O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI

Abduraimov D.E., Bo‘taboyev A.A.

HISOBLASH USULLARI

fanidan amaliy mashg‘ulotlar1-qism

O‘quv qo‘llanma

Guliston davlat universiteti ilmiy Kengashi tomonidan 20____yil____ ________ №____ bayonnomasiga asosan nashrgatavsiya etilgan.

Guliston – 2021

UDK 617.5
H -38

Abduraimov D.E., Bo‘taboyev A.A. Hisoblash usullari fanidan uchun amaliy mashg‘ulotlar («5130200 – Amaliy matematika va informatika» bakalavr ta’lim yo’nalishlari talabalari uchun). – 1-qism. – Guliston: GulDU nashri, 2021. – 160 bet.

Hozirda ma’lumki, har bir ta’lim yo‘nalishi bo‘yicha bilim olayotgan talabaga boshqa bir fanni o‘qitishda bu fanlarning o‘zaro munosabatiga, o‘qitilayotgan fanning kasbga yo‘nalgan sohaga tatbiqlariga jiddiy e’tibor berilmayotganligini ko‘rishimiz mumkin. Shu bilan bir qatorda bakalavriatning turli ta’lim yo’nalishlarida ta’lim olayotgan fanni bir xil o‘qitilishi, ularga o‘rganilayotgan fan uning kelgusi kasbiy faoliyatida qay darajada kerak bo‘lishi to‘g’risidagi tushunchaga va uning o‘rnini sezishga imkon bermaydi. Shuning uchun ham o‘qitilayotgan fanni talabaga chuqurroq singdirish maqsadida bu fanni kasbga yo‘naltirilgan holda o‘qitishni maqsadga muvofiq deb hisoblaymiz.

KIRISH

Haqiqatda mavjud obyektlarning asosiy xossalarini ularning matematik modellari yordamida o‘rganishning klassik vositasi bu analitik usullar bo‘lib, ular aniq yechimni matematik formulalarda ifodalash imkonini beradi. Bu usullar hozirgi kunda ham masalani yechish haqida yetarlicha aniqlikdagi to‘la axborotni bermoqda va ular o‘z amaliy ahamiyatini yo‘qotgani yo‘q. Ammo, afsuski, ularning qo‘llanilish sohasi juda cheklangan. Shuning uchun, odatda, sonli usullarga yoki hisoblash usullariga murojaat qilinadi.

Hisoblash usullari – bu matematik modelga mos algoritmlarni qo‘llashga asoslangan amaliy matematika masalalarini taqribiy yechish usullari. Hisoblash usullari analitik usullardan farqli ravishda umumiy yechimni emas, balki xususiy yechimni beradi. Bunda sonli va mantiqiy massivlar ustida yetarli sondagi arifmetik va mantiqiy amallar bajarilishi talab qilinadi. Hisoblash usullari fanining sonli tahlil qismi ikki turdagi sonli usullarga bo‘linadi: 1) *to‘g‘ri usullar* (ma’lum bir sondagi amallar bilan yechimni topishga asoslangan usullar); 2) *iteratsion usullar* (qaytariluvchi (siklik) jarayonlardan foydalanishga asoslangan va ketma-ket yaqinlashuvchi natijalarni olish imkonini beruvchi usullar). Hisoblash usullariga *ehtimoliy usullar* (yechimni tasodifiy izlash) ham kiradi, ammo bu usullar mazkur o‘quv qo‘llanma doirasida qaralmaydi.

«Hisoblash usullari» nomli o‘quv qo‘llanmaning ushbu 1-qismida hisoblash xatoligini baholash usullari, nochiziqli tenglamalar va ularning sistemasini yechishning sonli usullari o‘rganilgan. Har bir mavzu namunaviy masalalar va ularning yechilish yo‘llari, natijalar tahlili bilan to‘ldirilgan, ba’zilari esa dasturiy vositalar va matematik paketlar yordamida ham yechilgan. Talabaning amaliyot mashg‘ulotlarida misol va masalalar yechishi va fanni mustaqil o‘zlashtirishi uchun mavzular va boblar oxirida mashqlar keltirilgan bo‘lib, ular qiziqarli, amaliyot masalalari bilan bog‘liq, talabani mustaqil ishlashga undovchi misol va masalalardan iborat.

Ushbu o‘quv qo‘llanma universitetlarning «5140300 – Mexanika», «5130100 – Matematika», «5130200 – Amaliy matematika va informatika» ta’lim yo‘nalishlari bakalavr talabalariga hisoblash usullari fanini mukammal o‘rganishlarida, ularning mustaqil bilim va ilmiy izlanish ko‘nikmalarini hosil qilishlarida yaqindan yordam beradi. Bundan tashqari, ushbu o’quv qo‘llanmadan turdosh ta’lim muassasalari talabalari hamda magistranlar ham samarali foydalanishlari mumkin.

Ushbu o‘quv qo‘llanmani tayyorlash jarayonida rus va ingliz tillaridagi bir qator darslik va o‘quv qo‘llanmalardan hamda Internet tarmog‘idagi katta hajmdagi ma’lumotlardan bevosita foydalanildi. Ushbu adabiyotlar ro‘yxati o‘quv qo‘llanma oxirida keltirildi.

O‘quv qo‘llanmaning kamchiliklarini bartaraf etishga, uning sifatini oshirishga qaratilgan barcha fikr va mulohazalarni muallif minnatdorchilik bilan qabul qiladi.

1-BOB.
HISOBLASH XATOLIGINI BAHOLASH USULLARI

Kalit so‘zlar: tizim; model; modellashtirish; modellar turlari; modellashtirish ko‘rinishlari; modellar klassifikatsiyasi; to‘g‘ri, teskari va identifikatsiya masalalari; sonli usullar; hisoblash usullari; xatoliklar va ularning manbalari; yo‘qotib bo‘ladigan va bo‘lmaydigan xatoliklar; absolyut va nisbiy xato; chegaraviy absolyut va nisbiy xato; ma’noli va ishonchli raqamlar; aniqlik; xatolik va aniqlik orasidagi munosabat; sonni yaxlitlash; ifoda va funksiyaning absolyut va nisbiy xatosi; xatoliklar nazariyasining to‘g‘ri va teskari masalalari; mavjudlik; yagonalik; ustivorlik; korrektlik; yaqinlashuvchanlik.

1.1. Matematik modellashtirish va matematik modelni yaratish jarayoni

Tizim, model va modellashtirish. Tadqiqot sohasi bir-biridan biror belgisi bilan farq qiluvchi va o‘zaro ma’lum munosabatda bo‘luvchi yoki o‘zaro ta’sirlashuvchi *obyekt*lardan tashkil topadi.

Obyektlarning xarakterli xususiyati uning *xossasi* deyiladi. Xossa subyekt tomonidan aniqlanadi va baholanadi. Masalan, massa, rang, uzunlik, zichlik va shu kabilar.

Subyektiv nuqtai nazarga ko‘ra xossalar obyektning ichki va tashqi xossalariga bo‘linadi. Ichki xossalarning ko‘rsatkichlari *parametrlar* deb ataladi. Tashqi xossalar obyektning parametrlari bilan qandaydir munosabatlarga ko‘ra bog‘langan tashqi muhit xossalarini ifodalaydi va ularning ko‘rsatkichlariga *omillar* (*faktorlar*) deyiladi.

Muayyan obyektlarning kuzatilayotgan xossalari ko‘rsatkichlarining qiymatlarini moslashtirishga *munosabat* deyiladi.

Obyekt xossalari ko‘rsatkichlari qiymatlarining har qanday to‘plami berilgan vaqt momentida uning holatini aniqlaydi. Muayyan vaqt oralig‘ida obyekt holatining o‘zgarishiga *hodisa* deyiladi. Biror vaqt oralig‘ida sodir bo‘ladigan o‘zaro bog‘liq hodisalar ketma-ketligiga *jarayon* deyiladi.

Muayyan munosabatlar orqali o‘zaro bog‘langan va ular uchun qandaydir umumiy maqsadli funksiyani bajaradigan yoki umumiy maqsadga mo‘ljallangan obyektlar to‘plami *tizim* (*sistema*) deyiladi.

Ilmiy izlanishlarning maqsadi korrekt qo‘yilgan savollarga javob qidirishdan iborat. Odatda bunday savollarga javob izlanganda qandaydir muammo (masala) uchun muqobil yechimlar ichidan aynan bittasini muayyan shartlarga ko‘ra tanlash kerak bo‘ladi. Yechimni tanlash uchun qo‘llaniladigan shartga *me’zon* deyiladi.

Izlanishning maqsadi, odatda, izlanish olib borilayotgan obyektning aniq bir me’zonni qanoatlantiradigan parametrlari qiymatini aniqlashdan iborat. Tadqiqotchi obyekt parametrlarining berilgan me’zonni qanoatlantiruvchi qiymatlari to‘plamini aniqlagandan so‘ng, izlanish jarayoni to‘xtatiladi. Bunday izlanishlarning olib borilishiga *tajriba* (*sinov*) deyiladi.

Amaliyotda real obyektlar bilan bunday tajriba o‘tkazish, odatda, juda qimmat turadi yoki tajribaning salbiy oqibatlari tufayli uni o‘tkazish maqsadga muvofiq emas.

Shuning uchun bunday hollarda ilmiy tajriba o‘tkazish uchun real obyektlar ularga o‘xshash xossalarga ega, ammo ulardan oddiyroq, xavfsizroq va foydalanish mumkin bo‘lgan obyektlar bilan almashtiriladi.

Uni o‘rganish maqsadida izlanish olib boriladigan obyektga *original* deyiladi. Ma’lum bir xossalarni o‘rganish uchun originalning o‘rniga izlanish olib borilayotgan obyektga esa *model* deb aytiladi. *Model* – bu o‘rganish maqsadida izlanish olib borilayotgan obyektning muayyan xossalarini o‘zida namoyon etuvchi maxsus quriladigan obyektdir.

Umumiy holda original-obyekt tabiiy yoki sun’iy, real yoki farazdagi tizim bo‘lishi mumkin. Model ham o‘zining parametrlari to‘plami va xususiyatlari to‘plamiga ega tizimdir. Original va model ba’zi bir parametrlari bo‘yicha o‘xshash va boshqa bir parametrlari bo‘yicha esa bir-biridan farq qiladi. Agar tadqiqotchini qiziqtirayotgan original va modelning xususiyatlari bir turdagi parametrlar to‘plami orqali aniqlansa va ularning shu parametrlar bilan bog‘liqligi bir xil bo‘lsa, obyekt-originalni boshqa bir obyekt-model bilan almashtirsa bo‘ladi.

Model – bu faraz qilinadigan yoki moddiy reallashtirilgan tizim bo‘lib, u tadqiq qilinayotgan obyektni aks ettirib yoki qayta hosil qilib, uni shunday almashtira oladiki, bunday tizimni o‘rganish obyekt haqida yangi ma’lumotlarni beradi.

Modellashtirishda obyekt-original va uning modeli o‘rtasidagi o‘xshashlik (analog) ishlatiladi. Bu o‘xshashlik quyidagilar hisoblanadi: tashqi analogiya (masalan, samolyot, kema, mikrorayon modeli); strukturali analogiya (masalan, suv o‘tkazish tarmog‘i va elektr tarmoqlari graflar yordamida modellashtiriladi); dinamik analogiya (tizim holatiga ko‘ra) – masalan, mayatnik elektr tebranishlari konturini modellashtiradi.

Modellarda, odatda, obyektning alohida jihatlari (tashqi ko‘rinishi, tuzilishi, holati va boshqa) aks ettiriladi. Har bir model muayyan maqsad uchun xizmat qiladi va aniq hollarda obyektning alohida xossalarini qo‘llash imkonini beradi. Masalan, metropoliten sxemasi metropoliten modeli sifatida poyezdlarda harakatlanishda yo‘nalishni aniqlab olishda ishlatiladi; geometrik figuralar (kvadrat, kub, shar va boshqalar) fizik obyektlar modellari sifatida, hajm va yuzalarni aniqlashda ishlatiladi; qandaydir mashina tilida tuzilgan dastur, hisoblash algoritmining modeli kabi, sonli hisoblashlarni o‘tkazishda ishlatiladi; ma’ruza rejasi, uning bayonidan iborat jarayon dinamikasining modeli kabi, ma’ruza maqsadiga erishish uchun ishlatiladi; kimyoviy reaksiya formulasi, kimyoviy jarayonning modeli kabi, kimyoviy tajriba o‘tkazishda va uning natijalarini tahlil etishda ishlatiladi.

Ilmiy tadqiqotlarda asosiy rolni *gipotezalar* o‘ynaydi. *Gipotezalar* – uncha ko‘p bo‘lmagan tajribaviy ma’lumotlarga, kuzatishlarga, farazlarga asoslangan muayyan bashoratlar demakdir. *Analogiya* (*o‘xshashlik*) – ikkita obyektning qandaydir o‘xshash tomonlari haqidagi mulohazadir. Zamonaviy ilmiy gipoteza amaliyotda tekshirilgan ilmiy tasdiqlarga analogiya sifatida vujudga keladi. Shunday qilib, anologiya gipotezani tajriba (eksperiment) bilan bog‘laydi. Gipotezalarga asoslanib qurilgan modellar *gipotetik modellar* deb ham ataladi. Obyektiv mavjud, real dunyoni aks ettiruvchi gipoteza va analogiya tushunchalari tadqiq qilishga qulay mantiqiy sxemalarga keltiriladi. Mulohazalarni va mantiqiy qurilmalarni ixchamlashtiruvchi yoki jarayon tabiatini aniqlashtiruvchi tajribani o‘tkazish imkonini beruvchi bunday mantiqiy sxemalar obyektlar modellarining vujudga kelishiga asos bo‘ladi.

Model quyidagi maqsadlarda ishlatiladi: aniq obyektning ichki tuzilmasi yoki (va) uning tashqi muhit bilan o‘zaro aloqasining tuzilmasini anglash; tuzilma tarkibidagi eng muhim (sifatiy) aloqalarni aniqlash; miqdoriy bog‘lanishlarni aniqlash; muayyan ta’sirlar natijasida obyekt va tashqi muhit o‘zgarishi haqida oldindan xulosa qilish; obyekt xossalari va (yoki) unga tashqi ta’sirlar ko‘rsatkichlarini optimallash.

Modellashtirish deb, orginal-obyektning eng muhim xossalari haqida ma’lumot olish uchun uni obyekt-model bilan almashtirishga aytiladi. Bunday almashtirish originalning xossalarini o‘rganishni soddalashtirish, arzonlashtirish, tezlashtirish maqsadida amalga oshiriladi. Agar originalning uni tadqiq qilishga to‘sqinlik qiladigan xususiyatlari (belgilari) modelda mavjud bo‘lmasagina modellashtirish maqsadga muvofiqdir.

Modellashtirish – orginal-obyektlar xossalarini obyekt-modellarining mos xossalarini tadqiq qilish vositasida o‘rganish usulidan iborat jarayon. Modellashtirish ilmiy abstraksiyaning muhim quroli hisoblanadi. U obyektlarning bajarilayotgan, tadqiqot uchun muhim bo‘lgan xususiyatlari (belgilari) – xossalar, o‘zaro aloqalar, tuzilmaviy va funksional parametrlarni aniqlash, asoslash va tahlil qilish imkonini beradi.

Original-obyektni model-obyekt bilan almashtirish va obyektlar xossalarini ularning modellari yordamida tadqiq qilishga *modellashtirish nazariyasi* deyiladi.

Modellashtirish nazariyasi – modellarni qurishdagi o‘zaro bog‘langan tamoyillar, ta’riflar, usullar va vositalar majmuasidan iborat. Modellar esa modellashtirish nazariyasining predmetini tashkil etadi. Modellashtirish nazariyasi tizimlarning umumiy nazariyasi – sistemologiyaning asosini tashkil etadi.

Ilmiy tadqiqotlar tarixida dastlabki modellashtirish usullaridan biri *o‘xshashlik usulidir*. Uning ma’nosi shundaki, o‘rganilayotgan jarayon tajribaviy sharoitlarda boshqa «kichik masshtabda» amalga oshiriladi. Bunga misol sifatida samolyot qanotlarining havo oqimini kesib o‘tish jarayonini o‘rganishni keltirish mumkin. Shu maqsadda qanotning kichiklashtirilgan nusxasi yaratiladi va aerodinamik quvurga joylashtiriladi. Havo oqimini o‘tkazish yo‘li bilan qanotning zarur xarakteristikalari tajribada aniqlanadi.

Obyekt bilan bevosita tajriba o‘tkazish qimmatga tushadigan, yoki uni o‘tkazish mumkin bo‘lmaydigan yoki bunday tajriba kutilmagan natijalarga olib keladigan hollar (sog‘liq va ekologiya muammolari, tabiiy ofatlar) modellashtirish jarayonida alohida ahamiyatga ega. Real mavjud bo‘lmagan obyektlarni ham modellashtiradilar.

Bunga misol sifatida texnik qurilmalar, uchuvchi apparatlarni keltirish mumkin. Bunday hollarda modelni yaratish uchun zamonaviy matematika metodlari va hisoblash vositalarini jalb qilgan holda ilmiy tadqiqotlar o‘tkazish albatta zarur bo‘ladi.

Modellashtirish jarayoni uchta elementni o‘z ichiga oladi: 1) subyekt (tadqiqotchi); 2) tadqiqot obyekti; 3) o‘rganayotgan subyekt va o‘rganilayotgan obyekt orasidagi munosabatni o‘rnatuvchi model.

Modelni qurishning dastlabki bosqichida orginal-obyekt haqida muayyan bilimlar talab qilinadi. Model asosida bilish imkoniyatlari shunga tayanadiki, model orginal-obyektning qandaydir muhim tomonlarini aks ettiradi. Orginal va modelning yetarlicha o‘xshashligi va umuman modelning zarurligi masalasi har bir vaziyat uchun alohida tahlilni talab etadi. Shunday qilib, modellashtirilayotgan obyektning biror tomonini o‘rganish uning boshqa tomonlarini aks ettirishdan voz kechish evaziga amalga oshiriladi. Shuning uchun istalgan model orginalni faqat qat'iy cheklangan ma’noda almashtirishi mumkin. Bundan kelib chiqadiki, aynan bitta obyekt uchun bir qancha «maxsus» modellar yaratilishi mumkinki, ular tadqiq qilinayotgan obyektning muayyan tomoniga e’tiborni jalb etishi yoki obyektni turli darajada aniqlashtirilgan holda tavsiflashi mumkin.

Modellashtirish jarayonining ikkinchi bosqichida model mustaqil tadqiq obyekti sifatida ishtirok etadi. Bunday tadqiqning ko‘rinishlaridan biri eksperiment olib borishdir. Bunda berilgan model faoliyati uchun zarur shartlar o‘zgartiriladi va shunga mos holda modeldagi o‘zgarishlar kuzatiladi. Bu bosqich natijasi model haqida to‘planadigan bilimlar hisoblanadi.

Uchinchi bosqichda to‘plangan bilimlar modeldan orginalga ko‘chiriladi va obyekt haqida bilimlar to‘plami hosil qilinadi. Bu jarayon muayyan qoidalar asosida amalga oshiriladi. Model haqidagi bilimlar orginal-obyektning modelda aks etmagan yoki modelni qurishda o‘zgartirilgan xususiyatlarini hisobga olgan holda aniqlashtirilishi lozim. Biz yetarlicha ishonch bilan qandaydir natijani modeldan orginalga o‘tkaza olishimiz uchun bu natija orginal va modelning o‘xshashlik belgilari bilan bog‘liq bo‘lishi kerak.

To‘rtinchi bosqichda modellar yordamida olinadigan bilimlarni amaliy tekshiruvdan o‘tkazish va ularni obyektning umumlashgan nazariyasini qurish, uni o‘zgartirish yoki boshqarishda qo‘llash amalga oshiriladi.

Modellashtirish – bu siklik jarayondir, ya’ni dastlabki to‘rt bosqichli sikldan so‘ng ikkinchi va uchinchi sikllar kelishi mumkin. Bunda tadqiq qilinayotgan obyekt haqidagi bilim doirasi kengaytiriladi va aniqlashtiriladi, berilgan model esa borgan sari mukammallashib boradi. Obyekt haqidagi bilimning yetarli emasligi va modelni qurishdagi xatolar sababli kelib chiquvchi kamchiliklar birinchi sikldan so‘ng aniqlansa, ular keyingi siklda to‘g‘rilanishi mumkin. Shunday qilib, modellashtirish metodologiyasida o‘z-o‘zini rivojlantirishning katta imkoniyatlari mavjud.

Modellar turlari. Modellar qandaydir fizik obyektlar yordamida tadbiq qilinishi – *moddiy* (*fizik*) *modellar*dan iborat bo‘lishi va biror formallashgan tilda ifodalanuvchi abstrakt obyektlar – *abstrakt modellar* sifatida berilishi mumkin.

Moddiy (*fizik*) *model* deb, odatda, originalga ekvivalent yoki o‘xshash, ammo boshqa fizik tabiatga ega tizimga aytiladi.

Abstrakt modellar jumlasiga modellashtirish obyektini tavsiflaydigan matematik ifodalar kiritilishi mumkin. Ular matematik modellar sinfiga tegishli. Tizimni abstrakt ifodalash vositalariga kimyoviy formulalar, sxemalar, chizmalar, xaritalar, diagrammalar va shu kabilar tilini kiritish mumkin.

Moddiy (*fizik*) *modellarning ko‘rinishlari*: tabiiy; kvazitabiiy; masshtabli; analogli.

Tabiiy modellar - bu real (moddiy) tadqiq etilayotgan tizimlar (maketlar, tajriba nusxalari). Ular orginal bilan to‘liq adyekvatlik (moslik) xususiyatiga ega, ammo qimmat.

Kvazitabiiy modellar – tabiiy va matematik modellar majmuasidan iborat. Bunday ko‘rinishdagi modellardan tizim qismining modelini, uning tavsifi murakkab bo‘lgani uchun, matematik ifodalab bo‘lmagan holda (inson model operatori) yoki tizimning bir qismi boshqa qismlari bilan o‘zaro bog‘lanishda tadqiq qilinishi kerak bo‘lib, ammo ular hali mavjud emas yoki ularni qo‘llash qimmatga tushadigan holda foydanaliladi (hisoblash poligonlari, boshqaruvning avtomatlashtirilgan tizimi).

Masshtabli modellar – fizik tabiati orginal kabi bo‘lgan, lekin undan masshtabi bilan farqlanadigan tizimlardir (kichiklashtirilgan obyektlar, obyektlarning harakatlanuvchi modellari). Masshtabli modellashtirishning metodologik asosini o‘xshashlik nazariyasi tashkil etadi.

Analogli modellar deb orginaldan farq qiladigan fizik tabiatga ega bo‘lgan, lekin faoliyat jarayoni bilan orginalga o‘xshash tizimlarga aytiladi. Anologli modelni hosil qilish uchun o‘rganilayotgan tizimning matematik tavsifi kerak. Anologli modellar sifatida mexanik, gidravlik, pnevmatik va elektrik tizimlar qo‘llaniladi.

Matematik model – berilgan obyektning muayyan xossalarini o‘rganish maqsadida uning tadqiqotchi-subyekt tomonidan qandaydir formal (matematik) tizim yordamida quriladigan obrazidir.

Matematik model – bu tadqiq qilinayotgan obyekt-original xossalarining matematika tilida ifodalanishidir. Masalan, maktab matematika kursidan yaxshi ma’lum Pifagor teoremasi to‘g‘ri burchakli uchburchak tomonlarining metrik xossasini tavsiflaydi, shuning uchun uni shunday uchburchakning matematik modeli sifatida qarash mumkin. Matematik modelni qurish uchun barcha matematik vositalar – algebraik, differensial, integral tenglamalar, to‘plamlar nazariyasi, algoritmlar nazariyasi va shu kabilar qo‘llanilishi mumkin. Umuman olganda, matematika fanini obyekt va jarayonlarning modellarini qurish va tadqiq qilishdan iborat ilmiy faoliyat natijasi deb hisoblash mumkin.

Matematik modellar quyidagi uch xil yo‘l bilan hosil qilinadi: *real obyekt yoki jarayonni to‘g‘ridan-to‘g‘ri o‘rganish natijasida*; *deduksiya jarayoni natijasida* (yangi model biror umumiy modelning xususiy holi sifatida paydo bo‘ladi); *induksiya jarayoni natijasida* (yangi model elementar modellarning umumlashmasi sifatida paydo bo‘ladi).

Hozirgi paytda, axborot texnologiyalari tadbiq sohasining kengayishi natijasida modellar ularni tasvirlash usuliga ko‘ra *moddiy* yoki *tabiiy* (masalan, samolyotning radioboshqaruvli modeli; kubning hajmiy modeli) va *axborotli modellar* (masalan, Nyuton qonuni; kub chizmasi; dasturlash tilidagi datur) ga ajratiladi.

Real jarayonlarni tadqiq qilishda imitasion modellar ham faol qo‘llaniladi.

Imitasion modellar - tizim va unga tashqi ta’sirlarning tavsifi, tizim faoliyatining algoritmlari yoki tizim holatining tashqi va ichki ta’sirlar natijasida o‘zgarish qoidalari to‘plami (boshqacha aytganda, obyekt, jarayon, hodisa haqidagi zaruriy axborotlarni o‘z ichiga olgan miqdorlar to‘plami) demakdir. Bu algoritm va qoidalar matematikaning analitik va sonli yechish usullarini qo‘llashni bildirmaydi, ammo ular tizimning faoliyat jarayonini imitasiya qilish (ifodalash) va uning kerakli xarakteristikalarini hisoblash imkonini beradi. Imitasion modellarni qurishda hisoblash tizimlaridan foydalanilgani uchun imitasion modellarni formal ifodalash vositalari sifatida universal va maxsus algoritmik tillar qo‘llaniladi. Imitasion modellar tizim holatining ma’lum vaqt oralig‘idagi o‘zgarishini «qayta ifodalaydi». Bunga vaqt bo‘yicha taqsimoti tizim holatining o‘zgarishi haqida muhim axborot beradigan hodisalar qatorini identifikasiya qilish (aniqlashtirish) yo‘li bilan erishiladi. Imitasion modellashtirish usulini tadbiq qilish uchun EHMda hisoblash jarayonini tashkil qilish kerak. Imitasion modellar analitik va sonli usullar qo‘llanadigan hollarga qaraganda obyekt va jarayonlarining juda keng sinflari uchun yaratilishi mumkin.

Model ko‘rinishini tanlash o‘rganilayotgan tizim va modellashtirish maqsadining o‘ziga xos xususiyatlariga bog‘liq holda aniqlanadi. Chunki modelni tadqiq qilish faqat muayyan bir savollar guruhiga javob berish imkonini beradi. Boshqa zarur ma’lumot olish uchun esa boshqa ko‘rinishdagi model kerak bo‘ladi.

Modellar klassifikatsiyasi. *Modellarni klassifikatsiyalashning belgilari:* qo‘llanilish sohasi; vaqt omili va qo‘llanilish sohasini hisobga olish; ifodalanish uslubi bo‘yicha klassifikatsiyalash; bilimlar sohasi (biologiya, tarix, ijtimoiy va hokazo).

Ana shu me’zonlarlar bo‘yicha modellarni to‘laroq qarab chiqamiz.

1. *Qo‘llanilish sohasi: o‘quv modellari* (masalan, ko‘rgazmali qo‘llanmalar; o‘rgatuvchi dasturlar; har xil trenajerlar); *sinov modellari* (masalan, kemaning chayqalishdagi ustivorligini aniqlash uchun hovuzda uning modeli sinovdan o‘tkaziladi); *ilmiy-texnik modellar* (hodisa va jarayonlarni tadqiq qilish uchun yaratiladi, masalan, elektronni tezlatgich uskuna; chaqmoqning zaryadini imitatsiya qiluvchi qurilma; televizorni sinash uchun stend); *o‘yinli modellar* (masalan, harbiy, iqtisodiy, sport, ishbilarmon o‘yinlari); *imitatsion modellar* (real borliqni akslantiribgina qolmasdan,

uni imitatsiya qiladi (xuddi uni o‘zidek aks ettiradi), masalan, tabiiy holatdagi voqeylikning oqibatlarini o‘rganish va baholash uchun yoki har xil sharoitlarga qo‘yilgan ko‘plab o‘xshash obyektlar bilan bir vaqtda o‘tkaziladigan tajriba.

2. *Vaqt omili va qo‘llanilish sohasini hisobga olish*: *statik model* – bu obyekt bo‘ylab bir vaqtning o‘zidagi kesimlar (*Misol*: Faraz qilaylik bemor stomatologik poliklinikaga tish milkini davolatish uchun keldi. Shifokor bemorni ko‘rikdan o‘tkazdi va barcha ma’lumotlarni kartochkaga yozib qo‘ydi. Kartochkada yozilgan yozuvlar ayni shu daqiqada og‘iz bo‘shlig‘ining holatini tavsiflaydi (masalan, sut tishlari soni; doimiy, plombalashtirilgan, yemirilgan va olib tashlangan tishlar soni) va statistik model hisoblanadi); *dinamik model* – boshlang‘ich holati berilgan obyektning vaqt o‘tishi bilan o‘zgarishini ko‘rish imkonini beradi (*Misol*: Yuqoridagi misolda keltirilgan bemorning tishlarida ma’lum bir vaqt oralig‘ida yuz bergan o‘zgarishlarni ifodalovchi kartochka).

3. *Ifodalanish uslubi bo‘yicha klassifikatsiyalash*: *moddiy modellar* yoki, boshqacha aytganda, *predmetli, fizik modellar* (Ular har doim asl nusxaning geometrik va fizik xossalarini akslantiradi va har doim haqiqiysini ifodalaydi. *Misol*: bolalar o‘yinchoqlari. maktab qo‘llanmalari, fizik va kimyoviy tajribalar, geografik xaritalar; quyosh tizimi va yulduzli osmonning sxemasi va shu kabi. Moddiy modellar obyektni, hodisalarni va jarayonlarni o‘rganishga moddiy yondashuvni (teginish, hidlash, ko‘rish, eshitish mumkin bo‘lgan) ifodalaydi); *axborotli modellar* faqat axborotlardangina tuzilgan, shuning uchun ularga teginib yoki ularni ko‘rib, his qilib bo‘lmaydi (bu modellashtirish usulining asosida haqiqiy muhitni o‘rganishga axborotli yondashuv yotadi).

Axborotli modellar – bu obyekt, jarayon va hodisalarning xossalarini va holatini hamda ularning tashqi olam bilan o‘zaro aloqasini ifodalovchi axborotlar to‘plami. Ifodalanishiga ko‘ra bunday modellarning ko‘rinishlari: *geometrik* (grafikli shakllar; hajmiy qurilmalar); *og‘zaki* (tasvirlardan foydalanilgan yozma va og‘zaki tavsiflar); *matematik* (obyetlar yoki jarayonlarning har xil parametrlari bog‘lanishini akslantiruvchi matematik formulalar); *tuzilmali* (sxemalar; grafiklar; jadvallar va shu kabi); *mantiqiy* (hayoliy va shartlar tahlili asosida amallarni tanlashning har xil variantlari ifodasi); *maxsus* (notalar; kimyoviy formulalar va shu kabi); *kompyuter* va *nokompyuter* modellar.

Obyekt yoki jarayonni ifodalovchi axborot har xil vositalar bilan har xil hajmda va shaklda tasvirlanishi, ifodalanishi mumkin. Bu ko‘p xillik shunchalik cheklanmagan, inson va uning hayoloti imkoniyatlariga nisbatan shunchalik ulkan bo‘lishi mumkinki, hatto ba’zida uni tasavvurga ham sig‘dirib bo‘lmaydi.

Axborotli modellarni belgili va verbal modellarga ajratish mumkin: *belgili model* – bu maxsus belgilar, ya’ni ixtiyoriy formal til vositalarida ifodalangan axborotli model (bu rasmlar, matnlar, grafiklar va sxemalar; belgili modellar qo‘llanilish uslubiga ko‘ra ikki guruhga bo‘linadi: kompyuter va nokompyuter modellar); *verbal* *model* (lotincha "verbalis" – og‘zaki) – bu hayoliy yoki so‘zlashuv shaklidagi axborotli model (bu modellar o‘ylash va aqlan idrok qilish natijasida olinadi; bu modellar fikran yoki so‘zlarda ifodalanishi mumkin. *Misol*: Ko‘chani kesib o‘tayotgan odamning holati modeli. Odam yo‘ldagi vaziyatni (svetofor nimani ko‘rsatayotganini, yaqinlashib kelayotgan avtomobillarning tezligini, ularning uzoqliligini va hokazo) tahlil qiladi va u o‘zining holati modelini tanlaydi. Agar vaziyat muvaffaqiyatli modellashtirilsa, u holda ko‘chani kesib o‘tish yo‘lovchiga xavfsiz, aks holda esa vaziyat uning hayotiga xavf solishi mumkin. Bunday modellarga ixtirochining miyasida yaratgan g‘oyasini, kompozitorning miyasida tug‘ilgan musiqiy mavzu va rifmni, shoirning miyasida eshitilgan ritmni misol qilib keltirish mumkin).

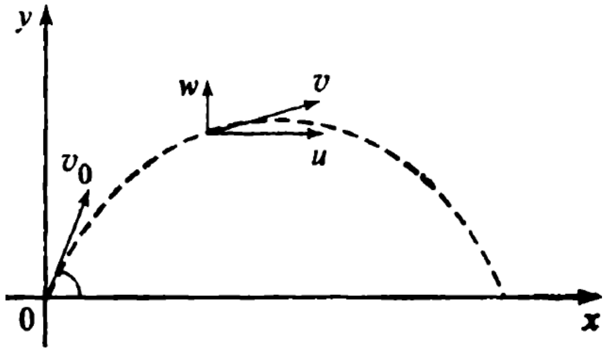
Belgili va verbal modellar, odatda, o‘zaro bog‘langan. Inson miyasida tug‘ilgan g‘oyalar belgili shakllarga ko‘chirilishi mumkin, va aksincha, belgili model inson miyasida ishonchli hayoliy ifodalanishi mumkin. Bu ikki guruh modellarining nomi (moddiy va axborotli modellar) ham ularning nimalardan tuzilganligini ifodalaydi.

Kompyuter modeli – bu hayotiy jarayon yoki hodisaning kompyuter vositalari yordamida tuzilgan modeli bo‘lib, uning belgili (masalan, matematik model, namoyish va imitatsiya dasturlari) yoki axborotli turi ham bo‘lishi mumkin. Kompyuter modellarini tuzishda tizimli yondashuvdan foydalaniladi.

Matematik modelni qurish. Matematik model o‘rganilayotgan hodisaning cheksiz murakkabliklarini, uning foydali xossalarini saqlagan holda, biz xoxlagandek sodda, yetarlicha to‘la tavsiflab berishi, matematikada mavjud vositalar bilan yetatlicha sodda tahlil qilinishi va kompyuterda ishlanilishi kerak. Bunda o‘rganilayotgan hodisaning juda ko‘p «xarakteristikalari» va u haqidagi «axborotlar» ichidan eng asosiylarini tanlab olish, ularning ikkinchi darajalilarini va ahamiyatsizlarini tashlab yuborish lozim bo‘ladi. Odatda, asosiy qonuniyatlarni aniqlashtirish maqsadida hodisaning asosiy «xarakteristikalari» biror miqdorlar (sonli qiymatlar: o‘zgaruvchilar, vektorlar, matritsalar, funksiyalar va boshqa) bilan taqqoslanadi va ular chuqur tahlil qilinadi. Hodisaning «xarakteristikalari» orasidagi ichki aloqalarni o‘rnatish uchun matematik modelga bu miqdorlarni bog‘lovchi tenglik, tengsizlik, tenlama, mantiqiy tuzilma va boshqa operatsiyalar kiritiladi. Natijada matematik model o‘rganilayotgan obyektning holatini yoki unda yuz berayotgan hodisani boshqaruvchi matematik tilda yozilgan tabiat qonuni ko‘rinishini oladi. Bu model biror miqdorlar va ular orasidagi aloqa xarakterlari tavsiflarini o‘z ichiga oladi. Tabiiy va texnik fanlarning eng muhim va ahamiyatli qismi – bu matematik modellarni qurish. Bu tadqiqotchidan fan sohasini chuqur bilishni, yuqori matematik madaniyat va tajriba, rivojlangan sezgirlik va shu kabilarni talab qiladi. Yangi muvaffaqiyatli modelni yaratish – bu shu fanning katta yutug‘i, uning rivojidagi eng muhim bosqich. Umuman olganda, modelni qurishda ikkita tamoyildan foydalaniladi: *deduktivlik* (umumiydan xususiyga qarab, ya’ni oldindan ma’lum yoki fundamental modelning xususiy holi qaraladi; masalan, Nyuton qonuniga ko‘ra erkin tushayotgan jismning modelini qurish) va *induktivlik* (xususiydan umumiyga qarab, ya’ni avval gipotezalar taklif qilinadi va murakkab obyektning dekompozitsiyasi tuziladi, keyin esa tahlil va sintez o‘tkaziladi; masalan, atom tuzilishi modeli, Tomson, Rezerford, Bor modellari).

Masalan, havoning qarshiligi bo‘lmagan holda Yer tekisligiga nisbatan biror α ($0<\alpha<\pi/2$) burchak ostida v_0 boshlangich tezlik bilan otilgan jism harakati trayektoriyasining sodda matematik modeli ushbu $y = x\mathrm{tg}\alpha - \dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$ parabola tenglamasi bilan ifodalanishi XVII asrda G.Galiley tomonidan chiqarilgan, bunda g - erkin tushish tezlanishi (o‘zgarmas); koordinata boshi - otish nuqtasi; x - otish yo‘nalishidagi gorizontal koordinata; y - vertikal koordinata (1.1-rasm). Mexanika qonunlariga ko‘ra jismning gorizontal yo‘nalishdagi harakati tekis, vertikal yo‘nalishdagi harakati esa tekis tezlanuvchan va qiymati $-g$ ga teng. Bu yerda t vaqt momentidagi $v(t)$ tezlik ($t = 0$ da $v = v_0$) ning Ox va Oy koordinata o‘qlariga mos tashkil etuvchilari $u(t)$ va $w(t)$ bo‘lib, quyidagi munosabatlar o‘rinli: $u=v_0\cos\alpha$, $w=v_0\sin\alpha-gt$, $x=(v_0\cos\alpha)t$, $y=(v_0\sin\alpha)t-gt^2/2$, $t_{\max} = (2v_0\sin\alpha)/g$, $x_{\max} = (v_0^2\sin 2\alpha)/g$, $y_{\max} = (v_0^2\sin^2\alpha)/(2g)$.

Hisoblash masalalarining qo‘yilishi, tadqiq etilishi va yechilishi. Tadqiqotchini qiziqtirayotgan miqdorlar qiymatlarini topish yoki ularning matematik modelga kirgan boshqa parametlar yoki miqdorlar bilan bog‘liqligi xarakterini ochib berish uchun matematik masala qo‘yiladi, keyin u yechiladi.



1.1-rasm. Burchak ostida otilgan jismning harakati sxemasi.

Yechiladigan masalalarning asosiy turlarini qarab chiqaylik, bular: to‘g‘ri masalalar; teskari masalalar; identifikatsiya masalalari.

Buning uchun dastlab matematik modelga kirgan miqdorlarni shartli ravishda uch turga artish mumin: x – dastlabki (kiruvchi) ma’lumotlar; a – model parametrlari; y – izlanayotgan yechim (chiquvchi ma’lumotlar).

Dinamik modellarda izlanayotgan yechim ko‘pincha t vaqtning $y = y(t)$ funksiyasi bo‘lib, u juda muhim ahamiyatga ega.

Eng ko‘p yechiladigan *to‘g‘ri masalalar*ning qo‘yilishi quyidagicha: x – kiruvchi ma’lumotlarning berilgan qiymatlari bo‘yicha a – fiksirlangan parametrlar qiymatlariga qarab y – yechimni topish. Bunda masalani yechish jarayonini sabab-oqibat bog‘lanishining matematik modeli deb qarab, x – hodisaning «sabab»i (u tadqiqot jarayonida o‘zgarishi mumkin), izlanayotgan yechim y – «oqibat». Bunda matematik tavsif yagona hodisani emas, balki tabiatdagi bir biriga yaqin hodisalarni tavsiflashi uchun modellarning parametrik oilasi quriladi. Bularning ichidan aniq bir modelni tanlab olish uchun esa modelning a – fiksirlangan parametrining qiymati tanlab olinadi. Masalan, biror tenglamaning koeffisiyentlari shunday parametrlar bo‘lishi mumkin. Misol uchun, yuqoridagi burchak ostida otilgan jism harakati haqidagi model (bu model g parametri aniq bo‘lgan ixtiyoriy planeta uchun o‘rinli) uchun to‘g‘ri masalani: v_0, α – kiruvchi ma’lumotlarda g – parametr (masalan, suv sathidan har xil balandliklarda va har xil chuqurliklarda har xil qiymat bilan berilgan bo‘ladi) uchun $u(t)$, $w(t)$, $x(t)$, $y(t)$ miqdorlarni hisoblash masalasi.

Xuddi shunday, *teskari masala*: modelning fiksirlangan a – parametrlari uchun berilgan y qiymatga ko‘ra x – kiruvchi parametrlarni aniqlash masalasi. Teskari masalani yechish – bu qaysi x – «sabab»lar ma’lum bo‘lgan y – «oqibat»ga olib kelishini aniqlashdan iborat. Odatda, teskari masalani yechish to‘g‘ri masalani yechishga qaraganda ancha murakkab. Masalan, yuqoridagi burchak ostida otilgan jism harakati haqidagi model uchun teskari masalani: berilgan $u(t)$, $w(t)$, $x(t)$, $y(t)$ miqdorlarga ko‘ra v_0, α – kiruvchi ma’lumotlarni topish masalasi, bunda fiksirlangan ixtiyoriy $t_0 \geq 0$ vaqt momentida v_0, α lar bir qiymatli berilganda $(u(t_0), w(t_0))$ yoki $(x(t_0), y(t_0))$ miqdorlar juftligidan biri topiladi.

Keng ma’nodagi identifikatsiya masalasi – bu o‘rganilayotgan hodisani tavsiflab berivchi modellar ichidan eng yaxshisini tanlash masalasi. Bunday holda qo‘yilgan masala amalda yechilmaydigan muammo. Ko‘proq *tor ma’nodagi identifikatsiya masalasi* qaralib, – bu parametrik modellar oilasi ichidan aniq matematik modelni (uning a parametrlarini tanlash yordamida) tanlab olish, bunda kuzatish natijalariga ko‘ra u optimal bo‘lishi kerak. Masalan, yuqoridagi burchak ostida otilgan jism harakati haqidagi model uchun identifikatsiya masalani: harakat trayektoriyasini kuzatish natijalari bo‘yicha planetadagi erkin tushish tezlanishi g ning qiymatini aniqlash masalasi.

Ana shu uch turdagi masalalar (to‘g‘ri, teskari va identifikatsiya masalalari) *hisoblash masalalari* deb ataladi. Bundan keyin tushunchalarda aniqlanishi lozim bo‘lgan qiymatlar y – *izlanayotgan yechim*, berilgan qiymatlar x – *kiruvchi ma’lumotlar* deb qabul qilamiz.

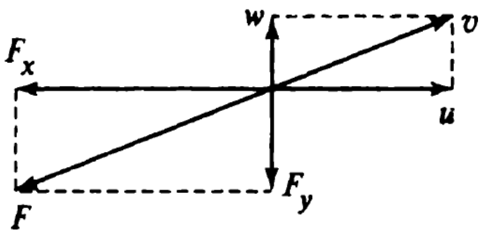
Masalan, 1) Biror hodisani tavsiflash uchun x va y miqdorlar orasidagi bog‘lanish modeli ushbu $y = P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ polinomial bog‘lanish bo‘lsa, u holda a_0 , a_1 , … , a_n – ko‘phad koeffisiyentlari model parametrlari (ko‘phadning darajasini ham model parametrlariga kiritish mumkin). Bunda a) to‘g‘ri masala: $y = P_n(x)$ ko‘phadning qiymatini berilgan x qiymatda hisoblash masalasi; b) teskari masala: berilgan y qiymatga ko‘ra unga mos x qiymatni topish masalasi (masalan, ko‘phadning ildizlarini topish masalasi); c) identifikatsiya masalasi: agar amaliyotda y ning x dan bog‘liqligi haqidagi biror ma’lumot ma’lum bo‘lsa, u holda bu bog‘lanishni eng yaxshi tavsiflovchi modelga mos a_0 , a_1 , … , a_n – koeffisiyentlarni topish masalasi (masalan, interpolyatsiya va eng kichik kvadratlar usullari). 2) model funksiyalari $x(t)$ va $y(t)$ lar o‘zaro ushbu $y(t) = y_0 + a\int_0^t x(\tau)d\tau$ tenglik bilan bog‘langan; masalan, ular to‘g‘ri chiziqli harakatda $x(t)$ – tezlik va $y(t)$ – bosib o‘tilgan yo‘l bo‘lib o‘zaro bog‘langan. Bu yerda *a*) to‘g‘ri masala: fiksirlangan o‘zgarmas y_0 qiymat uchun berilgan $x(t)$ – tezlik funksiyasiga mos $y(t)$ – bosib o‘tilgan yo‘lni (boshlang‘ich funksiyani) topish masalasi; *b*) teskari masala: berilgan $y(t)$ funksiyadan foydalanib, $x(t) = y'(t)$ ni hisoblash masalasi; *c*) berilgan $x(t)$ – tezlik funksiyasiga ko‘ra $y(t)$ – bosib o‘tilgan yo‘lga mos a parametrni aniqlash masalasi.

Odatda, hisoblash masalasini yechishni hamma vaqt ham berilgan ma’lumotlarda chekli sondagi formulalar bilan ifodalab bo‘lmaydi. Ammo bu degani bunday masalalarning yechimini topib bo‘lmaydi degani emas. Shunday maxsus usullar mavjudki, ular *sonli usullar* yoki *hisoblash usullari* deb ataladi. *Hisoblash usullari* – bu yechimning sonli qiymatini olish jarayonini unga kiruvchi ma’lumotlar sonli qiymatlari ustida bajariladigan ketma-ket arifmetik operatsiyalarga, ya’ni EHM bajaradigan amallarga keltirib o‘rganuvchi fan. Sonli usullar yoki hisoblash usullarining eng bosh maqsadi – bu yechimni talab qilinayotgan yoki hech bo‘lmaganda baholanayotgan aniqlikda topishdan iborat. *Hisoblash matematikasi* – bu matematik masalalarni yechishning sonli (taqribiy) usullarini o‘rganuvchi fan. Sonli usullar yuqori malakali matematik-mutaxassislar tomonidan ishlab chiqiladi. Talabalar uchun eng muhim masala bu hisoblash usullarining asosiy g‘oyalarini, xususiyatlarini va qo‘llanilish sohalarini tushunib olishdan iborat.

Hisoblash usullar ilgaridan ma’lum, masalan, fransuz astronomi Leverye tomonidan 1846 yilda yangi Neptun planetasning ochilishi masalasi. Ammo ilgari amaliyotda hisoblash usullaridan deyarli foydalanishmagan, chunki hisoblash hajmi juda ulkan bo‘lgan. Shuning uchun kompyuter ixtirosiga qadar hodisalarni tadqiq qilishda murakkab matematik modelar analitik yechimi topilishi mumkin bo‘lgan sodda holga keltirilib yechilgan. Hisoblash qurilmalari takomillashmagan davrda matematik modellarning fan va texnikaga qo‘llanilishi biroz cheklanib qoldi. Kompyuterlarning yaratilishi vaziyatni keskin o‘zgartirdi. Matematik modelar sinfidan foydalanib tadqiqotlar olib borish keng qamrovli bo‘lib bordi. Shu paytgacha yechilishi mumkin bo‘lmagan ko‘plab hisoblash masalalari yechildi va taqribiy modelning real obyektga yaqinligi oshdi.

Amaliyotda modelning sifatini tekshirish va modelning modifikatsiyasi (turlanishi, shakli o‘zgargan hol). Avvalambor tadqiq qilinayotgan hodisani tavsiflovchi matematik model yaroqlimi, degan savolga javob izlash talab qilinadi. Buning uchun gipotetik matematik modeldan kelib chiquvchi nazariy xulosalar va aniq natijalar eksperiment ma’lumotlari bilan taqqoslanadi. Agar bunda ular o‘zaro nomuvofiq bo‘lsa, u holda tanlangan model yaroqsiz va u qayta ko‘rib chiqilib, birinchi bosqichga qaytiladi. Aksincha, agar natijalar hodisani berilgan aniqlikda tavsiflagan holda o‘zaro mos kelsa, u holda bu model yaroqli. Albatta, bunda modelning ishonchlilik darajasini o‘rnatish va uning qo‘llanilish chegarasini aniqlash maqsadida qo‘shimcha tadqiqotlar ham olib borish zarur. Ma’lum bir bosqichda esa matematik modelning natijalari amaliyotga to‘g‘ri kelmay qolishi yoki aniqlik nuqtai nazaridan uni qanoatlantirmay qolishi mumkin. Ana shunday holatda yangi, murakkabroq modelni yoki shu modelning modifikatsiyasini yaratish zarurati tug‘iladi. Buning natijasida matematik modelni yaratish sikli ko‘p marotaba takrorlanishi mumkin.

