\int_L Pdx+Qdy=\iint_D(Q_x-P_yds)$ ga aytiladi.

Koshi masalasining yechimi uchun **Dalamber formulasi**

$$u_n(x,t)=\frac{\hat{o}_n(x-at)+\hat{o}_n(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi\qquad\Rightarrow u_n(x,t)\in C^2\{E\times[0;T]\}$$

Fur’ye qonuni $\vec{W}=-k\,grad\,u$ ga aytiladi.

$k(x,y,z)$ - **issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffisienti**.

Fazoda issiqlik utkazuvchanlik tenglamasi deb,

$$c(x,y,z)\rho(x,y,z)u_t(x,y,z,t)=\frac{\partial}{\partial x}(k(x,y,z)u_x(x,y,z,t))+\frac{\partial}{\partial y}(k(x,y,z)u_y(x,y,z,t))+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(k(x,y,z)u_z(x,y,z,t))+F(x,y,z,t)$$

tenglamaga aytiladi.

$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t)$ bir jinsli yupqa sterjinda **issiqlik o‘tkazuvchanlik** (yoyilish) tenglamasi.

Diffuziya tenglamasi quyidagicha:

$cu_t=div(Dgradu)+F(x,y,z,t),\ D-$ diffuziya koeffitsiyenti, $F-$ biror bir funktsiya .

Shturm-Liuvill masalasi: $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0; \\ X(0)=0; X(l)=0. \end{cases}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-f(x,y,z),\ E^3$ **fazoda Puasson tenglamasi.**

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-f(x,y),\ E^2$ **fazoda Puasson tenglamasi.**

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\ E^3$ **fazoda Laplas tenglamasi.**

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ E^2$ **fazoda Laplas tenglamasi.**

$u(x,y,z)$funksiya Ω, soxada **garmonik funksiya** deyiladi, agar

$u\in c^2(\Omega)$ $\hat{a}\grave{a}$ Ω $\ddot{a}\grave{a}$ $\Delta u\equiv 0$ shartlar bajarilsa.

Dirixle ichki masalasi $\begin{cases} \Delta u(x,y,z)=0, & (x,y,z)\in\Omega \\ u(x,y,z)=\mu(x,y,z), & (x,y,z)\in\sum \end{cases}$

Neyman ichki masalasi $\begin{cases} \Delta u(x,y,z)=0, & (x,y,z)\in\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z)=v(x,y,z), & (x,y,z)\in\sum \end{cases}$

Dirixle tashqi masalasi $\begin{cases} \Delta u(x,y,z)=0, & (x,y,z)\in E^3\setminus\bar{\Omega} \\ u(x,y,z)=\mu(x,y,z), & (x,y,z)\in\sum \end{cases}$

Neyman tashqi masalasi $\begin{cases} \Delta u(x,y,z)=0, & (x,y,z)\in E^3\setminus\bar{\Omega} \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z)=v(x,y,z), & (x,y,z)\in\sum \end{cases}$

Grinning ikkinchi formulasi:

$$\iiint_{\Omega}(u\Delta v - v\Delta u)d\tau = \iint_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial}{\partial nu}\right)d\sigma$$

Grinning uchinchi formulasi:

$$4\pi u(M_0) = -\iiint_{\Omega}\frac{1}{R_{MM0}}\Delta u(M)\,d\tau_M -$$

$$-\iint_{\Sigma}\left[u(M)\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{R_{MM0}}) - \frac{1}{R_{MM0}}\frac{\partial u}{\partial n}(M)\right]d\sigma_M$$

Oddiy qatlam potensiali:

$$v(M) = \iint_{\Sigma} g(P)\frac{1}{R_{MP}}\partial\sigma p$$

Ikkilangan qatlamning potensiali:

$$u(M) = -\iint_{\Sigma} f(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\partial\sigma p$$