Masalan, ballistika masalasini, ya’ni artilleriya snaryadining harakati masalasini qaraylik. XVII asrda G.Galiley tomonidan yaratilgan snaryad harakatining parabolik trayektoriyasi haqidagi sodda model keyinchalik amaliyotga to‘g‘ri kelmay qoldi. Buning asosiy sababi modelda havoning qarshiligi hisobga olinmaganlikda. Bu xato I.Nyuton tomonidan to‘g‘rilanib, Galiley modelining modifikatsiyasi yaratildi. Ma’lumki, F – havoning ixtiyoriy qarshiligi v – tezlik kvadratiga proporsional, ya’ni $F = -\beta v^2$, bunda $\beta = 0{,}5CS\rho$; ρ – havoning zichligi; S – ko‘ndalang kesim yuzasi; C – qarshilik koeffisiyenti (masalan, ballistika masalasida $C \approx 0{,}15$). Faraz qilaylik, F_x va F_y – qarshilik vektorining mos ravishda gorizontal va vertkal tashkil etuvchilari bo‘lsin, u holda $F_x/F = u/v$; $F_y/F = w/v$; $v = \sqrt{u^2 + w^2}$ (1.2-rasm). Natijada $F_x = -\beta u\sqrt{u^2 + w^2}$; $F_y = -\beta w\sqrt{u^2 + w^2}$. Agar snaryadning massasini m desak, u holda Nyutonning ikkinchi qonuniga ko‘ra ushbu $m\dfrac{du}{dt} = -\beta u\sqrt{u^2 + w^2}$; $m\dfrac{dw}{dt} = -mg - \beta w\sqrt{u^2 + w^2}$; $\dfrac{dx}{dt} = u$; $\dfrac{dy}{dt} = w$ tenglamalar o‘rinli. Bu tenglamalar quyidagi boshlang‘ich shartlar bilan to‘ldiriladi: $u(0) = v_0\cos\alpha$; $w(0) = v_0\sin\alpha$; $x(0) = 0$; $y(0) = 0$. Endi bu model dastlabkisiga qaraganda ancha murakkab, xususan, unda $\beta = 0$ (havoning qarshiligi yo‘q) deb olsak, u holda dastlabki sodda model kelib chiqadi. O‘z navbatida, bu model ham zamonaviy ballistika masalasi uchun yaroqsiz, haqiqatda qo‘llanilayotgan modellar esa ancha murakkab.



1.2-rasm. Tezlik va kuchni proyeksiyalash.

Shuni ta’kidlash lozimki, matematik modelni tuzish ishi, odatda, fan sohasini biladigan, amaliy matematika, matematika, mexanikaning mos bo‘limlari haqidagi bilimlarni egallagan va hisoblash masalasini yechishda paydo bo‘ladigan imkoniyatlarni baholay oladigan hamda kompyuter hisobini amalda bajara oladigan yaxshi mutaxassislarning hamkorlikdagi harakatidir.

1.2. Amaliy masalalarni kompyuter yordamida yechishning bosqichlari

Biror amaliy masalani kompyuter yordamida yechish bu jiddiy masala bo‘lib, u uzoq vaqtli va murakkab jarayon. Bu jarayonni uning ma’lum darajadagi qiyinliklariga qarab shartli ravishda quyidagi bosqichlarga bo‘lish mumkin: muammoning qo‘yilishi; matematik modelni tanlash yoki qurish; hisoblash masalasining qo‘yilishi; hisoblash masalasi xossalarining dastlabki (kompyuter hisobiga qadar) tahlili; sonli usulni tanlash yoki qurish; algoritmlashtirish va dasturlash; dasturni sozlash; dastur bo‘yicha hisob; natijalarni qayta ishlash va ularning talqini (interpretatsiyasi); natijalarning qo‘llanilishi va matematik modelni to‘g‘rilash.

Muammoning qo‘yilishi. Dastlab amaliy masala biror hodisani tadqiq qilish, berilgan xossalariga ko‘ra qurilmani loyihalash, ma’lum bir shartlarda biror obyektning holatini tahlil qilish va shu kabilar uchun umumiy holda tuzilishi mumkin. Bunday holatda tadqiqotning maqsadiga asosiy e’tiborni qaratgan holda masalaning qo‘yilishi yanada oydinlashtiriladi. Bunda tadqiqotchidan masalaning mohiyatini chuqur anglash va uni tuzish mahorati talab qilinadiki, topilgan yechim foydali va shu bilan birga u mavjud usullar yordamida belgilangan vaqtda olinishi lozim. Muvaffaqiyatsiz qo‘yilgan muammo masalani yechish jarayonini uzoq muddatli va judda qimmatli qilish bilan birga foydasiz va trivial natijaga yoki umuman yechim yo‘q holatga ham olib kelishi mumkin. Demak, aniq muammoni tuzishda berilgan fan sohasida qabul qilingan tilda muammoni tuzib olish eng muhim va mas’uliyatli bosqich. Kompyuterdan foydalanish imkoniyatlarini bilish esa muammoning optimal holatda qo‘yilishiga jiddiy ta’sir korsatishi mumkin.

Matematik modelni tanlash yoki qurish. Hodisa yoki obyektni tadqiq qilishning keyingi tahlil bosqichida uni matematik tilda ifodalash, ya’ni uning matematik modelini qurish lozim. Ba’zan o‘rganilayotgan jarayon uchun shu vaqtgacha ma’lum bo‘lgan va qabul qilingan modellar ichidan eng ma’qulini tanlab olish, ba’zan esa shu ma’lum modelning keskin o‘zgartirilgan modifikatsiyasiga murojaat qilish mumkin bo‘ladi yoki umuman yangi model tuzish zarurati tug‘iladi. Bu bosqich eng muhim va u juda ham murakkab. Muvaffaqiyatli tanlangan model maqsadga erishishning eng muhim qadami hisoblanadi. Bunda eng qiyin holat bu hodisani tavsiflashning to‘laroq modelini yaratish istagi (bu murakab modelni tuzishga olib keladi) va yetarlicha sodda modelga erishish zarurati (bu modeldan kompyuterda foydalanish imkoniyatining mavjudligi). Shuning uchun matematik modelning murakkabligi avvalambor qo‘yilgan muammoning murakkabligidan bog‘liq. Agar qo‘yilgan maqsadga yetarlicha sodda modellar yordamida erishish mumkin bo‘lsa, u holda bu nur ustiga a’lo nur. Odatda, qabul qilinayotgan modelning bir qancha soddalashtirilgan variantlariga ega bo‘lgan ma’qul. Modelni oqilona soddalashtirish bu sodda masala emas, ammo soddalashtirilgan model masalani yechishning butun jarayonida juda ham foydali. Bunday soddalashtirishlar ko‘pincha murakkabroq modellar holatlarining asosiy qonuniyatlarini tushunish va ko‘plab asosiy savollarga javob topish imkoniyatini beradi.

Hisoblash masalasining qo‘yilishi. Qabul qilingan matematik model asosida bir yoki birnechta hisoblash masalasi tuziladi. Bu masalalarning yechimlarini topish keyingi boblarda qarab chiqiladi.

Hisoblash masalasi xossalarining dastlabki (kompyuter hisobiga qadar) tahlili. Dastlab hisoblash masalasining xossalari kompyuter hisobiga qadar tadqiq qilinadi. Bunda asosan masalaning korrekt qo‘yilganligiga e’tibor qaratiladi, chunki avval masalaning matematik xossalarini tahlil qilmay turib, uni sonli yechishga urinish natijalarning ilmiy va amaliy ahamiyatiga salbiy ta’sir qilishi mumkin. Bu tahlil masalaning qo‘yilishini soddalashtirishi ham mumkin, ba’zi xususiy hollarda esa analitik yechimni ham topish imkoniyatini beradi. Bu esa hodisaning muhim xususiyatlarini tahlil qilish yoki dasturning to‘g‘ri ishlayotganligiga ishonch hosil qilish uchun test bo‘lib xizmat qilishi mumkin.

Sonli usulni tanlash yoki qurish. Hisoblash masalasini kompyuterda yechish uchun hisoblash masalalaridan foydalanish talab qilinadi. Bunda amaliy masalani yechish ketma-ketligi ko‘pincha samarali standart hisoblash masalalarini yechishga olib kelinadi. Ba’zida, agar hisoblash masalasi yangi bo‘lsa, u holda unga mos hisoblash usuli tayyor bo‘lmasligi ham mumkin. Bunday masala uchun sonli usulni qurish murakkab muammo bo‘ladi va hisoblash matematikasining maxsus mutaxassislarini bu masalaga jalb qilish talab etiladi. Ba’zan birgina hisoblash masalasini yechish uchun bir nechta hisoblash usulidan foydalanish mumkin bo‘ladi. Ana shu paytda hisoblash usulining o‘ziga xos xususiyatlarini, kriteriyalarini, ularning eng samarali ko‘rinishlarini bilish talab etiladi. Bunda tanlov, albatta, bir qiymatli emas. Bu talab qilinayotgan yechimdan, mavjud zaxiralardan, hisoblash texnikasining imkoniyatlaridan bog‘liq. Ushbu o‘quv qo‘llanma asosan aynan ana shunday muammolarni hal qilishga ko‘maklashish uchun mo‘ljallangan.

Algoritmlashtirish va dasturlash. Oldingi bosqichda tanlangan hisoblash usuli masalani yechishning faqat asosiy sxemasini beradi, uni kompyuterda bajarish uchun esa ko‘p jihatlari ochilmagan bo‘ladi. Demak, hisoblash bosqichlarini batafsil bajarish uchun kompyuter algoritmini tuzish zarur. Keyin esa dastur ana shu algoritmni daturlash tiliga ko‘chiradi. Hozirda mavjud C++, FORTRAN, Pascal, Delfi kabi algoritmik tillar hisoblash masalasini yechishda keng qo‘llaniladi. Bu algoritmik tillarning standart dasturlar bibliotekasi yoki amaliy dasturlar paketi ham mavjudki, ulardan samarali foydalanish maqsadga muvofiq. Bundan tashqari MATLAB, Maple, Mathcad, Mathematica, va shu kabi matematik paketlar ham mavjudki, bular hisoblash masalalarini yechishning eng zamonaviy vositalari bo‘lib bormoqda. Bulardan tashqari MS Excel dasturidan ham bu borada samarali foydalanish mumkin. Albatta, tadqiqotchi o‘zining tuzgan dasturiga ega bo‘lishni xoxlaydi. Buning uchun maxsus qo‘llanmalarga murojaat qilish maqsadga muvofiq.

Dasturni sozlash. Bu bosqichda kompyuter yordamida dasturning xatolari topiladi va to‘g‘rilanadi. Agar bu xato dasturni tuzishda yo‘l qo‘yilgan bo‘lsa, u, albatta, oson topiladi va o‘z vaqtida to‘g‘rilanadi. Ammo dasturni ishlash holatiga keltirish uzoq vaqtni va mashaqqatli jarayonni talab qilishi mumkin. Ma’lum bir tajriba va malakaga ega tadqiqotchigina murakkab dasturni sozlashda muvaffaqiyatga erishishi mumkin, chinki «Har qanday dasturda hech boʻlmaganda bitta xato bor» degan ibora mavjud. Demak, dasturda xatoliklarning borligi bu tabiiy hol. Shuning uchun dasturni sozlashdan oldin hisoblash masalasini algoritm-lashtirish va dasturlashga ham jiddiy e'tiborni qaratish lozim ekan. Dasturni samarali sozlash dasturni ishlab chiqishning umumiy uslubiyatidan bogʻliq. Sozlangan dasturni test bilan teksirish kerak boʻladi, bunda yechimi mavjud test masalalar shu dasturda xususiy hol sifatida yechiladi.

Dastur boʻyicha hisob. Bu bosqichda masalani kompyuterda yechish avtomatik tarzda tuzilgan dastur yordamida amalga oshiriladi. Bu jarayonda kiruvchi ma'lumotlar kompyuter yordamida kerakli natijalarga aylantiriladi va u *hisoblash jarayoni* deb ataladi. Bunda hisoblashlar har xil ma'lumotlarda qayta-qayta bajarilishi mumkin, bu esa yakuniy natijani toʻla ifodalashga xizmat qiladi. Bu olingan natijalarning toʻgʻriligi dasturning toʻgʻri tuzilganligini va hisoblash usulining toʻgʻri tanlanganligini koʻrsatadi. Bu yerda mashina vaqtidan samarali foydalanishni tashkil etish muhim ahamiyatga ega.

Natijalarni qayta ishlash va ularning talqini (interpretatsiyasi). Kompyuter hisobi natijalari bu katta hajmdagi sonlar massivi. Albatta, bu chop etilgan minglab sonlarni tahlil qilish insonning imkoniyati chegarasida boʻlmasligi mumkin. Shuning uchun bu natijalarni qanday koʻrinishda (masalan jadval, grafik va boshqa) chop etishni kompyuterga yuklash tadqiqotchiga natijalarni tezkor tahlil qilish imkonini beradi. Olingan hisob natijalarini toʻgʻri talqin qilish tadqiqotchidan yechilayotgan masala mazmuni, foydalanilayotgan matematik model va qoʻllanilayotgan hisoblash usuli haqida chuqur bilimni talab qiladi. Hisoblash natijalarini qayta ishlash va talqin qilish hisoblash usulini oʻrganishda va unga doir aniq amaliy masalalarni ychishda namoyon boʻladi.

Natijalarning qoʻllanilishi va matematik modelni toʻgʻrilash. Yakuniy bosqich bu hisoblash natijalarni amaliyotga tadbiq qilish. Bunda olingan natijalar ahamiyatlimi, degan savol tugʻiladi. Bu esa foydalanilgan matematik modelni toʻgʻrilash, takomillashtirish, modifikatsiyalash (masalan, murakkablashtirish), masalani yechishning yangi siklini yaratish zaruratini tugʻdiradi.

1.3. Hisoblash eksperimenti

Matematik modelni yaratish va kompyuter yordamida amaliy masalani yechish katta hajmdagi ishlarni bajarishni talab qiladi. Ta'kidlash mumkinki, tabiiy eksperimentni amalga oshirishda: eksperiment dasturi tuziladi; eksperimental qurilmalar yaratiladi; nazorat eksperimentlari bajariladi; bir qator tajriba-sinovlar oʻtkaziladi; eksperiment ma'lumotlari qayta ishlanadi; ular talqin qilinadi va hokazo. Hisoblash eksperimentida esa haqiqiy obyekt ustida emas, balki uning matematik modeli ustida amalga oshiriladi, eksperimental uskuna sifatida esa maxsus yaratilgan amaliy paketlar dasturi bilan jihozlangan kompyuterdan foydalaniladi. Shuning uchun amaliy va ilmiy masalalarni yechishda kompleks hisoblarni o‘tkazish *hisoblash eksperimenti* deb qaralganda yuqorida sanab o‘tilgan masalani yechish bosqichlari uning bir sikli bo‘ladi.

Matematik modellashtirishda kompyuterlardan keng foydalanilishni, ishlab chiqarilgan nazariya va amaliy natijalar hisoblash eksperimentini ilmiy va amaliy tadqiqotlarning yangi texnologiyasi va metodologiyasi deb qarash mumkin bo‘ladi. Hozirgi kunda hisoblash eksperimentining amaliy tadqiqotlarga tadbiqi endi kengaymoqda, masalan, halokatli va fojeali hodisalar (AES yadro reaktorining nosozligi; iqlimning global isishi; yer silkinishlari)ning kutilayotgan natijalarini oldindan aniqlash; aviatsiya va kosmos sanoati, suv usti va suv ostida suzuvchi obyektlarning harakatlari muammolarini o‘rganish va hokazo. *Hisoblash eksperimentining asl eksperimentga qaraganda ustunliklari*: moddiy jihatdan arzon; bu eksperimentni o‘tkazish oson va xavfsiz, unda aralashuv ham xavfsiz; uni qayta-qayta o‘kazish mumkin va ixtiyoriy vaqt momentida to‘xtatib qo‘yish mumkin; laboratoriya sharoitida mavjud bo‘lmagan shartlarda uni modellashtirish mumkin; tezkor jarayonlarni, borish qiyin va ba’zan bu mumkin bo‘lmagan obyektlarni tadqiq qilish mumkin; hali yaratilmagan qurilma, inshoot va materiallarning yangi xossalarini va qirralarini ochib berish mumkin. *Asl eksperimentning kamchiliklari*: uni o‘tkazish murakkab, ba’zan bu umuman mumkin emas; juda qimmatga tushadi; o‘ta xavfli; uni o‘tkazish jarayonida kutilmagan xavfli vaziyatlar yuzaga kelishi mumkin yoki insonlarning hayotiga va salomatligiga xavf solishi mumkin. *Hisoblash eksperimentining kamchiliklari*: qabul qilingan matematik model doirasidagina o‘rinli; natijalarining qo‘llanilichi cheklangan; asl eksperimentni to‘la almashtira olmaydi. Hisoblash eksperimentining dasturiy ta’minoti yirik dasturiy kompleksni yaratishga olib keladi. Bu o‘zaro bog‘langan amaliy dasturlar, tizimli va uni boshqaruvchi vositalar. Bunday dasturiy kompleks ba’zan *muammoga yo‘naltirilgan amaliy dasturlar paketi* deb ham ataladi.

1.4. Xatoliklar nazariyasining elementlari

Amaliy masalani sonli yechish natijasi xatoliklarining manbalari va klassifikatsiyasi. Hisoblash usullari bilan olingan natijalar, odatda, taqribiy bo‘ladi, ya’ni ular biror xatolik bilan olinadi. *Xatolik* deb natijaning aniqligini xarakterlovchi biror miqdor tushuniladi. Natijaning *xatolik manbalari*: matematik model; boshlang‘ich ma’lumotlar; taqribiy yechish usuli; hisoblashlardagi yaxlitlash.

Matematik modelning xatoligi dastlabki masalani tuzishda paydo bo‘ladigan fizik farazlar va soddalashtirishlardan hamda foydalanilayotgan matematik apparatdan bog‘liq.

*Dastlabki axborotlardagi xatolik*ning sababi, masalan, noto‘g‘ri o‘lchash, biror miqdorlarni chekli kasrlarda ifodalab bo‘lmaslik bo‘lishi mumkin.

Bu har ikkala xatolik birgalikda *yo‘qotib bo‘lmaydigan xatolik* deb ataladi.

Usulning xatoligi aniq operatorlarni va boshlang‘ich ma’lumotlarni taqribiysiga almashtirishdan paydo bo‘ladi, masalan, integralni yig‘indiga, hosilani chekli ayirmaga, funksiyani ko‘phadga almashtirishda va cheksiz iteratsion jarayon natijasini chekli iteratsiyalarda qurib olishda paydo bo‘ladi. Bu *yo‘qotish mumkin bo‘lgan xatolik* bo‘lib, masalan, usul biror parametrga nisbatan quriladi, bu parametr biror limitga intilsa, u holda usulning xatoligi nolga intiladi.

Hisoblash xatoligi oraliq va yakuniy natijalarni yaxlitlash natijasida paydo bo‘ladi. Shunday qilib, biror masalani kompyuterda yechish natijasining to‘la xatoligi yo‘qotib bo‘lmaydigan (matematik modelning xatoligi; dastlabki axborotlardagi xatolik) va yo‘qotib bo‘ladigan (usulning xatoligi; hisoblashlardagi yaxlitlash xatoligi) xatoliklar yig‘indisidan iborat ekan.

Quyida hisoblash xatoliklariga to‘xtalib o‘tilgan. Hozirgi zamonaviy kompyuterlar asrida bu masalaga to‘xtalib o‘tish o‘ta mayda-chuydalarga e’tiborni qaratishdek tuyiladi, aslida esa bu unday emas. Buni quyidagi ikkita misol orqali tushuntirish mumkin: 1) Bizga ma’lumki, sinus funksiyaning qiymati Teylor formulasi bo‘yicha quyidagicha hisoblanadi: $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$ va agar barcha hisoblashlar absolyut aniq bajarilsa bu formula x argumentning ixtiyoriy qiymatida aniq javobni beradi. Endi x argumentning har xil qiymatlarida sinus funksiyani: ushbu qatorning 20 ta hadini ushlagan holda va maksimal aniqlikda hisoblagan holda (masalan, MS Excel dan foydalanga holda) hisoblaylik:

x	1	10	15
Teylor formulasi bo‘yicha	0,841470985	–0,54402179	–1,4127068
$\sin(x)$ ning aniq qiymati	0,841470985	–0,54402111	0,65028784

Jadvalning oxirgi ustunidagi natijalar hech bir qolibga sig‘maydi. Bu hisoblashlar jarayonida yig‘ilgan xatoliklar natijasi. Agar qatorning 20 ta emas, balki 100 ta hadidan foydalansangiz ham ushbu xatoni to‘g‘rilay olmaysiz. Buni tekshirib ko‘ring. 2) Ushbu $(a - b)/c = a/c - b/c$ formulani $a = 1001$; $b = 1000{,}9999999999$; $c = 0{,}0000000003$ uchun hisoblaylik. Hisoblashlarni MS Excel da maksimal aniqlik bilan bajaraylik. Tenglikning chap tarafi natijasi 3333,3333249, o‘ng tarafi natijasi 3333,333007, aniq javob 10000/3. Ko‘rinib turibdiki, har ikkala javob ham aniq javobdan farq qiladi, ayniqsa ikkinchisining farqi katta.

Ma’noli raqamlar. Sonning yozilishida chapdan noldan farqli birinchi raqamidan boshlab barcha raqamlari *ma’noli raqamlar* deyiladi. Odatda sonning, masalan, 273,64 (yoki 273.64) shaklda yozilishi uning *fiksirlangan vergulli* (*nuqtali*) *shakli* deb ataladi. $D = \pm m \cdot 10^n$ – haqiqiy sonning *qo‘zg‘aluvchan vergulli* (*nuqtali*) *shakl*da yozilishi, bunda m – uning *mantissasi* va n – *tartibi* (masalan, $273{,}64 \cdot 10^0$; $27{,}364 \cdot 10^1$; $2736{,}4 \cdot 10^{-1}$). Agar sonning mantissasi $m = 0.d_1 d_2 \ldots d_k$ ($d_1 \neq 0$) ko‘rinishda yozilgan bo‘lsa, bunday qo‘zg‘aluvchan nuqtali son *normallashtirilgan shaklda* deyiladi (masalan, $0{,}27364 \cdot 10^3$ yoki $0.27364 \cdot 10^3$). Masalan, 1) x = $\underline{3{,}930602}$ sonning barcha raqamlari ma’noli (ma’noli raqamlar tagiga chizilgan); 2) x = $0{,}00\underline{2607}$ sonning 2, 6, 0, 7 raqamlari ma’noli; dastlabki uchta nollar ma’nosiz, chunki ular 2, 6, 0, 7 raqamlarning joylashishiga xizmat qiladi xolos; shuning uchun berilgan sonni $x = 0{,}\underline{2607} \cdot 10^{-2}$ ko‘rinishda ham yozish mumkin; 3) x = $\underline{5702000}$ sonning yettita raqami ham ma’noli; agar uni $x = \underline{5{,}72} \cdot 10^6$ ko‘rinishda yozsak, u holda 5, 7, 2 raqamlarigina ma’noli. 4) xuddi shinday, $0{,}0\underline{3589}$; $\underline{10{,}4920}$; $0{,}00\underline{456200.}$

Absolyut xatolik. Faraz qilaylik, X – biror sonning aniq qiymati, x – uning taqribiy qiymati bo‘lsin. Taqribiy sonning *xatoligi* uning aniq va taqribiy qiymatlari orasidagi ayirmaga teng: $\Delta x = X - x$ (bu yozuv argument orttirmasi tushunchasi bilan bir xil). Taqribiy sonning *absolyut xatoligi* uning aniq va taqribiy qiymatlari orasidagi ayirmaning moduliga teng: $\Delta(x) = |X - x|$. Ammo ko‘pincha X – aniq qiymat hamma vaqt ham ma’lum bo‘lmaydi, shuning uchun absolyut xatolik o‘rniga *absolyut xatolik chegarasi* tushunchasi ishlatiladi: $\Delta(x) = |X - x| \le \Delta_x$. Ko‘rinib turibdiki, Δ_x son $\Delta(x)$ absolyut xatolikka teng yoki uning qiymatidan oshadi va bu son *chegaraviy absolyut xatolik* (Δ_x) deb ataladi. Shunga ko‘ra ko‘pincha ushbu $X = x \pm \Delta_x$ yoki $X = x(\pm\Delta_x)$ yozuvdan foydalaniladi, boshqacha aytganda X – aniq qiymat ushbu $x - \Delta_x < X < x + \Delta_x$ intervalda yotadi. Masalan, $X = 1{,}213 \pm 0{,}003$ yoki $X = 1{,}213(\pm 0{,}003)$ yoki $X = 1{,}213 \pm 3 \cdot 10^{-3}$ yozuvni $1{,}213 - 0{,}003 < X <$ $< 1{,}213 + 0{,}003$ yoki $1{,}210 < X < 1{,}216$ deb tushunish kerak.

Shuni ta’kidlash lozimki, absolyut xatolik natijani to‘la xarakterlamaydi. Masalan, 1) 1 mm absolyut xatolik Toshkentdan Nyu-Yorkkacha bo‘lgan masofani baholashda ahamiyatsiz va qattiq jismning molekulalari orasidagi masofani topishda esa bu bema’ni xulosa. 2) l uzunlikdagi boltni 0,5 sm va 0,1 sm bo‘lakli metrli lineykalarda o‘lchanganda $l \approx 3{,}5$ sm natija olindi. Topilgan 3,5 sm uzunlikning chetlanishi modul jihatidan 0,5 sm dan ($|l - 3{,}5| \le 0{,}5$), ikkinchi holda esa 0,1 sm dan ($|l - 3{,}5| \le 0{,}1$) oshmasligi lozim. Agar bu natija shtangensirkul bilan o‘lchashdan olinganda edi, u holda $|l - 3{,}5| \le 0{,}01$ bo‘lar edi.

Nisbiy xatolik – bu sonning absolyut xatoligiga aniq qiymatining nisbati: $\delta(x) = \Delta(x)/|X|$. Ma’lumki, amaliyotda X – aniq qiymat ko‘p hollarda noma’lum bo‘ladi. Shuning uchun hisoblashlarda bu formula ushbu $\delta(x) = \Delta(x)/|x|$ tenglik bilan almashtiriladi. Nisbiy xatolik ba’zida foizlarda o‘lchanadi, ya’ni $\delta(x) = \left(\Delta(x)/|x|\right) \times 100\%$. Nisbiy xatolik uchun ham δ_x – *chegaraviy nisbiy xatolik* tushunchasi $\delta(x) = \Delta(x)/|x| = |X - x|/|x| \le \Delta_x/|x| = \delta_x$ yoki $x - |x|\delta_x \le X \le x + |x|\delta_x$ kabi mavjud, chunki $\delta_x = \Delta_x/|x|$. Natijaning aniqligini uning nisbiy xatoligiga nisbatan xarakterlash ma’qul. Masalan, 1) $\pi = 3{,}14$ ($\pi = 3{,}14159265...$) uchun $\Delta(\pi) = 0{,}0016$ va $\delta(\pi) = 0{,}0016/3{,}14 = 0{,}0005$ yoki 0,05%. Shuning uchun tadqiqotchilar hisoblashlarda verguldan keyingi ikkita ma’noli raqam bilan cheklanishadi. 2) l = 256795 va $\Delta(l)$= 1 ekanligi ma’lum, demak $\delta(l)$ = 0,0000039 yoki 0,00039%. Bunda $\Delta(\pi) << \Delta(l)$ bo‘lishiga qaramasdan l son π songa nisbatan aniqroq aniqlangan.

Mashina hisobi xatoligi. Masalani ShEHM da yechishning xatoliklari uch turga bo‘linadi: kesish xatoligi; tarqatish xatoligi; yaxlitlash xatoligi.

Kesish xatoligi boshlang‘ich ma’lumotlarni aniqlash sababida yuzaga keladi. Masalan, masalaning shartida qaysidir parametrlar berilgan bo‘lsa, amaliyotda haqiqiy obyekt uchun bu parametrlar biror aniqlik bilan aniqlangan bo‘lishi mumkin. Xuddi shunday, ixtiyoriy fizik parametrlar, hisob formulasi va ularga kiruvchi sonli koeffisiyentlarning noaniqligi ham.

Tarqatish xatoligi masalani yechish uslubini qo‘llashdagi hisoblashlar natijasida (arifmetik amallarning xarakteri va sonidan bog‘liq yig‘ilgan xatoliklar) yuzaga keladi. Masalan, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gauss yoki Kramer usuli bilan yechsak, nazariy jihatdan har ikkala usul ham aniq javobni beradi, ammo tenglamalar sistemasi kattalashganda Gauss usuli Kramer usuliga qaraganda kamroq xatolik beradi (hisoblashlar hajmi kamroq bo‘lganligi sababli).

Yaxlitlash xatoligi sonning haqiqiy qiynatini kompyuter xotirasida aniq saqlab qolishning imkoniyati yo‘qligidan yuzaga keladi.

*Butun son*ning mashina xotirasida saqlanishini quyidagicha izohlaylik: masalan, 5 + 7 = 12; 8 – 27 = - 19; 27 × 3 = 81; 1 / 3 = 0; 4 / 2 = 2; 7 / (-3) = -2 (butun sonlarni bo‘lishda natijaning butun qismi olinadi, qoldiq tashlab yuboriladi) va hokazo. Agar butun sonlar ustida bajarilgan amallarning natijasi juda ham katta yoki juda ham kichik bo‘lsa, u holda kompyuter xotirasidagi natijaning oqibatini oldindan aytib bo‘lmaydi. Bunday holda kompyuter ba’zan xato haqida ma’lumot beradi va hisoblashni to‘xtatadi, ba’zan esa siklik qoidaga ko‘ra natija biror songa almashtirib ketiladi va xatoni ko‘rsatmasdan hisoblashlar davom etaveradi. Agar hisoblash natijasi kompyuter xoturasining sonli chegarasidan chiqib ketsa, u holda bunday natijaga ishonib bo‘lmaydi. Bu qoidalar ikkilik arifmetikada ham o‘rinli. Butun son modulining 32 razryadli (ulardan bittasi ishoraga ajratiladi) kompyuterdagi standart formatda yozilishining eng yuqori chegarasi $2^{31} - 1 \approx 2{\cdot}109 \approx 2147483647$ va eng quyi chegarasi -2^{31}. Demak, hisoblashlar natijasi ana shu chegaradan oshmasa uni aniq deb hisoblash mumkin. Agar hisob natijasi moduli shu chegaradan oshsa, u holda mashina moduli shu chegaradan kichik biror sonni olib, keyingi hisoblashlarni davom ettiradi.

*Haqiqiy son*ning mashina xotirasida saqlanishini quyidagicha izohlaylik: masalan, π = 3,14159... va e = 2,71828... irratsional sonlarning ma’noli raqamlari soni mantissaga ajratilgan razryadlar sonidan oshib ketadi, bu kompyuter xotirasida berilgan sonlar ma’lum ma’noda aniq ifodalanmaydi, ya’ni oxirgi ma’noli raqam yaxlitlanib yoziladi yoki son cheksiz emas, balki chekli ratsional shaklga keltiriladi, degani. Shuning uchun ShEHMda yechilayotgan har qanday masalaning kiruvchi parametrlari, oraliq natijalari va oxirgi javobi har doim kompyuterning xotirasi doirasida yaxlitlanadi. Ana shu hol sonning ShEHMda ifodalanish *diapazoni* tushunchasi bilan bog‘liq.

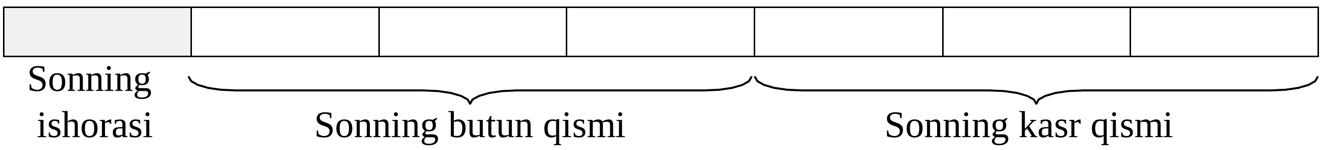
ShEHMning xotira qurilmasi r ustivor holatga ega bir xil turdagi fizik qurilmalar joylashtirilishi asosida tuzilgan bo‘lib, bu qurilmalarning har biriga bir xil k (son yozilishi uchun ajratilgan razryadlar soni) ta element mosligi qo‘yiladi. Tartiblashtirilgan elementlar mashina so‘zining razryad to‘rini hosil qiladi: har bir razryadda 0,1, ..., r–1 (r – sanoq sistema asosi) bazis sonlardan birortasi yozilgan bo‘ladi va maxsus razryadda esa «+» yoki «–» ishora yoziladi. Fiksirlangan vergulli sonni yozishda r (sanoq sistema asosi) va k (son yozilishi uchun ajratilgan razryadlar soni)dan tashqari l (sonning kasr qismi uchun ajratilgan razryadlar soni) parametrlar ko‘rsatiladi. Demak, x musbat haqiqiy son quyidagi chekli ketma-ketlikda ifodalanadi:

$$x = \alpha_1 r^{k-l-1} + \alpha_2 r^{k-l-2} + \dots + \alpha_{k-l} r^{0} + \alpha_{k-l+1} r^{-1} + \dots + \alpha_{k-1} r^{-(l-1)} + \alpha_k r^{-l},$$

bu yerda $\alpha_l \in \{0; 1; ...; r–1\}$.

Sonning bunday ko‘rinishda ifodalanish *diapazoni* barcha razryadlardagi eng katta raqamlar soni bilan aniqlanadi, ya’ni eng kichik –(r–1)(r–1)...(r–1) dan eng katta (r–1)(r–1)...(r–1) gacha, ifodalinishning absolyut aniqligi esa yaxlitlash uslubidan bog‘liq baholashdir. Eng ko‘p tarqalgan pozitsion sanoq sistemalar 2, 8, 16. Barcha kompyuterlar xotirasida son ikkilik sanoq sistemada ifodalanib saqlanadi. Bu ustivor hol 0 yoki 1 («o‘chirildi» yoki «ulandi»).

*Fiksirlangan vergulli haqiqiy son*ning absolyut xatoligi diapazonning ixtiyoriy qismida bir xil. Nisbiy xatolik esa son nolga yaqin yoki diapazon chegarasiga yaqin qilib olinishiga qarab ancha farq qilishi mumkin. Masalan, xotira qurilmasida k = 7 ta element va r = 10 (r = 0, 1, ..., 9) bo‘lsin. Sonning kasr qismiga l = 3 ta razryad, ishoraga 1 ta razryad va butun qismiga 3 ta razryad ajratilgan bo‘lsin (1.3-rasm). Bu xotira qurilmasiga joylashishi mumkin bo‘lgan eng katta son +999,999 va eng kichigi esa –999,999. Ushbu xotira qurilmasida saqlanayotgan ixtiyoriy sonning verguldan keyin uchta raqami saqlanadi. Shuning uchun ushbu x_1 = 1,123456 va x_2 = 999,123456 sonlarning absolyut xatoligi bir xil: Δ_1 = 1,123456 – 1,123 = 0,000456; Δ_2 = 999,123456 – 999,123 = 0,000456, ammo nisbiy xatoliklari har xil: $\delta_1 = \Delta_1/x_1$ = 0,4%; $\delta_2 = \Delta_2/x_2 = 0{,}5\cdot10^{-4}$%.



1.3-rasm. Fiksirlangan vergulli haqiqiy sonning xotira qurilmasida ifodalanishi.

Sonning qo‘zg‘aluvchan vergulli shaklda yozilishi bu uning quyidagi eksponential shaklda yozilishidir (1.4-rasm): $x = M\cdot r^p$, bu yerda r – asos; p – tartib,

M – mantissa ($1/r \leq |M| \leq 1$). Zamonaviy kompyuterlarda haqiqiy son ikkilik qo‘zgaluvchan vergulli (nuqtali) shaklda yozilib, normallashtirilgan sonning faqat ma’noli raqamlarigina kompyuter xotirasida saqlanadi va birinchi ma’noli raqam har doim 1 ga teng. Bu raqamni saqlashga hojat bo‘lmaganligi uchun iqtisod qilingan bitta ikkilik razryad mantissasi hissasiga qo‘shiladi.

Dastlabki kompyuterlar bir biridan mantissa va tartibni saqlash uchun ajratilgan razryadlar soni, yaxlitlash uslubi va mashina arifmetikasi bilan farq qilar edi. Ko‘plab zamonaviy kompyuterlar (xususan, barcha shaxsiy kompyuterlar) 1985 yilda ishlab chiqilgan IEEE – standart ikkilik arifmetika (IEEE Floating Point Standard) asosida qurilgan. Standart uslubda normallashtirilgan sonda IEEE arifmetikaning mantissasiga 24 ta razryad (ishora bilan), ikkilik tartibni saqlashga 8 ta razryad ajratiladi. IEEE arifmetikasining odatdagi aniqligi $\approx 10^{-38}$.

Odatda, *mashina nol*ining chegarasi 2^{-64} ($\approx 10^{-19}$), *mashina cheksizligi* 2^{63}. Hisoblangan sonning moduli ana shu *mashina cheksizligi* chegarasidan chiqqan holda mashinada hisoblashning *avariyali tugashi* yoki *mashina xotirasining to‘lishi* («*переполнение*») holati yuz beradi. Aksincha, sonning moduli ana shu *mashina noli* chegarasidan kichik bo‘lgandan holda esa *tartibning yo‘qotilishi* yuz beradi. Odatda, bu natija nol deb qabul qilinadi va hisoblashlar davom ettiriladi. Zamonaviy kompyuterlarda *mashina nol*ining chegarasi $2^{-127} \approx 10^{-38}$, *mashina cheksizligi* $2^{127} \approx 10^{38}$. Yana bir tushuncha – bu *mashina epsiloni* bo‘lib, u kompyuterda son ifodalanishining nisbiy aniqligini xarakterlaydi. ShEHMda ε_m - *mashina epsiloni*ning miqdori birinchi tashlab yuboriladigan yoki oxirgi saqlab qolinadigan mantissa razryadidan aniqlanadi.

Tartib ishorasi	Tartib (*m* ta razryad)	Mantissa ishorasi	Mantissa (*l* ta razryad)

1.4-rasm. Mashina so‘zining tuzilishi
(qo‘zg‘aluvchan vergulli haqiqiy sonning xotira qurilmasida ifodalanishi).

Masalan, 1) 48 razryadli mashina so‘zining yozilishida 40 ta ikkilik razryadlar sonning mantissasiga, 6 tasi sonning tartibiga va 2 tasi mantissaning ishorasiga ajrtilgan bo‘lsin, ya’ni $r = 2$; $l = 40$; $m = 6$. Natijada qo‘zg‘aluvchan vergulli haqiqiy sonning ifodalanish aniqligi 2^{-39} ($\approx 10^{-12}$) dan yomon emas. 2) $x = 20{,}5$ sonni ikkilik normallashtirilgan son shaklida $x = 10100{,}1$ yoki $x = (10100{,}1)_2$ kabi, qo‘zg‘a-luvchan vergulli shaklda esa $x = 0{,}101001 \cdot 2^5$ yoki $x = (0{,}101001)_2 \cdot 2^5$ kabi yozamiz, uning tartibi 5 ga teng. 3) Xuddi shunday, $x = 7{,}0625_{10} = 111{,}0001_2 = 0{,}1110001 \cdot 2^3$, sonning tartibi 3 ga teng. 4) Agar berilgan sonlarni qo‘zg‘aluvchan vergulli shaklda yozsak, masalan, $x_1 = 0{,}1123456 \cdot 10^1$ va $x_2 = 0{,}999123456 \cdot 10^3$, u holda bu sonlarning 8 ta elementli (5 ta razryad sonning kasr qismiga, 1 ta razryad uning ishorasiga 1 ta razryad mantissa ishorasiga va 2 ta razryad uning tartibiga) va 10 asosli xotira qurilmasida saqlanish holati 1.5-rasmda tasvirlangan.

Bu sonlarning absolyut va nisbiy xatoliklar:

$\Delta_1 = (0,1123123 - 0,11231)\cdot 10^1 \approx (0,23\cdot 10^{-5})\cdot 10^1;$

$\Delta_2 = (0,999123123 - 0,99912)\cdot 10^3 \approx (0,31\cdot 10^{-5})\cdot 10^3;$

$\delta_1 = \Delta_1/x_1 \approx (0,23\cdot 10^{-5})\cdot 10^1/(0,1123\cdot 10^1) \approx 2\cdot 10^{-3}$ %;

$\delta_2 = \Delta_2/x_2 \approx (0,31\cdot 10^{-5})\cdot 10^3/(0,99912\cdot 10^3) \approx 3\cdot 10^{-3}$ %.

*Ikkilangan aniqlik*ni tushunishimiz uchun avvalo yana bir bor IEEE standartni qanoatlantiruvchi kompyuterlarning odatiy aniqligida normallashtirilgan son diapazoni 10^{-38} dan 10^{38} gacha ekanligini, mantissa razryadliligi kichik va mashina epsiloni $\varepsilon_m \sim 10^{-7}$ (bu o‘nlik arifmetikada mantissa 7 ta o‘nlik raqamdan iborat degani) ekanligini tushunishimiz lozim. Agar IEEE standartni qanoatlantiruvchi kompyuterda razryadlilik ikki marta orttirilgan bo‘lsa, u holda bu mashina aniqligini oshirishga olib keladi.

+	0	1	+	1	1	2	3	1

Sonning tartibi Sonning mantissasi

+	0	3	+	9	9	9	1	2

Sonning tartibi Sonning mantissasi

1.5-rasm. Qo‘zg‘aluvchan vergulli x_1 va x_2 sonlarning xotira qirilmasida ifodalanishi.

Masalan, IEEE standartni qanoatlantiruvchi kompyuterda sonning ikkilangan aniqlik bilan ifodalanishi bu uning mashina xotirasida 53 ta razryad (ishora bilan birga) va tartibni saqlash uchun esa 11 ta razriyad ajratildi, mashina noli 10^{-308} ga va mashina cheksizligi 10^{308} ga keltirildi degani, bunda mashina epsiloni $\varepsilon_m \sim 10^{-16}$ ga olib kelinadi. Shuni eslatib o‘tamizki, bu kompyuterlarning odatiy aniqligi $\varepsilon_m \sim 10^{-7}$. Demak, ikkilangan aniqlik haqida emas, balki aniqlik bir necha barobar tartibga oshirildi deb aytish kerak bo‘ladi.

IEEE arifmetikada *kengaytirilgan ikkilangan aniqlik* tushunchasi ham mavjudki, bunda mantissa uchun 65 ta razryab (ishora bilan birga) va tartib uchun 15 ta razryad ajratiladi. Bu rejimda mashina noli 10^{-4964}, mashina cheksizligi 10^{4964}, mashina epsiloni $\varepsilon_m \sim 10^{-19}$. Shuni ta’kidlash lozimki, ikkilangan yoki kengaytirilgan ikkilangan aniqlikdan foydalanish yaxlitlash xatoligini yo‘qota olmaydi, balki uning qiymatinigina kamaytiradi xolos.

Normallashtirilgan sonning IEEE arifmetikasidan tashqari *subnormal* (*denormallashtirilgan*) *son* tushunchasi ham mavjud. Hisoblash jarayonining natijasi bo‘lgan subnormal son mashina epsiloni diapazonidan kichik bo‘lib, uni normallashtirilgan ko‘rinishda ifodalab bo‘lmaydi. Bunday sonlar ham $M\cdot 2^p$

ko‘rinishda ifodalanadi, ammo bunda birinchi ma’noli raqam 0 va mumkin bo‘lgan minimal ko‘rsatgich mashina noliga teng. Masalan, $x = 2\cdot10^{-130}$ sonni IEEE arifmetikada odatiy aniqlik, ya’ni normallashtirilgan son shaklida ifodalab bo‘lmaydi, uni subnormal shaklda $x = (0{,}00010...0)_2\cdot2^{-126}$ kabi ifodalash mumkin.

Ishonchli raqamlar. Agar sonning absolyut xatoligi shu raqamga mos keluvchi birlik razryadidan oshmasa, u holda bu ma’noli raqam *keng ma’nodagi ishonchli raqam* va agar bu xatolik birlik razryadining ½ qismidan oshmasa, bu ma’noli raqam *tor* (*qat’iy*) *ma’nodagi ishonchli raqam* deyiladi. Agar sonning absolyut xatoligi shu sonning chegaraviy absolyut xatoligidan oshmasa, u holda bu ma’noli raqam *ishonchli raqam* deyiladi. Boshqacha aytganda, agar sonning yozilish tartibi ushbu $x = \alpha_1 r^m + \alpha_2 r^{m-1} + ... + \alpha_n r^{m-n+1} + \alpha_{n+1} r^{m-n}$ ko‘rinishda bo‘lsa, uning absolyut xatoligi $\Delta(x) = |X - x| \le ½\cdot r^{m-n+1}$ kabi bo‘lib, bu sonning n ta α_1, α_2, ... , α_n, raqamlari ishonchli, bu yerda r – sanoq sistemasining asosi. Ba’zan *verguldan keyingi ishonchli raqamlar* (verguldan keyingi birinchisidan boshlab oxirgisigacha ishonchli raqamlar sanaladi) atamasi ham ishlatiladi. Agar x sonning $\delta(x)$ nisbiy xatoligi berilgan bo‘lsa, $\delta(x) \le 10^{-n}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi n topiladi va bu sonning verguldan keyingi n–1 ta raqami qat’iy ma’noda ishonchli deb aytiladi (bu raqamlarning barchasi ma’noli bo‘lishi lozim). Masalan, 1) $x = 12{,}396$ va $\Delta(x) = 0{,}03$ ekanligi ma’lum. x sonning ishonchli raqamlari sonini toping. Bu yerdan $\Delta(x) > ½\cdot10^{-3}$; $\Delta(x) > ½\cdot10^{-2}$; $\Delta(x) > ½\cdot10^{-1}$. Demak x sonning ishonchli raqamlari 1, 2, 3; ishonchsiz raqamlari esa 9 va 6, ya’ni $x = \underline{12{,}3}96$ (ishonchli raqamlar tagiga chizilgan). Keng ma’noda esa berilgan x soning barcha raqamlari ishonchli. 2) $x = 0{,}037862$ va $\Delta(x) = 0{,}007$. Bu yerda $\Delta(x) < ½\cdot10^{-1}$. Demak x sonning barcha raqamlari ishonchsiz ekan. 3) $x = 9{,}999785$ va $\Delta(x) = 4\cdot10^{-4}$. Bu yerda $\Delta(x) = 0{,}4\cdot10^{-3} < ½\cdot10^{-3}$. Demak x sonning verguldan oldingi bitta va undan keyingi uchta raqami ishonchli, ya’ni $x = \underline{9{,}999}785$. 4) $x = 78{,}56$ va $\delta(x) = 0{,}0003$. Bu yerda $0{,}0003 < 0{,}0005 = ½\cdot10^{-3}$, ya’ni x sonning uchta raqami tor ma’noda ishonchli. Haqiqatan ham, $\Delta(x) = x \cdot \delta(x) = 78{,}56 \cdot 0{,}0003 < 0{,}03$. 5) $x = 356.78245$ son uchun $\Delta(x) = 0{,}01$ bo‘lsa, u holda 5 ta raqam ishonchli: $x = \underline{356.78}245$; $\Delta(x) = 0{,}03$ bo‘lsa, u holda 4 ta raqam ishonchli: $x = \underline{356.7}8245$; $\Delta(x) = 0{,}00006$ bo‘lsa, u holda 7 ta raqam ishonchli: $x = \underline{356.782}45$; $\Delta(x) = 0{,}00003$ bo‘lsa, u holda 8 ta raqam ham ishonchli: $x = \underline{356.78245}$; 6) ushbu $a = 3{,}8$; $b = 0{,}0283$; $c = 4260$ taqribiy sonlarning barcha raqamlari tor ma’noda ishonchli bo‘lsa, u holda ularning chegaraviy absolyut xatoliklari: $\Delta_a = 0{,}05$; $\Delta_b = 0{,}00005$; $\Delta_c = 0{,}5$.

Aniqlik. Biror x taqribiy sonni $\varepsilon = 10^{-n}$ *aniqlik bilan hisoblash* deganda sonning verguldan keyin n-razryadida turuvchi ishonchli ma’noli raqamni saqlab qolish zarurati tushuniladi. Masalan, $\sqrt{2}$ sonni $\varepsilon = 10^{-3}$ aniqlik bilan hisoblash talab qilinsa, buning javobi $\sqrt{2} = \underline{1{,}414}2$ va verguldan keyingi uchinchi raqam ishonchli, chunki

$\Delta(\sqrt{2}) = |1{,}4142–1{,}414| = 0{,}0002 < 0{,}0005 = \Delta_a < \varepsilon = 10^{-3}$. Shunday qilib, x taqriniy sonning absolyut xatoligi ta'rifidan va uni hisoblashning aniqligidan quyidagi bog'lanish kelib chiqadi: $\Delta(a) \le \Delta_a < \varepsilon$ (bu *absolyut xatolikni baholash* yoki *aniqlik formulasi*), ya'ni *absolyut xatolik va chegaraviy absolyut xatolik aniqlikdan oshmaydi*.

Yaxlitlash. Sonlarni yozishda quyidagi qoidaga amal qilinadi: *barcha ma'noli raqamlar ishonchli bo'lishi lozim*. Shuning uchun o'nlik sanoq sistemasida yozilgan sonni yaxlitlash *tashlab yuboriladigan birinchi raqam* bo'yicha quyidagicha amalga oshiriladi: agar tashlab yuboriladigan raqamlarning birinchisi 5 dan kichik bo'lsa, u holda qoldiriladigan o'nli belgilar o'zgarishsiz saqlab qolinadi (masalan, $x = 24{,}647329 \approx 24{,}647$; $x = 317{,}96467 \approx 317{,}96$; $x = 4203014 \approx 4{,}2\cdot10^6$); agar tashlab yuboriladigan raqamlarning birinchisi 5 dan katta bo'lsa, u holda qoldiriladigan oxirgi raqam bir birlikka oshiriladi (masalan, $x = 24{,}64739 \approx 24{,}65$; $x = 317{,}96467 \approx 317{,}965$; $x = 427306 \approx 4{,}3\cdot10^5$); agar tashlab yuboriladigan raqamlarning birinchisi 5 ga teng va undan keyingilari nol bo'lmasa, u holda qoldiriladigan oxirgi raqam bir birlikka oshiriladi (masalan, $x = 24{,}64529 \approx 24{,}65$; $x = 317{,}96456 \approx 317{,}965$; $x = 275306 \approx 2{,}8\cdot10^5$); agar tashlab yuboriladigan raqamlarning birinchisi 5 ga teng va undan keyingi barcha ma'noli raqamlar nollar bo'lsa, u holda qoldiriladigan oxirgi raqam toq bo'lsa bu raqam bir birlikka oshiriladi va aksincha, u juft bo'lsa bu raqam o'zgarishsiz qoldiriladi (masalan, $x = 54{,}65029 \approx 54{,}6$; $x = 317{,}935096 \approx 317{,}94$). Absolyut va nisbiy xatoliklar chegarasini oshirish tomoniga yaxlitlash qabul qilingan. Bunday almashtirishlardagi xatolik *yaxlitlash xatoligi* deyiladi. Yaxlitlash natijasida qolgan raqamlarning barchasi ishonchli bo'lsa, bu *yaxlitlashning raqamlarni tashlab yuborish usuli* deyiladi. Masalan, 1) Korxonadagi ishchi va xizmatchilar soni 1284 nafar. Agar bu sonni 1300 deb yaxlitlasak, absolyut xatolik $\Delta(x) = 1300 – 1284 = 16$, nisbiy xatolik esa $\delta(x) = 16/1300 \approx 1{,}2\%$; aksincha, agar 1284 sonni 1280 deb yaxlitlasak, absolyut xatolik $\Delta(x) = 1284 – 1280 = 4$, nisbiy xatolik esa $\delta(x) = 4/1300 \approx 0{,}3\%$. 2) Maktab o'quvchilari soni 197 nafar. Agar bu sonni 200 deb yaxlitlasak, absolyut xatolik $\Delta(x) = 200 – 197 = 3$, nisbiy xatolik esa $\delta(x) = 3/197 \approx 0{,}01523$ yoki $\delta(x) = 3/200 \approx 1{,}5\%$. 3) Ushbu $\delta(x) \approx 0{,}288754\cdot10^{-5}$ nisbiy xatolik haqidagi axborot ushbu $\delta(x) \approx 3\cdot10^{-5}$ axborot bilan amaliy jihatdan teng kuchli, to'g'riroq aytganda, oxirgi axborot ishonchliroq. Eng anig'i ushbu holda $\delta(x) \approx 10^{-6}$ yozuv to'la qoniqarli. 4) Usbu $\Delta(x) = 0{,}003721$ va $\delta(x) = 0{,}0005427$ qiymatlarni ikkita ma'noli raqamgacha yaxlitlasak, ularning qiymati $\Delta(x) = 0{,}0038$ va $\delta(x) = 0{,}00055$ kabi yoziladi. 5) $x = 1{,}72631$ sonini uchta ma'noli raqamgacha yaxlitlash $x = 1{,}72$ sonini, to'ldirish bo'yicha yaxlitlash esa $x = 1{,}73$ sonini beradi. 6) Ushbu $x = \sqrt{236} \approx 15{,}362291$ hisoblash natijasining barcha raqamlari keng ma'noda ishonchli. Natijani $x_1 = 15{,}4$ kabi $\Delta(x_1) = 0{,}04$ absolyut xatolik bilan yaxlitlaylik. Bu yerda x_1 ning barcha raqamlari tor (qat'iy) ma'noda ishonchli. 7) Faraz qilaylik, $x =$

16,395 taqribiy sonning barcha raqamlari keng ma'noda ishonchli, ya'ni $\Delta(x)$ = 0,001. Agar uni x_1 = 16,40 kabi $\Delta(x_1)$ = 0,005 absolyut xatolik bilan yaxlitlaylik, u holda x_1 ning to'la xatoligi $\Delta(x_1)$ =0,001+0,005 = 0,006 bo'lib, x_1 = 16,40 yozuvning nol raqami tor ma'noda ishonchli emas. Shu narsaga e'tiborni qaratish kerakki, EHM natijani chop qilganda verguldan keyingi oxirgi nollarni (ular ishonchli bo'lgan taqdirda ham) yozmydi. Masalan, EHMning ushbu 274,093 natijasi 8 ta raqami ishonchli son bo'lsa, u holda javobni 274,09300 deb tushinish kerak.

Shunday qilib, X – aniq sonning x – taqribiy qiymatini yaxlitlash natijasida x_1 son olinganda x_1 sonning chegaraviy absolyut xatoligi bu x sonning chegaraviy absolyut xatoligi bilan yaxlitlash xatoligi yig'indisiga teng bo'ladi, ya'ni $|X - x_1| \leq |X - x| + |x - x_1| \leq \Delta_x + \Delta(x_1) = \Delta_{x1}$.

Taqribiy sonlar ustida amallar natijalarining xatoligi. Taqribiy sonlar ustida bajarilgan amallarning natijasi ham taqribiy. Bunday hisoblashlarning xatoligi dastlabki sonlarning xatoliklari orqali quyidagi qoidalar bo'yicha ifodalanishi mumkin:

1) Sonlarni qo'shish va ayirishda ularning absolyut xatoliklari qo'shiladi: $\Delta(a \pm b) \leq \Delta(a) + \Delta(b) \leq \Delta_a + \Delta_b = \Delta_{a\pm b}$. Umumiy holda, agar $y = a_1 + a_2 + ... + a_n$ bo'lsa, unda $\Delta(y) \leq \sum_{i=1}^{n} \Delta(a_i)$. Xususan $\Delta(a_1) = \Delta(a_2) = ... = \Delta(a_n)$ hol uchun $\Delta(y) \leq \sum_{i=1}^{n} \Delta(a_i) = n\Delta(a_1)$. Agar $n > 10$ bo'lsa, ushbu $\Delta(y) \leq \sqrt{3n}\Delta(a_1)$ *Chebotaryev formulasi*dan foydalaniladi.

Ikki son yig'indisi yoki ayirmasining nisbiy xatoligi ushbu

$$\delta(a+b) = \frac{\Delta(a+b)}{|a+b|} = \frac{\Delta(a)+\Delta(b)}{|a+b|} = \frac{|a|\delta(a)+|b|\delta(b)}{|a+b|} \leq \frac{|a|\delta_{\max}+|b|\delta_{\max}}{|a+b|} = \delta_{\max};$$

$$\delta(a-b) = \frac{\Delta(a-b)}{|a-b|} = \frac{\Delta(a)+\Delta(b)}{|a-b|} \leq \nu\delta_{\max}$$

formulalar bo'yicha hisoblanadi, bu yerda $a > 0$, $b > 0$; $a \neq b$; $\delta_{\max} = \max\{\delta(a), \delta(b)\}$, $\nu = |a+b|/|a-b|$. Agar $|a+b| >> |a-b|$ bo'lsa, u holda $\nu >> 1$ va bu hol *aniqlikning katostrofik yo'qotilishi* yoki *aniqlikning to'la yo'qotilishi* deb ataladi.

2) Ikki son bir-biriga ko'paytirilganda yoki bo'lingada ularning absolyut va nisbiy xatoliklar qo'shiladi:

$$\Delta(a \cdot b) = a\Delta(b) + b\Delta(a) \leq a\Delta_b + b\Delta_a; \quad \delta(a \cdot b) \leq \delta(a) + \delta(b);$$

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{b\Delta(a) + a\Delta(b)}{b^2} \leq \frac{a\Delta_b + b\Delta_a}{b^2}; \quad \delta\left(\frac{a}{b}\right) \leq \delta(a) + \delta(b).$$

Xususan, taqribiy son $|k|$ ko'paytuvchiga ko'paytirilganda nisbiy xatolik o'zgarmaydi, absolyut xatolik esa $|k|$ marta ortadi, ya'ni $\Delta(|k|a) = |k|\Delta(a)$, $\delta(|k|a) = \delta(a)$.

3) Taqribiy son darajaga ko‘tarilganda uning nisbiy xatoligi daraja ko‘rsatgichiga ko‘paytiriladi: $\delta(a^k)\le k\delta(a)$, xususan, $\delta(\sqrt[k]{a})\le\delta(a)/k$.

Umuman olganda, sonlar ustida amallar bajarishda quyidagi qoidalarga amal qilgan ma’qul: 1) sonlar ketma-ketligini qo‘shishda va ayirishda ularni modulining oshib borishiga qarab, ularni qo‘shib yoki ayirib borish kerak; 2) qiymati bir biriga juda yaqin bo‘lgan sonlarni ayirishdan imkoniyati boricha qochish kerak; 3) ushbu $a(b–c)$ ifodani $ab – ac$ kabi, $(b–c)/a$ ifodani esa $b/a – c/a$ kabi yozish mumkin. Agar b va c sonlar bir biriga juda yaqin bo‘lsa, u holda ayirmani ko‘paytma va bo‘linmadan oldin bajariz zarur; 4) hisoblashlarda arifmetik amallar sonini minimal holatga keltirish tavsiya etiladi.

Xatoliklar nazariyasining to‘g‘ri masalasi. Masala argumentning berilgan xatoligi bo‘yicha funksiya qiymatini hisoblash xatoligini baholashdan iborat.

Funksiya xatoligi. $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ – ko‘p o‘zgaruvchili, uzluksiz, differen-sialanuvchi funksiya absolyut xatoligining umumiy formulasi quyidagicha:

$$\Delta(u)\approx\left|df(x_1,x_2,...,x_n)\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta(x_i)\right|\le\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\left|\Delta(x_i)\right|$$

yoki bu tengsizlikni yanada kuchaytirsak,

$$\Delta(u)\le\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\Delta_{xi}\quad\text{yoki}\quad\Delta_u=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\Delta_{x_i},$$

bu yerda Δ_{x_i} – berilgan x_i $(i=1,2,...,n)$ argumentlarning chegaraviy absolyut xatoliklari. Xususan $c = a – b$ ayirma uchun $\Delta_c=|c'_a|\Delta_a+|c'_b|\Delta_b=\Delta_a+\Delta_b$. Chegaraviy nisbiy xatolik ushbu $\delta_u=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|f|}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\Delta_{x_i}$ formuladan topiladi. Xususan, bir o‘zgaruvchili $y=f(x)$ funksiya uchun: $\delta_y=\frac{\Delta_y}{|f(x)|}=\frac{|f'(x)|}{|f(x)|}|x|\delta_x=\frac{|f'(x)|}{|f(x)|}\Delta_x$; $\Delta_y=|f'(x)|\Delta_x=|f'(x)||x|\delta_x$.

Masalan, ba’zi elementar funksiyalar uchun chegaraviy xatoliklar:

1) $y = x^k$ – darajali funksiya uchun $\Delta_y=|kx^{k-1}|\Delta_x$; $\delta_y=|k|\delta_x=|k||x|^{-1}\Delta_x$.

2) $y = a^x$ – ko‘rastkichli funksiya uchun $\Delta_y=a^x\ln a\cdot\Delta_x$; $\delta_y=x\cdot\ln a\cdot\Delta_x$;

xususan, $y = e^x$ uchun: $\Delta_y=e^x\cdot\Delta_x$; $\delta_y=|x|\cdot\delta_x=\Delta_x$.

3) $y=\lg x$ – logarifmik funksiya uchun $\Delta_y=(|x|\cdot\ln 10)^{-1}\cdot\Delta_x$;

$\delta_y=(|\lg x|\cdot\ln 10)^{-1}\cdot\delta_x$; xususan, $y = \ln x$ uchun $\Delta_y=|x|^{-1}\cdot\Delta_x=\delta_y$;

$\delta_y=(|\ln x|)^{-1}\cdot\delta_x$.

4) Trigonometrik funksiyalar uchun: $\Delta_{\sin x}=|\cos x|\cdot\Delta_x\le\Delta_x$; $\Delta_{\cos x}=$

$= |\sin x| \cdot \Delta_x \le \Delta_x; \quad \Delta_{\mathrm{tg}x} = (1+\mathrm{tg}^2 x)\Delta_x \ge \Delta_x; \quad \Delta_{\mathrm{ctg}x} = (1+\mathrm{ctg}^2 x)\Delta_x \ge \Delta_x;$

$\delta_{\sin x} = |x \cdot \mathrm{ctg}x| \cdot \delta_x = |\mathrm{ctg}x| \cdot \Delta_x; \quad \delta_{\cos x} = |x \cdot \mathrm{tg}x| \cdot \delta_x = |\mathrm{tg}x| \cdot \Delta_x.$

5) Teskari trigonometrik funksiyalar uchun: $\Delta_{\arcsin x} = \Delta_{\arccos x} = \Delta_x / \sqrt{1-x^2}$;

$\Delta_{\mathrm{arctg}x} = \Delta_x / (1+x^2); \quad \delta_{\arcsin x} = |x| \cdot \delta_x / \left(|\arcsin x| \cdot \sqrt{1-x^2} \right);$

$\delta_{\arccos x} = |x| \cdot \delta_x / \left(|\arccos x| \cdot \sqrt{1-x^2} \right); \quad \delta_{\mathrm{arctg}x} = |x| \cdot \delta_x / \left(|\mathrm{arctg}x| \cdot (1+x^2) \right);$

6) $z = x^y$ funksiya uchun: $\Delta_z = x^y \left(|y| \cdot \Delta_x / |x| + |\ln x| \cdot |y| \right);$

$\delta_z = |y \ln x| \cdot \delta_y + |y| \cdot \delta_x$;

Bir argumentli funksiyaning absolyut va nisbiy xatoliklarini topish uchun ushbu $\Delta(y) = \left[f(\Delta x_+) - f(\Delta x_-) \right] / 2; \ \delta(y) = \Delta(y) / |f(x)|; \ \Delta x_+ = x + \Delta(x); \ \Delta x_- = x - \Delta(x)$ formulalardan foydalanish maqsadga muvofiq (xuddi shunday ko‘p argumentli funksiya uchun ham).

Masalan, x = 0,63 argumentning qiymati 0,1% nisbiy xatolikka ega bo‘lsa sin0,63 ning nisbiy xatoligi: $\delta(\sin 0{,}63) = |0{,}63 \cdot \mathrm{ctg}0{,}63| \cdot 0{,}001 \approx 0{,}000864 \approx 0{,}08\%$; bunda $0{,}00864 < 1 \cdot 10^{-3}$ bo‘lganligi uchun sin0,63 = 0,589145 qiymat verguldan keyin kamida ikkita qat’iy ishonchli raqamga ega.

Xatoliklar nazariyasining teskari masalasi funksiyaning mumkin bo‘lgan xatoligiga ko‘ra argumentning mumkin bo‘lgan xatoligini topishdan iborat.

Bir o‘zgaruvchili $y = f(x)$ funksiya uchun chegaraviy absolyut xatolikni quyidgi formula bo‘yicha taqribiy hisoblash mumkin: $\Delta_x = |f'(x)|^{-1} \Delta_y$, bu yerda $f'(x) \ne 0$. Ko‘p o‘zgaruvchili $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya uchun bu masala ba’zi cheklovlarda yechiladi: agar argumentlardan birining qiymatini o‘lchash yoki berilgan aniqlikda hisoblash qiyin bo‘lsa, u holda aynan shu argument bo‘yicha xatolikni funksiyaning talab qilinayotgan xatoligi bilan moslashtirish lozim; agar barcha argumentlarning qiyatlarini ixtiyoriy aniqlikda aniqlash oson bo‘lsa, u holda teng ta’sir etish prinsipini qo‘llash, ya’ni barcha ushbu $\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i}, \ i = 1, 2, ..., n$ qo‘shiluvchilarni o‘zaro teng deb olish lozim. Barcha argumentlarning chegaraviy absolyut xatoligi quyidagi formuladan aniqlanadi: $\Delta_{x_i} = \left(n \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^{-1} \Delta_y, \ \ i = 1, 2, ..., n.$

Ustivorlik, korrektlik, yaqinlashuvchanlik. Agar boshlang‘ich ma’lumotlarning kichik o‘zgarishlariga yechimning ham kichik o‘zgarishi mos kelsa, u holda bunday *yechim ustivor* deyiladi. Ustivorlik bo‘lmagan joyda boshlang‘ich ma’lumotlarning ozgina o‘zgarishi ham yechimning juda katta xatoligiga yoki umuman noto‘g‘ri natijaga olib keladi. Bunday masalalar *boshlang‘ich ma’lumotlarning xatoligiga sezgir masalalar* deyiladi. Masalan, 1) Ushbu $(x–a)^n = \varepsilon$, bunda $0 < \varepsilon < 1$, ko‘phadning ildishlarini topish masalasida tenglamaning o‘ng tarafidagi ε tartibdagi qiymatga o‘zgarishi ildizning $\varepsilon^{1/n}$ tartibdagi xatoligiga olib keladi. Xususan, agar $x^6 = 10^{-6}$ tenglamaning o‘ng tomonini $7 \cdot 10^{-6}$ ga oshirsak, ya’ni $x^6 = 8 \cdot 10^{-6}$ tenglamani qarasak, u holda ildiz $4 \cdot 10^{-2}$ ga (0,10 dan 0,14 gacha) oshadi. 2) Ushbu $P(x) = (x–1)(x–2)...(x–20) = x^{20} – 210x^{19} + ...$ Uilkinson misoliga ko‘ra ko‘phadning ildizlari $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, ..., $x_n = 20$. Faraz qilaylik, ko‘phadning koeffisiyentlaridan biri biror kichik xatolik bilan hisoblangan. Masalan, x^{19} ning oldidagi –210 koeffisiyentni 2^{-37} ($\approx 10^{-7}$) ga oshiraylik. Agar hisoblashlar natijasini 11 ta ma’noli raqamgacha aniqlik bilan hisoblasak, ildizlarning umuman boshqa qiymatlariga ega bo‘lamiz, bu ildizlarning yarmi mavhum bo‘lib qoladi. Bunday hodisaning sababi bu masalaning o‘zi noustivor ekanligida, chunki hisoblashlar 11 ta razryad aniqligida bajarildi va yaxlitlash xatoligi bunday natijalarga olib kelmaydi.

Masalani qo‘yishning muhim jihati bu uning korrekt qo‘yilganligida. *Masala korrekt qo‘yilgan* deyiladi, agar quyidagi uchta shart bajarilsa: istalgan boshlang‘ich ma’lumotlarda masalaning yechimi *mavjud, yagona* va *ustivor* bo‘lsa. Agar ana shu shartlardan birortasi bajarilmay qolsa, bunday masala *nokorrekt qo‘yilgan masala* deyiladi. Yuqorida keltirilgan ikkita noustivor masala nokorrekt qo‘yilgan masalalar. Bunday masalalarga sonli usullarni qo‘llash maqsadga muvofiq emas, chunki hisoblashlardagi yaxlitlash xatoligi hisoblash qadamlarida keskin oshib boradi va natijaning aniq yechimdan sezilarli chetlashishiga olib keladi. Ammo, shunga qaramasdan, bugungi kunda ba’zi nokorrekt masalalarni ham yechishning usullari ishlab chiqilgan. Bu, asosan, dastlabki masalani korrekt qo‘yilgan masalaga almashtirib olishga asoslangan bo‘lib, *regulyarizatsiya usullari* deb ataladi.

Hisoblash jarayonining aniqligini baholashning yana bir muhim xarakteristikasi bu sonli usullarning *yaqinlashuvchanligi*. Bu masalaning olinadigan sonli yechimi dastlabki yechimga yaqin ekanligini bildiradi. Iteratsion jarayonning yaqinlashuvchanligi va diskretlashtirish usulining yaqinlashuvchanligi tushunchalari bir-biridan farq qiladi.

Iteratsion jarayonning yaqinlashuvchanligi tushunchasini qaraylik. Bu jarayon biror masalani yechish uchun ketma-ket yaqinlashishlar usulini qurishdan iborat. Bu jarayon (iteratsiyalar)ning ko‘p marotaba takrorlanishi natijasida x_1, x_2, ..., x_n, ... ketma-ketlikka ega bo‘linadi. Bu ketma-ketlik $x = a$ aniq yechimga yaqinlashadi deyiladi, agar iteratsiyalar soni cheksiz oshganda bu ketma-ketlikning limiti mavjud va u a ga teng bo‘lsa. Bu holda yaqinlashuvchi sonli usulga ega bo‘linadi (masalan, tenglamani sonli yechishning Nyuton usuli, iteratsiyalar usuli va hokazo).

Diskretlashtirish usullarining yaqinlashuvchanligi tushunchasini qaraylik. Bu usullarning g‘oyasi uzluksiz paramerlarga ega masalani funksiyalari fiksirlangan nuqtalarda hisoblanadigan masalaga keltirishdan iborat. Bu yerda yaqinlashish deganda diskret model yechimlari qiymatining mos ravishda boshlang‘ich masala yechimlari qiymatiga diskterlashtirish parametrlari nolga intilganda yaqinlashishi tushuniladi (masalan, kvadratur formulalar).

Yaqinlashishni oʻrganishda uning eng muhim tushunchalari bu uning koʻrinishi, tartibi va boshqa xarakteristikalari. Bu tushuncha quyida aniq sonli usullarni oʻrganishda qaraladi.

Shunday qilib, masalaning yechimini biror aniqlikda olish uchun uning qoʻyilishi korrekt boʻlishi, uni yechish uchun qoʻllanilayotgan usul esa yaqinlashuvchanlikka ega boʻlishi lozim ekan.

Namunaviy misollar va ularning yechimlari

1-misol. 2,3544 sonni δ = 0,2% nisbiy xatolik bilan yaxlitlang.

Yechish. Faraz qilaylik, a = 2,3544; $\delta(a)$ = 0,2%. U holda $\Delta(a) = a{\cdot}\delta(a)$ = 0,00471. Bu sonning ishonchli raqamlari uchta, shuning uchun bu sonni uning uchta raqamini saqlagan holda yaxlitlaymiz: A = 2,35; $\Delta(A) = \Delta(a)$ + 0,0044 + 0,00471 = 0,00911 < 0,01. Demak, yaxlitlangan 2,35 sonning barcha uchta raqami ishonchli ekan.

2-misol. Taqribiy va aniq qiymati: 1) a = 0,67 va A = 2/3; 2) b = 0,17 va B = 1/6 boʻlgan sonlar nisbiy xatoliklarining chegarasini toping. Natijalarni taqqoslang.

Yechish. 1) $\Delta(a)$ = $\left|2/3-0{,}67\right|=0{,}01/3$ < Δ_a = 0,0034 ekanligidan δ_a = 0,0034/0,67 = 0,0051 = 0,51%; 2) $\Delta(b)$ = $\left|1/6-0{,}17\right|=0{,}01/3$ < Δ_b = 0,0034 ekanligidan δ_b = 0,0034/0,17 = 0,02 = 2% hosil boʻladi. Demak, $\Delta_a = \Delta_b$, $\delta_a < \delta_b$.

3-misol. Hisoblashlar natijalariga koʻra a = 2520 va b = 2518 sonlar olindi. Bu sonlar ayirmasining xatoligini tahlil qiling.

Yechish. Bu sonlarning absolyut xatoliklari $\Delta(a) = \Delta(b)$ = 0,5 va nisbiy xatoliklari $\delta(a) \approx \delta(b)$ = 0,5/2518 = 0,0002 = 0,02%. Ayirma uchun $\Delta(a–b) = \Delta(a) + \Delta(b)$ = 1 va $\delta(a–b) \approx (\Delta(a) + \Delta(b))/|\, a–b\, |$ =0,5 = 50%. Sonlarning har biri juda kichik nisbiy xatoliklarga ega boʻlishiga qaramasdan, ularning ayirmasi uchun juda ham noaniq natijaga ega boʻldik. Agar boshqa tasodifiy oʻlchovlarni bajargan taqdirimizda ham bu sonlar orasidagi farq 0, 1, 2, 3, 4 boʻlishi mumkin. Shuning uchun hisoblashlar jarayonida ayirmada bir biriga juda yaqin sonlar hosil boʻlish holatidan qochish kerak. Buning uchun hisoblashning baʼzi bosqichlarida aniqlikni yoʻqotib qoʻymaslik maqsadida algoritmning koʻrinishini almashtirish maʼqul boʻladi.

4-misol. Geodezik oʻlchovlar natijasida olingan quyidagi oʻnta sonning yigʻindisini topish va natijani baholash talab etilsin: 0,2897; 0,4976; 2,488; 7,259; 16,38; 62,49; 216,2; 523,3; 1403; 5291.

Yechish. Ushbu sonlar yigʻindisining aniq qiymati: 7522,9043. Endi ushbu yigʻindini toʻrt razryadli toʻrda (beshinchi razryad tashlab yuboriladi) chapdan oʻngga qarab hisoblaymiz, yigʻindi 7522 ga teng. Endi ushbu yigʻindini aksincha, oʻngdan chapga qarab hisoblaymiz: 7520. Koʻrinib turibdiki, oxirgi har ikkala holda ham natija noaniq. Natijani baholaymiz, ya'ni ularning absolyut va nisbiy xatoliklarini hisoblaymiz: Δ_1 = 0,9043; Δ_2 = 2,9043; δ_1 = 0,0001202; δ_2 = 0,000386. Demak, birinchi hol, ya'ni kichik sondan kattasiga qarab yig'indi olishda nisbiy xatolik kam bo'lar ekan. Agar yug'indini 7523 deb olsak, u holda Δ_3 = 0,0957; δ_3 = 0,00001272.

5-misol. Ushbu $x^2 + 0{,}4002x + 0{,}00008 = 0$ kvadrat tenglamaning ildizlarini hisoblash xatoligini baholang.

Yechish. Ildizlarning aniq qiymati: x_1 = –0,4 va x_2 = –0,0002. Kvadrat tenglamani yechish formulasiga ko'ra ildizlarning taqribiy qiymatlari x_{12} = (–0,40002 ± 0,3996)/2, bu yerdan x_1 = –0,3999 va x_2 = –0,0003. Bu ildizlarning absolyut va nisbiy xatoliklari: Δ_1 = 0,0001; Δ_2 = 0,0001; δ_1 = 0,00025; δ_2 = 0,5. Demak, ikkinchi ildizning aniqligi juda kam. Bu qiymati bir biriga juda yaqin bo'lgan sonlarni ayirishdan qochish kerak, degan qoidaga zid. Shuning uchun ikkinchi ildizni hisoblashda kasrning surat va maxrajiga suratdagi ifodaning qo'shmasini ko'paytiramiz va ushbu x_2 = –0,00016/(0,3996+0,4002) = –0,00016/0,7988 = 0,0002 natijaga kelamiz. Afsuski, hamma vaqt ham bunday natijaga erishishning umumiy qoidasi yo'q.

6-misol. Ushbu $y = b\sqrt{a}$; funksiyaning berilgan A = 4±0,01; B = 7±0,04 qiymatlardagi chegaraviy absolyut xatoligini toping.

Yechish.

$$\Delta_y = \left(b\sqrt{a}\right)'_a \Delta_a + \left(b\sqrt{a}\right)'_b \Delta_b = b\frac{1}{2\sqrt{a}}\Delta_a + \sqrt{a}\Delta_b =$$

$$= 7 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0{,}01 + \sqrt{4} \cdot 0{,}04 = 0{,}0175 + 0{,}08 = 0{,}0975.$$

7-misol. Ushbu $y = \dfrac{a-b}{c}$ funksiyaning berilgan $A = 4 \pm 0{,}01$; $B = 7 \pm 0{,}04$ va $C = 5 \pm 0{,}1$ qiymatlardagi absolyut va nisbiy xatoliklarini toping.

Yechish.

$$y(a+\Delta(a), b+\Delta(b), c+\Delta(c)) = \frac{(a+\Delta(a)) - (b+\Delta(b))}{c+\Delta(c)} = \frac{4{,}01 - 7{,}04}{5{,}1} = -0{,}5941;$$

$$y(a-\Delta(a), b-\Delta(b), c-\Delta(c)) = \frac{(a-\Delta(a)) - (b-\Delta(b))}{c-\Delta(c)} = \frac{3{,}99 - 6{,}96}{4{,}9} = -0{,}6061;$$

$$\Delta(y) = \frac{\left|y(a+\Delta(a), b+\Delta(b), c+\Delta(c)) - y(a-\Delta(a), b-\Delta(b), c-\Delta(c))\right|}{2} =$$

$$= \frac{\left|-0{,}5941 - (-0{,}6061)\right|}{2} = 0{,}006;$$

$$y(a,b,c) = \frac{a-b}{c} = \frac{4-7}{5} = -0{,}6; \quad \delta(y) = \frac{\Delta(y)}{|y|} = \frac{0{,}006}{|-0{,}6|} = 0{,}01 = 1\%;$$

8-misol. Ushbu 1) $y = \dfrac{a}{a-b}$; 2) $y = \dfrac{a}{\sqrt{b}}$ funksiyalarning berilgan $A = 4 \pm 0{,}01$; $B = 7 \pm 0{,}04$ qiymatlardagi chegaraviy nisbiy xatoliklarini toping.

Yechish.

1) $$\delta_y = \delta_a + \delta_{a-b} = \frac{\Delta_a}{|a|} + \frac{\Delta_{a-b}}{|a-b|} = \frac{\Delta_a}{|a|} + \frac{\Delta_a + \Delta_b}{|a-b|} =$$

$$= \frac{0{,}01}{4} + \frac{0{,}01 + 0{,}04}{|4-7|} \approx 0{,}0025 + 0{,}0167 = 0{,}0192.$$

2) $$\delta_y = \delta_a + \delta_{\sqrt{b}} = \delta_a + \frac{1}{2}\delta_b = \frac{\Delta_a}{|a|} + \frac{1}{2}\frac{\Delta_b}{|b|} =$$

$$= \frac{0{,}01}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}04}{7} \approx 0{,}0025 + 0{,}0029 = 0{,}0054.$$

9-misol (to‘g‘ri masala). *a*) Hisoblanayotgan F funksiyaning bajarilayotgan opeatsiyalari tartibini va ularning natijalari xatoliklarini yozing, F funksiyaning izlanayotgan qiymatini hisoblang va bu hisob xatoligini baholang. *b*) Natijaning ishonchli raqamlari sonini aniqlang.

$$F = \frac{a^2 + b^3}{\cos t}; \quad a = 28{,}3 \pm 0{,}02; \quad b = 7{,}45 \pm 0{,}01; \quad t = 0{,}7854 \pm 0{,}0001.$$

Yechish. *a*) Berilgan sonlarning absolyut xatoliklari: $\Delta(a) = 0{,}02$; $\Delta(b) = 0{,}01$; $\Delta(t) = 0{,}0001$. Berilgan sonlarning nisbiy xatoliklari: $\delta(a) = 0{,}02/28{,}3 = 0{,}00070671$; $\delta(b) = 0{,}01/7{,}45 = 0{,}0013423$; $\delta(t) = 0{,}0001/0{,}7854 = 0{,}00012732$. U holda

$a^2 = 800{,}89$; $\delta(a^2) = 2\delta(a) = 0{,}0014134$; $\Delta(a^2) = 800{,}89\cdot 0{,}0014134 = 1{,}132$;

$b^3 = 413{,}49$; $\delta(b^3) = 3\delta(b) = 0{,}0040269$; $\Delta(b^3) = 413{,}49\cdot 0{,}0040269 = 1{,}6651$;

$a^2 + b^3 = 1214{,}4$; $\Delta(a^2 + b^3) = \Delta(a^2) + \Delta(b^3) = 2{,}7971$;

$\delta(a^2 + b^3) = 2{,}7971/1214{,}4 = 0{,}0023033$; $\cos t = 0{,}70711$;

$$\Delta(\cos t) = |(\cos t)'| \cdot \Delta t = |-\sin t| \cdot \Delta t = 0{,}0000707\ ;$$

$\delta(\cos t) = \Delta(\cos t)/|\cos t| = 0{,}0001$; $F = (a^2 + b^3)/\cos t = 1214{,}4/0{,}70711 = 1717{,}413$;

$\delta(F) = \delta(a^2 + b^3) + \delta(\cos t) = 0{,}0023033 + 0{,}0001 = 0{,}0024033$;

$\Delta(F) = 1717{,}413\cdot 0{,}0024033 = 4{,}1274586629$.

б) Ishonchli raqamlar sonini aniqlash uchun funksiyaning absolyut xatosi ta’rifi va bahosidan foydalanamiz:

$$\left|\frac{\partial F}{\partial a}\right| = \left|\frac{2a}{\cos t}\right| = 80{,}0466; \qquad \left|\frac{\partial F}{\partial b}\right| = \left|\frac{3b^2}{\cos t}\right| = 235{,}4776;$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial t}\right| = \left|-\frac{a^2 + b^3}{\cos^2 t}(-\sin t)\right| = 1717{,}40725\,.$$

Shunday qilib,

$$\Delta(F) = \left|\frac{\partial F}{\partial a}\right|\Delta(a) + \left|\frac{\partial F}{\partial b}\right|\Delta(b) + \left|\frac{\partial F}{\partial c}\right|\Delta(t) = 4{,}1274.$$

Ma'lumki,

$\Delta(F) = 4{,}1274 = 0{,}41274\cdot10^1 < 0{,}5\cdot10^{n-m+1} = 5\cdot10^{n-m}$;

$F = 1717{,}413 = 1{,}7174135\cdot10^3$,

bu yerda $n = 3$ – sonning tartibi; m – ishonchli raqamlari soni, ya'ni $m \le 3$ da

$$\Delta(F) < 0{,}5\cdot10^{3-m+1} = 0{,}5\cdot10^{4-m} = 5\cdot10^{3-m}.$$

Demak, ishonchli raqamlar soni $m = 3$ va $F = 172\cdot10^1$.

10-misol (teskari masala). Berilgan $F = \dfrac{a^2 + b^3}{\cos t}$ funksiya uchun $m = 5$ – ishonchli ma'noli raqamlar bilan natijani olish uchun zarur bo'lgan $a \approx 28{,}3$; $b \approx 7{,}45$; $t \approx 0{,}7854$ – boshlang'ich berilgan ma'lumotlarning xatoligini aniqlang.

Yechish. Dastlab quyidagilarni topamiz:

$a^2 = 800{,}89$, $b^3 = 413{,}49$, $\cos t = 0{,}70711$, $a^2 + b^3 = 1214{,}4$,

$F = \dfrac{a^2 + b^3}{\cos t} = \dfrac{1214{,}4}{0{,}7071} = 1717{,}413$ (dastlabki 5 ta raqam ishonchli deb faraz qilamiz).

m ta ishonchli belgi ta'rifiga ko'ra absolyut xatolik quyidagiga teng:

$$\Delta(F) \le \frac{1}{2}\cdot10^{-1} = 0{,}05, \text{ bu yerda } \Delta(F) \le \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|\Delta(x_i).$$

Teng ta'sir etish prinsipini qo'llash uchun $\left|\dfrac{\partial F}{\partial x_i}\right|\Delta(x_i)$, $i = 1,\ldots,n$ qo'shiluvchilarning barchasi o'zaro teng deb olamiz. U holda barcha argumentlarning absolyut xatoliklari quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$\Delta(x_i) = \left(n\left|\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|\right)^{-1}\cdot\Delta(F), \quad i = 1,\ldots,n.$$

Bunga ko'ra quyidgilarni topamiz:

$$\Delta(a) = \left(3\left|\frac{\partial F}{\partial a}\right|\right)^{-1}\cdot\Delta(F) = \frac{0{,}05}{(3\cdot80{,}0446)} = 0{,}0002;$$

$$\Delta(b) = \left(3\left|\frac{\partial F}{\partial b}\right|\right)^{-1}\cdot\Delta(F) = = \frac{0{,}05}{(3\cdot235{,}4776)} = 0{,}00007;$$

$$\Delta(t) = \left(3\left|\frac{\partial F}{\partial t}\right|\right)^{-1}\cdot\Delta(F) = \frac{0{,}05}{(3\cdot1717{,}40725)} = 0{,}00000970.$$

12-misol: Quyida berilgan ifodaning qiymatini berilgan miqdorlarda hisoblang va hisoblash xatoligini aniqlang.

$$N = \frac{(n-1)(m+n)}{(m-n)^2}, \quad n = 3{,}0567 \pm 0{,}0001, \quad m = 5{,}72 \pm 0{,}02.$$

Yechish: Yuqorida keltirilgan formulalarga tayanib, quyidagilarni yozamiz:

n-1 = 2,0567(±0,0001);

$m + n$ = 3,0567(±0,0001) + 5,72(±0,02) = 8,7767(±0,0201);

$m - n$ = 3,0567(±0,0001) – 5,72(±0,02) = 2,6633(±0,0201);

$N = 2{,}0567 \cdot 8{,}7767/2{,}6633^2 = 2{,}545 \approx 2{,}55$;

$\delta(N)$ = 0,0001/2,0567 + 0,0201/8,7767 + 2·0,0201/2,6633 = 0,0175 = 1,75%;

$\Delta(N)$ = 2,55·0,0175 = 0,045; N = 2,55(±0,045); $\delta(N)$ = 1,75%.

13-misol. Doiraning diametri 0,5 mm aniqlik bilan o‘lchanganda u d = 0,728 m bo‘lsa, u holda shu doiraning yuzasini hisoblang.

Yechish. Doiraning yuzasini hisoblash formulasi $S = \pi d^2/4$. Hisoblashlarda π sonini ixtiyoriy aniqlikda olish mumkin. Shuning uchun yuzani hisoblash xatoligi d^2 ni hisoblashning xatoligidan topiladi. Demak, d^2 ning nisbiy xatoligi $\delta(d^2) = 2\delta(d)$ = 2/728 = 0,27%. π sonini yaxlitlash natijasida ushbu $\delta(S) = \delta(\pi/4) + 2\delta(d)$ nisbiy xatolikning oshmasligi uchun π sonini hech bo‘lmaganda to‘rtta, aniqrog‘i, beshta ishonchli raqam bilan olish lozim: $S = (3{,}1416/4)\cdot 0{,}728^2$ m^2 = 0,7854·0,53 m^2 = 0,4162 m^2. Natijaning absolyut xatoligi: $\Delta(S) = S\cdot\delta(S)$ = 0,4162·0,0027 = 0,0011. Yaxlitlash qoidasiga ko‘ra S =0,416 m^2; $\Delta(S)$ = 0,001.

14-misol. Faraz qilaylik, o‘lchovlar natijasi x = 1,5; uning chegaraviy absolyut xatoligi Δ_x = 0,05 bo‘lib, uning barcha raqamlari qat’iy ma’noda ishonchli. tg$x$ ning qiymatini hisoblang.

Yechish. Hisoblashni mikrokalkulyatorda bajaraylik: tg1,5 = 14,10141994. Ishonchli raqamlarni aniqlash uchun funksiyaning absolyut xatoligini topamiz: $\Delta_{\mathrm{tg}x} = \Delta_x/\cos^2 x$ =0,05/0,005 = 10. Bu esa tg1,5 = 14,10141994 hisobning birorta ham raqami ishonchli emasligini bildiradi. Demak, dastlabki x ni aniqlashda aniqroq o‘lchov asbobidan foydalanish zarur ekan. Masalan, o‘lchovdan olingan natija x = 14923, Δ_x = 0,0005 bo‘lsa, u holda tg$x$ = tg1,4923 = 12,71327341, $\Delta_{\mathrm{tg}x}$ < 0,0005/0,006 < 0,09, ya’ni o‘lchovdan olingan natijaning 2 ta raqami qat’iy ma’noda ishonchli. Endi yakuniy natijani 12,7 deb yaxlitlab olish mumkin.

15-misol. Sharning radiusi taxminan 1 ga teng desak, uning hajmini 0,1 aniqlik bilan hisoblash uchun uning radiusi va π sonni qanday aniqlik bilan hisoblash lozim?

Yechish. Sharning hajmini hisoblash formulasi: $V = 4\pi R^3/3$. Absolyut xatoliklar chegarasi: $\Delta_\pi = 0{,}1/(2\cdot|4R^3/3|)$=0,3/8 = 0,0375; $\Delta_R = 0{,}1/(2\cdot|4R^2|) = 0{,}1/(8\pi)$ = 0,00398.

16-misol. 1) Jismning og‘irligini o‘lchash natijasi: m = 23,4±0,2 g. Jismning aniq og‘irligini baholang; 2) Tarvuzni tarozining pallasiga qo‘yib tortishmoqda. O‘lchov toshlarining eng kichigi 50 g. Tarozi tarvuzning og‘irligini 3600 g ko‘rsatdi. Bu son – taqribiy. Tarvuzning aniq og‘irligi noma’lum. Natijalarni taqqoslang.

Yechish. Demak, 1) Δ_m = 0,2 – absolyut va δ_m = 0,2/23,4 = 0,9% – nisbiy xatolik chegarasi; 2) Xuddi shunday, Δ_t = 50; δ_t = 50/3600 = 1,4%. Demak, $\delta_m < \delta_t$.

17-misol. Millimetrlarga bo‘lingan lineyka yordamida qalamning uzunligi o‘lchandi. O‘lchash 17,9 sm ni ko‘rsatdi. Bu o‘lchashning chegaraviy misbiy xatoligini ko‘rsating.

Yechish. Bu yerda x = 17,9 sm; $\Delta(x)$ = 0,1 sm; nisbiy xatolik $\delta(x)$ = 0,1/17,9 yoki yaxlitlasak, $\delta(x) = 0,1/18 \approx 0,6\%$. Bunday lineyka bilan nisbiy xatolikni yanada kamaytirishning iloji yo‘q. Agar yanada aniqroq o‘lchaydigan lineyka bilan bunday o‘lchashni bajarsak, u holda ko‘pi bilan 0,02 yoki 0,01 sm absolyut xatolikka erishishimiz mumkin.

18-misol. Silindrik porshen 35 mm atrofidagi diametrga ega. Mikrometr yordamida o‘lchashning chegaraviy nisbiy xatoligi 0,05% bo‘lishi uchun uni qanday aniqlikda o‘lchash lozim?

Yechish. Misol shartiga ko‘ra 35 mm ning chegaraviy nisbiy xatoligi δ_x = 0,05% bo‘lishi kerak. Demak, chegaraviy absolyut xatolik $\Delta_x = 36\cdot(0,05/100) = 0,0175$ (mm) yoki yaxlitlasak 0,02 (mm). Ma’lumki, x = 35; δ_x = 0,0005 ekanligidan ushbu $\delta_x = \Delta_x/x$ formulaga ko‘ra $\Delta_x = 35\cdot0,0005 = 0,0175$ (mm).

19-misol. A4 fomatdagi qog‘ozning uzunligi (29,7 ± 0,1) sm. Xorazmdan Toshkentgacha bo‘lgan masofa (1100 ± 1) km. Birinchi holda absolyut xatolik 1 mm dan, ikkinchi holda esa 1 km dan oshmaydi. Bu o‘lchashlarning aniqligini taqqoslang.

Yechish. Buni to‘g‘ridan to‘g‘ri taqqoslab, xulosa chiqarmaslik kerak. Birinchi holda Δ_x = 0,1; $\delta_x = 0,1/29,7\cdot100\% = 0,33\%$. Ikkinchi holda esa Δ_y = 1; $\delta_y = 1/1100\cdot100\% = 0,091\%$, ya'ni $\delta_x > \delta_y$. Bu ikkinchi holda olchash birinchisiga qaraganda aniqroq bajarilganligini ko‘rsatadi.

20-misol. Ikkita har xil yuklarning og‘irliklarini o‘lchashda quyidagi qiymatlar olindi: x = 357,456 tonna va $\Delta(x)$ = 24,726 tonna; y = 28,7673 tonna va $\Delta(x)$ = 2,4652 tonna. Qaysi yuk aniqroq o‘lchanganligini toping.

Yechish. Birinchi yukning absolyut xatoligini bitta raqamgacha yaxlitlaylik: $\Delta(x) = 24,726 \approx 30$. Birinchi yuk og‘irligini o‘nliklargacha aniqlikda yaxlitlaylik: $x = 357,456 \approx 360$. Demak, $x = (360\pm30)$ tonna. Nisbiy xatolikni hisoblaylik: $\delta(x) = 30/360 \approx 0,083 = 8,3\%$. Ikkinchi yukning absolyut xatoligini bitta raqamgacha yaxlitlaylik: $\Delta(y) = 2,4726 \approx 3$. Ikkinchi yuk og‘irligini butun qiymatlar aniqligida yaxlitlaylik: $y = 28,7673 \approx 29$. Demak, $y = (29\pm3)$ tonna. Nisbiy xatolikni hisoblaylik: $\delta(y) = 3/29 \approx 0,11 = 11\%$. Shunday qilib, $\delta(x) < \delta(y)$, ya’ni birinchi yuk aniqroq o‘lchangan ekan.

21-misol. Sferik qatlamning hajmini uning berilgan r ichki radiusi va h qatlami qalinligi bo‘yicha hisoblang, bu yerda $r >> h$.

Yechish. Ma'lumki, izlanayotgan hajm $V=\frac{4}{3}\pi((r+h)^3-r^3)$. Ma'lumki, $r+h$ va r qiymatlar bir biriga juda ham yaqin, ya'ni bu formulada aniqlik yo'qotiladi. Shuning uchun, bu yerda $V=\frac{4}{3}\pi(3r^2h+3rh^2+h^3)$ formuladan foydlangan ma'qul. Buni quyidagicha izohlash mumkin. Faraz qilaylik, r = 1 va h = 0,01. Soddalik uchun $\tilde{V}=\frac{3}{4\pi}V$ deb olaylik. U holda aniq qiymat $\tilde{V}=0{,}030301$. Birinchi formula bo'yicha: $(r+h)^2$ = 1,010·1,010 = 1,0201 ≈ 1,02; $(r+h)^3$ = 1,020·1,01 ≈ 1,030. $\tilde{V}^*=1{,}030-1{,}000=0{,}030$. Birinchi formulaning absolyut xatoligi: $\Delta(\tilde{V}^*)=3{,}01\cdot10^{-4}$. Ikkinchi formula bo'yicha: $\tilde{V}^*$= $3\cdot1{,}0^2\cdot(0{,}01)+3\cdot1{,}0\cdot(0{,}01)^2+(0{,}01)^3=3{,}0\cdot10^{-2}+3{,}0\cdot10^{-4}+1{,}0\cdot10^{-6}=3{,}0301\cdot10^{-2}\approx3{,}03\cdot10^{-2}$. Ikkinchi formulaning absolyut xatoligi: $\Delta(\tilde{V}^*)=1{,}0\cdot10^{-6}$. Shunday qilib, ikkinchi formulaning absolyut xatoligi taxminan 300 marta kichik.

22-misol. Ushbu $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2$ hisoblashni bajaring va xatolikni aniqlang.

Yechish. Hisoblashni quyidagi hollarda bajaraylik:

$$\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2=(2-\sqrt{3})^4=(7-4\sqrt{3})^2=97-56\sqrt{3}\approx0{,}005154776.$$

Hisoblash natijalarini jadval ko'rinishida keltiraylik:

	$\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2$	$(2-\sqrt{3})^4$	$(7-4\sqrt{3})^2$	$97-56\sqrt{3}$
$\sqrt{3}\approx1{,}7$	0,00657	0,00810	0,04000	1,80000
$\sqrt{3}\approx1{,}73$	0,00524	0,00523	0,00640	0,12000
$\sqrt{3}\approx1{,}732$	0,00516	0,00516	0,00518	0,00800
$\sqrt{3}\approx1{,}7321$	0,00515	0,00515	0,00513	0,00240

Jadvaldan ko'rinib turibdiki, oxirgi formula juda ham sodda, ammo u eng noaniq natijani berdi. Jadvaldagi har bir hisoblashlarning xatoliklarini baholang.

23-misol. Havo oqimiga perpendikulyar qo'yilgan kvadrat plastinkaning qarshilik kuchi $P=kSv^2$ formula bilan aniqlanadi, bu yerda P – qarshilik kuchi; S – plastinka yuzasi; v – havo oqimining tezligi; k – proporsionallik koeffisiyenti. k miqdor 5% , S va v esa 1% nisbiy aniqlik bilan olinganligini bilgan holda P ning nisbiy aniqligini toping.

Yechish. Ko‘paytmaning nisbiy aniqligini hisoblash formulasiga ko‘ra $\delta_P = \delta_k + \delta_S + 2\delta_v = 5\% + 1\% + 2\% = 8\%$.

Matematik paketlar va MS Excel dan foydalanib, formulalar bo‘yicha taqribiy hisoblashlarni bajarishga oid namunaviy misollar va ularning yechimlari

1-misol. Hisoblashlar jarayonida biror miqdorlarning quyidagi taqribiy qiymatlari olingan: a = 5,256; b = 2,892. Agar ularning chin qiymatlari A = 5,158 va B = 2,814 bo‘lsa, u holda bu natijalardan qaysi biri aniqroq ekanligini aniqlang.

Yechish: Berilgan sonlarning absolyut xatoliklari hisoblaylik:

$\Delta(a) = |a–A| = |5,256–5,158| \le 0,098$; $\Delta(b) = |b–B| = |2,892–2,814| \le 0,078$.

Endi ularning nisbiy xatoliklarini hisoblaylik:

$\delta(a)= \Delta(a) /|a| = 0,098/5,256 = 0,018645 = 1,86\%$;

$\delta(b)= \Delta(b) /|b| = 0,078/2,892= 0,026971 = 2,7\%$.

Shunday qilib, $\delta(a)< \delta(b)$ ekan, demak birinchi soning taqribiy qiymati aniqroq.

Hisoblashlarni Maple matematik paketida tekshiramiz:

> *with*(*Student*[*NumericalAnalysis*]):

a:=5.158: *A*:=5.256: Δ*a*:=*AbsoluteError*(*a*,*A*); δ*a*:=RelativeError(*a*,*A*);

b:=5.158: *B*:=5.256: Δ*b*:=*AbsoluteError*(*b*,*B*); δ*b*:=*RelativeError*(*b*,*B*);

Δ*a*:=0.098 δ*a*:=0.01864535769 Δ*b*:=0.078 δ*b*:=0.02697095436

Agar natijalarni yaxlitlash lozim bo‘lsa, u holda:

Δ*a*:=*AbsoluteError*(*a*,*A*,*digits*=*6*); δ*a*:=RelativeError(*a*,*A*,*digits*=*7*);

2-misol. Quyidagi tengliklardan qaysi biri aniqroq ekanligini aniqlang:

$$a = 9/11 = 0,818; \quad b = \sqrt{18} = 4,24.$$

Yechish. Berilgan ifodalarning qiymatlarini kattaroq aniqlikda topaylik:

$$A = 0,81818\ldots; \quad B = 4.2426\ldots .$$

Endi ularning absolyut xatoliklarini hisoblaylik:

$|a–A| = |0,81818–0,818| \le 0,00018 = \Delta(a)$;

$|b–B| = |4,2426–4.24| \le 0,0026 = \Delta(b)$.

Ularning nisbiy xatoliklarini hisoblaylik:

$\delta(a) = \Delta(a) /|a| = 0,00019/0,818 = 0,00022 = 0,022\%$;

$\delta(b) = \Delta(b) /|b| = 0,0027/4,24 = 0,000623 = 0,062\%$.

Shunday qilib, $\delta(a) < \delta(b)$ ekan, demak 9/11 = 0,818 tenglik aniqroq.

Bu hisoblashlarni MS Excel dasturida bajaramiz (1.6-rasm):

Boshlang‘ich ma’lumotlar **C2:C3**, **E2:E3** yacheykalarga yoziladi. Absolyut xatolar: **C4** yacheykada $|a–A|$ ning qiymati **(=ABS(C2-C3))**, **E4** yacheykada $|b–B|$ ning qiymati **(=ABS(E2-E3))** hisoblanadi. Nisbiy xatolar: **C5** yacheykada $\Delta(a)/|a|$ ning qiymati (**=C4/ABS(C2)**), **E5** yacheykada $\Delta(b)/|b|$ ning qiymati (**=E4/ABS(E2)**) hisoblanadi. **C6** yacheykaga **C5** ning, **E6** yacheykaga **E5** ning foiz miqdori o‘tkaziladi. Xulosa: **C6** va **E6** yacheykalar taqqoslanadi **(=ЕСЛИ(C6>E6),A,B)**.

	A	B	C	D	E
1	Hisoblash xatoligini baholash				
2	Taqribiy qiymat	*a*=	0,818	*b*=	4,24
3	Aniq qiymat	*A*=	0,81818	*B*=	4,2426
4	Absolyut xatolik	Δ*a*=	0,00018	Δ*b*=	0,0026
5	Nisbiy xatolik	δ*a*=	0,000222	δ*b*=	0,000623
6		δ*a*=	0,02%	δ*b*=	0,06%
7	Xulosa	*b* ga nisbatan *a* aniq hisoblangan			

1.6-rasm. Taqribiy miqdorlarning nisbiy xatoliklarini baholash.

3-misol. Ushbu $x=\dfrac{a+\sqrt[3]{b}}{c-a}$ funksiyaning $A=1{,}34\pm0{,}02$, $B=7{,}98\pm0{,}05$, $C=52{,}74\pm0{,}1$ qiymatlar uchun *a*) Δ_x – chegaraviy absolyut xatolikni toping; *b*) $\Delta(x)$ – absolyut xatolikni toping; *c*) $\delta(x)$ – nisbiy xatolikni hisoblang; *d*) δ_x – chegaraviy nisbiy xatolikning qiymatini baholang. Hisoblashlarni MS Excel dasturida bajaring.

Yechish. *a*) Dastlab berilgan *x* funksiya uchta *a*, *b*, *c* o‘zgaruvchilarning funksiyasi. Chegaraviy absolyut xatolikni baholash uchun quyidagi formuladan foydalanamiz: $\Delta_x \approx \left|\dfrac{\partial x}{\partial a}\right|\Delta_a + \left|\dfrac{\partial x}{\partial b}\right|\Delta_b + \left|\dfrac{\partial x}{\partial c}\right|\Delta_c$.

Berilgan $x=\dfrac{a+\sqrt[3]{b}}{c-a}$ funksiyaning xususiy hosilalarini topamiz:

$$\frac{\partial x}{\partial a}[b,c=const]=\frac{(a)'_a\cdot\sqrt[3]{b}(c-a)-a\cdot\sqrt[3]{b}(c-a)'_a}{(c-a)^2}=\frac{\sqrt[3]{b}(c-a)+a\cdot\sqrt[3]{b}}{(c-a)^2}=\frac{c\cdot\sqrt[3]{b}}{(c-a)^2},$$

$$\frac{\partial x}{\partial b}[a,c=const]=\frac{a}{(c-a)}\cdot\left(\sqrt[3]{b}\right)'_b=\frac{a}{(c-a)}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{b}},$$

$$\frac{\partial x}{\partial c}[a,b=const]=a\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\left(\frac{1}{c-a}\right)'_c=a\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\frac{-1}{(c-a)^2}=\frac{-a\cdot\sqrt[3]{b}}{(c-a)^2}.$$

MS Excel jadvalining **A2:B7** yachykalari blokiga boshlang‘ich ma’lumotlarni kiritamiz (1.7-rasm). **C2:C7** yacheykalarda $\left|\dfrac{\partial x}{\partial a}\right|$, $\left|\dfrac{\partial x}{\partial b}\right|$, $\left|\dfrac{\partial x}{\partial c}\right|$ - xususiy hosilalarning qiymatlari hisoblanadi. Chegaraviy absolyut xatolikni hisoblash uchun **F9** yacheyka-da ushbu $=\left|\dfrac{\partial x}{\partial a}\right|\Delta_a + \left|\dfrac{\partial x}{\partial b}\right|\Delta_b + \left|\dfrac{\partial x}{\partial c}\right|\Delta_c$ formula yoziladi.

b) **D2:D7** yacheykalarda o‘zgaruvchilarning yuqori bahosi qiymatlarini hisoblaymiz: $\Delta a_+ = a+\Delta(a)$=1,34+0,02 (**=A3+B3**), xuddi shunday, $\Delta b_+ = b+\Delta(b)$ (**=A5+B5**) va $\Delta c_+ = c+\Delta(c)$ (**=A7+B7**) larni ham. **B9** yacheykada funksiyaning yuqori bahosi qiymatini hisoblaymiz: $\Delta x_+ = \dfrac{\Delta a_+ + \sqrt[3]{\Delta b_+}}{\Delta c_+ - \Delta a_+}$. Xuddi shunday, funksiyaning quyi bahosi qiymatini **E2:E7** yacheykalardagi $\Delta a_- = a - \Delta(a)$ = 1,34–0,02, $\Delta b_- = b - \Delta(b)$, $\Delta c_- = c - \Delta(c)$ qiymatlardan foydalanib **B10** yacheykada hisoblaymiz: $\Delta x_- = \dfrac{\Delta a_- + \sqrt[3]{\Delta b_-}}{\Delta c_- - \Delta a_-}$. Funksiyaning absolyut xatoligi qiymati ushbu $\Delta(x) = \dfrac{1}{2}\left|\Delta x_+ - \Delta x_-\right|$ formuladan **F11** yacheykada topiladi. Topilgan absolyut xatolik (**F11 yacheyka**) chegaraviy absolyut xatolik (**F9 yacheyka**) dan katta bo‘lmasligi kerak, ya’ni $\Delta(x) \le \Delta_x$.

	A	B	C	D	E	F
1	Absolyut va nisbiy xatolarni baholash					
2	a	Δa	$\lvert\partial x\ \partial a\rvert$	$a+\Delta a$	$a-\Delta a$	
3	1,34	0,02	0,03989	1,36	1,32	
4	b	Δb	$\lvert\partial x\ \partial b\rvert$	$b+\Delta b$	$b-\Delta b$	
5	7,98	0,05	0,00218	8,03	7,93	
6	c	Δc	$\lvert\partial x\ \partial c\rvert$	$c+\Delta c$	$c-\Delta c$	
7	52,74	0,1	0,00101	52,84	52,64	
8						
9	$\Delta x+$	0,0529	Chegaraviy absolyut xato		Δx	0,001
10	$\Delta x-$	0,05129	Absolyut xato		$\Delta(x)$	0,0008
11	$x=$	0,0521	Nisbiy xato		$\delta(x)$	0,0154
12			Chegaraviy nisbiy xato		δx	0,0193

1.7-rasm. Absolyut va nisbiy xatolikni baholash.

c) Ushbu boshlang‘ich ma’lumotlardan **B11** yacheykada x funksiyaning qiymati topiladi, **F11** yacheykada esa yuqorida topilgan $\Delta(x)$ absolyut xatolikdan foydalanib uning $\delta(x)$ nisbiy xatoligi hisoblanadi.

d) Berilgan funksiyaning chegaraviy nisbiy xatoligini yuqorida keltirilgan formulalarga ko‘ra quyidagicha ifodalaymiz:

$$\delta_x = \delta = \delta_{a\cdot\sqrt[3]{b}} + \delta_{c-a} = \delta_a + \frac{1}{3}\delta_b + \delta_{c-a} =$$

$$= \frac{\Delta_a}{|a|} + \frac{1}{3}\frac{\Delta_b}{|b|} + \frac{\Delta_{c-a}}{|c-a|} = \frac{\Delta_a}{|a|} + \frac{1}{3}\frac{\Delta_b}{|b|} + \frac{\Delta_c + \Delta_a}{|c-a|}.$$

Ushbu formula **F12** yacheykaga yoziladi, nisbiy xatolik chegaraviy nisbiy xatolikdan oshib ketmaganligiga ishonch hosil qilinadi, ya’ni $\delta(x) \le \delta_x$.

4-misol. Arifmetik amallar xatoligini Mathcad matematik paketidan foydalanib toping.

Yechish. Faraz qilaylik, *x* va *y* sonlar Δx va Δy absolyut xatoliklari bilan berilgan:

$$x := 2.5378 \quad \Delta x := 0.0001 \qquad y := 2.536 \quad \Delta y := 0.001$$

U holda ularning nisbiy xatoliklari:

$\delta x := \dfrac{\Delta x}{|x|}$ $\quad \delta x := 3.94 \times 10^{-5}$ $\qquad \delta y := \dfrac{\Delta y}{|y|}$ $\quad \delta y := 3.94 \times 10^{-4}$

Bu sonlar yig‘indisi va ayirmasining xatoliklarini topamiz:

$$\frac{d}{dy} f(x, y, z) \rightarrow x \cdot \cos(y)$$

$S1 := x + y \qquad \Delta S1 := \Delta x + \Delta y$

$S1 = 5.0738 \qquad \Delta S1 = 1.1 \times 10^{-3} \quad \delta S1 = 2.17 \times 10^{-4}$

$$\frac{d}{dz} f(x, y, z) \rightarrow \frac{1}{\left[3 \cdot z^{\left(\frac{2}{3}\right)}\right]}$$

$S2 := x - y \qquad \Delta S2 := \Delta x + \Delta y$

$S2 = 1.8 \times 10^{-3} \qquad \Delta S2 = 1.1 \times 10^{-3} \qquad \delta S2 = 0.61$

$$\Delta f(x, y, z) := |\sin(y)| \cdot \Delta x + |x \cdot \cos(y)| \cdot \Delta y + \left| \frac{1}{\left[3 \cdot z^{\left(\frac{2}{3}\right)}\right]} \right| \cdot \Delta z$$

Demak, ayirmaning nisbiy xatoligi yig‘indining nisbiy xatoligiga qaraganda 2000 marta katta.

Endi *x* va *y* ning boshqa qiymatlarida ko‘paytma va bo‘linmaning xatoligini hisoblaymiz:

$x := 2.5378 \quad \Delta x := 0.0001 \qquad y := 0.006 \quad \Delta y := 0.001$

Sonlarning nisbiy xatoliklari:

$\delta f(x, y, z) := \dfrac{\Delta f(x, y, z)}{|f(x, y, z)|} \qquad S4 := \dfrac{x}{y}$

$S3 = 0.015227 \qquad S4 = 422.966667$

$\delta S3 := \delta x + \delta y \qquad \delta S4 := \delta x + \delta y$

$\Delta S3 := |S3| \times \delta S3 \qquad \Delta S4 := |S4| \times \delta S4$

$\Delta S3 = 6.604259 \times 10^{-6} \qquad \Delta S4 = 0.183452$

$$\frac{\Delta S4}{\Delta S3} = 2.8 \times 10^{4}$$

5-misol. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya xatoligini Mathcad matematik paketidan foydalanib toping.

Yechish. Asosiy hisob formulalari:

$$f(x,y,z) := x\cdot\sin(y) + \sqrt[3]{z} \qquad \frac{d}{dx}f(x,y,z) \rightarrow \sin(y)$$

$$\frac{d}{dy}f(x,y,z) \rightarrow x\cdot\cos(y) \qquad \frac{d}{dz}f(x,y,z) \rightarrow \frac{1}{\left[3\cdot z^{\left(\frac{2}{3}\right)}\right]}$$

Faraz qilaylik,

x : = -3.59 y : = 0.467 z : = 563.2

Keltirilgan boshlang‘ich shartlarga ko‘ra xatoliklar:

Δx : = 0.01 Δy : = 0.001 Δz : = 0.1

Funksiyaning qiymati: f (x, y, z) = 6.64198865

$$\Delta f(x,y,z) := |\sin(y)|\cdot\Delta x + |x\cdot\cos(y)|\cdot\Delta y + \left|\frac{1}{\left[3\cdot z^{\left(\frac{2}{3}\right)}\right]}\right|\cdot\Delta z \qquad \delta f(x,y,z) := \frac{\Delta f(x,y,z)}{|f(x,y,z)|}$$

Δ f (x, y, z) = 8.196 x 10^{-3} δ f (x, y, z) = 1.234 x 10^{-3}.

Mashqlar

1. Quyidagi sonlarni verguldan keyingi ikkita, uchta va to‘rtta ma’noli raqamgacha yaxlitlab, hosil bo‘lgan taqribiy sonning Δ absolyut va δ nisbiy xatoliklarini aniqlang: 1) a = 42,2534 ; 2) a = 0,002103; 3) a = 0,61512; 4) a = –9,2385; 5) a = 0,0004293; 6) a = 173,56; 7) a = 2483,535; 8) a = 0,60502; 9) a = –0,0238.

2. Quyidagi taqribiy sonlarning absolyut xatoliklarini ularning berilgan nisbiy xatoliklari bo‘yicha aniqlang: 1) a = 32,627, $\delta(a)$ = 0,2%; 2) a = 65,27, $\delta(a)$ = 1%; 3) a= 326,44, $\delta(a)$= 0,6%; 4) a= 0,6986, $\delta(a)$= 3%; 5) a= 3,62, $\delta(a)$= 0,8%.

3. Quyidagi sonlarning ishonchli raqamlari sonini ularning berilgan absolyut xatoliklariga qarab aniqlang: 1) x = 0,2292, $\Delta(x)$ = $0{,}35\cdot10^{-2}$; 2) x = 3,2351, $\Delta(x)$ = $0{,}3\cdot10^{-3}$; 3) x = 83,426, $\Delta(x)$ = $0{,}1\cdot10^{-2}$; 4) x = 0,00183, $\Delta(x)$ = $0{,}1\cdot10^{-4}$; 5) x = 1,523, $\Delta(x)$ = 0,01; 6) x = 13,026, $\Delta(x)$ = $0{,}1\cdot10^{-2}$; 7) x = 0,00103, $\Delta(x)$ = $0{,}1\cdot10^{-4}$.

4. Quyidagi sonlarning ishonchli raqamlari sonini ularning berilgan nisbiy xatoliklariga qarab aniqlang: 1) b= 0,4381, $\delta(b)$= $0{,}2\cdot10^{-2}$; 2) b= 0,000125, $\delta(b)$= 0,2%; 3) b= 5681, $\delta(b)$ = 1%; 4) b= 14,930, $\delta(b)$= $0{,}5\cdot10^{-3}$; 5) b= 0,1245, $\delta(b)$= 10%.

5. Ushbu 36,7; 2,489; 31,010; 0,031 sonlarning barcha raqamlarini tor ma’noda ishonchli deb, ularning chegaraviy absolyut va nisbiy xatoliklarini ko‘rsating.

6. Ushbu 0,310; 3,495; 24,3790; sonlarning barcha raqamlarini tor ma’noda ishonchli deb, ularni yuzdan birgacha aniqlik bilan yaxlitlang va yaxlitlangan qiymatlarning tor ma’noda ishonchli raqamlari sonini aniqlang.

7. Bo‘laklari 1 sm bo‘lgan ruletka (o‘ramning uzunligini o‘lchash asbobi) yordamida simning uzunligi $L \approx 8{,}56$ m ekanligi topildi. Aniq uzunlik L ning chegaralarini aniqlang.

8. Ushbu x = 33,3±0,1 va y = 2,22±0,01 sonlardan qaysi biri aniqroq berilgan?

9. Quyidagi taqribiy sonlarning yig'indisini toping va ularning xatoliklarini ko'rsating: 1) 0,415+23,1+287 (barcha raqamlar ishonchli); 2) 275,2–21,48+0,103 (barcha raqamlar ishonchli); 3) $a_1+a_2-a_3$, bu yerda $a_1 = 279{,}6$, $a_2 = 52{,}33$, $a_3 = 210{,}44$, $\Delta(a_1) = 0{,}3$, $\Delta(a_2) = 0{,}33$, $\Delta(a_3) = 0{,}14$.

10. Quyidagi taqribiy sonlar ko'paytmasi va bo'linmasini toping, ularning xatoliklarini ko'rsating (berilgan sonlarning barcha raqamlari ishonchli): 1) 52,3·6,8; 2) 1,347·0,04; 3) 0,352·48·56,3; 4) 248,65·0,0025:1,2; 5) 3,7:1944·9,1.

11. Ushbu $\begin{vmatrix} 2{,}5 \pm 0{,}1 & -1{,}1 \pm 0{,}2 \\ 4{,}1 \pm 0{,}2 & 3{,}0 \pm 0{,}1 \end{vmatrix}$ determinantning absolyut xatoligini toping.

12. Quyida berilgan sonlarning barcha raqamlari ishonchli deb, quyidagi ifodalarning qiymatlarini xatoliklar nazariyasi tushunchalari bilan tahlil qiling (har bir operatsiya natijasi tahlili; oxirgi natijaning yakuniy tahlili): 1) $(0{,}62+\sqrt{16{,}9})/\lg 41{,}3$; 2) $\ln(6{,}91+3{,}35^2)/\sqrt{626{,}3}$; 3) $(12{,}47+\sqrt{12{,}5^2+14{,}8^2})/(\sin^2 0{,}97+\cos^2 2{,}63)$; 4) $\sqrt[3]{26{,}88}/(e^{3.94}-8{,}04^2)+8{,}19^{1{,}34}$; 5) $(e^{2{,}156}+\sqrt{0{,}927})/\ln(2{,}156+0{,}927^2)$.

13. Agar $x = 35^0 40'$ burchak $1'$ gacha aniqlik bilan o'lchangan bo'lsa, u holda $\sin x$ ni toping va uning absolyut xatoligini aniqlang.

14. x argumentning berilgan qiymatlarida funksiyalarning qiymatlarini hisoblang va natijalarning absolyut va nisbiy xatoliklarini toping: 1) $y = x^3 \sin x$, $x = \sqrt{2} \approx 1{,}414$; 2) $y = x\ln x$, $x = \pi \approx 3{,}142$; 3) $y = e^x \cos x$, $x = \sqrt{3} \approx 1{,}732$.

15. Argumentning qiymati qat'iy ma'noda ishonchli raqamlar bilan berilgan deb, quyidagi elementar funksiyalar qiymatlarini kompyuterda hisoblab, natijaning qat'iy ma'noda ishonchli raqamlari sonini toping: 1) lg23,6; 2) 1/4,09; 3) $e^{2{,}01}$; 4) arccos0,79; 5) artg8,45; 6) $3{,}4^{2{,}6}$; 7) ln2,6; 8) $2^{4{,}09}$; 9) $e^{-1{,}08}$; 10) arcsin0,18.

16. Quyidagi ifodalarning qiymatlarini parametrlarning ko'rsatilgan $a = 2{,}674$ va $b = 31{,}48$ qiymatlarida (barcha raqamlar qat'iy ma'noda ishonchli) hisoblang va argumentlarning barcha raqamlari ishonchli deb natijalarning absolyut va nisbiy xatoliklarini toping: 1) $\dfrac{ab}{\sqrt{a+b^2}}$; 2) $\dfrac{a+\sqrt{b}}{\lg(a^2+b^2)}$; 3) $\dfrac{e^a-\sqrt[3]{b}}{\ln(1+a^2)}$; 4) $\lg\dfrac{\cos^2 a+b}{a^{\sqrt{b}}+b^{\sqrt{a}}}$.

17. Quyidagi funksiyalarning qiymatlarini o'zgaruvchilarning ko'rsatilgan qiymatlarida hisoblang va argumentlarning barcha raqamlari ishonchli deb, natijalarning absolyut va nisbiy xatoliklarini toping: 1) $u = \ln(x_1^2 + x_2)$, $x_1 = 0{,}96$, $x_2 = 1{,}23$; 2) $u = \dfrac{x_1^2 + x_2}{x_3^3}$, $x_1 = 2{,}83$, $x_2 = 0{,}923$, $x_3 = 1{,}213$; 3) $u = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$, $x_1 = 2{,}803$, $x_2 = 1{,}923$, $x_3 = 0{,}753$; 4) $u = x_1 x_2^2 x_3^3$, $x_1 = 32{,}3$, $x_2 = 9{,}23$, $x_3 = 6{,}021$.

18. Quyidagi funksiyalarning qiymatlarini $0{,}1\cdot10^{-5}$ aniqlik bilan olish uchun x argumentning qiymatini nechta ishonchli raqam bilan olish lozim bo‘ladi? 1) $y = x^3\sin x$, $x = \sqrt{2}$; 2) $y = e^x\cos x$, $x = \sqrt{3}$; 3) $y = x\ln x$, $x = \pi$; 4) $y = xe^{-x}$, $x = e$.

19. Ushbu $x^2 - 2x + \lg 2 = 0$ kvadrat tenglamaning ildizlarini to‘rtta raqamgacha aniqlik bilan olish uchun uning ozod hadini nechta raqam aniqligi bilan olish lozim? *Javob*: 4.

20. Berilgan $A = 4 \pm 0{,}01$; $B = 7 \pm 0{,}04$; $C = 5 \pm 0{,}1$ qiymatlar uchun 1) $y = c - a$; 2) $y = a\cdot\sqrt[3]{b}$; 3) $y = a/(c+a)$ funksiyalarning chegaraviy nisbiy xatoliklarini va 4) $y = \sqrt[3]{b}/c$; 5) $y = 3ac$; 6) $y = a(c-b)$ funksiyalarning chegaraviy absolyut xatoliklarini toping. *Javo*b: 1) $\delta_y \approx 0{,}11$; 2) $\delta_y = 0{,}0042$; 3) $\delta_y \approx 0{,}0147$; 4) $\Delta_x = 0{,}0087$; 5) $\Delta_x = 1{,}35$; 6) $\Delta_x = 0{,}59$.

21. Ushbu $C = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n - \ln n\right)$ Eyler o‘zgarmaisini 10 ta raqam aniqligi bilan hisoblang.

22. Ushbu $\sum\limits_{i=1}^{n} x^i$ yig‘indining $|x| < 1$ qiymatlardagi hisoblash xatoligini kamaytirish uchun uni qaysi tartibda hisoblagan ma’qul.

23. EHMda ushbu $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}$ yig‘indining $n = 1000000$ dagi hisoblash xatoligi eng kam bo‘lishi uchun quyidagi algoritmlardan qaysi biridan foydalangan ma’qul: 1) $S_0 = 0$, $S_i = S_{i-1} + 1/i^2$, $i = 1,\ldots,n$; 2) $S_n = 0$, $S_{i-1} = S_i + 1/i^2$, $i = n,\ldots,1$.

24. Faraz qilaylik, $y^2 - 140y + 1 = 0$ kvadrat tenglamaning eng kichik ildizi izlanayotgan bo‘lsin. Hisoblashlar o‘nlik sanoq sistemasida bajarilib, yaxlitlashdan keyin son mantissasining (qo‘zg‘aluvchan nuqtali shakldа yozilgan son kasr qismining) to‘rtta razryadi ushlangan bo‘lsa, ushbu $y = 70 - \sqrt{4899}$ yoki $y = 1/\left(70 + \sqrt{4899}\right)$ formulalardan qaysi biri aniqroq?

25. Faraz qilaylik, haqiqiy ildizlarga ega ushbu $x^2 + 2px^2 + q = 0$ kvadrat tenglamaning p va q koeffisiyentlari Δ absolyut xatolik bilan berilgan bo‘lsa, uning $x_{1,2}$ ildizlari absolyut xatoliklarini baholovchi ifodani toping.

26. Ba’zi shakllarning burchaklarini o‘lchash natijasida $\alpha_1 = 23^0 46'7''$, $\alpha_2 = 62^0 43'$, $\alpha_3 = 17^0 11''$, $\alpha_4 = 78^0$ burchaklar aniqlandi. O‘chashning absolyut xatoligi $1''$ deb faraz qilib, ushbu α_1, α_2, α_3, α_4 sonlarning nisbiy xatoligini aniqlang.

27. Bo‘yi $(5{,}65 \pm 0{,}01)$ m va eni $(3{,}89 \pm 0{,}02)$ m bo‘lgan xonaning yuzasini hisoblash xatoligini aniqlang.

28. Katetlari $(12{,}05 \pm 0{,}01)$ sm, $(23{,}89 \pm 0{,}01)$ sm bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchakning burchaklari tangensini hisoblang.

29. Doiraning yuzi 0,01% aniqlik bilan hisoblanishi uchun r = 40 sm radiusini qanday minimal aniqlik bilan o‘lchash va π sonini eng kami bilan nechta ishonchli raqam bilan olish lozim?

30. Uzunliklari 0,01 sm aniqlik bilan o‘lchangan kubning qirralari 8 sm dan ekanligi aniqlandi. Kub hajmini hisoblashda absolyut va nisbiy xatoliklarni toping.

31. Silindrning h balandligi va R radiusi 0,4% aniqlik bilan o‘lchangan bo‘lsa, u holda uning hajmini hisoblashga chegaraviy nisbiy xatolik nimaga teng?

32. Agar kesik konusning R va r – asoslari radiuslari hamda l - yasovchisi Δ = 0,01 sm absolyut xatolik bilan o‘lchangan bo‘lsa, u holda uning to‘la sirtini hisoblang va bundagi nisbiy xatolikni toping: R = 32,46 sm; r = 14,13 sm; l = 10,37 sm.

Javob: $\delta = \dfrac{2l+3R+3r}{l(R+r)+R^2+r^2}\Delta$ = 0,000924359 sm = 0,09%.

33. Ushbu *a*) $\sin 1^0$; *b*) $\cos 1^0$ ning qiymatini uchta raqam aniqligida hisoblash uchun π ni nechta raqam aniqligida olish lozim?

34. sin$x$ ning qiymatini beshta ishonchli raqam bilan topish uchun birinchi chorakda yotgan burchakni qanday aniqlik bilan o‘lchash lozim?

35. Silindrik bakning sig‘imini 1% gacha aniqlik bilan topish uchun uning asosi radiusi R ni va balandligi H ni qanday aniqlik bilan o‘lchash lozim? *Javob*: $2\delta_R = \delta_H$ = 0,5%.

36. Yer shari bilan taqqoslash mumkin bo‘lgan sharning ekvatori bo‘ylab uning sirtiga tarang holda ip tortilgan. Keyin ip ΔL ga cho‘zilgan va ekvator bilan qo‘sh o‘qli aylana bo‘ylab shar ustiga tortilgan: *a*) radiusni 2 metrga oshirish uchun ipni qanchaga uzaytirish zarur? *b*) ipning ΔL ga cho‘zilgan ixtiyoriy nuqtasi markazdan radial yo‘nalishga h masofaga ko‘chiriladi; bu nuqtaning R radiusli sfera sirtidan uzoqlashgan eng katta h masofasi nimaga teng bo‘ladi? *Javob*: *a*) 12,6 m; *b*)

$h = \dfrac{R}{2}\left(\dfrac{3\Delta L}{2R}\right)^{2/3}$.

37. Ko‘ndalang kesimi to‘g‘ri to‘rtburchakli sterjenning egilishi bo‘yicha Yung modulini topish uchun quyidagi formuladan foydalaniladi: $E = \dfrac{1}{4}\dfrac{l^3P}{d^3bs}$, bu yerda l – sterjenning uzunligi; b va d – ko‘ndalang kesim asosi va balandligi; s – egilish balandligi; P – yuk. Agar b va d ning qiymatlari 1% gacha, P ning qiymati 0,1% gacha aniqlik bilan berilgan bo‘lsa, E ning xatoligi 5,5% dan oshmasligi uchun l va s ni qanday aniqlik bilan o‘lchash lozim bo‘ladi? *Javob*: δ_l = 0,2%; δ_s=0,7%.

38. π ni hisoblashda Arximed foydalangan aylanaga ichki chizilgan muntazam 96 burchak perimetrining uzunligi r = 1 da ushbu $p = 96\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$ formula bilan ifodalangan. Agar ushbu formuladan foydalanib, π ni 0,001 gacha aniqlik bilan hisoblash talab qilinsa, u holda ildiz ostidagi miqdorlarni qanday aniqlik bilan hisoblash lozim bo‘ladi?

39. Uzunligi l metr va chetlari qattiq mahkamlangan to‘g‘ri chiziqli sterjen $T = 400^0$C ga qizdirilgan. Sterjenning chiziqli kengayish koeffisiyenti $\alpha = 10^{-5}$ gradus^{-1}. Agar sterjen termik kengayish hisobiga muvozanatidan chetlanish holati *a*) teng yonli uchburchak; *b*) chetlariga nisbatan simmetrik kvadratik parabola shaklini egallagan bo‘lsa, sterjenning eng katta h chetlanishini aniqlang. *Javob*: *a*) $h = \sqrt{l\Delta/2}$; *b*) $h = \sqrt{3l\Delta/8}$, $\Delta = \alpha T$.

40. Laboratoriya sharoitida ideal gazning ushbu P = 1,0 atm, V = 0,1 m^3, N = 0,0042 mol, R = 0,08206 parametrlardagi temperaturasi $T = PV/(NR)$ = (1,0)(0,1)/((0,0042)(0,08206)) = 290,15 K = 17^0C deb topildi. Agar bu hisoblashning aniqligini $T = (17 \pm 2)^0$C desak, u holda hisoblash xatoligini baholang.

Sinov savollari

1. Tizim va uning klassifikatsiyasi.
2. Model va modellashtirish.
3. Hisoblash masalasi va hisoblash usuli.
4. Sonnig kompyuter xotirasidagi ifodasi.
5. Xatoliklarning manbalari va klassifikatsiyasi;
6. Absolyut va nisbiy xatoliklarning ta’rifi.
7. Absolyut va nisbiy xatoliklarni hisoblashning asosiy qoidalari.
8. Taqribiy sonning absolyut xatoligiga ko‘ra uning quyi va yuqori chegara qiymatlarini ko‘rsatish.
9. Ma’noli va ishonchli raqam, keng va tor (qat’iy) ma’nodagi ishonchli raqam tushunchalari.
10. Absolyut va nisbiy xatoliklarning chegaralari.
11. Sonning nisbiy xatoligi ma’lum bo‘lganda uning absolyut xatoligini topish.
12. Yaxlitlash va uning qoidalari, yaxlitlash xatoligi. To‘la xatolik tushunchasi.
13. Ikki son yig‘indisi va ayirmasining absolyut va nisbiy xatoliklari.
14. Ikki son ko‘paytmasi va nisbatining absolyut va nisbiy xatoliklari.
15. Darajaga ko‘tarilayotgan taqribiy sonning nisbiy xatoligi.
16. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya chegaraviy absolyut va nisbiy xatoliklari.
17. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning absolyut va nisbiy xatoliklari.
18. Bir o‘zgaruvchili funksiyaning absolyut va nisbiy xatoliklari.
19. Ba’zi elementar funksiyalar uchun chegaraviy absolyut va nisbiy xatoliklar.
20. Xatoliklar nazariyasining to‘g‘ri va teskari masalalari.

2-BOB.
NOCHIZIQLI TENGLAMALARNI YECHISHNING SONLI USULLARI

Kalit so'zlar: nochiziqli tenglama; ildizlarni ajratish va ularni aniqlashtirish; teng ikkiga bo'lish, Nyuton, kesuvchilar, oddiy iteratsiyalar, teskari funksiyaga o'tish bilan ketma-ket yaqinlashish, Steffensen, teskari kvadratik interpolyatsiya usullarining geometrik ma'nosi, yaqinlashuvchanligi, xatoliliklari; yaqinlashish tezligi va yaqinlashishni tezlashtirish usullari; ko'phad ildizlarini izlashning sonli usullari.

Har xil obyektlarni modellar yordamida tadqiq qilishning ko'pgina masalalari nochiziqli tenglamalarni yechishga olib kelinadi. Xususan, elektronika, radioelektronika va hisoblash texnikasi qurilmalarini tadqiq qilishda, tebranishlar nazariyasi, suyuqlik va gaz mexanikasi, kimyo-texnologiya va boshqa sohalar masalalarini modellar yordamida yechishda ana shunday amaliy masala yuzaga keladi. Quyida nochiziqli tenglamalarni yechish usullari bilan tanishamiz.

2.1. Nochiziqli tenglamalar, ularni yechishning geometrik talqini

Dastlabki tushunchalar. Ushbu

$$f(x) = 0 \tag{2.1}$$

*nochiziqli tenglama*ning ildizini (ildizlarini) topish talab etiladi.

Agar $f(x)$ funksiya ko'phad bo'lsa, u holda (2.1) tenglama *n–darajali algebraik tenglama* deb ataladi, ya'ni

$$f(x) = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{2.2}$$

bunda $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ – berilgan $P_n(x)$ ko'phadning koeffisiyentlari.

Boshqacha aytganda, *algebraik tenglama* deb algebraik (butun, ratsional, irratsional) funksiyalardan tashkil topgan tenglamaga aytiladi.

Darajasi to'rtdan yuqori bo'lgan algebraik tenglamalar uchun uning ildizlarini koeffisiyentlari orqali ifodalovchi aniq formula mavjud emas. Algebraik tenglama ildizlari sonini ko'phadning darajasiga qarab, ularning xarakterini esa shu ko'phad koeffisiyentlarining ishorasiga qarab aniqlash mumkin. Quyiroqda n–darajali algebraik tenglama, ya'ni $P_n(x)$ ko'phadning ildizlari haqida kengroq tushunchalar berilgan.

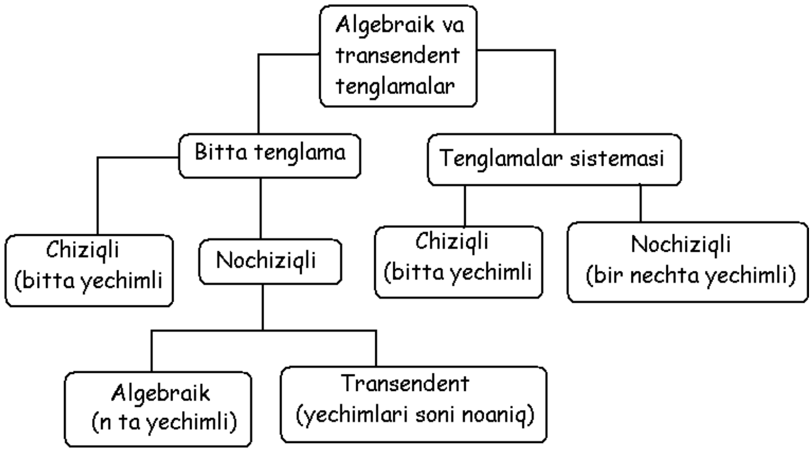
Algebraik bo'lmagan har qanday tenglama *transendent tenglama* (*transendent funksiyalar*: ko'rsatgichli, logarifmik, trigonometrik, teskari trigonometrik va boshqa funksiyalarni o'z ichiga olgan tenglama) deb ataladi. Masalan,

$$(2{,}1x+1)/(0{,}3x+1)\sin(2x)-0{,}4x^2 = 1 \quad \text{yoki} \quad 2^{0{,}1x}-6\cdot\lg(44-x)+5{,}5\sin(x) = 0.$$

Kamdan kam hollardagina transendent tenglamalar ildizlarining aniq qiymatini topish mumkin. Transendent tenglamalar birorta ham haqiqiy ildizga ega bo'lmasligi, chekli yoki cheksiz sondagi ildizlarga ega bo'lishi mumkin. Masalan, yuqorida keltirilgan misollardan birinchi tenglama 7 ta, ikkinchisi esa 5 ta haqiqiy ildizga ega (buni mustaqil aniqlang, masalan, Maple dasturi yordamida uning grafigini chizing).

Shularga ko‘ra tenglamaning taqribiy ildizlarini topish usullari va ularning aniqlik darajasi muhim ahamiyatga ega.

Shunday qilib, algebraik va transendent tenglamalar ikki turga bo‘linadi: *chiziqli* (bitta yechimli) va *chiziqli bo‘lmagan* yoki *nochiziqli* (bir yoki bir nechta yechimli) *tenglamalar*. Chiziqli bo‘lmagan tenglamalar esa: *algebraik* (yechimlari *n* ta) va *transendent* (yechimlari soni noma’lum) tenglamalarga bo‘linadi (2.1-rasm).



2.1-rasm. Tenglamalar klassifikatsiyasi.

Masalani yechish bosqichlari: Chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni yechish usullari ikki turga bo‘linadi: *to‘g‘ri* (yoki *analitik*) va *taqribiy* (*iteratsion*) usullar. Analitik usulda tenglamaning barcha yechimlari chekli sondagi operatsiyalarda (yoki formulalar) orqali aniqlanadi. Masalan, shu usulga ushbu $ax^2 + bx + c = 0$ – kvadrat tenglamaning yechimlarini topishni misol qilib keltirish mumkin. Bu tenglamaning yechimlari quyidagicha:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

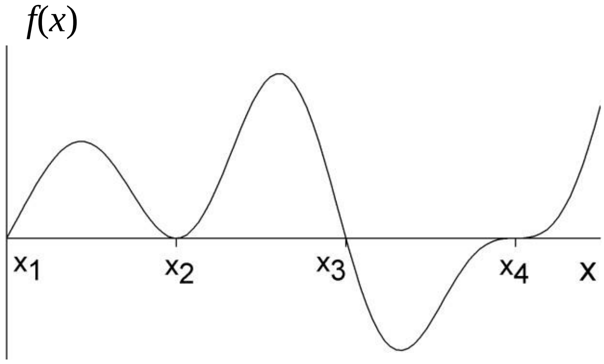
Chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni yechish bir necha bosqichga bo‘linadi: ildizlarning mavjudligini, sonini, xarakterini va ularning joylashishini tekshirish; ildizlarni ajratish; ildizlarning taqribiy qiymatlarini topish, ya’ni tenglamaning yagona ildizi mavjud bo‘lgan yetarlicha kichik [*a*,*b*] kesmani aniqlash (dastlabki yaqinlashuvchi ildiz); ildizlarning barchasini yoki ularning bir qismini talab qilingan aniqlikda topish.

Dastlabki uchta bosqichda analitik yoki grafik usuldan (ba’zida tadqiqot obyekti yoki hodisaning fizik ma’nosidan) foydalanish mumkin. Bunda quyidagi holatlar kuzatiladi: ildiz yagona; cheksiz ko‘p yechimlar; ildiz yo‘q; bir nechta yechimlar mavjud bo‘lib, ulardan ba’zilari haqiqiy, ba’zilari esa mavhum; ildizlar karrali; ildizlar bir biriga juda yaqin va dastlabki yaqinlashishni topish murakkab.

Oxirgi bosqichda esa biror taqribiy (iteratsion) usuldan foydalaniladi, bunda dastlabki tenglamaning ildizini topish juda murakkab bo‘lgan holda bu tenglama uning ildiziga teng yoki unga juda ham yaqin joylashgan ildizli sodda tenglamaga ham almashtirilishi (masalan, transendent tenglamani algebraik tenglamaga almashtirish) mumkin.

Tenglamani yechishning geometrik talqini. Tenglamaning ildizlari har xil bo'lishi mumkin. Geometrik nuqtai nazardan bu $\bar{x}$ ildiz $y = f(x)$ funksiya grafigining Ox abssissa o'qi bilan kesishish nuqtasini bildiradi. Agar birinchi tartibli hosila $f'(\bar{x}) \neq 0$ bo'lsa, u holda x – *oddiy ildiz,* aks holda esa u *karrali ildiz* deb ataladi.

Agar barcha $k<m$ va $f^{(m)}(\bar{x})\neq 0$ uchun $f^{(k)}(\bar{x}) = 0$ bo'lsa, u holda m – butun son $\bar{x}$ *ildizning karrasi* deb ataladi. 2.2–rasmda x_1 va x_3 – oddiy, x_2 – eng kamida ikki karrali, x_4 – eng kamida uch karrali ildiz.



2.2–rasm. Algebraik tenglama ildizlarining sxematik tasviri.

Boshqacharoq qilib aytganda, agar $f(x)$ funksiyani $\bar{x}$ ildizi atrofida $f(x)=(x-\bar{x})^p g(x)$ ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, u holda $g(x)$ – chegaralangan funksiya ($g(\bar{x})\neq 0$) uchun p – natural son *ildizning karrasi* deb ataladi. Toq p larda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada ishorasini almashtiradi, ya'ni $f(a)\, f(b)<0$, juft p larda esa yo'q.

Tenglamani yechishning taqribiy (iteratsion) usullari va iteratsion jarayon tushunchalari. Tenglamani yechish uchun qo'llaniladigan t*aqribiy* (*iteratsion*) usullar quyidagilar: kesmani teng ikkiga bo'lish usuli (dixotomiya usuli); proporsional bo'laklar usuli (vatarlar usuli); urinmalar usuli (Nyuton usuli); oddiy iteratsiya usuli; kesuvchi chiziqlar usuli; kombinatsiyali usul (bir necha usulning uyg'un birikmasidan tuzilgan usul); kesimlar usuli (chiziqli interpolyatsiya qoidasi); Steffensen usuli (Eytken-Steffensen usuli) va boshqa.

Dastlabki $f(x) = 0$ tenglamani $\varphi(x) = x + g(x)\cdot f(x)$ almashtirish orqali unga ekvivalent bo'lgan ushbu $x = \varphi(x)$ tenglamaga keltiramiz, bunda $g(x)$ – ishorasini o'zgartirmaydigan ixtiyoriy uzluksiz funksiya.

Iteratsion usullarda yechimning dastlabki x_0 – ixtiyoriy yaqinlashishi olinadi va u ketma-ket aniqlashtirib boriladi. Natijada yechimning $x_0, x_1,..., x_n,..$ ketma-ketligi hosil qilinadi. Tenglamani yechishning iteratsion usuliga ko'ra uning ildiziga yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik $\lim_{n\to\infty}|x_n - \bar{x}| = 0$ tenglikning bajarilishidan chiqariladi.

Agar bunda x_{n+1} ni hisoblash uchun undan oldin hisoblangan bitta x_n yaqinlashshdan foydalanilsa, ya'ni $x_{n+1} = \varphi_n(x_n)$, u holda bu usul *bir nuqtali* (*bir qadamli*) yoki *oddiy iteratsiya usuli*, aks holda esa, ya'ni oldin hisoblangan birnechta yaqinlashishdan $x_{n+1} = \varphi_n(x_n, x_{n-1}, x_{n-2},\ldots)$ kabi foydalanilsa, u holda bu usul *ko'p nuqtali* (*ko'p qadamli*) *iteratsiya usuli* deb ataladi. Agar bunda φ_n funksiya n dan bog'liq bo'lmasa, *jarayon statsionar*, aks holda esa *nostatsionar* deb ataladi. Masalan, oddiy iteratsiya usuli statsionar va bir qadamli usul bo‘lib, birinchi tartibli iteratsion jarayonni ifodalaydi, Nyuton usuli esa statsionar va bir qadamli bo‘lib, ikkinchi tartibli iteratsion jarayonni ifodalaydi.

Agarda bunda $\{x_n\}$ ketma-ketlik $n \to \infty$ bo‘lganda aniq $\bar{x}$ yechimga bir tomonlama (chapdan yoki o‘ngdan yaqinlashsa – bir tomonlama usul) yoki ikki tomonlama (har ikkala tarafidan yaqinlashsa – ikki tomonlama usul) intilsa, *iterasiya jarayoni yaqinlashadi* deyiladi.

Faraz qilaylik, ε - ildizni topish talab qilinayotgan *absolyut aniqlik* bo‘lsin. *Hisoblash jarayonining tugallash kriteriyasi*: hisoblash jarayoni ikki tomonlama yaqinlashishida $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ shart yoki bir tomonlama yaqinlashishida $|f(x_{n+1})| < \varepsilon$ va $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ shartlar bajarilgunga qadar davom ettiriladi. Shuni ta’kidlaymizki, bir tomonlama usullar qo‘llanilayotganda ko‘proq nisbiy aniqlikdan foydalaniladi.

Iteratsion jarayonning yaqinlashish tezligi qo‘llanilayotgan taqribiy usullarning samaradorligini taqqoslashda muhim ahamiyatga ega. Iteratsion usul *m-tartibga* (yoki *m-tartibli yaqinlashish tezligiga*) ega deyiladi, agar *m* eng katta musbat son bo‘lib, uning uchun shunday q>0 – chekli musbat son mavjud bo‘lsaki, u ushbu

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \le q|x_n - \bar{x}|^m$$

shartni qanoatlantirsa. $(x_n - \bar{x})$ miqdor *iteratsiyaning bajarilayotgan qadamidagi absolyut xatosi*, q o‘zgarmas son *asimptotik xatoning konstantasi* deb ataladi. Bu q o‘zgarmas son $f(x)$ funksiyaning $x = \bar{x}$ nuqtadagi hosilasi orqali baholanadi.

Agar m=1 va $q \in (0;1)$ bo‘lsa, u holda qo‘llanilayotgan usul *chiziqli yaqinlashish tezligiga* ega deyiladi (ba’zida bu holdagi usul maxraji q ga teng bo‘lgan *geometrik progressiya tezligi bilan yaqinlashadi* deyiladi).

Agar baholash

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \le q_{n+1}|x_n - \bar{x}|^m, \quad n \to \infty \text{ da } q_n \to 0$$

kabi bo‘lsa, u holda bu usul *o‘ta chiziqli yaqinlashish tezligiga* ega deyiladi. O‘ta chiziqli tezlik haqida $1<m<2$ bo‘lganda ham gap borishi mumkin.

Agar m=2 bo‘lsa, u holda *yaqinlashish tezligi kvadratik* deb ataladi (bunda q ga cheklash qo‘yilmaydi). m>2 qiymatlarda unga mos usullar *yuqori tartibli* iteratsion usullar deb ataladi. Bunda *m* qancha katta bo‘lsa usulning yaqinlashishini bajaruvchi shart shuncha qat’iylashib boradi.

Hisoblashlarda q konstantaga nisbatan yaqinlashsh tezligi *m* ning ahamiyati kattaroq.

Agar ikkala usulda ham *m* bir xil bo‘lsa, u holda q kichik bo‘lgani tezroq yaqinlashadi.

Dastlabki hollarda chiziqli yaqinlashuvchi usul (q=0 bo‘lganda) kattaroq qiymatli kvadratik yaqinlashuvchu usulga nisbatan tezroq yaqinlashadi. *m* ning kattaroq qiymati tezroq yaqinlashishni ta’minlasada, q ning kichik qiymatida chiziqli tezlik ma’qul. Ammo q konstanta 1 ga yaqin bo‘lsa, u holda chiziqli tezlikning yaqinlashishi juda sustlashadi.

2.2. Tenglamaning ildizlarini ajratish

Tenglamaning ildizlarini ajratish – bu ildizlarning mavjudligini va sonini aniqlash hamda ularning har biri yotgan yetarlicha kichik [a,b] kesmani topishdan iborat.

Birinchi qadamda ildizlarning soni va turi aniqlanadi, ularning sonlar o‘qida taqsimlanishi baholanadi. Keyin esa ana shu ildizlar yotgan interval yoki ularning taqribiy qiymatlari topiladi.

Ildizlarni ajratish uchun ko‘pincha quyidagi teoremalardan foydalaniladi (ularni isbotsiz keltiramiz).

1-teorema (Boltsman–Koshi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya [a,b] kesmaning chetlarida har xil ishorali qiymatlarga ega bo‘lsa, u holda bu kesmaning ichida (2.1) tenglama hech bo‘lmaganda bitta ildizga ega. Agar (a,b) intervalda $f'(x)$ hosila mavjud bo‘lib, u o‘z ishorasini almashtirmasa, u holda bu ildiz yagona.

2-teorema. $f(x)$ funksiya [a, b] kesmada analitik funksiya bo‘lsin. Agar [a, b] kesmaning chetki nuqtalarida $f(x)$ funksiya har xil ishorali qiymatlarini qabul qilsa, u vaqtda (2.1) tenglamaning a va b nuqtalar orasida yotadigan ildizlarining soni toqdir. Agar $f(x)$ funksiya [a, b] kesmaning chetki nuqtalarida bir xil ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u vaqtda (2.1) tenglamaning ildizlari yoki [a, b] kesmada yotmaydi yoki ularning soni juftdir (karraliligini hisobga olgan holda). Transendent tenglamalar ildizlarining soni ixtiyoriy bo‘lishi mumkin.

Chiziqli bo‘lmagan tenglamalar uchun ildizlarni ajtatishning umumiy usuli yo‘q. Buning uchun ma’lum bir qadam bilan o‘zgaruvchi x larda $f(x)$ funksiyaning qiymatlarini hisoblab ko‘rish mumkin. Agar yonma-yon ikkita a va b nuqtalarda $f(x)$ funksiya har xil ishorali qiymatlar qabul qilsa, ya’ni, masalan, $f(a) < 0$ va $f(b) > 0$ bo‘lsa yoki $f(a)\cdot f(b) = 0$ shart bajarilsa, u holda [a,b] kesmada $f(x)$ funksiya uzluksiz bo‘lganligi uchun uning shu kesmada hech bo‘lmaganda bitta ildizi mavjud bo‘ladi.

Diqqat qiling, $f(a)\cdot f(b)<0$ tengsizlik bajarilmagani bilan [a,b] kesmada bir nechta ildizlar yotishi mumkin (2.3,a-rasm).

Muhandislik hisoblarida asosan haqiqiy ildizlarni topish talab etiladi. Haqiqiy ildizlarni ajratish masalasi umumiy holda quyidagi usullar bilan yechiladi: *analitik, jadval va grafik usullar*.

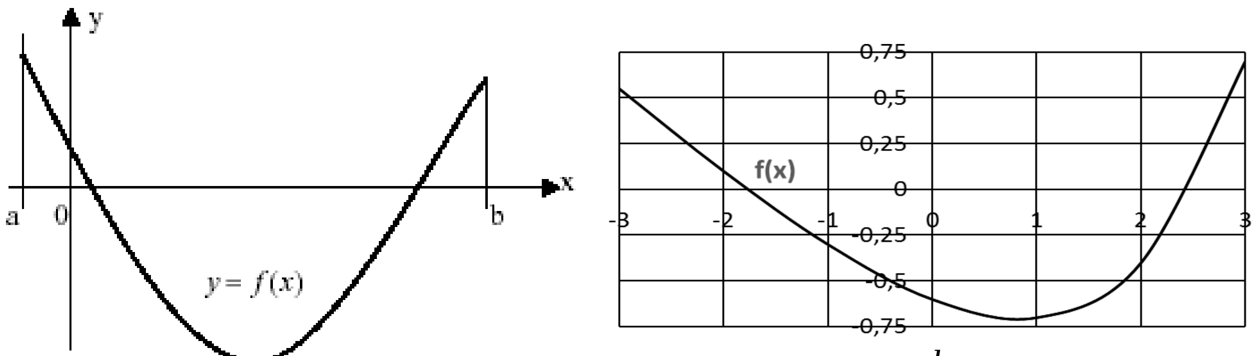
Tenglama ildizlarini ajratishning jadval usulida $f(x) = 0{,}4\cdot 2^x – 0{,}5\cdot x – 1 = 0$ funksiyaning qiymatlar jadvali tuziladi. Buning uchun kalkulyator yoki kompyuterdan (masalan, MS Excel jadval prosessoridan) foydalaniladi. MS Excel ning dastlabki ikki satriga x, $f(x)$ sarlavha qo‘yiladi (**A1** va **A2** yacheykalar). x ning qiymatlarini –5 dan 3 gacha 1 qadam bilan o‘zgaradi desak, **B1** yacheykaga –5, **C1** yacheykaga –4 yozilib, shu ikkala yacheyka belgilanib, 1-satr bo‘ylab **J1** yacheykagacha 3 soni hosil bo‘lguncha qadar tortiladi. **B2** yacheykaga =0,4*2^**B1**–0,5***B1**–1 formula yoziladi va hisoblanada, shu yacheyka belgilanib, **C2:J2** yacheykalarga tortiladi. Natija quyidagi jadval shaklida paydo bo‘ladi:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	f(x)	1,5125	1,025	0,55	0,1	-0,3	-0,6	-0,7	-0,4	0,7

Jadvaldan $f(x)$ funksiya ishorasining o‘zgarishiga qarab, ildizlar yotgan kesmalar [–2;–1] va [2;3] ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Endi $f(x)$ funksiyaning qiymatlar jadvalini belgilaymiz, uning grafigini chizish uchun MS Excel 2016 panelining Вставка → Диаграммы → Точечная → Точечная с гладкими кривыми tugmachalari bosiladi va 2.3,*b*-rasmdagi grafik hosil qilinadi. Grafikdan esa topilgan [–2;–1] va [2;3] kesmalarda berilgan tenglamaning yakkalangan ildizlari (funksiya grafigining absissa o‘qi bilan kesishgan nuqtalari) yotganligi ko‘rinadi.

Tenglama ildizlarini ajratish grafik usulda ($f(x)$ funksiyaning grafigini qurish orqali) yoki oralarida ildizlar yotgan ekstremumlarni analitik yo‘l bilan qurish orqali bajariladi. Tenglama haqiqiy ildizlarini baholashning grafik usuli yuqori aniqlik talab qilinmaydigan texnik hisoblarda juda ham keng qo‘llaniladi. Bu usul ikki uslubda amalga oshiriladi:

- $y = f(x)$ funksiyaning grafigi quriladi va uning abssissa o‘qi bilan kesishish nuqtalari aniqlanadi – bu $f(x)=0$ tenglama ildizlarining taqribiy qiymati.
- $f(x)=0$ tenglama $f_1(x) = f_2(x)$ ko‘rinishga keltiriladi (bu yerda $f_1(x)$ va $f_2(x)$ – elementar funksiyalar), keyin esa bu funksiyalar grafiklari kesishish nuqtalarining abssissalari aniqlanadi.



b

a

2.3-rasm. Tenglamaning kesmada ikkita ildizlari yotgan hol.

Tenglamaning barcha ildizlarini *analitik usul* bilan ajratishda $f(x)$ funksiyaning barcha kritik (uzilish, ekstremum, burilish va hokazo) nuqtalari, ya’ni $f'(x)=0$ bo‘lgan yoki $f'(\bar{x})$ hosila mavjud bo‘lmagan nuqtalar topiladi. Buni sonli usullar bilan, soddaroq hollarda esa analitik yo‘l bilan bajarish mumkin. Buning uchun $f'(x)=0$ tenglama x ga nisbatan yechiladi. Bundan tashqari bu funksiyaning hosilasi biror sababga ko‘ra mavjud bo‘lmagan barcha nuqtalar topiladi (masalan funksiya ifodasining maxraji nolga teng, logarifm ostida nol paydo bo‘ladi va hokazo). Ana shu nuqtalar (*kritik nuqtalar*) yoki ularga juda yaqin bo‘lgan nuqtalarda $f(x)$ funksiyaning ishorasi, ya’ni sign$f(x)$ tekshiriladi. Shundan keyin kritik nuqtalar (sonlar o‘qining chetki -∞ va ∞

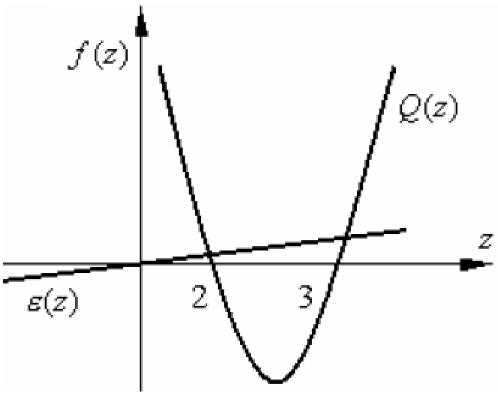
nuqtalari ham) atrofida funksiyaning ishorasi aniqlanadi, bu qatordan jadval tuziladi. Bu qatorda funksiyaning $f(x_i)$ qiymatlari ishorasining almashinishlari soni ildizlar sonini bildiradi, chetlarida sign$f(x)$ har xil bo‘lgan va o‘zida ildizlarni lokallashtirgan intervallar aniqlanadi. Ildiz yotgan intervalni qisqartirish maqsadida ekstremum nuqtalardan tashqari shunday qo‘shimcha nuqtalar kiritiladiki (masalan, kesmaning chegaralaridan biri ∞ bo‘lganda), natijada ildiz lokallashtiriladi.

Agar $f(z) = 0$ tenglamaning kompleks ildizlarini topish talab etilsa, u holda $z = x + iy$ almashtirish olinib, bu tenglama $f_1(x,y) + i\, f_2(x,y) = 0$ ko‘rinishga keltiriladi, bu yerdan esa ikkita $f_1(x,y) = 0$ va $f_2(x,y) = 0$ tenglamalar sistemasi yechilib, shu egri chiziqlarning kesishish nuqtalari topiladi. Topilgan kesishish nuqtalarning mos absissa va ordinatalari $f(z)=0$ tenglama ildizlarining mos haqiqiy va mavhum qismlarini ifodalaydi.

Chiziqli bo‘lmagan tenglama ildizlarini ajratishning quyidagi analitik usullari mavjud:

Bosh usul – bu tenglamaga kirgan funksiyalarning xossalarini bilish usuli. Masalan, $(x^2–3x+5)/(2+x^2)=0$ tenglamaning maxrajini qarab o‘tirishga hojat yo‘q, chunki u hech qachon nolga aylanmaydi.

Kichik parametr usuli. Faraz qilaylik, $f(z)=0$ ni quyidagicha $f(z)=Q(z)+\varepsilon(z)=0$ ifodalash mumkin bo‘lsin, bunda $\varepsilon(z) << Q(z)$ va $Q(z)$ ning ildizlari ma’lum. U holda $f(z)$ ning ildizlari $Q(z)$ ning ildizlari yaqinida yotadi. Masalan, $0{,}001x^3+x^2–5x+6=0$ tenglamaning ildizlari ushbu $\varepsilon(z) = 0{,}001x^3$ va $Q(z) = x^2 – 5x+6$ belgilashlarga ko‘ra $x=2$ va $x=3$ dan bir oz qo‘zg‘algan bo‘ladi (2.4-rasm).

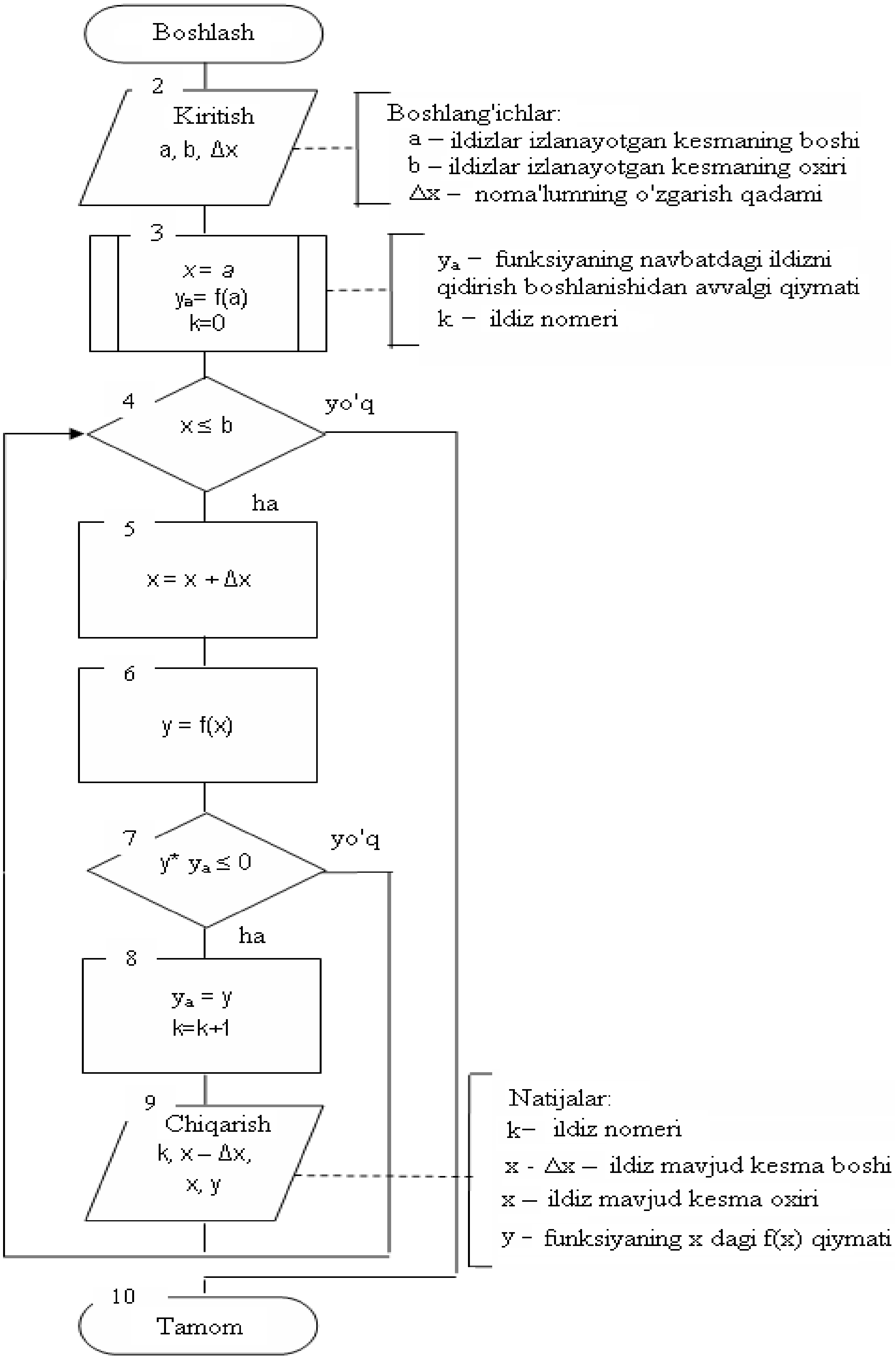


2.4.-rasm. Tenglama ildizlarini ajratishning kichik parametlar usuliga misol.

Tenglamaning haqiqiy ildizlarini ShEHM lar yordamida ajratish. Bu algoritm haqiqiy ildiz atrofida funksiya ishorasining o‘zgarishini tekshirishga asoslangan. Haqiqatdan ham, agar ildiz haqiqiy bo‘lsa, u holda funksiya grafigi absissa o‘qini kesib o‘tadi va bunda funksiya o‘zining ishorasini qarama-qarshisiga almashtiradi.

Funksiyaning aniqlanish sohasida berilgan kesmada chiziqli bo‘lmagan tenglamaning ildizlarini ajratish algoritmi va uning sxemasini qaraylik (2.5-rasm). Bu algoritm berilgan $[a,b]$ kesmadagi barcha haqiqiy ildizlarning taqribiy qiymatlarini topish imkonini beradi.

Bu algoritmga ozgina o‘zgartirish kiritish yo‘li bilan undan maksimal yoki minimal ildizlar taqribiy qiymatlarini aniqlash uchun ham foydalanish mumkin.



2.5-rasm. Tenglamaning haqiqiy ildizlarini ShEHM lar yordamida ajratishning blok-sxemasi.

Ikkita ildizdan «sakrab o‘tib ketmaslik» uchun noma’lumning Δx orttirmasini uncha katta olmaslik kerak. Bu usulning kamchiligi shundaki, undan fodalanilganda ko‘p mashina vaqti sarflanadi.

Shunday qilib, $f(x) = 0$ tenglamaning ildizlarini ajratish jarayonida quyidagi holatlar kuzatiladi:

- $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasida grafigi chizilib, uning Ox o‘qi bilan kesishgan nuqtalari topiladi. Bu nuqtalarga mos keluvchi $\overline{x}$ lar taqribiy yechim deb qabul qilinadi;
- $f(x)$ funksiyaning grafigi chiziladi va uning absissa o‘qi bilan kesishish nuqtalari yotgan taqribiy oraliq aniqlanadi;
- ba’zi hollarda $f(x)=0$ tenglamani $f_1(x)=f_2(x)$ ko‘rinishdagi ekvivalent tenglamaga keltirish maqsadga muvofiq, chunki bunday holda $y=f(x)$ funksiyaning grafigidan ko‘ra $y = f_1(x)$ va $y = f_2(x)$ funksiyalarning grafiklarini chizish osonroq. Bunday holda $f(x)=0$ tenglamaning ildizini $y = f_1(x)$ va $y = f_2(x)$ funksiyalar grafiklarining kesishish nuqtasi absissasi ifodalaydi;
- taqribiy ildiz yotgan $[a,b]$ kesmaning haqiqatda to‘g‘ri olinganligini analitik yo‘l bilan tekshirib ko‘rish mumkin. Buning uchun yana ildizning mavjudlik sharti $f(a)f(b)<0$ dan foydalanamiz. Agar bu shart bajarilsa, u holda $[a,b]$ kesma to‘g‘ri tanlangan bo‘ladi.

Xulosa qilib aytganda, ildizlarni aniqlashtirishni uchta yo‘nalishga guruhlashtirish mumkin:

- $f(x_i)=0$ tenglamaning yechimi bo‘lishi mumkin bo‘lgan barcha x_i argumentlarni saralash yo‘li bilan izlash;
- $f(x)$ funksiyaning ildizlarini topishni unga yaqin bo‘lgan soddaroq funksiya (chiziqli, parabolik va boshqa) ildizlarini topishning iteratsion proseduralariga almashtirish;
- $f(x)=0$ tenglamani ushbu $x=\varphi(x)$ formulaga keltirish va iteratsion yo‘l bilan tenglikning o‘ng va chap taraflari tengligini ta’minlashga intilish.

Bularga ko‘ra, masalan, skanirlash va biseksiya usullari birinchi yo‘nalishga, vatarlar va urinmalar usullari ikkinchi yo‘nalishga va oddiy iteratsiya usuli esa uchinchi yo‘nalishga kiradi.

Namunaviy misollar va ularning yechimlari

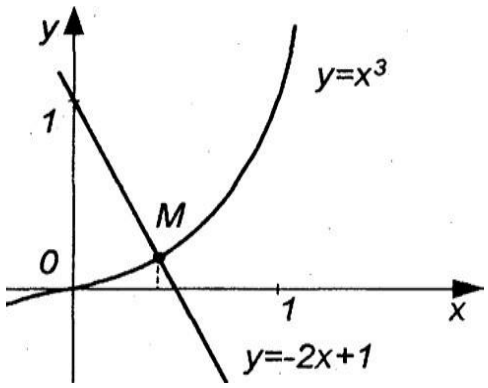
1–misol. Ushbu $x^3+2x-1=0$ tenglamaning ildizlarini ajrating.

Yechish. ***1–uslub.*** Berilgan misolda $f(x) = x^3+2x-1$ va $f'(x) = 3x^2+2$ bo‘lib, bu $f(x)$ funksiya uchun barcha x larda $f'(x) > 0$ bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya $(-\infty,\infty)$ oraliqda o‘suvchi bo‘ladi. Berilgan tenglamaning ildizi yotgan chekli $[a,b]$ kesmani topaylik. Tanlash usuli bilan $f(x)$ funksiya kesmaning oxirgi nuqtalarida har xil ishorali qiymatlar qabul qiladigan $[a,b]$ kesmani topamiz. Buning uchun argumentning bir necha qiymatlarida funksiyaning qiymatlarini hisoblaymiz, masalan, $f(-1) = -4 < 0$, $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 2 > 0$. Boltsman–Koshi teoremasiga ko‘ra berilgan tenglamaning ildizi [0;1] kesmada yotibdi va u yagona, chunki $f'(x)$ hosila (0;1) intervalda musbat va o‘z ishorasini saqlaydi.

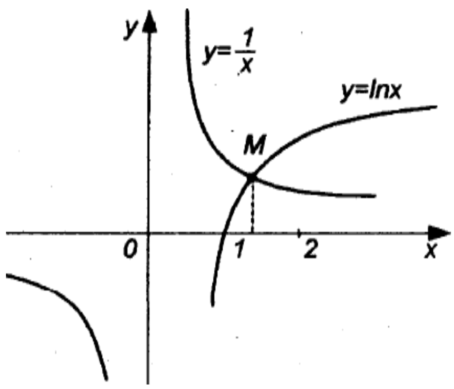
2–uslub. Berilgan tenglamaning ildizini grafik usulda ajratish uchun uni $x^3 = -2x + 1$, ya’ni $f_1(x)=f_2(x)$ ko‘rinishda ifodalaymiz. Endi $y = x^3$ va $y = -2x+1$ funksiyalarning grafiklarini chizamiz. Bu grafiklar absissasi (0;1) oraliqda bo‘lgan M nuqtada kesishadi (2.6-rasm).

2–misol. Ushbu $x\cdot\ln x-1 = 0$ tenglamaning ildizlarini grafik usulda ajrating.

Yechish. Berilgan tenglamani $\ln x=1/x$ ko‘rinishda yozib olib, $y = \ln x$ va $y = 1/x$ elementar funsiyalarning grafiklarini chizamiz. Bu funksiyalarning grafiklari absissasi (1;2) oraliqqa tegishli yagona M nuqtada kesishishadi. Shunga ko‘ra, berilgan tenglamaning yagona ildizi (1;2) oraliqda yotadi (2.7-rasm).



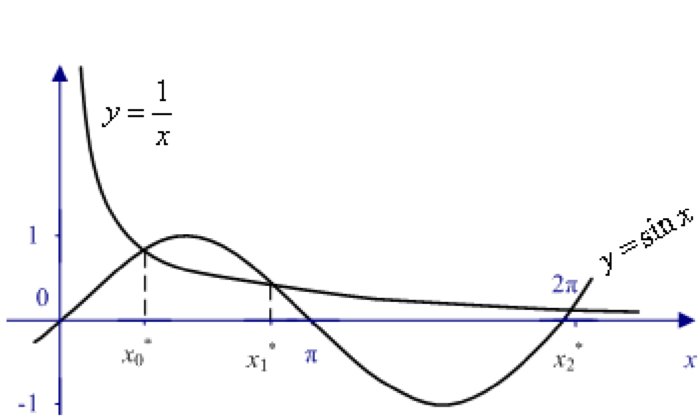
2.6-rasm. $x^3 +2x-1=0$ tenglamaning ildizini grafik usulda ajratish.



2.7-rasm. $x\cdot\ln x-1 = 0$ tenglamaning ildizini grafik usulda ajratish.

3-misol. Ushbu $x\cdot\sin x = 1$ yoki $f(x)=x\cdot\sin x-1=0$ tenglamaning ildizlarini toping.

Yechish. $f(x)$ funksiyani $\sin x = 1/x$ ko‘rinishda ifodalab, uning ildizlarini grafik usulda aniqlaylik (2.8-rasm). Tenglamaning ildizlari Oy o‘qqa nisbatan simmetrik, shuning uchun uning faqat musbat ildizlarini qarashimiz yetarli. x^*_1, x^*_2, … larning qiymatlarini yetarlicha aniqlikda

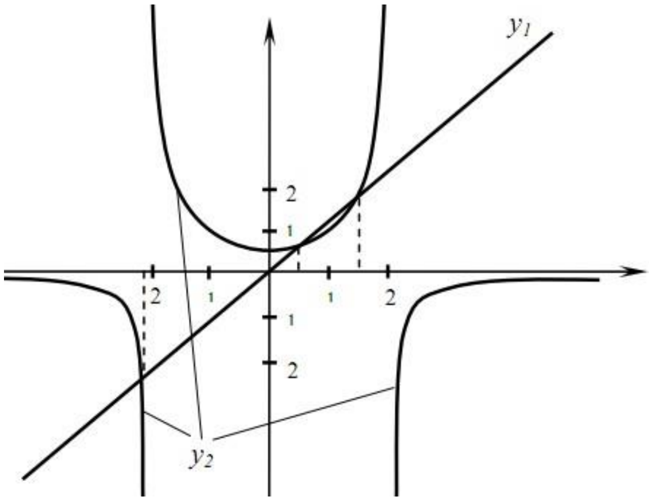


2.8-rasm. Cheksiz ko‘p ildizga ega tenglamaning ildizlarini grafik usulda ajratish.

hisoblashimiz mumkin, ammo $n\to\infty$ da x^*_n ning qiymatini aniqlab bo‘lmaydi. Shunga qaramasdan grafikdan ko‘rinadiki, $n \gg 1$ da x^*_n ildizlar $n\pi$ ga yaqin. Bu olingan qiymatlarni tenglama ildizlarining $(x^*_1)^0$, $(x^*_2)^0$, … boshlang‘ich yaqinlashishlari qiymatlari deb qabul qilib, ildizlarni biror taqribiy usul yordamida aniqlashtirishimiz mumkin.

4-misol. Ushbu $x^3–4x+2=0$ tenglamaning ildizlarini ajrating.

Yechish. Avvalo bu tenglamani quyidagi ko‘rinishga keltiramiz: $x(x^2–4)+2 = 0$ yoki $x=–2/(x^2–4)$. Bunga ko‘ra quyidagi ikkita funksiyaning grafigini chizamiz (2.9-rasm): $y_1 = x$ va $y_2 = –2/(x^2–4)$. Bu funksiyalar grafiklarining kesishish nuqtalari abscissalari ildizlarning taqribiy qiymatini beradi: $x_1 \approx –2{,}2$; $x_2 \approx 0{,}5$; $x_3 \approx 1{,}6$. Demak, berilgan tenglama uchta haqiqiy ildizga ega ekan, ularning qiymatlari esa tanlangan taqribiy usulga ko‘ra aniqlashtiriladi. Bu aniqlashtirishlar amalga oshiriladigan kesmalar quyidagilar:



2.9-rasm. Bir nechta ildizga ega tenglamaning ildizlarini grafik usulda ajratish.

$$x_1 \in [-2{,}5; -2{,}0]\,; \quad x_2 \in [0; 0{,}8]\,; \quad x_3 \in [1{,}2; 1{,}8]\,.$$

5-misol. Ushbu $5^x – 6x – 3 = 0$ tenglamaning ildizlarini analitik usulda ajrating.

Yechish. Bu yerda $f(x) = 5^x – 6x – 3 = 0$ kabi belgilash kiritamiz. Hosilasini topamiz: $f'(x) = 5^x \cdot \ln 5 – 6$. Hosilaning ildizlarini topamiz:

$$5^x \cdot \ln 5 – 6 = 0; \quad 5^x = 6/\ln 5; \quad x \cdot \lg 5 = \lg 6 – \lg(\ln 5);$$

$$x = \frac{\lg 6 - \lg(\ln 5)}{\lg 5} = \frac{0{,}7782 - 0{,}2065}{0{,}6990} = \frac{0{,}5717}{0{,}6990} \approx 0{,}82.$$

$f(x)$ funksiya ishoralari jadvalini x ning qiymati funksiyaning: *a*) kritik qiymatlariga (hosila ildizlariga) yoki ularga yaqin qiymatlarga; *b*) chegaraviy qiymatlariga (noma’lumning aniqlanish sohasi qiymatlaridan kelib chiqib) teng deb tuzamiz:

x	$–\infty$	1	$+\infty$
sign $f(x)$	+	–	+

Jadvaldan ko‘rinadiki, funksiya ishorasining ikki marta o‘zgarishi kuzatilmoqda, shunga ko‘ra berilgan tenglama ikkita haqiqiy ildizga ega. Ildizlarni ajratish operatsiyasini yakunlash uchun ildizlarni o‘z ichiga olgan va uzunligi 1 dan katta bo‘lmagan oraliqni aniqlashimiz lozim. Buning uchun $f(x)$ funksiya ishoralarining yangi jadvalini tuzamiz:

x	–1	0	1	2
sign $f(x)$	+	–	–	+

Shunday qilib, haqiqiy ildizlar yotgan oraliqlar: $x_1 \in [–1; 0]$; $x_2 \in [1; 2]$.

2.3. Algebraik tenglamaning ildizlarini ajratish

Ko‘phadning, ya’ni (2.2) algebraik tenglamaning ildizlarini ajratish masalasi yaxshi o‘rganilgan va ancha osondir, bunda a_i (i=0,1,…,n) koeffisiyentlar ham haqiqiy va ham kompleks sonlardan iborat bo‘lishi mumkin. Faqat shuni ta’kidlaymizki, bunda (2.2) ko‘phadni ko‘paytuvchilarga ajratish, Gorner sxemasi, o‘rniga qo‘yish orqali akslantirish (masalan, $x=cy$, $x=y\pm a$, $x=1/y$ kabi almashtirishlar), Bernulli usuli va boshqa usullar bu algebraik tenglamaning ildizlarini ajratish masalasini soddalashtiradi.

Quyidagi teoremalarning birinchisi boshqalariga nisbatan umumiyroqdir, chunki u kompleks ildizlarining ham chegaralarini beradi. Biz har doim (2.2) tenglamada koeffisentlar haqiqiy va $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$ deb olamiz.

3-teorema. Agar

$$A = \max_{1\le k\le n}\left|\frac{a_k}{a_0}\right|;\ A_1 = \max_{1\le k\le n-1}\left|\frac{a_k}{a_n}\right|$$

bo‘lsa, u holda (2.2) tenglamaning barcha ildizlari ushbu

$$r = \frac{1}{1+A_1} < |x| < 1 + A = R$$

xalqa ichida yotadi.

*Isbot***.** Faraz qilaylik, $|x|>1$ bo‘lsin. Modulning xossalariga ko‘ra

$$|f(x)| = \left|a_0x^n\left(1+\frac{a_1}{a_0x}+\dots+\frac{a_n}{a_0x^n}\right)\right| \ge |a_0x^n|\left[1-A\left(\frac{1}{|x|}+\dots+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{|x|^n}\right)\right] > |a_0x^n|\left(1-\frac{A}{|x|-1}\right) = |a_0x^n|\,\frac{|x|-1-A}{|x|-1}.$$

Agar biz bu yerda $|x|\ge 1+A$ deb olsak, u holda $|f(x)|>0$ tengsizlik kelib chiqadi. Boshqacha qilib aytganda, x ning bu qiymatlarida $f(x)$ ko‘phad nolga aylanmaydi, ya’ni (2.2) tenglama ildizga ega bo‘lmaydi. Shu bilan teoremaning yarmi isbot bo‘ldi.

Teoremaning ikkinchi yarmini isbotlash uchun $x=1/y$ deb olib, $f(x)=1/y^n$ ga ega bo‘lamiz, bu yerdan

$$g(y) = a_ny^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_1y + a_0 = 0.$$

Teoremaning isbot qilingan qismiga ko‘ra $g(y)$ ko‘phadning $y_n=1/x_k$ ildizlari (nollari) ushbu

$$|y_k| = \frac{1}{|x_k|} < 1 + A_1$$

tengsizlikni qanoatlantiradi, bundan esa quyidagi tengsizlik kelib chiqadi:

$$|x_k| > \frac{1}{1+A_1}$$

Eslatma: Bu teoremadagi r va R sonlar (2.2) tenglama musbat ildizlarining quyi va yuqori chegaralari bo‘ladi. Shunga o‘xshash, $-r$ va $-R$ sonlar manfiy ildizlarning mos ravishda quyi va yuqori chegarasi bo‘ladi.

Ildizlarning chegaralari uchun bu teoremadagi baho ancha qo‘poldir.

Quyidagi teoremalar bunga nisbatan ancha yaxshiroq baholarni beradi.

4-teorema (Lagranj teoremasi). n-darajali haqiqiy koeffisiyentli (2.2) algebraik tenglama musbat haqiqiy ildizlarining yuqori chegarasi R_B^+ quyidagi Lagranj (Makloren) formulasi bo‘yicha aniqlanadi:

$$R_B^+ = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}, \quad B = \max_{a_i<0} |a_i| \ ,$$

bunda $a_0>0$; $k \geq 1$ – ko‘phadning manfiy koeffitsiyentlaridan eng birinchisining nomeri; B – ko‘phad manfiy koeffitsiyentlari ichidan moduli bo‘yicha eng kattasining qiymati.

(2.2) tenglama musbat haqiqiy ildizlarining quyi chegarasi R_b^+ ni ushbu

$$P'_n(x) = x^n \cdot P_n\left(\frac{1}{x}\right)$$

yordamchi tenglamadan aniqlaymiz. Xususan, (2.2) tenglama musbat haqiqiy ildizlarining yuqori chegarasi R_1 bo‘lsa, u holda quyi chegarasi $1/R_1$ bo‘ladi.

Bu aytilganlarga ko‘ra (2.2) tenglamaning barcha musbat haqiqiy ildizlari $R_b^+ < x^+ < R_B^+$ intervalda yotadi.

Xuddi shunday, (2.2) tenglamaning barcha manfiy haqiqiy ildizlari yotgan intervalni topish uchun quyidagi funksiyalardan foydalaniladi:

$$P_n^2(x) = P_n(-x) \quad \text{va} \quad P_n^3(x) = x^n P_n\left(-\frac{1}{x}\right).$$

Bularga ko‘ra $R_b^- < x^- < R_B^-$; $R_b^- = \dfrac{1}{R_3}$; $R_B^- = R_2^2$.

Lagranj formulasi barcha haqiqiy musbat yoki manfiy ildizlar yotgan intervalni aniqlash imkonini beradi, ammo har bir ildiz yotgan intervalni topish uchun esa qo‘shimcha tadqiqod o‘tkazish lozim bo‘ladi.

5-teorema (Nyuton teoremasi). Agar $x=c>0$ uchun $f(x)$ ko‘phad va uning barcha $f'(x)$, $f''(x)$,…, $f^{(n)}(x)$, hosilalari nomanfiy bo‘lsa, yani $f^{(k)}(c) \geq 0$, $(k=0,1,...,n)$, u holda $R=c$ ni (2.2) tenglamaning musbat ildizlari uchun yuqori chegara deb hisoblash mumkin.

Isbot. Teylor formulasiga ko‘ra

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n .$$

Teorema shartiga ko‘ra $x>c$ bo‘lganda bu tenglikning o‘ng tomoni musbatdir. Demak, (2.2) tenglamalarning barcha x^+ musbat ildizlari $x^+<R$ tengsizlikni qanoatlantiradi.

Bu teoremalar faqat musbat ildizlarning yuqori chegarasini aniqlaydi. Quyidagi

$$f_1(x) = (-1)^n f(-x) = a_0x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n,$$

$$f_2(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0,$$

$$f_3(x) = (-x)^n f\left(-\frac{1}{x}\right) = a_nx^n - a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_0$$

ko‘phadlarga yuqoridagi teoremalarni qo‘llab, $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ lar musbat ildizlarining yuqori chegaralari R_0, R_1, R_2, R_3 larni mos ravishda topgan bo‘lsak, u vaqtda (2.2) tenglamaning hamma x^+ musbat ildizlari $1/R^2 \le x^+ \le R$ va hamma x^- manfiy ildizlari esa $-R_1 \le x^- \le -1/R_3$ tengsizlikni qanoatlantirar ekan.

Endi oliy algebradan ma’lum bo‘lgan quyidagi teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

Gauss teoremasi. n-darajali ko‘phad n ta haqiqiy yoki kompleks ildizlarga ega bo‘ladi, agar k-karrali ildizni k marta hisoblash mumkin bo‘lsa.

Bezu teoremasi. $P(x)$ ko‘phadni $(x-a)$ ikkihadga bo‘lishdan qolgan qoldiq $P(a)$ ga, ya’ni ko‘phadning $x=a$ dagi qiymatiga teng.

Bezu teoremasi kompleks sohada ham o‘rinli.

Dikart teoremasi. (2.2) tenglama koeffisentlaridan tuzilgan sistemada ishora almashtirishlar soni qancha bo‘lsa (sanashda nolga teng koeffisentlarga e’tibor qilmaymiz), tenglamaning shuncha musbat ildizi mavjud yoki musbat ildizlar soni ishora almashtirishlar sonidan juft songa kamdir.

Faraz qilaylik, (2.2) tenglama karrali ildizga ega bo‘lmasin. Biz $f_1(x)$ orqali $f'(x)$ hosilani, $f_2(x)$ orqali $f(x)$ ni $f_1(x)$ ga bo‘lganda hosil bo‘lgan qoldiqning teskari ishora bilan olinganini, $f_3(x)$ orqali $f_1(x)$ ni $f_2(x)$ ga bo‘lganda hosil bo‘lgan qoldiqning teskari ishora bilan olinganini, va h.k. belgilaymiz va bu jarayonni qoldiqda o‘zgarmas son hosil bo‘lguncha davom ettiramiz. Natijada Shturm qatori deb ataluvchi ushbu

$$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_k(x)$$

funksiyalar ketma-ketligiga ega bo‘lamiz.

Shturm teoremasi. $f(x)$ ko‘phadning ildizlaridan farqli a va b ($a < b$) sonlarni olib, x ni a dan b gacha o‘zgartirganda $f(x)$ uchun tuzilgan Shturm qatorida nechta ishora almashinishlar yo‘qolsa, $f(x)$ ning (a,b) oraliqda xuddi shunday haqiqiy ildizlari mavjud bo‘ladi.

Shturm teoremasi ildizlarni ajratish masalasini to‘la hal qiladi, lekin Shturm qatorini tuzish bilan bog‘liq bo‘lgan hisoblashlar ko‘p vaqt talab qiladi. Shturm teoremasining qo‘llanilishi quyidagichadir. Avval (2.2) tenglamaning barcha ildizlari yotgan oraliqning chegaralari aniqlanadi. Topilgan $[a,b]$ kesma α_j nuqtalar bilan kichik oraliqchalarga bo‘linadi. Shturm teoremasi yordamida tenglamaning $[\alpha_i,\alpha_{i+1}]$ kesmadagi ildizlarining soni aniqlanadi. Agar bu kesmalarda ildizlarning soni bittadan ko‘p bo‘lsa, kesma ikkiga bo‘linadi va har bir kesma uchun Shturm teoremasi qo‘llaniladi. Bu jarayonni shu paytgacha davom ettiramizki, toki har bir kesmachalardagi ildizlar soni bittadan ortmasin. Shuni ham eslatib o‘tish kerakki, Shturm qatoridagi $f_i(x)$ funksiyalarni musbat sonlarga ko‘paytirish yoki bo‘lish mumkin, bundan ishora almashtirishlar soni o‘zgarmaydi.

Namunaviy mashqlar va ularning yechimlari

1-misol. Ushbu $f(x)=3x^8-5x^7-6x^3-x-9=0$ tenglama (ko‘phad)ning musbat va manfiy ildizlari chegarasini Lagranj formulasi yordamida aniqlang.

Yechish. Berilganlarlarga ko‘ra:

$$k=1;\ B=|-9|=9;\ a_n=3;\ R_B^+=1+\sqrt[1]{\frac{9}{3}}=4.$$

Yordamchi tenglamani tuzamiz:

$$P_n'(x)=9x^8+x^7+6x^5+5x-3=0,$$

bu yerdan esa

$$k=8;\ B=|-3|=3;\ a_n=9;\ R_b^+=\frac{1}{R'}=\frac{1}{1+\sqrt[8]{\frac{3}{9}}}=\frac{1}{1{,}87}=0{,}5.$$

Bu yerdan musbat ildizlarning chegarasi $0{,}5\le x^+\le 4$ ekanligi kelib chiqadi. Endi manfiy ildizlarning chegarasini aniqlaylik:

$$P_n^2(x)=P_n(-x)=3x^8+5x^7+6x^3+x-9=0;$$

$$R_B^-=1+\sqrt[8]{\frac{9}{3}}=1+\sqrt[8]{3}\approx 2{,}0;$$

$$R_b^3=(x)=x^n\cdot P_n\left(-\frac{1}{x}\right)=9x^8-x^7-6x^5-5x-3=0;$$

$$k=8;\quad B=|-6|=6;\quad a_n=9;\qquad R_b^-=\frac{1}{R_4}=\frac{1}{1+\frac{6}{9}}=\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}=0{,}6.$$

Bu yerdan esa manfiy ildizlarning chegarasi $-2\le x^-\le 0{,}6$ ekanligi kelib chiqadi. Har bir ildiz yotgan intervalni topish uchun esa qo‘shimcha tadqiqod o‘tkazish lozim bo‘ladi. Buni quyidagi misolda ko‘ramiz.

2-misol. Quyidagi tenglama haqiqiy ildizlarning chegarasini toping:

$$f(x)=x^4-5x^2+8x-8=0.$$

Yechish. 3-teoremani qo‘llaymiz, bu yerda $a_0=1$, $A=8$. Demak $R=1+8=9$, demak tenglamaning ildizlari (-9; 9) oraliqda yotar ekan.

Endi Lagranj teoremasini qo‘llaymiz: $a_0=1$, $k=2$, $B=8$. Musbat ildizlarning yuqori chegarasi uchun

$$R = 1 + \sqrt{\frac{8}{1}} = 1 + 2\sqrt{2} < 3{,}84$$

ni hosil qilamiz. Berilgan tenglamada x ni $-x$ ga almashtirsak,

$$f_1(x) \equiv x^4 - 5x^2 - 8x - 8 = 0$$

tenglama kelib chiqadi. Bu tenglama musbat ildizlarning yuqori chegarasi uchun ham R<3,84 tengsizlik kelib chiqadi, ya'ni Lagranj teoremasiga ko'ra misol shartida berilgan tenglamaning ildizlari (–3,84; 3,84) kesmada joylashgan ekan.

Nyuton teoremasini qo'llaylik. Bu yerda $f_1(x) = x^4 - 5x^2 - 8x - 8 = 0$,

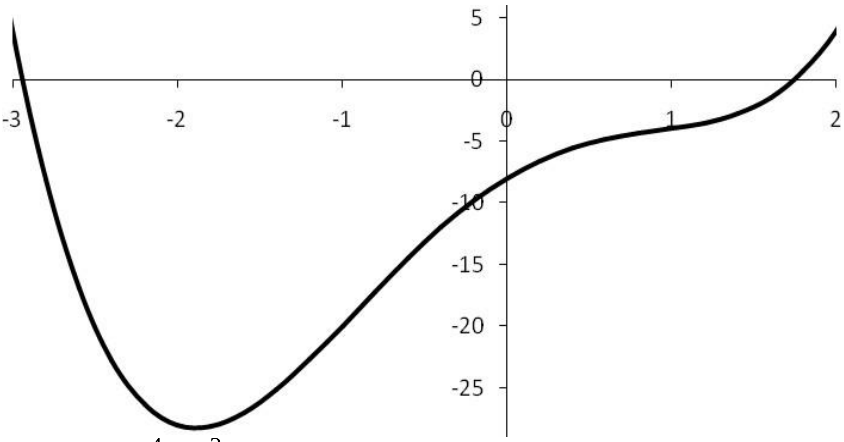
$$f'(x) = 4x^3 - 10x - 8,\ f'(x) = 12x^2 - 10,\ f''(x) = 24x,\ f^{IV}(x) > 0,$$

ko'rinib turibdiki, $x > 2$ uchun

$$f^{IV}(x) > 0, \quad f''(x) > 0, \quad f'(x) > 0 \ \text{va} \ f'(x) > 0.$$

Osongina payqash mumkinki, $x > 2$, bo'lsa $f(x)$ ham faqat musbat qiymat qabul qiladi, ya'ni c=2 musbat ildizlarining yuqori chegarasi ekan. Xuddi shuningdek, $f_1(x)$=0 tenglama musbat ildizlarning yuqoroi chegarasi c=3 ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Demak, berilgan tenglamaning ildizlari (–3; 2) kesmada yotar ekan (2.10-rasm).

Har uchala usul natijalarini solishtirsak, Nyuton usuli, garchi ko'proq mehnat talab qilsada, ildizlar chegaralari uchun yaxshiroq natija berishi ko'rinadi.



2.10-rasm. $f(x)=x^4-5x^2+8x-8=0$ funksiyaning Excel da chizilgan grafigi.

3-misol. Ushbu $f(x)=x^4-x^3-2x^2+3x-3=0$ tenglamaning ildizlarini analitik usul bilan ajrating.

Yechish. Berilgan $f(x)$ funksiya grafigining kritik nuqtalarini

$$f'(x) = 4x^3-3x^2-4x+3 = 0 \quad \text{yoki} \quad 4x(x^2-1)-3(x^2-1) = 0$$
$$\text{yoki} \ (4x-3)(x^2-1)=0 \quad \text{yoki} \ (4x-3)(x-1)(x+1)=0$$

tenglamadan aniqlaymiz: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3/4$.

$f(x)$ funksiya ishoralarining jadvalini quramiz:

x	$-\infty$	-1	3/4	1	$+\infty$
sign $f(x)$	+	–	–	–	+

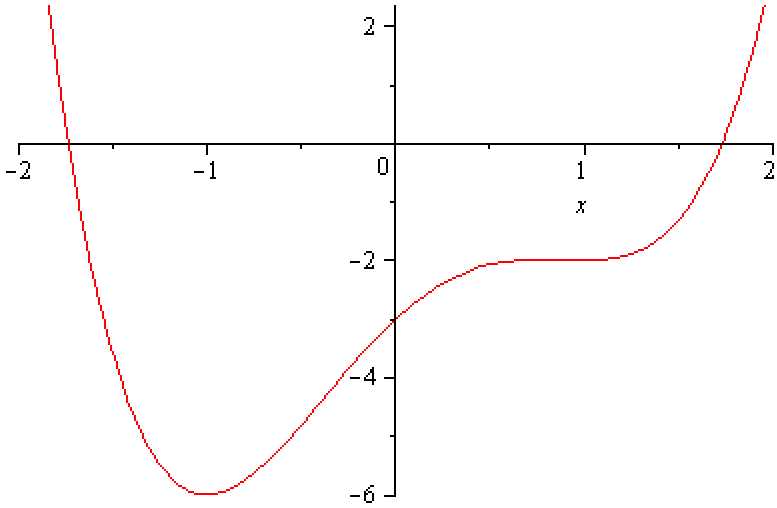
Bu jadvaldan ko‘rinadiki, berilgan $f(x)$ funksiya ikkida haqiqiy ildizga ega: $x_1 \in (-\infty; -1]$ va $x_2 \in [1; +\infty)$. Ildizlar yotgan oraliqlarni kichraytiramiz:

x	$-\infty$	-2	$3/4$	1	$+2$	$+\infty$
sign $f(x)$	+	+	–	–	+	+

Shunday qilib, haqiqiy ildizlar yotgan kesmalar: $x_1 \in [-2; -1]$ va $x_2 \in [1; 2]$.

Berilgan tenglamaning ildizlarini ajratishni uning Maple dasturida chizilgan grafigidan ko‘ramiz:

$>$*with*(*plots*):
$f := x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3;$
plot($f, x = -2..2$);



Sinov savollari

1. Chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni yechishning aniq usullaridan qaysilarini bilasiz?
2. Ildizlarni ajratishning birinchi bosqichida nima qilish kerak?
3. Chiziqli bo‘lmagan tenglama yechimining mavjudligi shartini ayting. Bu talablar zarur va yetarli shart bo‘la oladimi?
4. Agar $f(a) \cdot f(b) = 0$ shart bajarilsa siz bu vaziyatda qanday yo‘l tutasiz?
5. Chiziqli bo‘lmagan tenglama yechimining mavjudligini aniqlashda $[a,b]$ kesma kattaroq qilib tanlansa, qanday «salbiy holatlar» yuzaga keladi?

Mashqlar

Quyidagi tenglamalarning haqiqiy ildizlarini ajrating:

1. $x^2 - 20\sin x = 0$;
2. $2^x - 2x^2 + 1 = 0$;
3. $x^4 + 2x - 6 = 0$;
4. $2.2x - 2^x = 0$;
5. $e^x + x^2 - 2 = 0$;
6. $1{,}8x^2 + \cos(x+2) = 0$;
7. $x^4 + x^2 - 2x - 2 = 0$;
8. $2x - 3\ln x - 3 = 0$;
9. $x^4 - 35x^3 + 38x^2 - 10x + 1 = 0$;
10. $x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$;
11. $x^2 - \cos x = 0$;
12. $\mathrm{ctg} x - x/3 = 0$;
13. $x^2 + 4x\sin x = 0$;
14. $1{,}8x^2 - \sin 10x = 0$;
15. $x\lg x - 1{,}2 = 0$;
16. $\mathrm{ctg} 1{,}05x - x^2 = 0$.

Izoh. Bu jarayonni MS Excel dasturi yoli matematik paketlardan biri yordamida ham bajarib, olingan natijalarning to‘g‘ri ekanligiga yana bir bor ishonch hosil qiling.

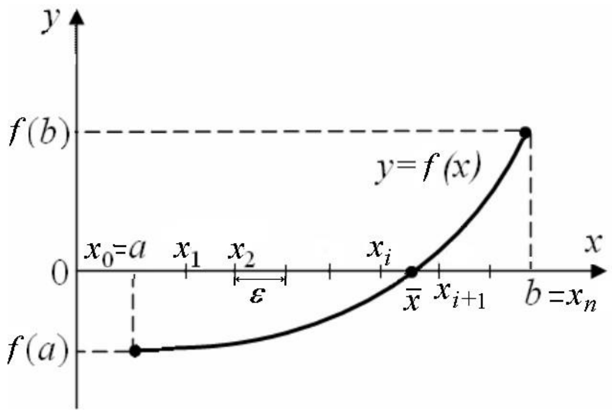
2.4. Nochiziqli tenglama oddiy ildizlarini topishning taqribiy usullari

Quyida $f(x)=0$ tenglamaning faqat oddiy ildizlarini topish masalasi qaraladi. Buning uchun masala umumiy holda quyidagi shartlar bilan qo‘yiladi.

Masalaning qo‘yilishi. Chekli $[a,b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz, ikki marta differensiyallanuvchan, ya’ni birinchi va ikkinchi tartibli hosilalari shu kesmada mavjud va unda bu hosilalari o‘z ishorasini saqlaydigan (birinchi hosilasi nolga aylanmaydigan) $f(x)$ funksiya uchun $f(x)=0$ tenglama $[a,b]$ kesmada yagona yechimga ega bo‘lsin va bu yechimni berilgan $\varepsilon > 0$ aniqlikda taqribiy hisob usullari yordamida topish talab qilinadi.

Skanirlash usuli. Berilgan $f(x)=0$ tenglamaning $[a,b]$ kesmadagi ildizi ajratilgan bo‘lsin. $[a,b]$ kesma berilgan yetarlicha kichik ε uzunlikdagi kesmalarga bo‘linadi va hosil bo‘lgan kesmalarning oxirlarida $y=f(x)$ funksiyaning qiymatlari hisoblanadi. Bu qiymatlarni tahlil qilish bilan qaysi oraliqda funksiya o‘z ishorasini almashtirayotganligini (yoki qiymati aniq nolga teng ekanligini (bu juda kamdan kam holda kuzatiladi)) aniqlash mumkin (2.11-rasm).

(2.1) tenglamaning yechimi sifatida tanlangan kesmaning chegaralaridagi xoxlagan x_i – chap yoki x_{i+1} – o‘ng uchi nuqtasini, yanada aniqroq bo‘lishi uchun esa, kesmaning o‘rtasidagi $\bar{x} = (x_i + x_{i+1})/2$ nuqtani olish mumkin. Bu bilan biz talab qilingan ε aniqlikdagi yechimga erishgan bo‘lamiz. Amaliyotda bu usul qo‘llanilganda ko‘pincha $[a,b]$ kesma 2ε yoki $\varepsilon/2$ uzunlikdagi kesmalarga bo‘linishi ham mumkin, bu asosiy natijaga deyarli ta’sir qilmaydi.



2.11-rasm. Skanirlash usulining sxematik tasviri.

Usulning samaradorligini oshirish maqsadida aniqlashtirishni bir necha bosqichda bajarish ham mumkin. Dastlabki bosqichda $[a,b]$ kesma ε ning kattaroq qiymatlarida bo‘laklarga bo‘linadi, ya’ni qo‘pol yechim topiladi. Keyingi bosqichda esa shu topilgan oxirgi kesma bo‘lagi yana bo‘laklarga bo‘linadi va yanada aniqroq yechimga erishiladi. Bu jarayon bir necha marotaba takrorlanishi ham mumkin. Bu bilan kamroq qadamlar bilan berilgan xatolikdagi yechimga erishish mumkin.

Bu usul juda ham sodda bo‘lganligi uchun uning tahliliga va tadbiqiga oid misollarga to‘xtalib o‘tirmaymiz.

Kesmani teng ikkiga bo‘lish usuli (dixotomiya usuli). Bu usul $f(x)$ funksiya haqida ma’lumotlar juda ham kam bo‘lganda foydalanishga qulay. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalning qaysidir bir nuqtasida nolga aylanishini aniqladik, bunda ildizdan chaproqda $f(x)<0$ va o‘ngroqda esa $f(x)>0$. Bunday holda izlanayotgan ildizni topish murakkab bo‘lmaydi. Kesmani teng ikkiga bo‘lamiz va hosil bo‘lgan x_i nuqtada funksiyaning ishoraini qaraymiz. Agar $f(x_i)>0$ bo‘lsa, yuqori chegarani $b = x_i$ deb, aksincha esa quyi chegarani $a = x_i$ deb siljitamiz va hokazo (2.12-rasm).

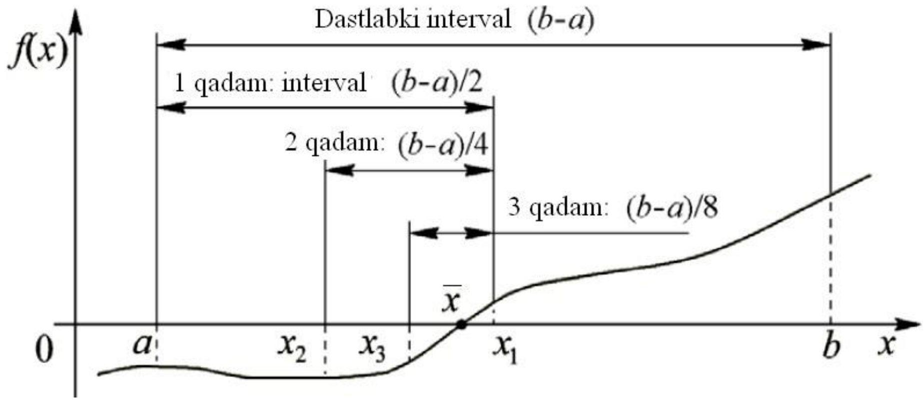
Bularni quyidagicha ham ifodalash mumkin:

Faraz qilaylik, $f(a)\cdot f(b) < 0$. $a_0 = a$ va $b_0 = b$ deb belgilash kiritamiz. U holda ketma–ket yaqinlashish quyidagicha:

$$x_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}\left(b_n - a_n\right), \quad n = 1, 2, \ldots;$$

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, x_{n+1}], & \text{agar } f(a_n)\, f(x_{n+1}) < 0, \\ [x_{n+1}, b_n], & \text{agar } f(x_{n+1})\, f(b_n) < 0. \end{cases}$$

Bu jarayon $f(x_{n+1}) = 0$ bo‘lganda to‘xtatiladi va $\bar{x} = x_{n+1}$ deb qabul qilinadi.



2.12–rasm. Kesmani ikkiga bo‘lish usulining sxematik tasviri.

Bu usul *kesmani teng ikkiga bo‘lish usuli*, *dixotomiya usuli* (grekchadan διχα – ikki qismga τομη – kesish), *biseksiyalar usuli* yoki *vilka usuli* deb ataladi.

Agar tenglamaning qolgan ildizlarini ham aniqlash zarurati tug‘ilsa, u holda $g(x) = f(x)/(x - \bar{x})$ tenglikdan ketma-ket foydalanib, har safar topilgan $\bar{x}$ ildiz chiqarib tashlanadi (endi $g(x) = 0$ va $f(x) = 0$ tenglamalarning $\bar{x}$ (bu nuqta $g(x)$ funksiya uchun qutb, $f(x)$ funksiya uchun esa ildiz) dan boshqa barcha ildizlari mos keladi).

Talab qilingan aniqlikdagi yechimga erishish uchun avvalo $g(x)$ funksiyaning ildizi qo‘pol holda bo‘lsa ham topiladi, keyin esa bu ildiz $f(x)$ funksiyadan foydalanib aniqlashtiriladi.

Bu usul uchun *hisob tugashining kriteriyasi* ushbu

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \le |x_{n+1} - x_n| \le \frac{b-a}{2^{n+1}} < \varepsilon$$

shartning bajarilishidan iborat, bunda ε – berilgan absolyut aniqlik.

Bu baholash *usulning xatoligini* anglatadi va u *xatolikning aprior bahosi* deb ham ataladi. Bu *usulning yaqinlashish tartibi* 1 *ga teng*, ya’ni bu *usul chiziqli yaqin-*

lashish tezligiga ega. $\{x_n\}$ ketma-ketlik maxraji 1/2 ga teng bo‘lgan geometrik progressiya tezligi bilan ildizga yaqinlashadi.

Bundan kelib chiqadiki, berilgan ε aniqlik bilan ildizni hisoblash uchun zarur bo‘lgan N – iteratsiyalar soni qiyidagi tengsizlikdan aniqlanadi:

$$\frac{b-a}{2^N} \le \varepsilon \quad \text{yoki} \quad N \ge \frac{\ln(b-a) - \ln\varepsilon}{\ln 2} \quad \text{yoki} \quad N \ge \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} .$$

Usulning qulayliklari:

- $f(x)$ funksiya haqida ma’lumotlar kam bo‘lganda ham undan foydalanish juda qulay;
- bu usul algoritmi juda sekin, ammo barcha noqulayliklardan holi.

Usulning kamchiliklari:

- ko‘p hollarda funksiyaning holati juda murakkab bo‘lib, bu chetki nuqtalarida funksiyaning ishorasi har xil bo‘lgan $[a,b]$ kesmani oldindan aniqlashga qiyinchilik tug‘diradi;
- yaqinlashish juda sekin;
- sodda bo‘lmagan ildiz, masalan, ildiz funksiyaning ekstremum nuqtasi bilan mos kelganda (2.2-rasmda x_2 nuqta), bu usulni qo‘llab bo‘lmaydi, chunki bunda ildiz atrofida funksiya o‘z ishorasini almashtirmaydi.
- agar tenglama $[a,b]$ kesmada bir nechta ildizga ega bo‘lsa, u holda hisoblash jarayonida shu ildizlardan qaysi biri topilishi noma’lum.
- uni tenglama karrali (jufr karrali) va kompleks ildizlarga ega bo‘lganda qo‘llab bo‘lmaydi;
- uni tenglamalar sistemasiga qo‘llab bo‘lmaydi.

Usulning algoritmi:

1. $f(a)$ va $f(b)$ ni hisoblang;
2. $c = (a + b)/2$ deb $f(c)$ ni hisoblang;
3. agar $\text{sign}(f(c)) = \text{sign}(f(a))$ bo‘lsa $a = c$ deb, aks holda esa $b=c$ deb almashtirish oling (bunda sign ishora funksiyasi);
4. agar $b - a > \varepsilon$ bo‘lsa, u holda qadam 2 ga o‘ting, aks holda hisob jarayonini to‘xtating (chunki biz talab qilingan ε – absolyut aniqlikka erishdik). Oxirgi kesma uchlaridan xoxlagan bittasi yoki ular yig‘indisining yarmini berilgan $f(x)=0$ tenglamaning yechimi deb qabul qilishimiz mumkin.

Kesmani teng ikkiga bo‘lish (dixotomiya) usuli algoritmining blok-sxemasi 2.13-rasmda tasvirlangan.

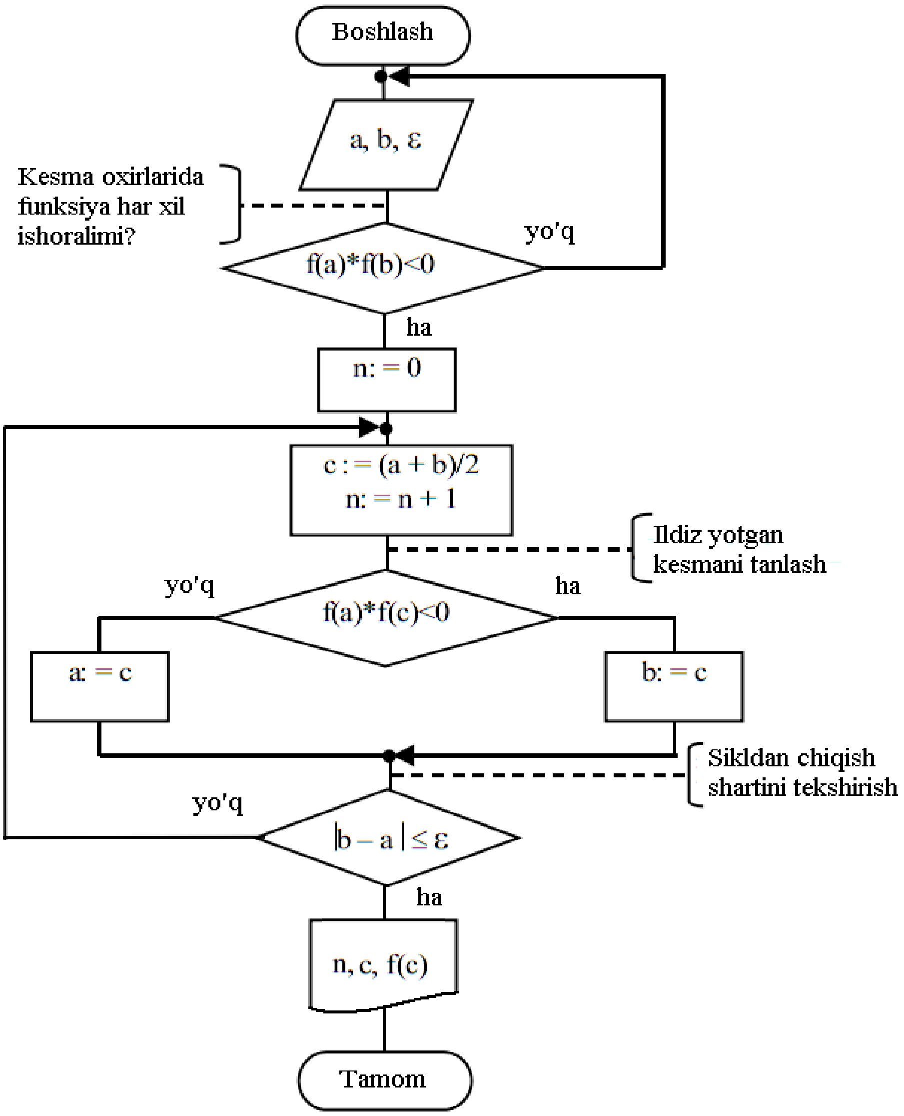
Namunaviy mashqlar va ularning yechimlari

1-misol. Ushbu $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$ tenglamaning ildizlarini analitik yo‘l bilan ajrating va uning ildizlaridan birini $\varepsilon = 0{,}01$ aniqlik bilan kesmani teng ikkiga bo‘lish usulidan foydalanib toping.

Yechish. Yuqorida 3-misolda biz bu tenglamaning ikkita haqiqiy ildizi mavjudligini, ular $x_1\in[-2;\ -1]$; $x_2\in[1;\ 2]$ kesmalarda yotganligini aniqlagan edik. Ushbu tenglamaning, masalan $x_1\in[-2;\ -1]$ oraliqdagi haqiqiy ildizini $\varepsilon = 0{,}01$ aniqlikda topaylik. Barcha hisoblashlar natijalarini jadval ko‘rinishida ifodalaymiz:

n	a_n^-	b_n^-	$x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_n)$
0	–2,00	–1,00	–1,50	–3,5625
1	–2,00	–1,50	–1,75	0,3633
2	–1,75	–1,50	–1,63	–1,8140
3	–1,75	–1,63	–1,69	–0,7981
4	–1,75	–1,69	–1,72	–0,2363
5	–1,75	–1,72	–1,73	–0,0406
6	–1,75	–1,73	–1,74	0,1592
7	–1,74	–1,73		

Javob: $x_1 \approx -1{,}73$. Ikkinchi ildizni ham xuddi shunday topish mumkin.



2.13-rasm. Kesmani teng ikkiga bo‘lish usulining blok-sxemasi.

Yuqoridagi hisoblashlarni bajarish uchun Maple dasturining ushbu *Numerical-Analysis* paketiga murojaat qilamiz:

Paketga murojaat qilish

with(*Student*[*NumericalAnalysis*]):

Funsiyaning berilishi

f:= $x^4 – x^3 – 2{\cdot}x^2 + 3{\cdot}x – 3$;

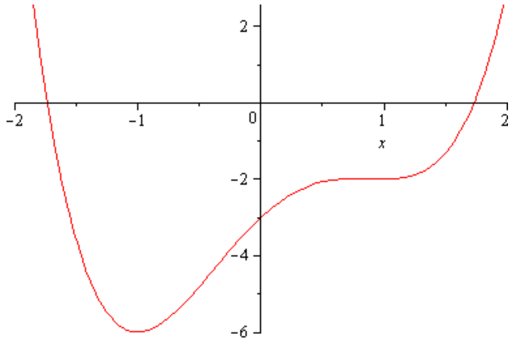
Funksiyaning grafigini chizish (2.14-rasn)

plot(*f* , *x*=–2..2);

Tenglamaning ildizlari

solve(*f*);

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3},\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3}$$



Tenglama ildizlarining o‘nli kasr ko‘rinishi

2.14-rasn.

$$0.5000000000+0.8660254040\,\mathrm{I},\ 0.5000000000-0.8660254040\,\mathrm{I},\ 1.732050808,\ -1.732050808$$

Biseksiya funsiyasiga murojaat va uning natijasi

Bisection (*f* , *x* = [–2, –1], *tolerance* = 0.0005);

–1.731933594

Usulning hisob qadamlaridagi intervallar

Bisection(*f*, *x*=[–2, –1], *tolerance*=0.0005, *output*=*sequence*);

[–2,. –1], [–2., –1.500000000], [–1.750000000, –1.500000000], [–1.750000000, –1.625000000],], [–1.750000000, –1.687500000], [–1.750000000, –1.718750000], [–1.734375000, –1.718750000], [–1.734375000, –1.726562500], [–1.734375000, –1.730468750], [–1.732421875, –1.730468750], [–1.732421875, –1.731445312]

Approksimatsiya kriteriyasi bo‘yicha iteratsiyalarning to‘xtashi natijasi

Bisection(*f*, *x*=[–2, –1], *tolerance*=0.0005, *stoppingcriterion*=*absolute*);

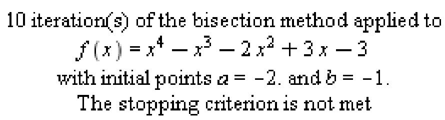
–1.731933594

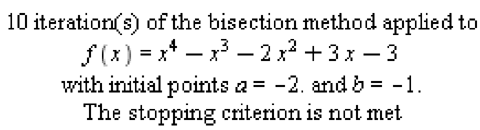
Kesmani teng ikkiga bo‘lish jarayonining grafigi va animatsiyaning boshlang‘ich holati (2.15,*a*-rasm)

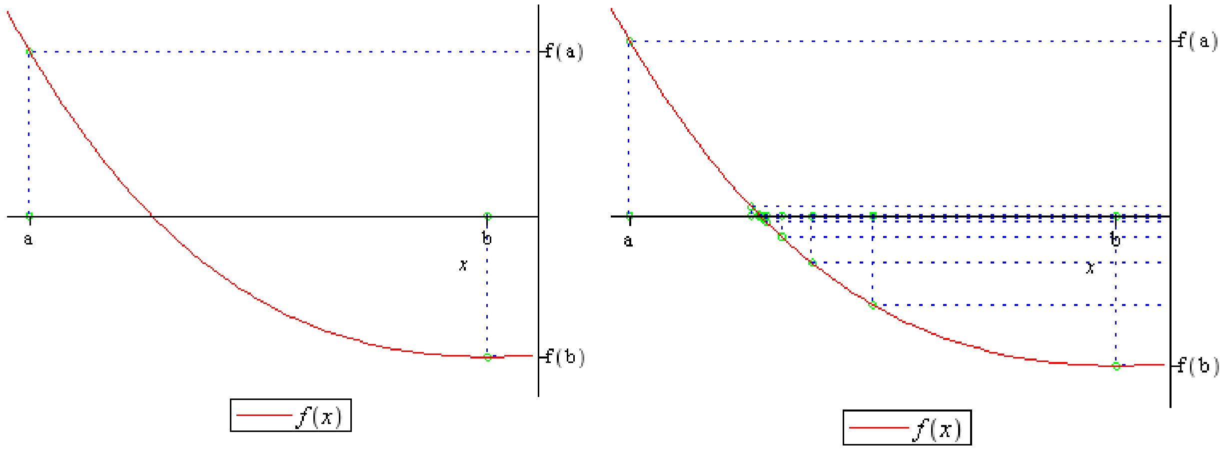
Bisection(*f*, *x*=[–2, –1], *output*=*animation*, *tolerance*=0.0005, *stoppingcriterion*=*function_value*);

Kesmani teng ikkiga bo‘lish jarayonining grafigi va animatsiyaning oxirgi holati (2.15,*b*-rasm)

Bisection(*f*, *x*=[–2, –1], *output*=*animation*, *tolerance*=0.0005, *maxiterations*=10, *stoppingcriterion*=*relative*);







a *b*

2.15-rasm. Kesmani teng ikkiga bo‘lish jarayonining grafigi va animatsiyasi.

Usul hisobining har bir qadami bo‘yicha natijalarning jadval ko‘rinishidagi ifodasi
Roots(*f*, *x*=[–2, –1], *method*=*bisection*, *tolerance*=0.01, *output*=*information*);

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$	*relative error*
1	−2.	−1.	−1.500000000	−3.562500000	0.3333333333
2	−2.	−1.500000000	−1.750000000	0.363281250	0.1428571429
3	−1.750000000	−1.500000000	−1.625000000	−1.892333980	0.07692307692
4	−1.750000000	−1.625000000	−1.687500000	−0.843246460	0.03703703704
5	−1.750000000	−1.687500000	−1.718750000	−0.260375024	0.01818181818
6	−1.750000000	−1.718750000	−1.734375000	0.046264708	0.009009009009

2-misol. Kesmani teng ikkiga bo‘lish usulidan foydalanib, $x^3+3x^2-3=0$ tenglamaning [–3;–2] kesmadagi ildizini ε = 0,1 aniqlik bilan hisoblang.

Yechish. Yuqorida keltirilgan algoritga asoslanib, tenglamani yechish jarayonini quyidagi hisob jadvali ko‘rinishida yozamiz:

n	a_n	b_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	x_n	$f(x_n)$	$(b_n-a_n)/2$
0	–3	–2	–3	1	–2,5	0,125	0,5
1	–3	–2,5	–3	0,125	–2,75	–1,11	0,25
2	–2,75	–2,5	–1,11	0,125	–2,625	–0,42	0,125
3	–2,625	–2,5	–0,42	0,125	–2,5625	–0,129	0,0625

Jadvalga ko‘ra ildiz $\bar{x}=-2{,}5625\pm0{,}0625$ yoki buni yaxlitlasak, u holda $\bar{x}=-2{,}6\pm0{,}1$.

Mashqlar

Quyida berilgan $f(x)=0$ ko‘rinishdagi tenglamalarni kesmani teng ikkiga bo‘lish usuli bilan yeching (bunda *a*, *b*, *c*, *d*, ε parametrlarni o‘zingiz har xil tanlash orqali turli variantlar hosil qilishing‘iz mumkin):

1. $a/\left(b+x^2\right)-cx=0$, a = 1.05; b = 0.1; c = 2.03; ε = 10^{-3}.

2. $\sqrt{a-x^2} \quad bx^2 = 0$, a =1.23; b = –3.14; ε = 4·10^{-5}.

3. $b(x+a)^3 c^x + d = 0$, a = 0.1; b = 2.23; c = 2; d = –1.03; ε = 2·10^{-4}.

4. $(x+a)^5 + bx = 0$, a =0.29; b = 2; ε = 3·10^{-4}.

5. $(x+a)^2 - e^{bx} = 0$, a = –0.4; b = 0.53; ε = 10^{-4}.

6. $a/\sqrt{bx+c} + \cos bx = 0$, a =2.07; b =1.19; c =1.13; ε =2·10^{-5}.

Izoh: Dastlab $f(x)$ funksiyaning grafigini matematik paketlardan birida (Maple, Matlab, Mathcad, Mathematica) yoki MS Excel dasturida chizing, haqiqiy ildizlar yotgan oraliqlarni aniqlab oling, hisoblashlarni qo‘lda va dastur yordamida bajaring.

Vatarlar usuli (proporsional bo‘laklar usuli).

Usulning mazmuni. Quyidagi shartlarning bajarilishini talab qilamiz:

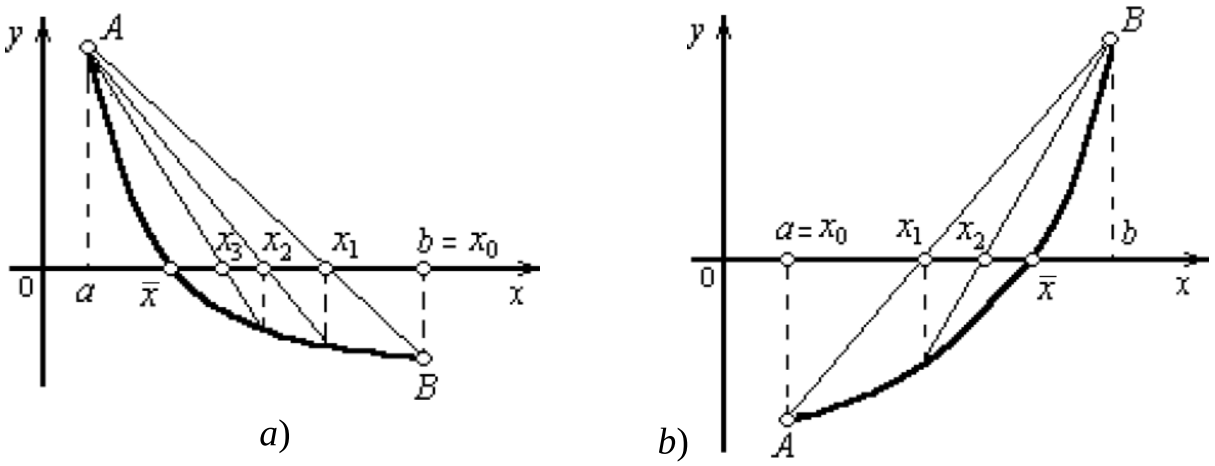
- $f(x)$ funksiya o‘zining $f'(x)$ va $f''(x)$ hosilalari bilan $[a,b]$ kesmada uzluksiz;
- funksiyaning $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlari kesmaning oxirgi nuqtalarida har xil ishorali, ya’ni $f(a) \cdot f(b) < 0$;
- har ikkala $f'(x)$ va $f''(x)$ hosilalar $[a,b]$ kesmaning barcha nuqtalarida o‘z ishorasini saqlab qoladi (berilgan $[a,b]$ kesma $f(x)$ funksiya hosilasining o‘z ishorasini saqlashi bu shu funksiya monotonligining yetarli sharti).

Bulardan foydalanib, 2.16,*a*-rasmga asosan, dastlab $A(a,f(a))$ nuqta qo‘zg‘almas, $x_0=b$ – nolinchi yaqinlashish, $A(a,f(a))$ va $B(b,f(b))$ nuqtalarni tutashtiruvchi AB vatarning absissa o‘qi bilan kesishish nuqtasini x_1 – birinchi yaqilashish deb qabul qilamiz. Keyingi yaqinlashishlarni hisoblash uchun $f(x_1)$ qiymatni hisoblaymiz va uni $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlar bilan taqqoslaymiz. Hosil bo‘lgan $[a, x_1]$ va $[x_1, b]$ intervallardan chetlarida $f(x)$ funksiya har xil ishorali bo‘lganini tanlaymiz, chunki aynan ana shu intervalda izlanayotgan $\overline{x}$ ildiz yotadi. Yuqorida aytilgan uslubni ana shu intervalga qo‘llab, keyingi yaqinlashishni (x_2 nuqtani) topamiz. Keyingi yaqinlashishlarda funksiyaning birinchi va ikkinchi hosilalari intervallarda o‘z ishorasini saqlaydi, deb o‘suvchi ketma-ketlikni tashkil etuvchi va yuqoridan $\overline{x}$ qiymat bilan chegaralangan barcha x_1, x_2, ... yaqinlashishlarni topamiz. Natijada $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$. Ketma-ket yaqinlashishning formulasini chiqarish uchun x_n dan x_{n+1} ga o‘tishni qaraylik. Bu holda B_n va B nuqtalardan o‘tuvchi B_nB vatar tenglamasini tuzamiz:

$$\frac{y - f(x_n)}{f(a) - f(x_n)} = \frac{x - x_n}{a - x_n}.$$

Agar bu tenglamada $y(x_{n+1}) = 0$ desak, u holda undan x_{n+1} had topilad.

Bularga asosan umumlashgan quyidagi to‘rtta holat bo‘ladi:



2.16-rasm. Proporsional bo‘laklar usuli (vatarlar usuli)ning
har xil hollari uchun sxemalar.

a) Agar $[a,b]$ kesmada $A(a,f(a))$ nuqta qo‘zg‘almas va $f(x)$ funksiya botiq va kamayuvchi ($f'(x) < 0,\ f''(x) > 0$) bo‘lsa (1.17,*a*-rasm), u holda ushbu ketma-ketlik

$$x_0 = b\,, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a) \quad (n=0,1,2,\ldots) \qquad (5.2)$$

chegaralangan va monoton kamayuvchi: $a<\bar{x}<\ldots<x_{n+1}<x_n<\ldots x_1<x_0=b$.

b) Agar $[a,b]$ kesmada $B(b,f(b))$ nuqta qo‘zg‘almas va $f(x)$ funksiya botiq va o‘suvchi ($f'(x) > 0, f''(x) > 0$) bo‘lsa (1.17,*b*-rasm), u holda ushbu ketma-ketlik

$$x_0 = a\,, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n) \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

chegaralangan va monoton o‘suvchi: $a= x_0< x_1<\ldots<x_n<x_{n+1}<\ldots< \bar{x}<b$.

c) Agar $[a,b]$ kesmada $A(a,f(a))$ nuqta qo‘zg‘almas va $f(x)$ funksiya qovariq va o‘suvchi ($f'(x) > 0,\ f''(x) < 0$) bo‘lsa (1.17,*a*-rasm), u holda ushbu ketma-ketlik

$$x_0=b\,, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a) \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

chegaralangan va monoton kamayuvchi: $a<\bar{x}<\ldots<x_{n+1}<x_n<\ldots x_1<x_0=b$.

d) Agar $[a,b]$ kesmada $B(b,f(b))$ nuqta qo‘zg‘almas va $f(x)$ funksiya qovariq va kamayuvchi ($f'(x) < 0,\ f''(x) < 0$) bo‘lsa (1.17,*b*-rasm), u holda ushbu ketma-ketlik

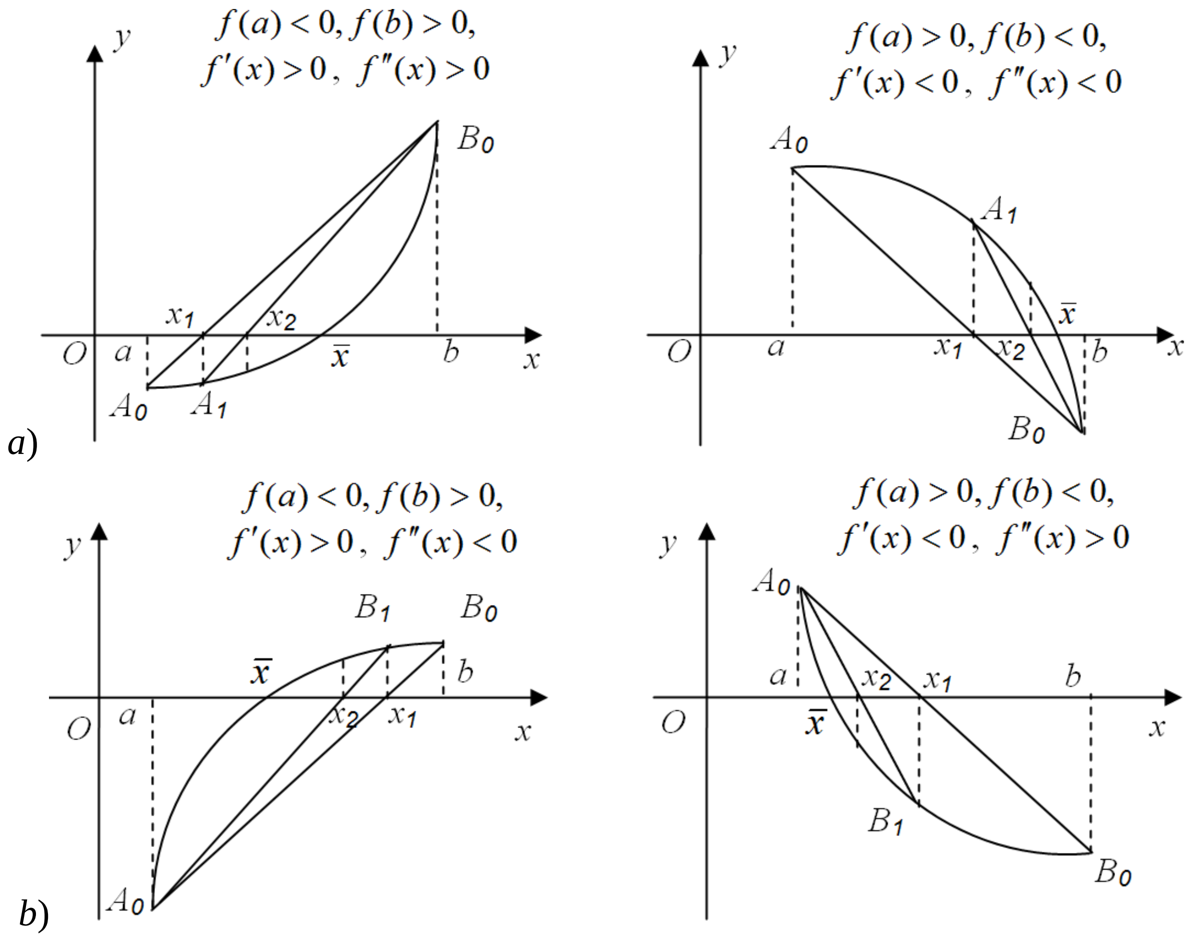
$$x_0 = a\,, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n) \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

chegaralangan va monoton o‘suvchi: $a= x_0< x_1<\ldots<x_n<x_{n+1}<\ldots< \bar{x}<b$.

Endi bu to‘rtta holatni umumlashtiramiz:

1) agar kesmaning qaysi bir chetida $f(x)$ funksiya va uning $f''(x)$ ikkinchi hosilasi bir xil ishoraga ega bo‘lsa, o‘sha chetki nuqta qo‘zg‘almas deb olinadi;

2) agar $\bar{x}$ ildizning qaysi tarafida $f(x)$ funksiya o‘zining $f''(x)$ ikkinchi hosilasiga qarama qarshi ishoraga ega bo‘lsa, x_n ketma-ket yaqinlashishlar o‘sha tomondan $\bar{x}$ ildizga yaqinlashadi.



2.17-rasm. Vatarlar usulining geometrik interpretatsiyasi:
a) $f'(x)\cdot f'(x)>0$; *b*) $f'(x)\cdot f'(x)<0$.

Iteratsion jarayonning tugallanishi ikkita qo‘shni x_n va x_{n-1} iteratsiyalarning hisob hatijalari bo‘yicha *hisobni tugallash kriteriyasini* beradi, ya’ni bu iteratsion jarayon ushbu $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$ shart bajarilgunga qadar davom ettiriladi va $x_{n+1}=\bar{x}$ yoki $x_n=\bar{x}$ yechim deb olinadi, bu yerda ε – berilgan limitik (chegaraviy) absolyut xato.

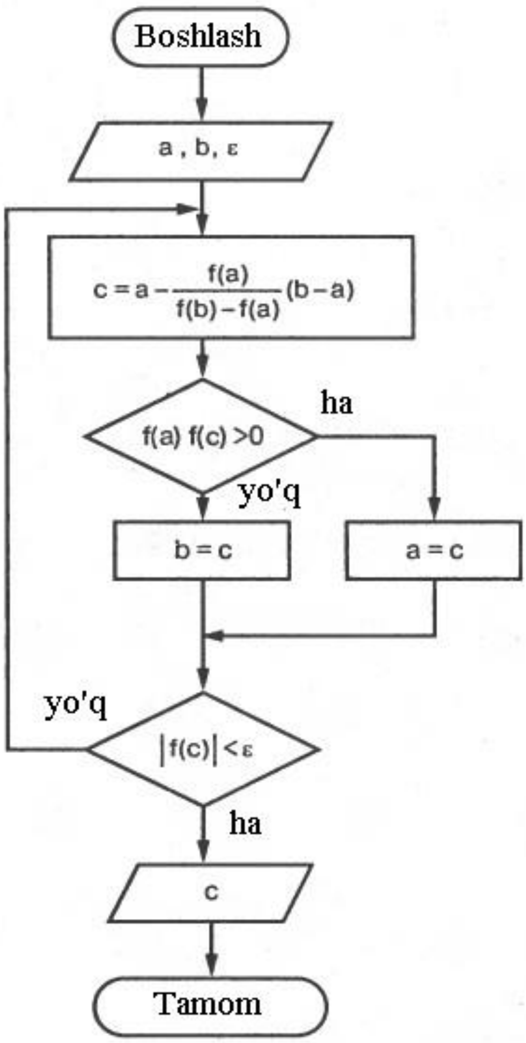
Usulning qulayliklari: usulning yaqinlashishi kafolatlangan; oraliqni teng ikkiga bo‘lish usuliga qaraganda kamida ikki yoki uch marta tezroq yaqinlashishni beradi.

Usulning kamchiliklari: agar *a* dan *b* gacha bo‘lgan kesmada umuman ildiz mavjud bo‘lmasa yoki unda bir nechta ildizlar mavjud bo‘lsa, u yechimni izlash vaqti cheksizga yaqinlashishi mumkin; agar $f(x)$ funksiya grafigi $[a,b]$ kesmada yetarlicha yotiq bo‘lsa, u holda $f(a)-f(b)$ farq katta bo‘ladi va hisoblashlarda xatolik ko‘payadi, bunday holda keyingi hisoblashlarda dixotomiya usuliga o‘tgan ma’qul.

Usulning hisob algoritmi:

1. [a,b] kesmani va ε aniqlikni berish.
2. Agar $f(a)$ va $f(b)$ bir xil ishorali yoki $f'(a)$ va $f'(b)$ har xil ishorali bo‘lsa, tenglama ildizni topish mumkin emasligini bildirish.
3. Boshlang‘ich yaqinlashishni va navbatdagi yaqinlashishning iteratsion hisob formulasini yuqoridagi to‘rtta holatdan biri bo‘yicha tanlash.
4. Hisoblashlarni tanlangan iteratsion hisob formulasida bajarish.
5. Aniqlikni baholash: $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$. Agar bu shart bajarilsa, ildiz deb $\bar{x} = x_{n+1}$ ni qabul qilish va tamomlash, aks holda 4-qadamga o‘tish.

Usulning blok-sxemasi 2.18-rasmda tasvirlangan. Dasturda cheksiz takrorlanishlar kuzatilmasligi uchun funksiya grafigining qovariq yoki botiqligini (2.17-rasm) va iteratsiyalar sonini nazorat qilish maqsadga muvofiq. Shunday qilib, vatarlar usulidan foydalanishda ushbu qoidaga amal qilish maqsadga muvofiq: kesmaning qaysi chetida funksiyaning ishorasi uning ikkinchi tartibli hosilasi ishorasi bilan bir xil bo‘lsa, o‘sha chet qo‘zg‘almas qilib olinadi.



2.18.-rasm. Vatarlar usulining blok-sxemasi.

1-misol. Bu qoidani $(x-1)\ln(x)-1=0$ tenglamaning [2;3] kesmadagi yakkalangan ildizini topishga qo‘llang.

Yechish. Bu yerda

$$f(x) = (x-1)\ln(x)-1; \quad f'(x) = \ln(x) + \frac{x-1}{x}; \quad f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

Kesmaning b = 3 chetki nuqtasida funksiyaning qiymati musbat $f(3)>0$ va kesmada esa ikkinchi tartibli hosila ham musbat $f'(x) > 0$,ya’ni $f(b) \cdot f'(x) > 0$. Shunday qilib, ushbu misolda berilgan tenglamaning izolyatsiyalangan ildizini vatarlar usuli bilan topish uchun ushbu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)}$$

formuladan foydalanish tavsiya etiladi.

2-misol. Ushbu $f(x) = x^3 - 0.2x^2 - 0.2x - 1.2 = 0$ tenglamaning [1;1,5] kesmadagi $\bar{x}$ ildizini 0,002 aniqlik bilan hisoblang.

Yechish. Berilgan tenglama [1;1,5] kesmada yagona $\bar{x}$ ildizga ega (buni Maple matematik paketida yoki MS Excel dasturida mustaqil tekshirib ko‘ring).

Usulning formulasiga ko‘ra

$$f'(x) = 3x^2 - 0.4x - 0.2\ ; \quad f''(x) = 6x - 0.4\ ;$$

$$f(1) = -0.6 < 0\ ; \quad f(1.5) = 1.425 > 0,$$

demak $x \in [1;1,5]$ da $2.4 \le f'(x) \le 5.95$; $5.6 \le f''(x) \le 8.6$.

Bu yerdan ko‘rinadiki, $x \in [1;1,5]$ da $f'(x)\, f''(x) > 0$. Shuning uchun

$$x_0 = a\ , \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n) \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

formuladan foydalanib (bunda $x_0 = a = 1$, $b = 1,5$), ketma-ket quyidagilarni topamiz:

$$x_1 = \frac{0.6(1.5-1)}{1.425+0.6} + 1 = 1.15; \quad f(x_1) = -0.173;$$

$$x_2 = 1.15 + 0.173\frac{1.5-1.15}{1.425+0.173} = 1.19; \quad f(x_2) = -0.036;$$

$$x_3 = 1.19 + 0.036\frac{1.5-1.19}{1.425+0.036} = 1.198; \quad f(x_3) = -0.0172;$$

$$x_4 = 1.198 + 0.0172\frac{1.5-1.198}{1.425+0.0172} = 1.199; \quad f(x_3) = -0.0061;$$

Bu yerdan ko‘rinadiki, $|x_4 - x_3| = |1.199 - 1.198| \le 0.002$ ekanligidan taqribiy ildiz sifatida $\bar{x} \approx x_4 = 1.199$ ni qabul qilishimiz mumkin (aniq ildiz $\bar{x} = 1.2$).

Endi shu misolni Maple dasturining paketidan foydalanib yechamiz (2.19-rasm):

>with(*Student*[*NumericalAnalysis*]):

>*f*:= $x^3 - 0.2x^2 - 0.2x - 1.2$;

$$f := x^3 - 0.2\,x^2 - 0.2\,x - 1.2$$

>*fsolve*(*f*);

1.200000000

>*FalsePosition*(*f*,*x*=[1,1.5],*tolerance*=10^{-2});

1.200000000

> *FalsePosition*(*f*,*x*=[1,1.5],*tolerance*=10^{-2}, *outpout*=*sequence*);

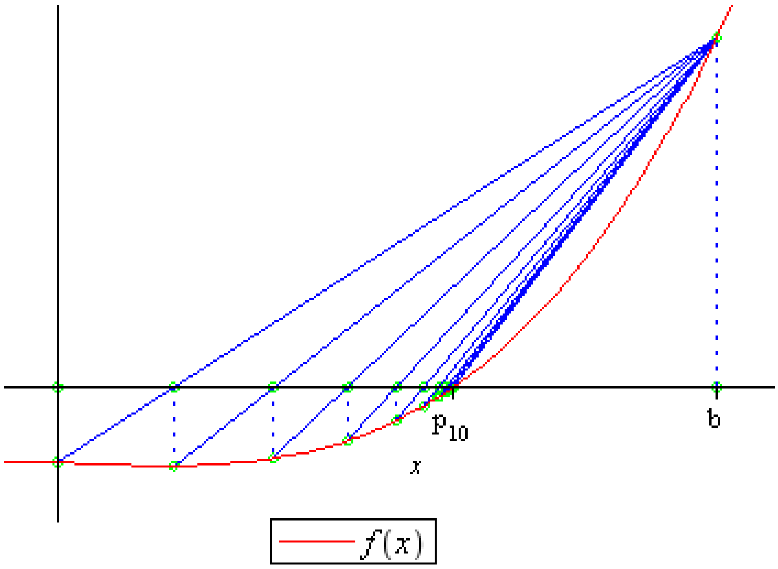
[1., 1.5], [1.148148148, 1.5], [1.187557334, 1.5], [1.197073858, 1.5],
[1.199315188, 1.5], [1.199839915, 1.5], [1.199962588, 1.5],
[1.199991258, 1.5], [1.199997957, 1.5], [1.199999522, 1.5],
[1.199999888, 1.5]

> *FalsePosition*(*f*,*x*=[1,1.5],*tolerance*=10^{-2}, *stoppingcriterion*=*absolute*);

1.200000000

> *FalsePosition*(*f*,*x*=[0,2], *outpout*=*animation, tolerance*=10^{-2}, *stoppingcriterion*=*function_value*);

10 iteration(s) of the method of false position applied to
$f(x) = x^3 - 0.2\,x^2 - 0.2\,x - 1.2$
with initial points $a = 0.$ and $b = 2.$



2.19-rasm. Vatarlar usuli jarayonining grafigi va animatsiyasi.

Mashqlar

Quyida berilgan tenglamalarni vatarlar usuli bilan yeching (bunda a, b, c, ε parametrlarni o‘zingiz har xil tanlash orqali turli variantlar hosil qilishing‘iz mumkin):

1. $ax^3 + b + c\sqrt{x+2} = 0$, $a = 1.11$; $b = -10.11$; $c = -2.02$; $\varepsilon = 7\cdot 10^{-5}$.

2. $ax + bx\sin x = 0$, $a = 2.01$; $b = -1$; $\varepsilon = 10^{-5}$.

3. $a\cos(x+b) + cx^3 = 0$, $a = 2.13$; $b = 3.62$; $c = -4.12$; $\varepsilon = 2\cdot 10^{-4}$.

4. $\ln(x+a) + (x+b)^5 = 0$, $a = 2.11$; $b = 4.03$; $\varepsilon = 3\cdot 10^{-5}$.

5. $ax^2 \cos bx - cx = 0$, $a = 2.93$; $b = 3.01$; $c = 2.1$; $\varepsilon = 7\cdot 10^{-5}$.

6. $a/x + be^{cx} = 0$, $a = 2.37$; $b = -0.99$; $c = 0.56$; $\varepsilon = 5\cdot 10^{-4}$.

Izoh: Dastlab funksiyaning grafigini matematik paketlardan birida (Maple, Matlab, Mathcad, Mathematica va boshqa) yoki MS Excel dasturida chizing, haqiqiy ildizlar yotgan oraliqlarni aniqlab oling, hisoblashlarni qo‘lda va dastur yordamida bajaring.

Nyuton usuli (urinmalar usuli yoki chiziqlilashtirish usuli).

Chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni yechishning eng samarali usuli bu Nyuton usulidir. Bu usulning g‘oyasi asosida tadqiq qilinayotgan $f(x)$ funksiyani undanda soddaroq bo‘lgan funksiyaga, ya’ni uni urinmaga almashtirishdan iborat.

Geometrik nuqtai nazardan, dastlab x_0 nuqta orqali $f(x)$ funksiyaning egri chiziqli grafigiga urinma o‘tkaziladi va uning absissa o‘qi bilan kesishish nuqtasining absissasi topiladi (2.21-rasm).

$f(x)$ funksiyaning egri chiziqli grafigiga $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtasi orqali o‘tkazilgan urinma tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Keyingi x_1 yaqinlashish urinmaning absissa o‘qi bilan kesishish nuqtasi bo‘lib, bu nuqta ushbu

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

formuladan topiladi. Bu jarayonni $M_1, \ldots, M_{n-1}$ nuqtalar uchun xuddi shunday davom ettirib va $f'(x_n) \neq 0$ ekanligini e’tiborga olib, ushbu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

formulaga kelamiz, bunda $[a,b]$ kesmada $x_0=a$, agar $f(a)\cdot f'(x) > 0$ bo‘lsa va $x_0=b$ agar $f(b)\cdot f'(x) > 0$ bo‘lsa.

Shakli o‘zgartirilgan formula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}.$$

Bu formuladan foydalanilganda yaqinlashish tezligi bir oz sustlashadi.

Urinmalar usuli shartli yaqinlashuvchi usul bo‘lib, uning yaqinlashishi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$$

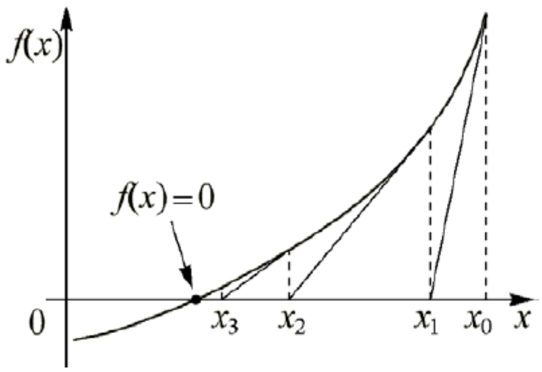
uchun ($\bar{x}$ - ildizning izlanayotgan qiymat) ildiz izlanayotgan sohada quyidagi shart bajarilishi zarur:

$$\left| f(x_n)\cdot f''(x_n) \right| < (f'(x_n))^2$$

Ixtiyoriy boshlang‘ich (nolinchi) yaqinlashishda iteratsiya yaqinlashuvchi bo‘ladi, agar yuqoridagi shart bajarilsa.

Aks holda yaqinlashish ildizning biror atrofidagina bajariladi.

Iteratsion jarayonning yaqinlanishi uchun quyidagi uchta kriteriyadan foydalanish mumkin:



2.21-rasm. Nyuton usulining geometrik talqini.

1) Iteratsiyalarning maksimal soni. Bu kriteriyadan usul yaqinlashmagan holda foydalanish lozim. Shunga qaramasdan talab qilingan aniqlikni qanoatlantiruvchi iteratsiyalar sonini oldindan aniqlash juda qiyin.

2) Ildizga yaqinlashishning kuchsiz variatsiyasi

$$\left| x_{n+1} - x_n \right| < \varepsilon \quad \text{yoki} \quad \left| x_{n+1} - x_n \right| < \varepsilon \left| x_n \right|.$$

3) Funksiyaning yetarlicha kichik qiymati $\left| f(x_n) \right| < \varepsilon$.

Nyuton usuli ikkinchi tartibli yaqinlashish tezligiga ega. Bu shuni bildiradiki, ildiz yaqinida xatolik quyidagi qonun bo‘yicha kamayib boradi: $\varepsilon_i = const\cdot\varepsilon_{i-1}^2$.

Shuning uchun Nyuton usulining iteratsiyalari juda tez yaqinlashadi, chunki yuqoridagi 2-shartning bajarilishi uchun bir nechta iteratsiyaning o‘zi yetarli. Agar dasturda i > 10 da ham 2-yaqinlashish sharti bajarilishi kuzatilmasa, demak yoki formulada yoki dasturda xatolik bor degan xulosaga kelish kerak.

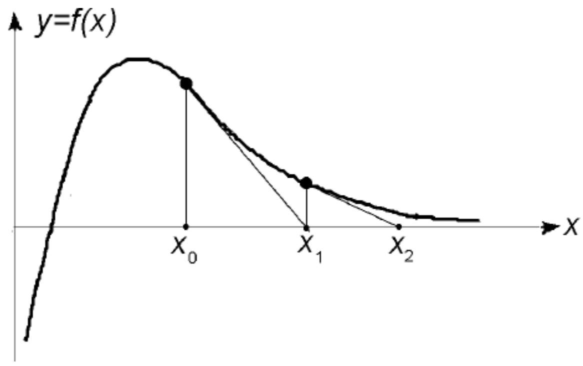
Shunday qilib, *usulning ustunliklari*: yaqinlashish tezligi boshqa usullarga qaraganda ancha tez, bu boshlang‘ich yaqinlashishni ildizga yaqinroq tanlaganda yanada yaqqol seziladi; *usulning kamchiliklari*: boshlang‘ich yaqinlashishni tanlash og‘ir; har bir iteratsiya qadamida hisoblashlar boshqa usullardagiga qaraganda ko‘p, chunki bunda nafaqat funksiyaning qiymatini, balki uning hosilasini ham hisoblab borish lozim; ba’zida aralash usulni qo‘llash afzal, ya’ni bu usulni qo‘llashdan oldin avval boshqa usulni, masalan, dastlabki bir necha iteratsiya qadamida oraliqni teng ikkiga bo‘lish usulini qo‘llab, keyingi yaqinlashishlarni Nyuton usulida bajarish juda yaxshi natija beradi; agar $f(x)$ funksiya grafigi $[a,b]$ kesmada yetarlicha yotiq bo‘lsa, u holda $f'(x)\to 0$ va hisoblashlarda xatolik tez ko‘payadi, bunday holda keyingi hisoblashlarda oraliqni teng ikkiga bo‘lish usuliga o‘tgan ma’qul; agar $[a,b]$ kesmada umuman ildiz yo‘q yoki ular soni bir nechta bo‘lsa, u holda bu usul iteratsiyalarining takrorlanishlari soni cheksizlikka intiladi (2.22-rasm).

Usulning algoritmi:

1. $[a,b]$ kesmani va ε aniqlikni berish.
2. Agar $f(a)$ va $f(b)$ lar bir xil ishorali yoki $f'(a)$ va $f'(b)$ lar har xil ishorali bo‘lsa, ildizni topish mumkin emasligini bildirish.
3. Boshlang‘ich yaqinlashishni tanlash:

   $x_0=a$, agar $f(a)\cdot f'(x)>0$ bo‘lsa;

   $x_0=b$ agar $f(b)\cdot f'(x)>0$ bo‘lsa.



2.22-rasm. Nyuton usulining uzoqlashishi.

4. Navbatdagi yaqinlashishni quyidagi formula bo‘yicha hisoblash.

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ yoki } x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_0)}.$$

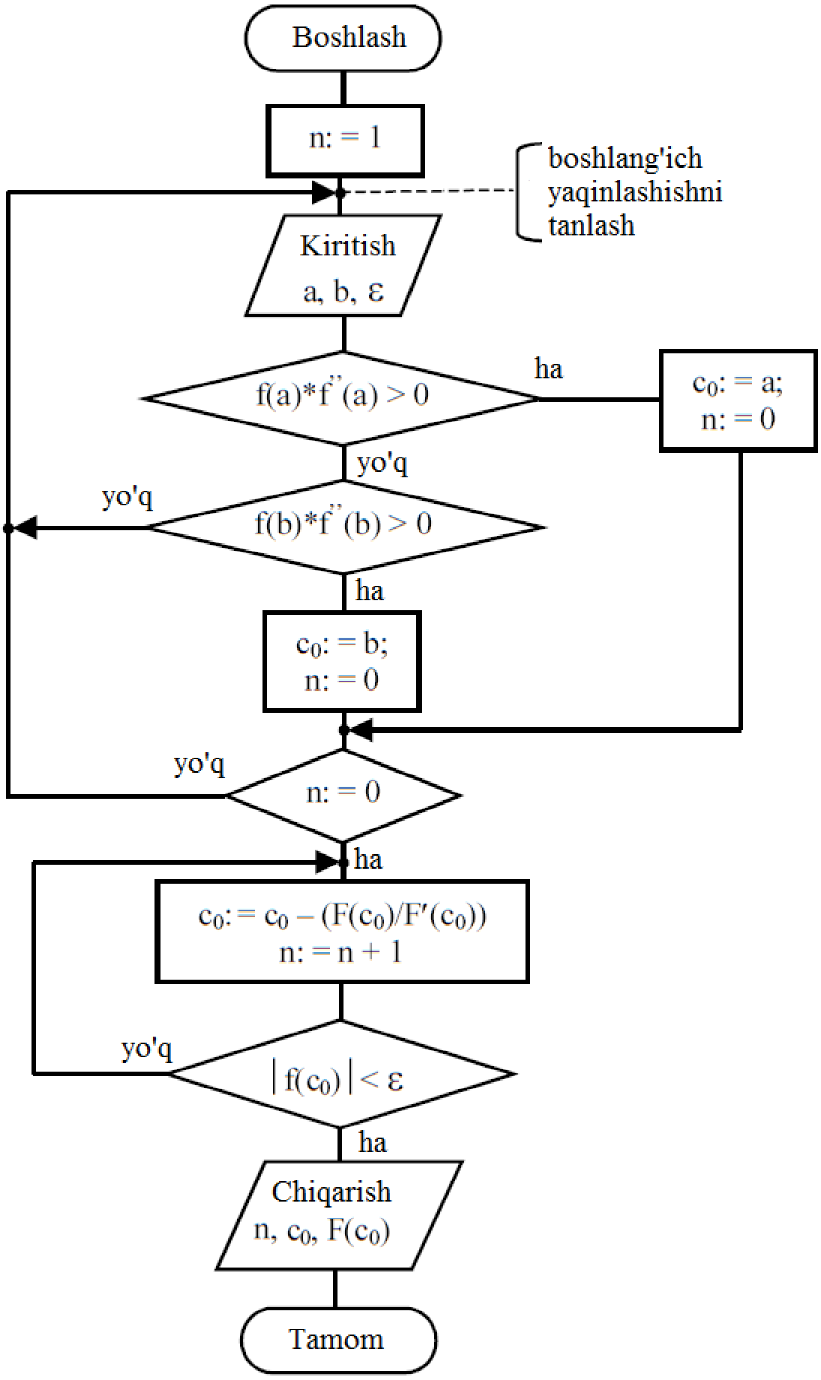
5. Aniqlikni baholash: $\left|x_{n+1}-x_n\right|<\varepsilon$.
6. Agar bu shart bajarilsa, ildiz deb $\bar{x}=x_{n+1}$ ni qabul qilish, aks holda 4-qadamga o‘tish.

Nyuton usulining blok sxemasi 2.23-rasmda tasvirlangan.

Dasturda cheksiz takrorlanishlar kuzatilmasligi uchun funksiya grafigining qovariq yoki botiqligini (2.24-rasm) va iteratsiyalar sonini nazorat qilish maqsadga muvofiq.

1-misol. Ushbu $e^x-3x=0$ tenglamaning eng kichik musbat ildizini $\varepsilon=10^{-4}$ aniqlik bilan toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning mumkin bo‘lgan musbat ildizlarini topish uchun uni $e^x = 3x$ ko‘rinishda yozib olamiz va $y = e^x$ va $y = 3x$ funksiyalarning grafiklarini MS Excel dasturida quramiz (2.25-rasm). Rasmdan ko‘rinib turibdiki, u ikkita haqiqiy musbat ildizlarga ega, ulardan eng kichigi [0;1] kesmada, kattasi esa [1;2] kesmada yotibdi.



2.23-rasm. Nyuton usulining blok-sxemasi.

Eng kichik musbat ildiz uchun $f(x) = e^x - 3x$ funksiya [0;1] kesmada a) uzluksiz va differensiallanuvchi (birinchi va ikkinchi hosilalari mavjud): $f'(x)= e^x–3$; $f''(x)=e^x$; b) birinchi hosila uzluksiz, o‘z ishorasini saqlaydi va nolga aylanmaydi, ya’ni $f'(x) <$

0; c) ikkinchi hosila uzluksiz, o‘z ishorasini saqlaydi, ya’ni $f''(x) > 0$. Demak, $f(0)\cdot f(1) < 0$ bo‘lganligi uchun [0;1] kesmada oddiy ildiz mavjud.

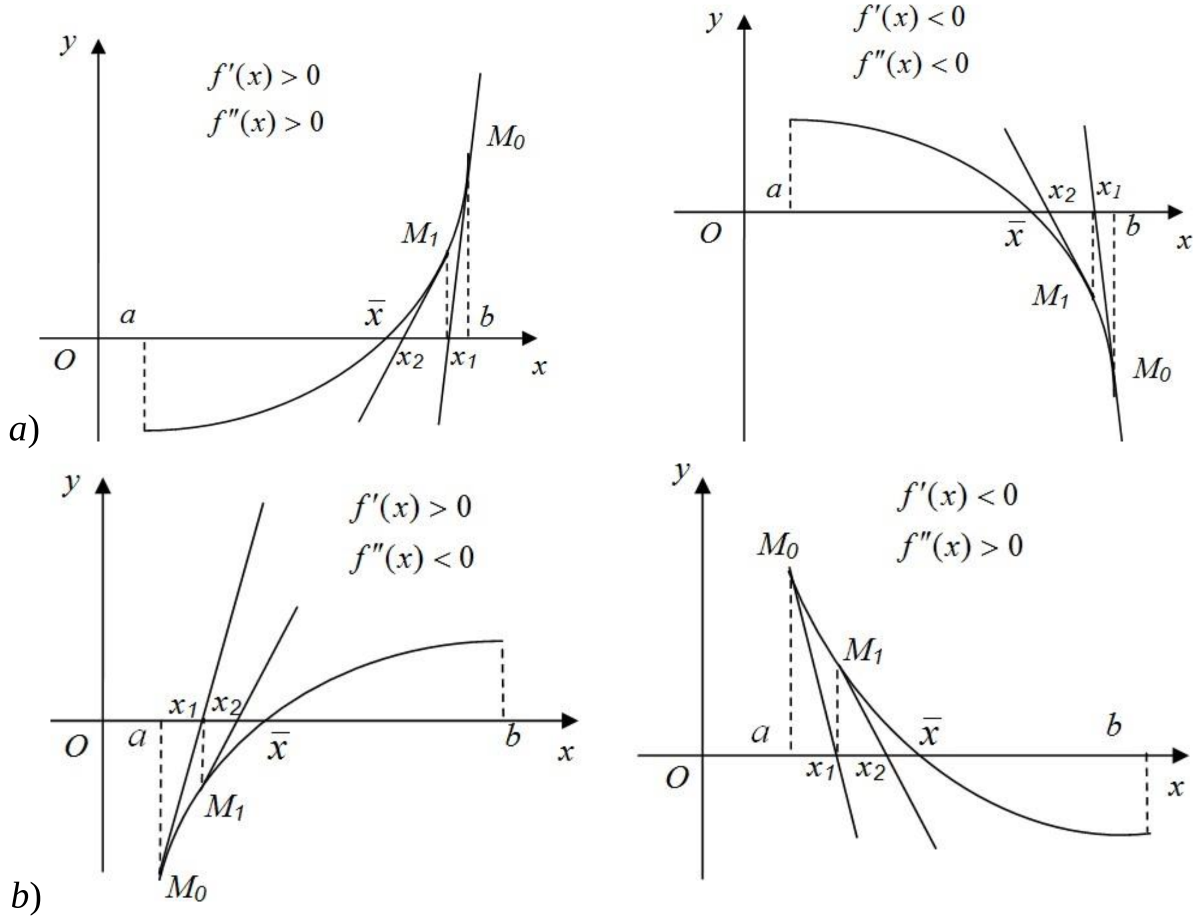
Dastlabki yaqinlashishni $x_0 = 0$ deb tanlab olamiz, chunki

$$f(0) = 1 > 0; \quad f''(0) = 1 > 0; \quad f(1) = e-3 < 0; \quad f''(1) = e > 0$$

va bu yerdan $f(0)\cdot f''(0) = 1 > 0$. Keyingi yaqinlashishlarni ushbu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - 3x_n}{e^{x_n} - 3}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

formuladan topamiz. Bu hisoblashlar quyidagi yaqinlashishlarni beradi: $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = 0{,}61$; $x_3 = 0{,}619$; $x_4 = 0{,}61909$. Iteratsion jarayonning tugallanish shartiga ko‘ra $\varepsilon_n = |x_{n+1} - x_n| = 0{,}61909 - 0{,}619 = 0{,}00009$ bo‘lganligidan izlanayotgan ildizni $\bar{x} \approx 0{,}619$ deb qabul qilamiz.



2.24-rasm. Nyuton usulining geometrik interpretatsiyasi:
a) $f'(x)\cdot f'(x) > 0$; *b*) $f'(x)\cdot f'(x) < 0$.

2-misol. Ushbu $x^3 - 2x^2 - 2x - 1{,}2 = 0$ tenglamaning [2,3] kesmadagi ildizini Nyuton usuli bilan $\varepsilon = 10^{-4}$ aniqlikda Maple dasturining paketidan foydalanib toping.

Yechish. Dastur matni va uning natijalari quyidagicha (2.26-rasm):

>*with*(*Student*[*NumericalAnalysis*]):

>*f*:= $x^3 - 2x^2 - 2x - 1.2$:

>*fsolve*(*f*);

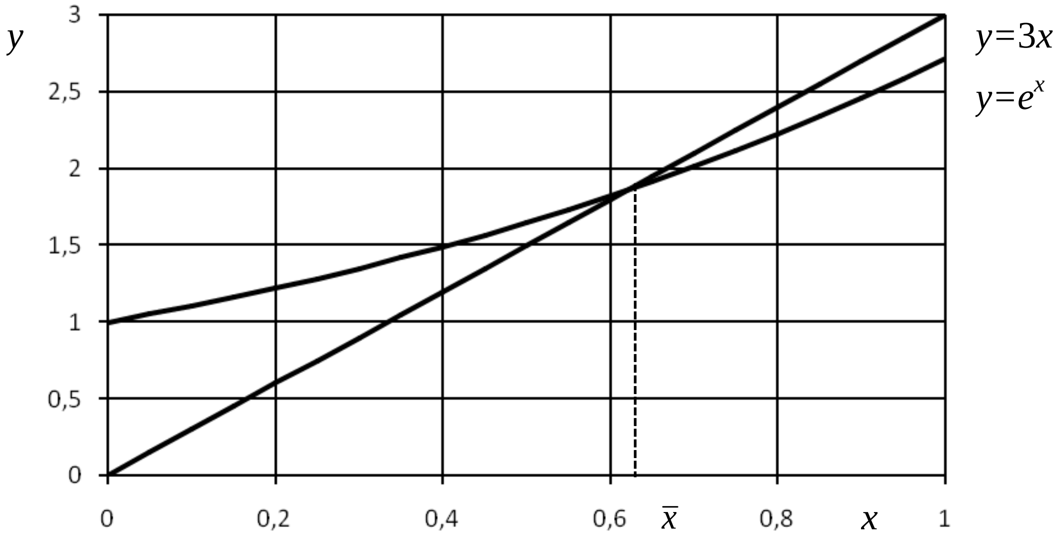
2.849623804

>*Newton*(*f*,*x*=2,*tolerance*=10^{-4});

2.849623824

> *Newton*(*f*,*x*=2,*tolerance*=10^{-4}, *outpout*=*sequence*);

2., 4.600000000. 3.564345404 3.036093590 2.867439650 2.849810459 2.849623824

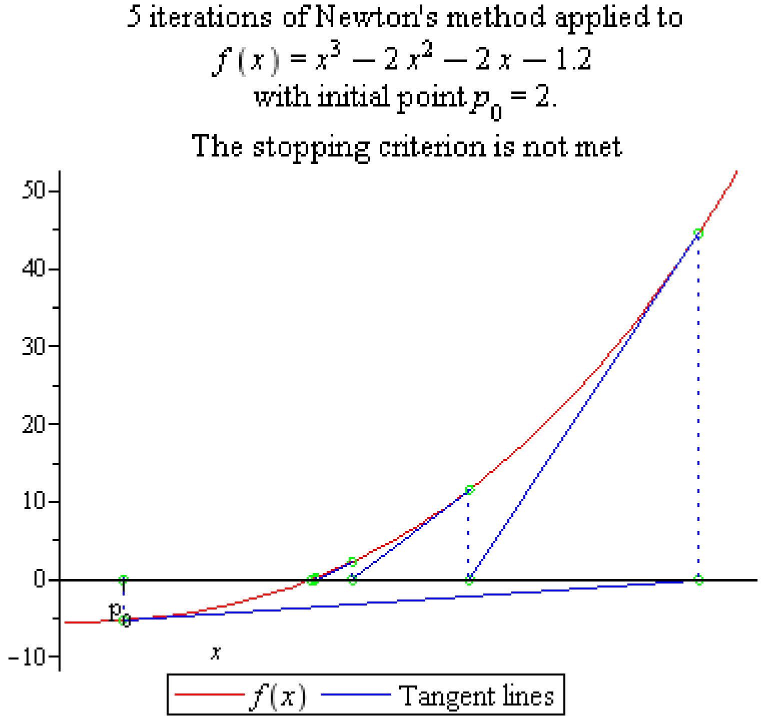


2.25-rasm. Tenglamaning haqiqiy eng kichik ildizini MS Excel dasturida ajratish.

> *Newton*(*f*,*x*=[1,1.5],*tolerance*=10^{-4}, *stoppingcriterion*=*absolute*);

2.849623805

> *Newton*(*f*,*x*=2, *outpout*=*plot*, *stoppingcriterion*=*function_value*);



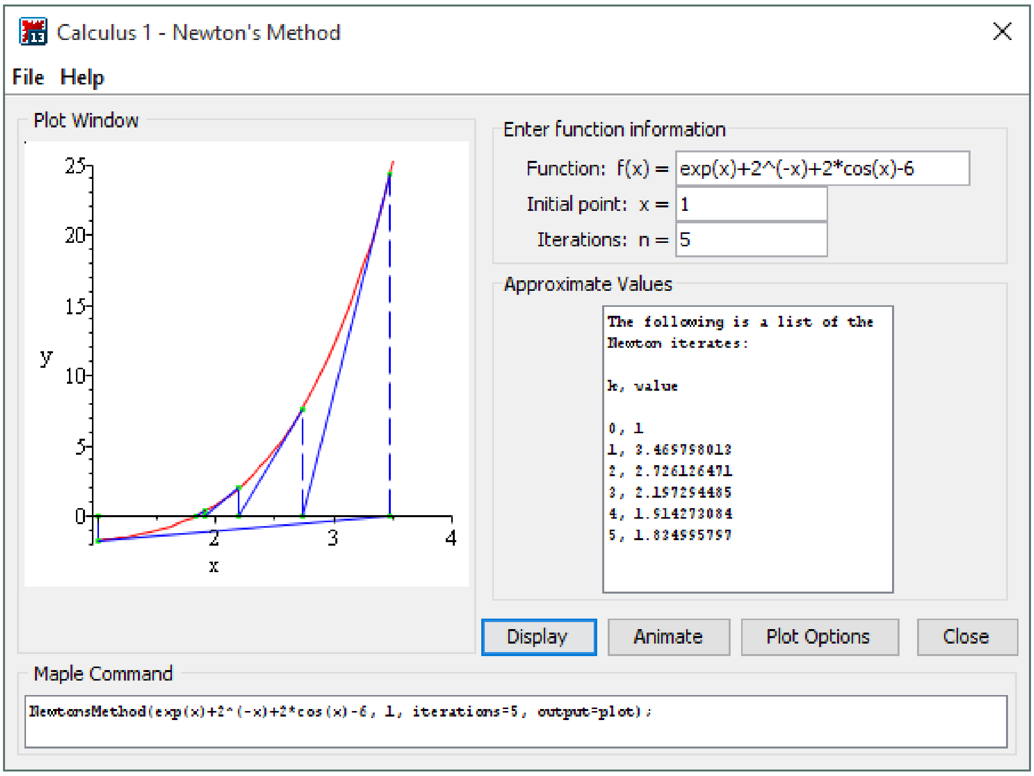
2.26-rasm. Tenglamaning haqiqiy ildizini Nyuton usuli bilan topish.

3-misol. Ushbu $e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0$ tenglamaning $[0;\pi]$ kesmadagi ildizini Nyuton usuli yordamida $\varepsilon = 0{,}001$ aniqlik bilan Maple dasturining interactive paketidan foydalanib toping.

Yechish. Dastur matni va interactive oynasi (2.27-rasm):

>*with*(*Student*[*Calculus1*]):

>*NewtonMethodTutor*($e^x + 2^{-x} + 2{\cdot}\cos x - 6, x{=}0..4$);



2.27-rasm. Tenglamaning haqiqiy ildizini Nyuton usuli bilan Maple dasturining interactive paketidan foydalanib topish.

Mashqlar

Quyida berilgan tenglamalarni Nyuton usuli bilan yeching (bunda *a*, *b*, *c*, ε parametrlarni o‘zingiz har xil qilib tanlash orqali turli variantlar hosil qiling):

1. $tg(ax+b)+cx^2=0$; $a = 3.01$; $b = 4$; $c = -1$; $\varepsilon = 10^{-3}$.
2. $\sin ax + bx^3 + cx = 0$; $a = 2.23$; $b = -3.14$; $c = 1.02$; $\varepsilon = 6{\cdot}10^{-4}$.
3. $(x+a)^2 + bx + c = 0$; $a = -2.13$; $b = 1.47$; $c = -4.12$; $\varepsilon = 10^{-5}$.
4. $ax(bx+c)^2 - 14 = 0$; $a = 3.23$; $b = 1.2$; $c = 3.22$; $\varepsilon = 4{\cdot}10^{-4}$.
5. $(x+a)^3 + b\sin c^x = 0$; $a = -3.21$; $b = -1.45$; $c = 2.12$; $\varepsilon = 2{\cdot}10^{-4}$.
6. $a\sqrt{|\sin x|} + b\lg x = 0$; $a = 2.06$; $b = -1.06$; $\varepsilon = 4{\cdot}10^{-5}$.
7. $\dfrac{a}{\sqrt{bx+c}} + b\cos cx = 0$; $a = 2.07$; $b = 1.16$; $c = 1.02$; $\varepsilon = 2{\cdot}10^{-5}$.
8. $ax^3 + b + c\sqrt{x+2} = 0$; $a = 1.11$; $b = -10.11$; $c = -2.03$; $\varepsilon = 7{\cdot}10^{-5}$.

Izoh: Dastlab funksiyaning grafigini matematik paketlardan birida (Maple, Matlab, Mathcad, Mathematica va boshqa) yoki MS Excel dasturida chizing, haqiqiy ildizlar yotgan oraliqlarni aniqlab oling, hisoblashlarni qo‘lda va dasturda bajaring.

Kesuvchilar usuli.

Nyuton usulida $f(x)$ funksiyaning hosilasini hisoblash hamma vaqt ham qulay emas yoki ba’zida buning imkoni bo‘lmaydi. Ana shu holda ikkita ketma-ket iteratsiyaning qiymatlaridan foydalanib, birinchi hosilani ayirmali ifodasiga (ya’ni urinmani kesuvchiga) almashtirish orqali kesuvchilar usuliga kelinadi. Analitik usullar nuqtai nazaridan approksimatsiyalovchi sifatida oxirgi ikkita x_n va x_{n-1} nuqtalar orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq olinadi, ya’ni urinmalar usulidagi hosila o‘rniga quyidagi ifoda olinadi:

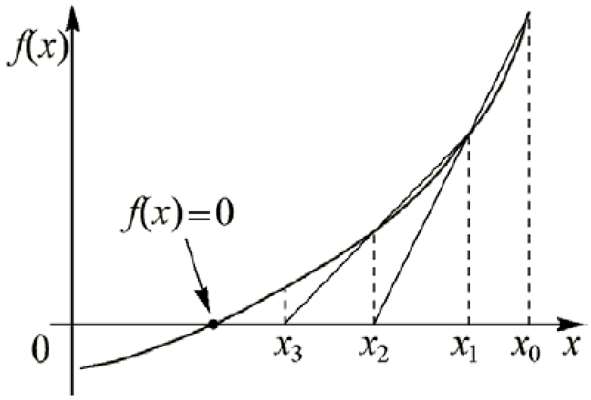
$$f'(x) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}},$$

u holda kesuvchilar usulining formulasi quyidagicha yoziladi:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

Bu yerdan ko‘rinib turibdiki, kesuvchilar usuli ikki qadamli usul, ya’ni u ikkita boshlang‘ich nuqtalarning berilishini talab qiladi.

Usulning geometrik talqini 2.28-rasmda tasvirlangan. Dastlab tanlab olingan ikkita $(x_0,f(x_0))$ va $(x_1,f(x_1))$ nuqtalar orqali to‘g‘ri chiziqni absissa o‘qi bilan kesishgunga qadar o‘tkazamiz va bu kesishish nuqtasining absissasi x_2 funksiyaning $f(x_2)$ qiymatini beradi. Endi bunday to‘g‘ri chiziqni $(x_1,f(x_1))$ va $(x_2,f(x_2))$ nuqtalar orqali o‘tkazib, navbatdagi x_3 nuqtani topamiz va hokazo. Bu hisoblashlar Nyuton usulida keltirilgan uchta iteration jarayonlardan birortasi bajarilgunga qadar davom ettiriladi.



2.28-rasm. Kesuvchilar usulining geometrik talqinini ifodalovchi chizma.

Ba’zi adabiyotlarda kesuvchilar usulini *vatarlar usulining takomillashtirilgan holi* deb ham atashadi.

Kesuvchilar usuli ikki qadamli usul hisoblanadi.

Usulning qulayliklari: odatda, kesuvchilar usulida iteratsiyalar soni urinmalar usuliga qaraganda ko‘proq bo‘ladi, ammo bunda har bir iteratsiya tezroq bajarilib boradi, chunki kesuvchilar usulida $f'(x)$ hosilani hisoblash talab etilmaydi; shuning uchun kesuvchilar usulida iteratsiyalar sonining ortib borishi bilan yanada yuqoriroq aniqlikdagi yechim topilishiga erishilib boriladi.

Usulning kamchiliklari: iteratsiyalarning yaqinlashishi nafaqat ildizdan uzoq nuqtalarda, balki uning kichik atrofida ham monoton bo‘lmasligi mumkin; hisob formulasidagi maxrajda turgan farq ildizdan uzoqroqda uncha ahamiyat kasb etmasligi mumkin, ammo ildiz atrofida funksiyaning qiymati juda kichik va ular bir biriga juda yaqin bo‘lganligi uchun ifodada bu ayirma nolga bo‘linishga olib keladi, ya’ni aniqlik yo‘qoladi.

Usulning algoritmi:

1. $[a,b]$ kesmani va ε aniqlikni berish.
2. Dastlabki ikkita yaqinlashish x_0 va x_1 berish.
3. x_2 ni approksimatsiya formulasi bo‘yicha hisoblash.
4. Funksiyaning shu nuqtadagi qiymatini hisoblash.
5. Berilgan aniqlikni tekshirib ko‘rish; agar u bajarilsa hisobni to‘xtatish, aks holda navbatdagi qadamga o‘tish.
6. x_0 ni x_1 bilan va x_1 ni x_2 bilan almashtirish va 3-qadamga o‘tish.

1-misol. Ushbu $x^3 - x + 1 = 0$ tenglamaning ildizini kesuvchilar usuli yordamida $\varepsilon = 0,001$ aniqlik bilan toping.

Yechish. Hisoblashlarni usulning formulasiga ko‘ra bajarib, natijalarni jadval ko‘rinishida ifodalaymiz:

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	–2,00000	–1,56934	–1,41871	–1,34211	–1,32613	–1,32474	–1,32472
$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	–	0,43066	0,15063	0,07660	0,01598	0,00139	0,00002

2-misol. Ushbu $\cos x - x = 0$ tenglamaning $[0,5;\ \pi/4]$ kesmadagi ildizini vatarlar, Nyuton, kesuvchilar usullari bilan Maple dasturining paketlari yordamida taqribiy toping va natijalarni taqqoslang.

Yechish. Dastur matni (dastur natijalarini jadval shaklida keltiramiz):

with(*Student*[*NumericalAnalysis*]): *f*:=cos(*x*) – *x*;
FalsePosition(*f*,*x*= [0.5,π/4], *tolerance*= 10^{-8}, *output*= *sequence*,*maxiterations*= 20);
Newton(*f*,*x* = π/4, *tolerance* = 10^{-8}, *output* = *sequence*,*maxiterations* = 20);
Secant(*f*,*x*= [0.5,π/4], *tolerance*= 10^{-8}, *output*= *sequence*,*maxiterations*= 20);

n	Vatarlar usuli	Kesuvchilar usuli	Nyuton usuli
0	0.5	0.5	0.7853981635
1	0.7853981635	0.7853981635	0.7395361337
2	0.7363841388	0.7363841388	0.7390851781
3	0.7390581392	0.7390581392	0.7390851332
4	0.7390848638	0.7390851493	
5	0.7390851305	0,7390851332	
6	0,7390851332		

Demak, Nyuton usuli tezroq yaqinlashishni berar ekan.

Mashqlar

Quyida berilgan tenglamalarni kesuvchilar usuli bilan yeching (bunda *a*, *b*, *c*, ε parametrlarni o‘zingiz har xil tanlash orqali turli variantlar hosil qilishing‘iz mumkin):

1. $ctg(ax+b)+cx^2=0$; $a = 3.01$; $b = 4$; $c = -1$; $\varepsilon = 10^{-3}$.
2. $\cos ax+bx^3+cx=0$; $a = 2.23$; $b = -3.14$; $c = 1.02$; $\varepsilon = 6\cdot10^{-4}$.
3. $(x+a)^3+bx+c=0$; $a = -2.13$; $b = 1.47$; $c = -4.12$; $\varepsilon = 10^{-5}$.
4. $ax+(bx+c)^2-14=0$, $a = 3.23$; $b = 1.2$; $c = 3.22$; $\varepsilon = 4\cdot10^{-4}$.
5. $(x+a)^2+b\sin cx=0$; $a = -3.21$; $b = -1.45$; $c = 2.12$; $\varepsilon = 2\cdot10^{-4}$.
6. $a\sqrt{|\cos x|}+b\ln x=0$; $a = 2.06$; $b = -1.06$; $\varepsilon = 4\cdot10^{-5}$.
7. $a/\sqrt{bx+c}+b\cos cx=0$; $a = 2.07$; $b = 1.16$; $c = 1.02$; $\varepsilon = 2\cdot10^{-5}$.
8. $ax^3+b+c/\sqrt{x+2}=0$; $a = 1.11$; $b = -10.11$; $c=-2.03$; $\varepsilon = 7\cdot10^{-5}$.
9. $ax^3+b+c\sqrt{x+2}=0$; $a = 1.11$; $b = -10.11$; $c=-2.03$; $\varepsilon = 7\cdot10^{-5}$.
10. $ax^3+b+\sin cx=0$; $a = 1.11$; $b = -10.11$; $c=-2.03$; $\varepsilon = 7\cdot10^{-5}$.

Izoh: Dastlab funksiyaning grafigini matematik paketlardan birida (Maple, Matlab, Mathcad, Mathematica) yoki MS Excel dasturida chizing, haqiqiy ildizlar yotgan oraliqlarni aniqlab oling, hisoblashlarni qo‘lda va dastur yordamida bajaring.

Vatarlar va urinmalar usullarining birlashgan variantlari.

1-variant (urinmalar va vatarlar usullarining birlashgan varianti).

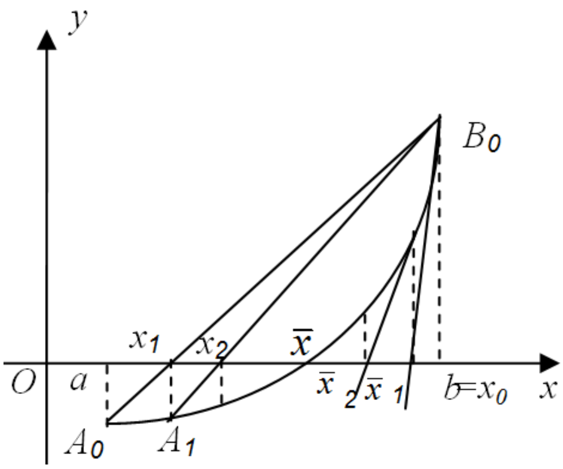
Faraz qilaylik, [*a*,*b*] kesmada $f'(x)>0$, $f''(x)>0$. U holda urinmalar usulini qo‘llash natijasida izlanayotgan $\bar{x}$ ildizga yaqinlashuvchi $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots$ kamayuvchi ketma-ketlikka erishamiz. Xuddi shu holda vatarlar usulidan foydalansak, $\bar{x}$ limitga intiluvchi x_1, x_2, … o‘suvchi ketma-ketlikni hosil qilamiz. Natijada, bu har ikkala usulni burlashtirgan holda hisoblashlarni bajarib, ya’ni ularni ketma-ket bir vaqtda qo‘llab, $\bar{x}$ ildizni parallel ravishda ortiqchasi va kami bilan hisoblagan bo‘lamiz. Xususan, yetarlicha aniqlikda olingan $\bar{x}_n$ va x_n lar ildizning aniq qiymati $\bar{x}$ ga tegishli bo‘ladi (2.29-rasm).

Faraz qilaylik, $\bar{x}_{n+1}$ va x_{n+1} – ildizning ortiqcha va yetmaydigan taqribiy qiymatlari bo‘lsin. Qaralayotgan holda ketma-ket yaqinlashishlar urinmalar va vatarlar usullari bo‘yicha mos ravishda quyidagi formulalar bilan hisoblanadi:

$$\begin{cases} \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \dfrac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}; \quad (n=0,1,2,\ldots), \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}(b-x_n), \quad (n=0,1,2,\ldots), \end{cases}$$

bunda: $x_0 = b$ - urinmalar usuli uchun; $x_0 = a$ – vatarlar usuli uchun.

Hisoblash jarayoni ushbu $|\bar{x}_{n+1} - x_{n+1}| < \varepsilon$ shart bajarilgunga qadar davom ettiriladi. Yakuniy javob deb $\bar{x} = \frac{1}{2}(\bar{x}_n + x_n)$ deb qabul qilinadi.



2.29-rasm. 1-variant.

Bu usulni qo‘llayotgan paytda quyidagiga amal qilish lozim: urinmalar usuli formulasidan foydalanilayotgan paytda qaysi chegarada ushbu $f'(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$ shart bajarilsa, shu chegara qiymat (a yoki b) x_0 deb qabul qilinadi; vatarlar usuli formulasidan foydalanilayotgan paytda ushbu $f'(x)\cdot f''(x) < 0$ shart bajarilsa, x_0=a va aksincha ushbu $f'(x)\cdot f''(x) > 0$ shart bajarilsa, x_0=b deb qabul qilinadi.

2-variant (urinmalar va kesuvchilar usulining birlashgan varianti).

Bu usulga ko‘ra har bir qadamda vatarlar usuli yangi [$\bar{x}_n$, x_n] kesmaga qo‘llaniladi. Shu bilan birga urinmalar usuliga tegishli x_0, x_1, … larni hisoblashlar saqlab qolinadi. Shu bilan birga x_{n+1} yaqinlashish har bir keyingi vatarning absissa o‘qi bilan kesishish nuqtasidan topib boriladi. Avvalgi har bir $\bar{x}_n$ va x_n yaqinlashishlar absissa o‘qidagi usullarga mos kesishish nuqtalardir (2.30-rasm).

Shunday qilib, bu usulning mos formulasi quyidagicha:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}(\bar{x}_n - x_n), \quad n = 1, 2, ...,$$

bunda boshlang‘ich nuqtani tanlash urinmalar va kesuvchilar usuli mavzusidagiga mos.

3-variant (vatarlar va kesuvchilar usulining birlashgan varianti).

Bu usulning yaqinlashuvchanligi kafolatlangan. Dastlab ikkita x_0 va x_1 yaqinlashishlar tanlanadi (2.31-rasm). Agar x_0 va x_1 nuqtalar ildizning har xil tomonlarida yotsa, u holda vatarlar (2.32-rasm), aks holda esa kesuvchilar o‘tkaziladi (2.33-rasm). Bu usulning yuqoridagi ikkita variantdan farqi shuki, bunda hosila har bir iteratsiya tugunlarida emas, balki faqat boshlang‘ich nuqtada hisoblanadi.

Bu usulning asosiy hisob formulalari quyidagicha:

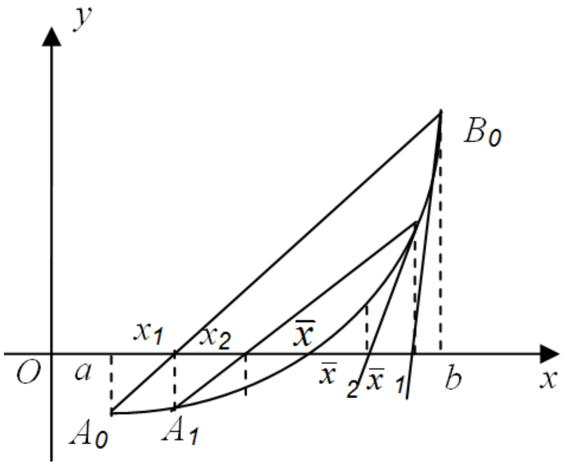
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_0)}; \quad (n = 0, 1, 2, ...), \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1}), \quad (n = 1, 2, ...). \end{cases}$$

Oddiy iteratsiyalar usuli.

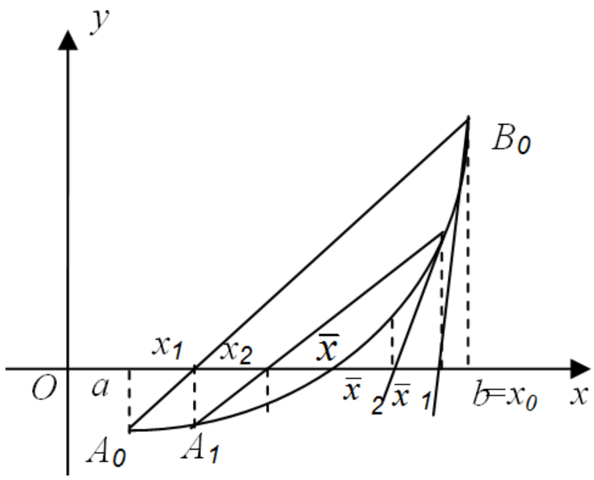
Dastlabki $f(x)=0$ tenglamani x=φ(x) ko‘rinishga keltirish mumkin, masalan,

$$\varphi(x) = x - f(x)/k$$

formula bilan, bunda k shunday tanlash kerakki, $|k| \geq Q/2$ bo‘lsin, bu yerda $Q = \max\limits_{[a,b]} |f'(x)|$ va k ning ishorasi [a,b] kesmada $f'(x)$ ning ishorasi bilan mos tushishi lozim. Agar [a,b] kesmada $|\varphi'(x)|<1$ shart (bu yetarli shart) bajarilsa, u holda iteratsion jarayon yaqinlashuvchi bo‘ladi, aks holda esa, ya’ni $|\varphi'(x)|>1$ bo‘lsa, u uzoqlashuvchi.



2.30-rasm. 2-variant.



2.31-rasm. 3-variant.

Bu yerda ham boshlang‘ich yaqinlashishni tanlash har bir usuldagiga mos. Bu usulning blok-sxemasi 2.34-rasmda tasvirlangan.

Faraz qilaylik, ildizning boshlang‘ich yaqinlashishi $x = x_0$ bo‘lsin. Bu qiymatni x=φ(x) tenglamaning o‘ng tarafiga qo‘yib, $x_1 = \varphi(x_0)$ yangi yaqinlashishni hosil qilamiz. Bu jarayonni har safar yangidan takrorlab, *oddiy iteratsiyalar usulining hisob formulasi* deb ataluvchi ushbu

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{2.3}$$

ketma-ket qiymatlarga ega bo‘lamiz.

Agar φ (x) funksiya uzluksiz va uning limiti mavjud bo‘lsa, u holda

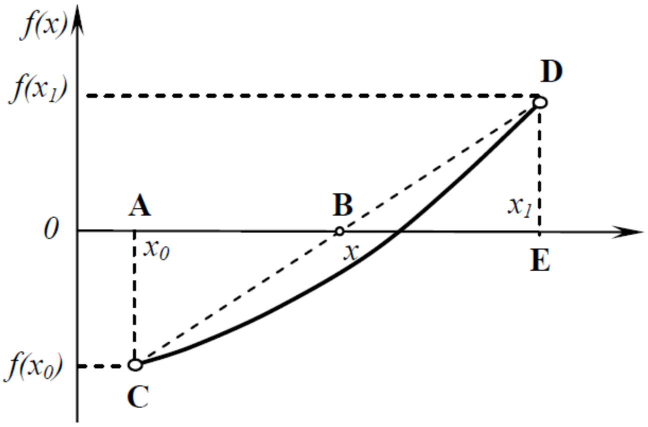
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi[x_n] = \varphi[\lim_{n\to\infty} x_n] = \varphi[\lim_{n\to\infty} x_{n+1}]$$

va x_{n+1} ketma-ketlikning $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ limiti x=φ(x) tenglamaning va o‘z navbatida $f(x)=0$ tenglamaning ham ildizi bo‘ladi.

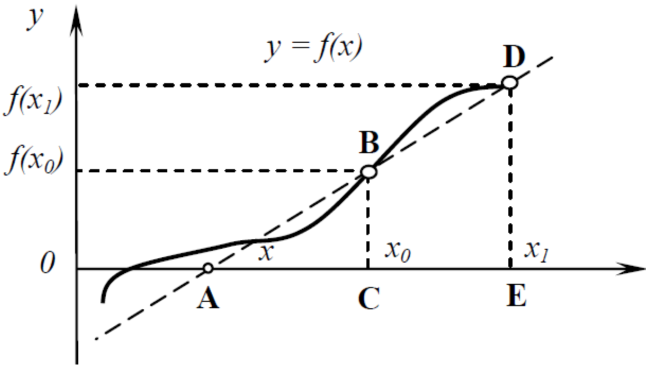
Tanlangan (2.3) iteratsion jarayon *bir qadamli*.

Iteratsiya usuli ba’zan *ketma-ket yaqinlashishlar usuli* deb ham ataladi.

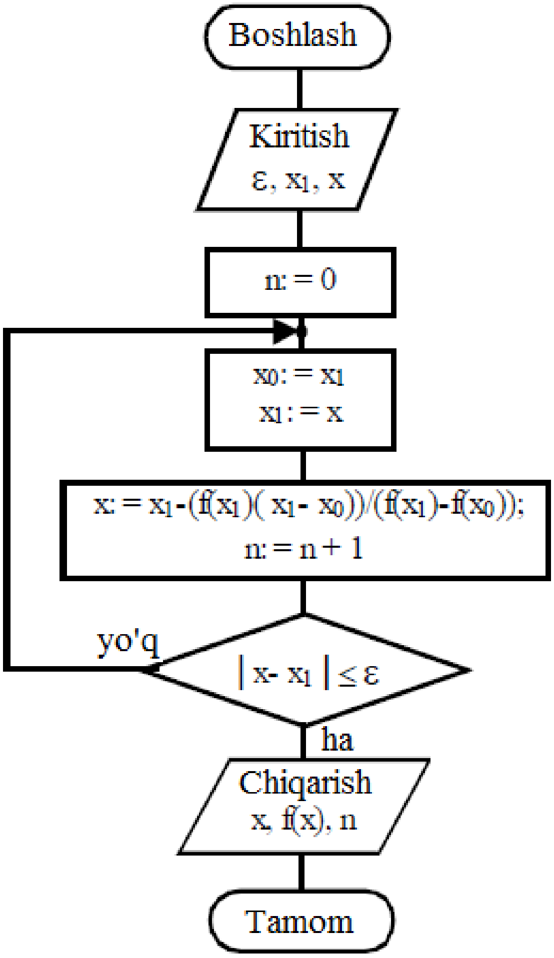
Agar $|\varphi'(x)|<1$ bajarilganda $\varphi'(x)>0$ bo‘lsa, u holda ildizga yaqinlashish monoton va bir tomonlama, aksincha, ya’ni $\varphi'(x)<0$ bo‘lsa, ikki tomonlama bo‘ladi. Ko‘rinib turibdiki, $|\varphi'(x)|$ qancha kichik bo‘lsa, iteratsion jarayon shuncha tez yaqinlashadi. Agar bunda $\varphi'(x)=0$ bo‘lsa, u holda iteratsion jarayonni maxsus tekshirish talab qilinadi. Agar dastlabki yaqinlashish ildizga juda yaqin olingan bo‘lsa, u holda iteratsion jarayon juda tez yaqinlashadi.



2.32-rasm. Vatar o‘tkazilgan hol.



2.33-rasm. Kesuvchi chiziq o‘tkazilgan hol.



2.34.-rasm. Kesuvchilar va vatarlar usullarining birlashgan varianti (3-variant) blok-sxemasi.

Talab qilinayotgan ildizni berilgan ε aniqlikda topish uchun zarur bo‘lgan iteratsiyalar soni taxminan ushbu

$$N \geq \left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right) / \left(\ln\frac{1}{q}\right)$$

tengsizlikdan aniqlanadi, bunda q o‘zgarmas $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ tengsizlikdan olinadi.

Bu (2.3) *iteratsion jarayonning ildizga yaqinlashishi* (*usulning xatoligi*) quyidagi tengsizliklar zanjiri bilan baholanadi (*xatolikning aposterior bahosi*):

$0<\varphi'(x)<1$ bo‘lganda $|x_n-\xi| \leq q/(1-q)\,|x_n-x_{n-1}| < \varepsilon$;

$-1<\varphi'(x)<0$ bo‘lganda $|x_n-\xi| \leq |x_n-x_{n-1}| < \varepsilon$.

Bu zanjirning oxirgi qismi ikkita qo‘shni x_n va x_{n-1} iteratsiyalarning hisob hatijalari bo‘yicha *hisobni tugallash kriteriyasini* beradi, ya’ni bu iteratsion jarayon ushbu

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon\,(1-q)/q$$

yoki agar $q \le 0{,}5$ bo‘lsa, soddaroq qilib ushbu

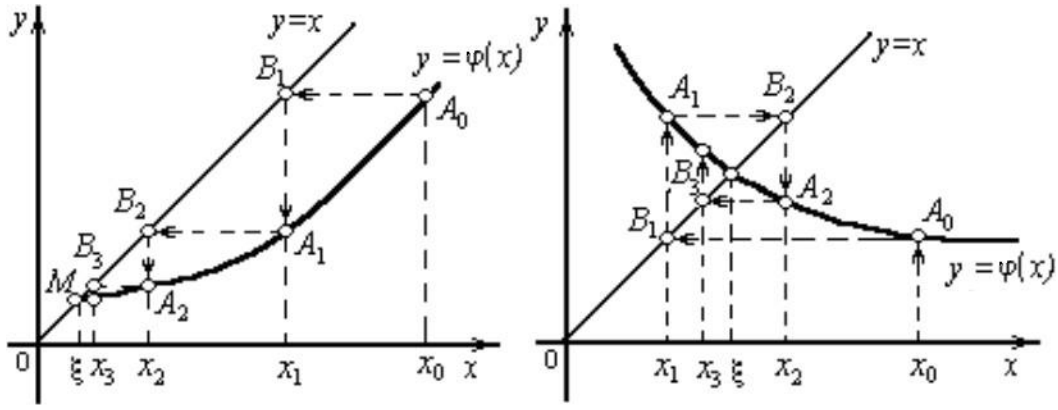
$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

shart bajarilgunga qadar davom ettiriladi va $x_{n+1} = \xi$ yoki $x_n = \xi$ yechim deb olinadi.

Geometrik nuqtai nazardan $y=x$ va $y=\varphi(x)$ funksiyalar grafiklari kesishgan nuqtasining absissasi $f(x)=0$ tenglamaning yechimi bo‘ladi.

Faraz qilaylik, $x=\varphi(x)$ tenglama uchun $|\varphi'(x)|<1$ shart bajarilsin. Dastlabki $A_0[x_0,\varphi(x_0)]$ nuqtadan boshlab Ox va Oy o‘qlariga parallel $A_0B_1A_1B_2A_2$... ketma-ket siniq chiziqlarni bo‘g‘inlari «zinapoya» shaklida qilib quramiz (2.35,*a*-rasm), bunda A_0, A_1, A_2, ... uchlar $y=\varphi(x)$ egri chiziqda, B_1, B_2, B_3,... uchlar esa $y=x$ to‘g‘ri chiziqda yotadi. Ko‘rinib turibdiki, bunga mos x_1, x_2, ... ketma-ket qiymatlar ξ ildizga yaqinlashadi. Bunda boshqa holat ham yuz berishi, ya’ni $A_0B_1A_1B_2A_2$... ketma-ket siniq chiziqlar «spiral» shaklida bo‘lishi ham mumkin (2.35,*b*-rasm).

Agar $|\varphi'(x)|<1$ shart bajarilsa, ya’ni $0<\varphi'(x)<1$ bo‘lsa, u holda yechimga yaqinlashish «zinapoya» shaklida (2.35,*a*-rasm), aksincha, $-1<\varphi'(x)<0$ bo‘lganda esa «spiral» shaklida (2.35,*b*-rasm) bo‘ladi. $|\varphi'(x)|>1$ shart bajarilganda esa iteratsion ketma-ketlik uzoqlashuvchi bo‘ladi (2.36-rasm).



a *b*

2.35-rasm. Yaqinlashuvchi iteratsion jarayonlarning grafik tasviri.

Iteratsion ketma-ketlikning yaqinlashuvchanligi va yechimning yagonaligi haqidagi teoremani isbotsiz keltiraylik.

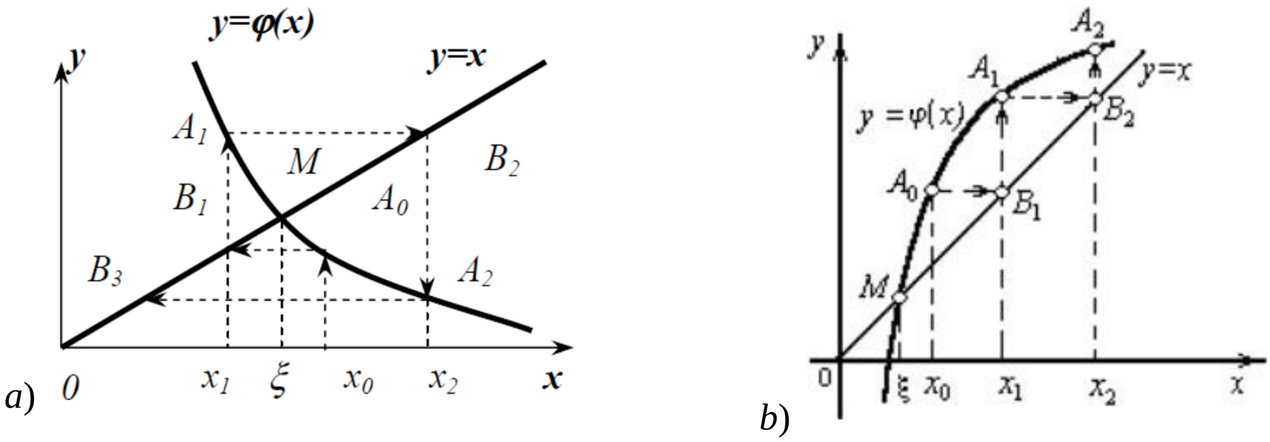
Teorema. Faraz qilaylik, $\varphi(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz va uning barcha qiymatlari uchun $\varphi(x)\in[a,b]$. Agar $x\in(a,b)$ lar uchun shunday q to‘g‘ri kasr mavjud bo‘lsaki, bunda ushbu

$$|\varphi'(x)| \le q < 1$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda:

1) boshlang‘ich $x_0\in[a,b]$ ni qanday tanlashdan qat’iy nazar ushbu (2.3) iteratsion jarayon yaqinlashuvchi bo‘ladi;

2) ushbu $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$ limitik qiymat $x=\varphi(x)$ tenglamaning $[a,b]$ kesmadagi yagona ildizi bo‘ladi. Ildizning yagonligi haqida quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.



2.36-rasm. Uzoqlashuvchi iteratsion jarayonning grafik tasviri:
a) $\varphi'(x)< -1$; *b*) $\varphi'(x)>1$.

Teorema. Agar biror $S = \{\, x : |x - x_0| \le \delta \,\}$ nuqtalar to‘plamida $\varphi(x)$ funksiya ushbu $|\varphi(x') - \varphi(x'')| < q\,|x' - x''|$, $x', x'' \in S$, $q < 1$, *Lipshits shartini* va $|x_0 - \varphi(x_0)| \le (1 - q)\delta$ shartni qanoatlantirsa, u holda $x = \varphi(x)$ tenglama S kesmada yagona ξ ildizga ega bo‘ladi.

Iteratsion jarayonning yaqinlashish tezligi ushbu

$$|x_n - \xi| \le m\, q^n / (1 - q)$$

tengsizlikdan aniqlanadi, bunda $m = |x_0 - \varphi(x_0)|$.

Agar $\varphi(x)$ funksiya S kesmada uzluksiz $\varphi'(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, u hoda *Lipshits shartini* sodda qilib $|\varphi'(x)| \le q < 1$ kabi yozish mumkin.

Bular oddiy iteratsiya usuli maxraji q ga teng bo‘lgan *geometrik progressiya tezligi bilan yaqinlashadi* degani.

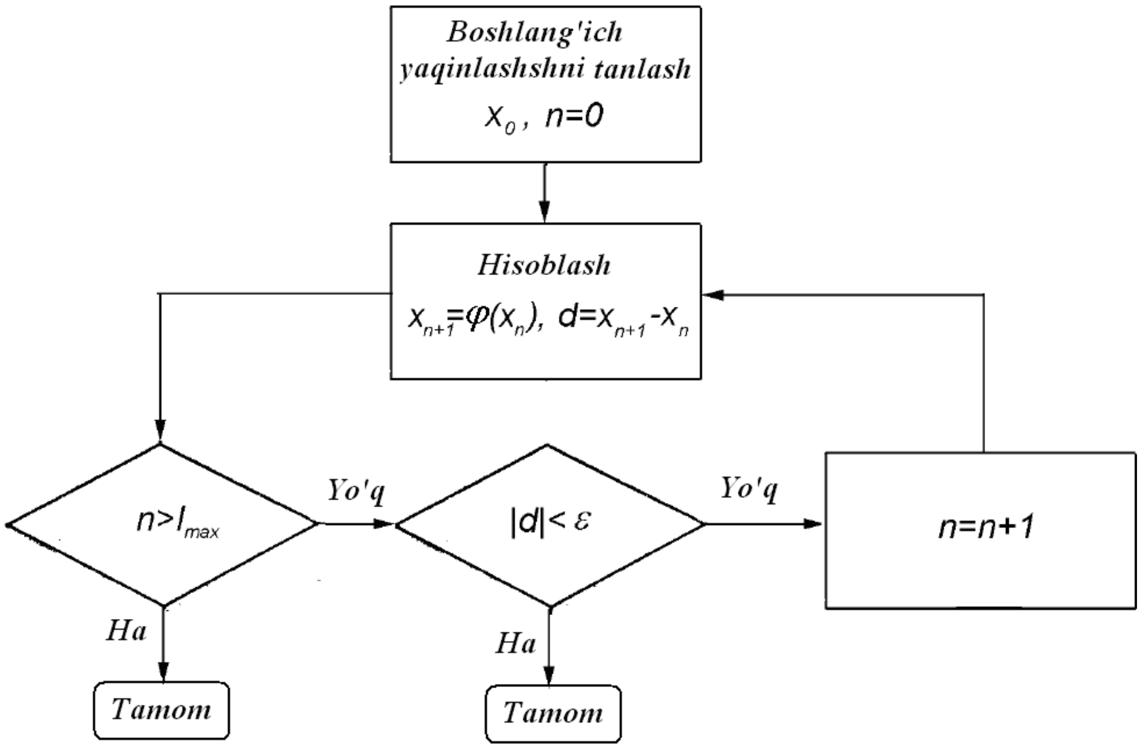
Shuni ta’kidlaymizki, $\varphi(x)$ funksiyani tanlashda juda ehtiyotkorlik talab qilinadi. Masalan, $f(x) = x^2 - c$ tenglamani $x = x^2 - c + x$ yoki $x = c/x$ yoki $x = 0{,}5(x+c/x)$ ko‘rinishga keltirish mumkin. Shulardan $\varphi(x) = x^2 - c + x$ ko‘rinishni tanlasak, $-1<x<0$ oraliqdagina $|\varphi'(x)| < 1$ shart bajariladi va iteratsion jarayon $-\sqrt{c}$ ildizga yaqinlashadi. Agar $\varphi(x) = c/x$ desak, u holda $\varphi'(x) = -c/x^2$ va iteratsion jarayon uzoqlashuvchi bo‘lib chiqadi.

Oddiy iteratsiyalar usulining blok-sxemasi 2.37-rasmda tasvirlangan.

Namunaviy mashqlar va ularning yechimlari

1-misol. Ushbu *a*) $f(x)=x^3-x-1=0$; *b*) $f(x)=x^3-x+1=0$ tenglamaning ildizini oddiy iteratsiyalar usuli yordamida $\varepsilon=0{,}01$ aniqlik bilan toping.

Yechish. *a*) Ushbu $f(x)=x^3-x-1=0$ tenglama [1;2] kesmada yagona ildizga ega, chunki $f(1) = -1 < 0$ va $f(2) = 5 > 0$. Agar berilgan tenglamani $x=x^3-1$ ko'rinishda yozib olsak, $\varphi(x)=x^3-1$ va $\varphi'(x)=3x^2$. Bunda $x\in[1;2]$ lar uchun $\varphi'(x)\geq 3$, demak iteratsion jarayon uzoqlashuvchi. Agar berilgan tenglamani $x=\sqrt[3]{x+1}$ deb o'zgartirsak, u holda $\varphi(x)=\sqrt[3]{x+1}$ va $\varphi'(x)=1/(3\sqrt[3]{(x+1)^2})$. Bunda $0<\varphi'(x)<1/(3\sqrt[3]{4})<1/4$ tengsizlik barcha $x\in[1;2]$ lar uchun o'rinli, demak iteratsion jarayon yaqinlashuvchi. Shunga ko'ra $x_{n+1}=\sqrt[3]{x_n+1}$ iteratsion formuladan foydalanib ildizni topamiz. Topilgan qiymatlar: 1,0; 1,260; 1,312; 1,322; 1,3243 ekanligidan izlangan yechim $\varepsilon=0{,}01$ aniqlik bilan $\xi=1{,}324$ ga tengligi kelib chiqadi. Xususan, $f'(x)=3x^2-1$; $Q=\max\limits_{[1,2]}|f'(x)|=11$; $k\geq Q/2\approx 6$; $\varphi(x)=x-f(x)/k=x-(x^3-x-1)/6$; $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ munosabatlarga ko'ra 1,0; 1,1667; 1,2631; 1,3044; 1,3186; 1,3229; 1,3242 natijalarni olamiz. Demak, $\xi=1{,}324$ berilgan tenglamaning taqribiy ildizi.



2.37-rasm. Oddiy iteratsiyalar usulining blok-sxemasi.

b) Ushbu $f(x)=x^3-x+1=0$ tenglama [-2;-1] kesmada yagona ildizga ega. Agar berilgan tenglamani $x=\sqrt[3]{x-1}$ deb o'zgartirsak, u holda $\varphi(x)=\sqrt[3]{x-1}$ va $\varphi'(x)=1/(3\sqrt[3]{(x-1)^2})$. Bunda $0<\varphi'(x)<1/(3\sqrt[3]{4})<1/4$ tengsizlik barcha $x\in[-2;-1]$ lar uchun o'rinli, demak iteratsion jarayon yaqinlashuvchi. Shunga ko'ra $x_{n+1}=\sqrt[3]{x_n-1}$ iteratsion formuladan foydalanib ildizni topamiz. Topilgan qiymatlar: -1,000; -1,2599; -1,3123; -1,3223; -1,3243; -1,3246 ekanligidan izlangan yechim

ε=0,001 aniqlik bilan ξ=-1,3246 ga tengligi kelib chiqadi. Xususan, $f'(x)=3x^2-1$; $Q=\max\limits_{[-2,-1]}|f'(x)|=11$; $k\geq Q/2\approx 6$; $\varphi(x) = x-f(x)/k = x-(x^3-x+1)/6$; $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ munosabatlarga ko‘ra -1,0; -1,1667; -1,2631; -1,3044; -1,3186; -1,3229; -,3242 natijalarni olamiz. Demak, ξ=-1,324 berilgan tenglamaning taqribiy ildizi.

2-misol. Ushbu $\cos x-(1/x)\sin x=0$ tenglamaning eng kichik musbat ildizini oddiy iteratsiyalar usuli bilan beshta ishonchi raqam bilan aniqlang.

Yechish. Berilgan tenglamani $x=\mathrm{tg}x$ ko‘rinishda yozib olaylik. $y=x$ va $y=\mathrm{tg}x$ funksiyalarning grafiklarini chizib, dastlabki yaqinlashishni $x_0 = 1,5\pi \approx 4,7$ deb olishimiz mumkin, ammo bu hol uchun $\varphi'(x) = (\mathrm{tg}x)' = 1/\cos^2 x \geq 1$ ekanligidan tanlangan iteratsion jarayonning uzoqlashuvchanligi kelib chiqadi. Shuning uchun bunda $x = \mathrm{arctg}x$ deb olish maqsadga muvofiq, chunki $x \neq 0$ da $\varphi'(x) = (\mathrm{arctg}x)'= =1/(1+x^2)<1$. Demak $x_{n+1} = \mathrm{arctg}x_n$ formuladan $x_0 \approx 4,7$ uchun $x \approx 4,4934$ yechimga kelamiz.

3-misol. Ushbu $\sin x - 2x + 0,5 = 0$ tenglamaning $[0;\pi/2]$ kesmadagi ildizini oddiy iteratsiya usuli yordamida ε=0,001 aniqlik bilan toping.

Yechish. Berilgan tenglamani unga teng kuchli bo‘lgan $x = 0,25 + 0,5\sin x = \varphi(x)$ tenglamaga almashtirib olamiz. Buning uchun $x\in[0;\pi/2]$ qiymatlarda $\varphi'(x)=0,5\cos x$ va $|\varphi'(x)|\leq 0,5<1$ o‘rinli. Demak $x_n = 0,25 + 0,5\sin x_n$ iteratsion jarayon $x_0 = 0,5$ boshlang‘ich qiymat uchun ketma-ket 0,4897; 0,4852; 0,4832; 0,4823; 0,4819; 0,48175; 0,48165; 0,4816 qiymatlarni beradi. Bu yerdan berilgan tenglamaning talab qilingan aniqlikdagi yechimi $x \approx 0,4816$ degan xulosaga kelamiz.

4-misol. Ushbu $f(x) = x - \cos(x) = 0$, tenglamani $x_0 = 1$ boshlang‘ich yaqinlashishda oddiy iteratsiyalar usuli yordamida $\varepsilon=10^{-10}$ aniqlik bilan Maple dasturi paketidan foydalanib yeching (kesuvchilar usuli mavzusidagi 2-misolga qarang).

Yechish. Misolni Maple dasturi paketidan foydalanib yechish (2.38-rasm):

Dastur paketini ishga tushirish, funksiyaning berlishi va yechimni topish
with(*Student*[NumericalAnalysis]): *f*:= *x*–cos(*x*); *fsolve*(*f*);

0.7390851332

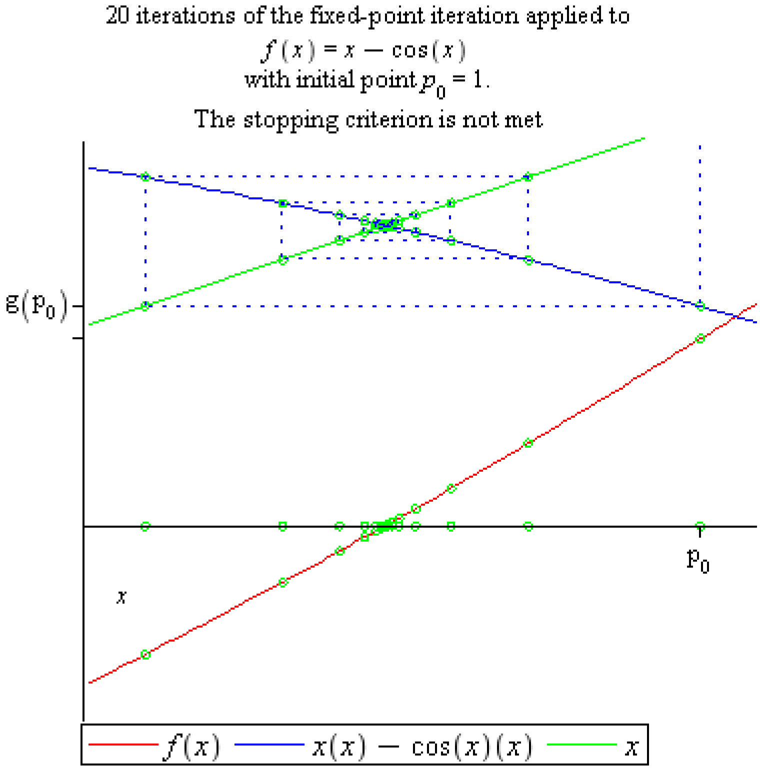
Dastur paketidan foydalanib yechimni topish
FixedPointIteration(f, x=1, tolerance=10^{-10});

0.7390851332

Iteratsiyalar natijalarini chop qilish
FixedPointIteration(f, x=0.739, *tolerance*=10^{-5},*output*=*sequence*, *maxiterations*=20);
0.739, 0.7391424773, 0.7390465043, 0.7391111536, 0.7390676053, 0.7390969401, 0.7390771799, 0.7390904906, 0.7390815244, 0.7390875642

Natijalarni grafikda ifodalash
FixedPointIteration(f, x = 1, *toleranc*e =10^{-5}, *output* = *plot*, *stoppingcriterion* = *function_value*, *maxiterations*=20);

Natijalarni grafikda ifodalashning animatsiyasi
FixedPointIteration(f, $x = 1$, *toleranc*e $=10^{-5}$, *output = animation*, *stoppingcriterion = absolyute*, *maxiterations*=20);



2.38-rasm. Tenglamaning haqiqiy ildizini oddiy iteratsiyalar usuli bilan topish.

Mashqlar

Quyida berilgan tenglamalarni oddiy iteratsiyalar usuli bilan yeching (bunda *a*, *b*, *c*, ε parametrlarni oʻzingiz har xil tanlash orqali turli variantlar hosil qiling):

1. $ax^3 + b + c\sqrt{x+2} = 0$; $a = 1.11$; $b = -10.11$; $c = -2.02$; $\varepsilon = 7\cdot10^{-5}$.
2. $ax + bx\sin x = 0$; $a = 2.01$; $b = -1$; $\varepsilon = 10^{-5}$.
3. $a\cos(x+b) + cx^3 = 0$; $a = 2.13$; $b = 3.62$; $c = -4.12$; $\varepsilon = 2\cdot10^{-4}$.
4. $\ln(x+a) + (x+b)^5 = 0$, $a = 2.11$; $b = 4.03$; $\varepsilon = 3\cdot10^{-5}$.
5. $ax^2\cos bx - cx = 0$; $a = 2.93$; $b = 3.01$; $c = 2.1$; $\varepsilon = 7\cdot10^{-5}$.
6. $a/x + be^{cx} = 0$; $a = 2.37$; $b = -0.99$; $c = 0.56$; $\varepsilon = 5\cdot10^{-4}$.

Izoh: Dastlab funksiyaning grafigini matematik paketlardan birida (Maple, Matlab, Mathcad, Mathematica) yoki MS Excel dasturida chizing, haqiqiy ildizlar yotgan oraliqlarni aniqlab oling, hisoblashlarni qoʻlda va dastur yordamida bajaring.

Teskari funksiyaga oʻtish bilan ketma-ket yaqinlashish usuli.

Yuqorida koʻrsatildiki, ketma-ket yaqinlashishning ushbu $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ formulasi Lipshits shartini bajaruvchi $\varphi(x)$ funksiyani tanlashni talab qiladi. Buni quyidagicha umumlashtirish mumkin.

Agar $x = \varphi(x)$ tenglama uchun izlanayotgan ildiz atrofida $|\varphi'(x)| > 1$ shart bajarilsa va yaqinlashish sharti bajarilmasa, u holda bu tenglamani unga teng kuchli bo‘lgan ushbu $x = \psi(x)$ tenglamaga almashtirish lozim bo‘ladi, bunda $\psi(x)$ funksiya $\varphi(x)$ funksiyaning teskarisi, x funksiya esa o‘ziga o‘zi teskari. U holda $\psi'(x) = 1/\varphi'(\psi(x))$ ekanligidan ushbu $\psi'(x) = 1/|\varphi'(x)| \leq 1/M<1$ tengsizlik kelib chiqadi va bu yangi iteratsion jarayonning yaqinlashuvchanligini ta’minlaydi.

Misol. Ketma-ket yaqinlashish usuli bilan $5x–8(\ln x+1)=0$ tenglamaning musbat ildizlarini topish talab etiladi.

Yechish. Bu tenglamani $5x/8–1 = \ln x$ ko‘rinishga keltirib, $y = 5x/8–1$ va $y = \ln x$ funksiyalar grafiklarining kesishish nuqtalari taxminan $\xi_1 \approx 0{,}45$ va $\xi_2 \approx 3{,}7$ ekanligini aniqlaymiz. Bu ildizlardan ikkinchisini ketma-ket yaqinlashish usuli yordamida yanada aniqroq topaylik: $x = 1.6(1+\ln x) = \varphi(x)$, bu ildiz atrofida $\varphi'(x) = 1.6/x \leq 1$, u holda jarayon yaqinlashadi (agar boshlang‘ich x_0 qiymat ξ_2 ga yaqinroq olingan bo‘lsa). Ammo ξ_1 atrofida $\varphi'(x) = 3{,}5 > 1$ va iteratsion jarayon uzoqlashadi. Ana shu holatda berilgan tenglamaga teng kuchli bo‘lgan tenglamani beruvchi $x = \exp(0.625x–1) = \psi(x)$ teskari funksiyaga o‘tamiz. Bu yerda $\psi'(x) = 0.625\times$ $\times\exp(0.625x–1) \approx 0.3 < 1$ va jarayon yaqinlashadi.

Steffensen (Eytken-Steffensen) usuli.

Urinmalar usulining yaqinlashish tezligini oshirish uchun uning ifodadagi $f'(x_n)$ hosilaning approksimatsiyasi o‘rniga quyidagi ifodadan foydalalanish lozim:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}. \tag{2.4}$$

Agar kesuvchilar usulidagi hosila ifodasini chap ayirmali approksimatsiya desak, u holda (2.4) ni o‘ng ayirmali approksimatsiya deb olish mumkin.

(2.4) dan ko‘rinadiki, unda hali aniqlanmagan x_{n+1} noma’lum had qatnashmoqda uni hisoblash uchin oddiy iteratsiyalar ifodasidan foydalanamiz:

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n + f(x_n).$$

Natijada biz quyidagi approksimatsiyaga ega bo‘lamiz:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)}.$$

Bu ifodadan Nyuton usulida foydalanish bilan yangi iteratsion algoritmga ega bo‘lamiz:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)} f(x_n). \tag{2.5}$$

Bu iteratsion algoritm sonli usullarda *Steffensen usuli* deb ataladi.

Steffensen usuli kvadratik yaqinlashishga ega, ammo bu yerda qo‘shimcha ravishda $f(x_n + f(x_n))$ ifodaning qiymatini hisoblash hisobiga yuqori yaqinlashish tezligiga erishiladi. Bu usul har bir iteratsiyada funksiyaning qiymatini ikki marta hisoblashni talab qiladi, bu jihatdan Steffensen usuli kesuvchilar usuliga qarahanda kamroq samara beradi.

Yuqoridagi (2.5) iteratsion algoritmni Eytken tomonidan taklif etilgan chiziqli yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning yaqinlashishini tezlashtirish uslubidan ham olish mumkin.

Buning uchun quyidagi ketma-ketlikni qaraylik:

$$z_n = z + Cq^n. \tag{2.6}$$

Bu ketma-ketlik $|q|<1$ da z limitga yaqinlashadi. Uncha qiyin bo‘lmagan akslantirishlar yordamida z limitik qiymatni $\{z_n\}$ ketma-ketlikning uchta z_{n-1} , z_n va z_{n+1} ketma-ket elementlari orqali ifodalash mumkin. Buning uchun bizga ko‘rinib turgan $\frac{z_n - z}{z_{n-1} - z} = q$ va $\frac{z_{n+1} - z}{z_n - z} = q$ ikkita tenglikdan ushbu $(z_{n+1} - z)(z_{n-1} - z) = (z_n - z)^2$ tenglikka kelinadi. Bu yerdan esa o‘z navbatida z ning quyidagi ifodasi kelib chiqadi:

$$z = \frac{z_{n+1}z_{n-1} - z_n^2}{z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1}}.$$

Bu natijaga asoslanib, $\{z_n\}$ ketma-ketlikni boshqa ketma-ketlikka almashtirishning quyidagi Eytken taklifini qaraylik:

$$\xi_{n+1} = \frac{z_{n+1}z_{n-1} - z_n^2}{z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1}}. \tag{2.7}$$

Agar bu almashtirishni (2.6) ko‘rinishidagi ixtiyoriy ketma-ketlikka qo‘llasak, u holda n ning ixtiyoriy qiymatida $\xi_n = z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yaqinlashish turi (2.6) nikiga yaqin bo‘lsa, u holda (2.7) almashtirish (n ning ixtiyoriy qiymatida uning limitini bermasada) z ga dastlabkisiga nisbatan tezroq yaqinlashuvchi yanqi ketma-ketlikni beradi.

1-misol. Ushbu

$$x^3 – x^2 – 8x + 12 = 0$$

tenglamaning ikki karrali $x_r = 2$ ildiziga taqribiy yaqinlashishni Nyuton usuli va unga Eytken tezlatgichini qo‘llash bilan bajaring.

Yechish. Hisoblashlar natijalari mos ketma-ketliklar elementlari bilan quyidagi jadvalda keltirilgan (uchinchi va to‘rtinchi ustunlarga qarang).

n	x_n	$\|x_n - x_r\|/\|x_{n-1} - x_r\|$	ξ_n	$\|\xi_n - x_r\|/\|\xi_{n-1} - x_r\|$
0	0,5	-	-	-
1	1,454545	0,363636	-	-
2	1,745059	0,467381	1,872159	-
3	1,876049	0,486197	1,983607	0,128232
4	1,938822	0,493563	1,996588	1,208141
5	1,969602	0,496884	1,999213	1,230676

6	1,984847	0,498466	1,999811	0,240656
7	1,992425	0,499239	1,999954	0,245400
8	1,996221	0,499621	1,999988	0,247717
9	1,998111	0,499811	1,999997	0,248863
10	1,999056	0,499905	1,999999	0,249432
11	1,999528	0,499953	2,000000	0,249717
12	1,999764	0,499976	2,000000	0,249856
13	1,999882	0,499988	2,000000	0,249948
14	1,999941	0,499994	2,000000	0,250448

Bu jadvalning uchinchi ustunida yaqinlashish tezligi $\alpha = 1$ deb faraz qilinib, (2.6) tenglikdagi C o‘zgarmasning har bir iteratsiyadagi qiymatlari keltirilgan. Jadvaldagi natijalardan ko‘rinadiki, C o‘zgarmas iteratsion jarayonda juda kam o‘zgarib boradi va u C=0,5 qiymatga juda ham yaqin. Natijada Nyuton usulining karrali ildizga yaqinlashish tezligi chiziqli ekanligi haqidagi faraz isbotlanadi.

Chiziqli yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikni (2.7) tezlashtirivchi formulaga qo‘llab, jadvalning to‘rtinchi ustunidagi ξ_n larning qiymatlariga erishamiz. Jadvalning ikkinchi va tortinchi ustunlaridagi qiymatlarni taqqoslash bilan yaqinlashish tezligiga erishganligimizga ishonch hosil qilamiz. Haqiqatan ham, Nyuton usulining o‘n to‘rtinchi iteratsiyasida erishiladigan natijaga Nyuton usuli va Eytken tezlatgichini qo‘llab, uning yettinchi iteratsiyasida shu najijaga kelish mumkinligini ko‘rish mumkin. Bu jadvalning beshinchi ustunidagi natijalar yaqinlashish tezligi ko‘rsatgichi α ning oshishi hisobiga emas, balki C o‘zgarmasni 0,25 gacha kamaytirish hisobiga bunday samarali natijaga erishilganligini ko‘rsatadi.

Endi oddiy iteratsiyalar usulida ildizga taqribiy yaqinlashishning tezligini oshirishni tahlil qilaylik. Buning uchun avvalo $x_{n+1} = g(x_n)$ iteratsion formulaning o‘ng tarafini Teylor qatoriga yoyaylik, ya’ni

$$g(x_n) = g(x_r + (x_n - x_r)) = x_r + g'(x_r)(x_n - x_r) + O((x_n - x_r)^2).$$

Bunga ko‘ra

$$x_{n+1} - x_r = g'(x_r)(x_n - x_r) + O((x_n - x_r)^2).$$

Shunday qilib, $e_n = x_n - x_r$ kvadrat aniqlik bilan har bir iteratsiya uchun quyidagi taqribiy tenglikni yozish mumkin:

$$x_{n+1} - x_r = g'(x_r)(x_n - x_r).$$

Bu yerdan $\{x_n\}$ ketma-ketlikni quyidagi formula bilan ifodalash mumkin:

$$x_n \approx x_r + [g'(x_r)]^n (x_0 - x_r).$$

Bu ketma-ketlikning ham yaqinlashishi turi (2.6) ketma-ketlikniki kabi. Demak, oddiy iteratsiyalardagi ildizga yaqinlashish ketma-ketligi yaqinlashishni tezlashtirish prosedurasini qo‘llash uchun mos ekan.

Yaqinlashishni tezlashtirish prosedurasini qo‘llashda hisoblangan har bir yaxshilovchi qiymatning keyingi hisoblashlarda ham hisobga olinishini ta’minlash maqsadida uni shu zahoti hisobga kiritish lozim. Bu iteratsiyaning har bir qadamida quyidagicha bajariladi: faraz qilaylik, hisoblashlar x_n ning qiymatini hisoblashgacha bajarildi; uning yordamida ikkita yordamchi $x_n^{(1)} = g(x_n)$ va $x_n^{(2)} = g(g(x_n))$ qiymatlarni hisoblaymiz. Uchta x, $x_n^{(1)}$ va $x_n^{(2)}$ qiymatlarga (2.7) tezlatgich formulani qo‘llaymiz va uning natijasini navbatdagi x_{n+1} yaqinlashish deb qabul qilamiz:

$$x_{n+1} = \frac{x_n g(g(x_n)) - g^2(x_n)}{g(g(x_n)) - 2g(x_n) + x_n}. \tag{2.8}$$

Bu tenglik (2.5) Steffensen iteratsion formulasining yozilish shakllaridan biri ekanligi ko‘rinib turibdi.

2-misol. (2.8) formulani ushbu

$$x^3 – x^2 – 8x + 12 = 0$$

tenglamaning ikki karrali ildizini topishga qo‘llang.

Yechish. Buning uchun Nyuton iteratsiyasiga mos

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

deb olib, (2.8) formula bo‘yicha hisoblashlardan

{0,5; 1,87215909; 1,99916211; 1,99999996; 2,00000000}

ketma-ketlikni hosil qilamiz. Bu qiymatlarni ξ_n ning yuqoridagi jadvalning to‘rtinchi ustunidagi qiymatlari bilan taqqoslab, tezlatgichni ketma-ketlikka emas, balki hatija olingan algoritmga kiritish bilan samaradorlik oshganligini ko‘rishimiz mumkin.

Ushbu misolni Maple dasturining paketidan foydalanib yechamiz (2.39-rasm):

>with(*Student*[*NumericalAnalysis*]):

>*f*:= $x^3 – x^2 – 8x + 12$;

$f := x^3 - x^2 - 8x + 12$

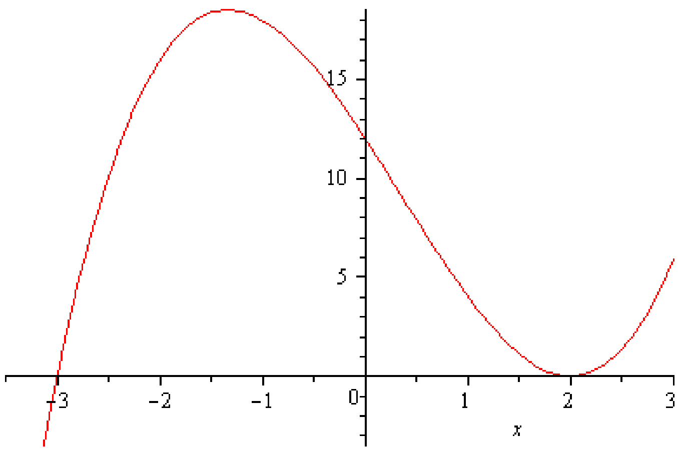
>*fsolve*(*f*);

–3,. 2., 2.

>*Steffensen*(*f*,*x*=–2,*tolerance*=10^{-4});

–3.000000000

>*plot*(*f*,*x*=–3.5..3)



2.39-rasm. Steffensen usulining tenglama ikki karrali ildizini topishga qo‘llanilishi.

Teskari kvadratik interpolyatsiya usuli.

Usulning nomidan kelib chiqib, $f(x)=0$ tenglamaning ildiziga yangi yaqinlashishni topish uchun $y= f(x)$ funksiyaga nisbatan teskari bo‘lgan $x=g(y)$ funksiyaning kvadratik interpolyatsiyasidan foydalaniladi. Ikkinchi darajali ko‘phad bilan interpolyatsiyalash uchun (x,y) tekislikning uchta nuqtasi zarur, ularni ildizga yaqinlashuvchi uchta ketma-ket nuqtalarni tanlaymiz:

$$(x_{n-2}, y_{n-2}=f(x_{n-2})),\ (x_{n-1}, y_{n-1}=f(x_{n-1}))\ \text{ va }\ (x_n, y_n=f(x_n)).$$

Bunday holda Lagranjning interpolyatsion formulasi quyidagicha yoziladi:

$$P_2(y)=\frac{x_k(y-y_{k-1})(y-y_{k-2})}{(y_k-y_{k-1})(y_k-y_{k-2})}+\frac{x_{k-1}(y-y_k)(y-y_{k-2})}{(y_{k-1}-y_k)(y_{k-1}-y_{k-2})}+\frac{x_{k-2}(y-y_k)(y-y_{k-1})}{(y_{k-2}-y_k)(y_{k-2}-y_{k-1})}. \quad (2.9)$$

Bu ko‘phaddan keyinchalik foydalanish quyidagi farazlarga asoslangan. Agar $x=g(y)$ funksiya ma’lum bo‘lganda edi, u holda ildizni topish ushbu $x_r = g(0)$ oddiy hisoblashga keltirilgan bo‘lardi. Ammo teskari funksiyani topish doimo tenglamani yechishdan ko‘ra murakkabroq. Ildiz atrofida $g(y)$ funksiya $P_2(y)$ ko‘phad bilan almashtirishni taklif qilish mumkin. Bu bilan biz $P_2(0)$ ni hisoblab, dastlabki tenglamaning ildiziga yangi yaqinlashishni hosil qilamiz: $x_{k+1} = P_2(0)$.

Shunday qilib, (2.9) ifodaga mos *teskari kvadratik interpolyatsiya usuli*ning iteratsiyalarini quyidagi formula bo‘yicha hisoblash mumkin:

$$x_{k+1}=\frac{y_{k-1}y_{k-2}x_k}{(y_k-y_{k-1})(y_k-y_{k-2})}+\frac{y_k y_{k-2}x_{k-1}}{(y_{k-1}-y_k)(y_{k-1}-y_{k-2})}+\frac{y_k y_{k-1}x_{k-2}}{(y_{k-2}-y_k)(y_{k-2}-y_{k-1})}. \quad (2.10)$$

Teskari kvadratik interpolyatsiya usuli iteratsion jarayonlarining yaqinlashish tezligi α=1,839 bo‘lib, bu kesuvchilar usulidagiga qaraganda kattaroq. Ammo boshlang‘ich hisoblashlar uchun uchta x_0, x_1, x_2 qiymatlarni hisoblash talab etiladi. Agarda bu qiymatlar noo‘rin tanlansa, hisob algoritmi xaotik tus oladi.

Kvadratik interpolyatsiyadan Myuller usulida ham foydalaniladi. Ammo bunda $x=g(y)$ teskari funksiya emas, balki $y= f(x)$ funksiya interpolyatsiyalanadi. Undan keyin esa interpolyatsion ko‘phadning ildizi dastlabki tenglamaga ildiziga yangi yaqinlashishni beradi, deb hisoblanadi. Ammo, ikkinchi darajali ko‘phad ikkita ildizga ega, hisoblashlarda esa ulardan birini tanlashga to‘g‘ri keladi. Agar ko‘phad kompleks ildizlarga ega bo‘lib qolsa, u holda muammo yanada murakkablashadi. Shuning uchun Myuller usuli karrali bo‘lmagan ildizlar holida qulay va u teskari kvadratik interpolyatsiya usuliga nisbatan ustunlikka ega emas. Bu usul $y= f(x)$ funksiya grafigi abssissa o‘qiga uringandagi ikki karrali ildizlarni topishga qulay.

2.5. Ko‘phad ildizlarini izlashning sonli usullari

Ko‘phadlarning maxsus xossalari algebraik tenglamalarni yechishning juda ko‘p usullarini yuzaga keltirgan, masalan, Lin usuli, Lobachevskiy usuli, Fridman usuli, parabolalar usuli, tushish usuli, Myuller usuli, Ridder usuli, Brent usuli, Lagerr usuli va boshqa usullar. Shulardan ba’zilari bilan tanishaylik.

Algebraik ko‘phad ildizlarini topishning Lobachevskiy usuli. Bu usulning eng qulay tomoni shundaki, u ildizlarning taqribiy yaqinlashishi qiymatini talab qilmaydi. Bu usul ko‘phad har xil haqiqiy ildizlarga ega bo‘lgan holda qo‘llaniladi. U ikki bosqichda qo‘llaniladi. Agar ko‘phadning ildizlari ushbu $|x_1| >> |x_{21}| >> ... >> |x_n|$

tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda $a_0x^n+a_1\,x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ ko‘phad ildizlarining taqribiy qiymatlari uning koeffisiyentlari orqali Viyetning quyidagi umumlashgan teoremasi formulalari bilan ifodalanadi:

$x_1+x_2+\ldots+x_n=-a_1/a_0$,

$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=a_2/a_0$,

$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-a_3/a_0$,

. . . .

$x_1x_2\ldots x_n=(-1)^n\,a_n/a_0$.

Bu yerda ketma-ket quyidagilarni topamiz:

$$x_1\left[1+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_1}+\ldots+\frac{x_n}{x_1}\right]=-\frac{a_1}{a_0}\quad\Rightarrow\quad x_1\approx-\frac{a_1}{a_0};$$

$$x_1x_2\left[1+\frac{x_2x_3}{x_1x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}x_n}{x_1x_2}\right]=\frac{a_2}{a_0}\quad\Rightarrow\quad x_2\approx-\frac{a_2}{a_0};\ \ldots;$$

$$x_i\approx-\frac{a_i}{a_{i-1}}\ ,\quad\forall x_i,\ i=1,2,\ldots n.$$

Ko‘phad kompleks ildizlarini izlashning sonli usullari. Argument x ning faqat butun darajalari yig‘indisini o‘z ichiga olgan chiziqli bo‘lmagan tenglama chiziqli bo‘lmagan algebraik tenglama deb ataladi va u

$$P_n(x)=x^n+a_{n-1}\,x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0 \qquad (2.11)$$

kabi yoziladi. Chiziqli bo‘lmagan algebraik tenglamaning yechimi ko‘phadning ildizi deb ham ataladi. Bu n-darajali ko‘phadning ildizlarini izlashda ularning soni n ta ekanligini (ularning karralilarini ham hisobga olganda) va ular ham haqiqiy va ham kompleks bo‘lishi mumkinligini e’tiborga olish lozim. Agar ko‘phadning a_i koeffisiyentlari haqiqiy desak, u holda kompleks ildizlar kompleks-qo‘shma juftlikni hosil qiladi. Ildizlar soni haqidagi ma’lumot muhim ahamiyatga ega.

Yuqorida chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni yechishning umumiy algoritmlaridan ko‘phadlar ildizlarini topishga ham foydalanish mumkin. Bunda faqat algoritmlarning amaliy tadbiqini kompleks sonlar arifmetikasi doirasida o‘tkazish lozim bo‘ladi. Shunga qaramasdan, ko‘phadlarning hamma ildizlarini (haqiqiy va kompleks ildizlarini) izlashning maxsus usullari mavjud. Ana shu usullardan ba’zilari bilan quyida tanishaylik.

Ko‘pgina usullar dastlabki ko‘phaddan kvadratik ko‘pytuvchini chiqarish prosedurasiga asoslangan, ya’ni

$$P_n(x)=(x^2+px+q)(x^{n-2}+b_{n-3}\,x^{n-3}+\ldots+b_1x+b_0). \qquad (2.12)$$

Bizga ma’lumki, $x^2+px+q=0$ kvadrat ko‘phadning ildizlarini analitik yo‘l bilan topish mumkin, demak dastlabki (2.11) tenglama tartibi ikkiga kamayadi va masala ushu

$$x^{n-2}+b_{n-3}\,x^{n-3}+\ldots+b_1x+b_0=0$$

tenglamani yechishga keladi. Bu tenglamaning o‘ng tarafidan yana bir bor kvadratik ko‘pytuvchini chiqarish mumkin, va hokazo. Ana shunday qilib ko‘paytuvchilarni chiqarish jarayoni ushbu $x^2+ b_1x+b_0 = 0$ kvadratik yoki $x+b_0 = 0$ chiziqli tenglama qolguncha davom ettiriladi.

Kvadrat ko‘paytuvchilarni ajratish, ya’ni n ta p, q, b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_1, b_0 koeffisiyentlarni izlash haqidagi bu masalasi quyidagicha yechiladi.

Dastlabki $P_n(x)$ ko‘phadning ikki xil (2.11) va (2.12) shakllaridagi bir xil darajali hadlari koeffisiyentlarini o‘zaro tenglashtirib, quyidagi ikkita tengliklar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned}
&b_{n-3} + p = a_{n-1},\\
&b_{n-4} + pb_{n-3} + q = a_{n-2},\\
&b_{n-5} + pb_{n-4} + qb_{n-3} = a_{n-3},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&b_1 + pb_2 + qb_3 = a_3,\\
&b_0 + pb_1 + qb_2 = a_2
\end{aligned} \tag{2.13}$$

va

$$q = a_0/b_0\ ,\ \ p = (a_1\text{-}qb_1)/b_0\ . \tag{2.14}$$

Agar p va q koeffisiyentlarga ixtiyoriy qiymatlar berilsa, u holda (2.13) sistemadan noma’lum b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_2 keffisiyentlarni ketma-ket yo‘qotib, b_1 va b_0 larning qiymatlarini hisoblab olish mumkin, ya’ni (2.13) sistema quyidagi ikki argumentli ikki funksiyani topish imkonini beradi:

$$b_0 = b_0(p,q)\ \text{ va }\ b_1 = b_1(p,q). \tag{2.15}$$

Endi (2.15) funksiyalardan (2.14) tengliklarning o‘ng taraflarida foydalanish mumkin, natijada qiyidagi ikkita chiziqli bo‘lmagan tenglamalar sistemasiga kelinadi:

$$q = \frac{a_0}{b_0(p,q)},\quad p = \frac{a_1 - qb_1(p,q)}{b_0(p,q)}. \tag{2.16}$$

Shuni ta’kidlash lozimki, (2.16) tenglamalar sistemasining o‘ng qismlari analitik shaklda berilmagan bo‘lib, har bir (p,q) argumentlar qiymatlari juftligi uchun b_1 va b_0 qiymatlarni hisoblash algoritmi shaklidadir. Ana shunday amaliy tadbiq ko‘plab amaliy masalalarni yechishda uchraydi. Tenglamalarni yozishda bunday analitik shakllarning berilmaslik holati ularni yechishga to‘sqinlik qilmaydi.

Agar (2.16) tenglamalar sistemasi oddiy iteratsiya algoritmi bilan yechilsa, u holda dastlabki (2.11) tenglama uchun qo‘llaniladigan sonli usul *Lin usuli* deb ataladi. Bunda (p_0,q_0) boshlang‘ich yaqinlashishdan bog‘liq iteratsiyalar quyidagi formulalar bilan bajariladi:

$$q_{k+1} = \frac{a_0}{b_0(p_k,q_k)},\quad p_{k+1} = \frac{a_1 - q_kb_1(p_k,q_k)}{b_0(p_k,q_k)}. \tag{2.17}$$

Oddiy iteratsiyalar o‘rnida Zeydel algoritmidan foydalanish mumkin. U holda (2.17) iteratsion formulalardan ikkinchisi quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$p_{k+1} = \frac{a_1 - q_{k+1} b_1(p_k, q_{k+1})}{b_0(p_k, q_{k+1})}.$$

Bu iteratsion jarayon har qanday holatda ham toki ushbu

$$\sqrt{(p_{k+1} - p_k)^2 + (q_{k+1} - q_k)^2} \le \varepsilon$$

(bunda ε - yechimning aniqligini ifodalovchi kichik miqdor) shart bajarilgunga qadar yoki iteratsiyalar soni yetarlicha katta bo‘lgunga qadar davom ettiriladi. Oxirgi holat, ya’ni iteratsiyalar sonining juda katta bo‘lib ketishi iteratsiyalarning uzoqlashuvchi ekanligini va (2.16) sistema yechimga ega emasligini bildiradi.

Bertstou usuli ham xuddi yuqoridagidek kvadratik ko‘paytuvchini ajratishga asoslangan bo‘lib, bunda (2.16) ikkita tenglamalar sistemasi Nyuton usuli bilan yechiladi. Bu yerda ham iteratsiyalarning yaqinlashuvchanligi masalasi juda ham jiddiy holat.

Usullar bo‘yicha end muhim xulosalar quyidagilar:

1. *Ildizlarni ajratish*.

- ildizlarni ajratish yagona ildiz yotgan oraliqni topish imkonini beradi, bu esa ildizlarni aniqlash usullarining ishlashi uchun imkoniyat yaratib beradi;
- funksiyaning hosilasi mavjud bo‘lmagan nuqtalari, ya’ni uzilish nuqtalari uning kritik nuqtalariga kiradi, shuning uchun funksiyaning ildizlarini analitik usulda ajratish mumkin;
- izolyatsiyalangan ildiz yotgan interval topilgandan so‘ng hisoblashlarni kamaytirish maqsadida (masalan, bu intervalning chegaralaridan biri cheksizlikda yotgan bo‘lsa) argumentning ixtiyoriy qiymatini berish orqali bu intervalni qisqartirish mumkin va bunda funksiyaning ishorasini tekshirish lozim; agar shu intervalda yagona ildiz yotganligiga ishonch yo‘q bo‘lsa, bunday qilmagan ma’qul;
- ildizlarni analitik usulda ajratishning asosida yotgan kritik nuqtalar bu funksiyaning birinchi hosilasi nolga teng yoki u mavjud bo‘lmagan nuqtalar;
- agar shu intervalda funksiyaning bitta kritik nuqtasi mavjud bo‘lsa, unda bu intervalda shu funksiyaning: ikkita ildizi bor bo‘lishi mumkin (agar funksiyaning $x \to \infty$ va $x \to -\infty$ dagi ishorasi bir xil va uning kritik nuqtasidagi ishorasiga qarama-qarshi bo‘lsa); bitta ildizi bor bo‘lishi mumkin (agar funksiyaning $x \to \infty$ yoki $x \to -\infty$ dagi ishorasi uning kritik nuqtasidagi ishorasi bilan mos tushsa); ildizi bo‘lmasligi mumkin (agar funksiyaning yuqorida qayd qilingan barcha nuqtalarida ishoralari bir xil bo‘lsa);
- fuksiyaning kritik nuqtasini topish uchun $f'(x) = 0$ chiziqli bo‘lmagan tenglamani yechish zarurati tug‘ilishi mumkin; bu albatta qiyin, chunki ildizlarni ajratishning bu holi xuddi dastlabki $f(x) = 0$ chiziqli bo‘lmagan tenglamani yechish kabi hol degani.

2. *Oraliqni teng ikkiga bo'lish usuli.*

- oraliqni teng ikkiga bo'lish usulining geometrik ma'nosi bu ildiz yotgan oraliqni ketma-ket teng ikki qismga bo'lib borishdan iborat;
- agar tenglamaning chap toponidagi chiziqli bo'lmagan funksiya uzluksiz bo'lsa, u holda oraliqni teng ikkiga bo'lish usuli izlanayotgan ildizni berilgan aniqlikdagi xatolik topib beradi, chunki bunday holda masalani yechish jarayoni funksiyaning xossasidan bog'liq bo'lmaydi;
- oraliqni teng ikkiga bo'lish usulining keyingi qadamidagi kesmaning oxirlaridan biri doimo hisob jarayonidagi kesmaning o'rtasida, ikkinchisi esa tanlangan nuqtaga nisbatan $f(x)$ funksiya ishorasini almashtirgan kesmaning oxirida yotadi;
- $f(x) = 0$ tenglamani yechishni kafolatlash uchun $f(x)$ funksiyaning uzluksiz bo'lishi yetarli;
- $f(x) = 0$ tenglamaning hech bo'lmaganda bitta haqiqiy ildizini oraliqni teng ikkiga bo'lish usuli bilan topish uchun ildizlarni ajratish qoidasidan foydalanish zarur, aks holda ildizni faqat oraliqni teng ikkiga bo'lishlar jarayonida $f(x)$ funksiya bo'laklangan oraliqning chetlarida ishorasini almashtiradigan holdagina topish mumkin bo'ladi;
- agar ildiz intervalning chegarasida yotgan bo'lsa ham bu usul uni topish imkonini beradi.

3. *Vatarlar usuli*.

- bu usul avvaldan yakkalangan ildiznigina topish imkonini beradi;
- vatarlar usulining geometrik ma'nosi bu ajratilgan kesmada $f(x)$ chiziqli bo'lmagan funksiyani shu kesmaning oxirlaridan o'tuvchi chiziqli funksiya, ya'ni vatar bilan almashtirishdan iborat;
- yechimni berilgan xatolik bilan topish uchun, birinchidan, funksiya kesmada (hech bo'lmaganda ildiz atrofida) monoton bo'lishi lozim, ikkinchidan, u keskin egrilikka ega bo'lmasligi zarur;
- vatarlar usulida $f(x)$ monoton funksiya uchun kesmaning chetlaridan biri qattiq mahkamlangan hisoblanadi, ikkinchisi esa vatarning Ox abscissa o'qi bilan kesishishidan topiladi; bu mahkamlangan chegara funksiyaning ishorasini va uning ikkinchi tartibli hosilasini intervalning chetlarida tahlil qilishda topiladi;
- $f(x) = 0$ tenglamani vatarlar usuli bilan yechish uchun $f(x)$ funksiya uzluksiz va monoton bo'lishi zarur;
- mahkamlangan chegara chiziqli bo'lmagan tenglama funksiyasining xossasidan bog'liq va u har xil bo'lishi mumkin.

4. *Nyuton usuli.*

- Nyuton usulining geometrik ma’nosi bu ajratilgan kesmada $f(x)$ chiziqli bo‘lmagan funksiyani shu kesmaning oxirlaridan biriga urinma bo‘lib o‘tuvchi chiziqli funksiya bilan almashtirishdan iborat;
- Nyuton usulida x_0 boshlang‘ich yaqinlashishni shunday tanlash lozimki, x_0 nuqtada funksiya grafigiga o‘tkazilgan urinma ildiz yotgan interval ichida Ox o‘qini kesib o‘tsin; bu jarayon funksiyaning ishorasi va uing ikkinchi tartibli hosilasi yoki tanlash va xatoliklar usuli bilan baholanadi;
- o‘ng chegara mahkamlangan bo‘ladi;
- $f(x) = 0$ tenglamani Nyuton usuli bilan yechish uchun $f(x)$ funksiya uzluksiz va monoton bo‘lishi zarur;
- agar $f(x)$ funksiya monoton bo‘lmasa, u holda Nyuton usuli klassik holda kafolatlangan natijani bermasligi mumkin.

5. *Iteratsiyalar usuli.*
- bu usulda $f(x) = 0$ tenglama $x = \phi(x)$ ko‘rinishga keltiriladi, bunda $\phi(x)$ funksiya $|\phi'(x)| < 1$ shartni qanoatlantirishi lozim;
- bu usulda yaqinlashish deb qadamlar soni oshgan sari ildizga ketma-ket yaqinlashish tushuniladi;
- ildizga yaqinlashish bir tomonlama (chapdan yoki o‘ngdan) va ikkala tomondan bo‘lishi mumkin, ya’ni ildizga yaqinlashish tebranish jarayoni kabi;
- agar tanlangan kesmada ikkita ildiz mavjud bo‘lsa, u holda $y = x$ to‘g‘ri chiziqning $y = \phi(x)$ egri chiziq bilan ikkita kesishish nuqtasi bo‘lishi lozim; ulardan biri bilan yaqinlashish sharti bajariladi, ikkinchisi bilan esa yo‘q (agar $y = \phi(x)$ uzilishlarga ega bo‘lmasa);
- iteratsion jarayonning yaqinlashmaslik sababi ildizning mavjud bo‘lmasligi yoki yaqinlashish shartining bajarilmasligi (keyingi holda $\phi(x)$ funksiyaning tuzilishini o‘zgartirish orqali dastlabki, ya’ni $f(x) = 0$ tenglamani boshqa algoritmdan foydalanib, iteratsiyalar uchun qulay ko‘rinishga keltirish);
- ildizga “tebranma” yaqinlashishda ildiz joylashgan kesmaning miqdorini nazorat qilish mumkin (u ikkita qo‘shni yaqinlashishlar ayirmaning moduli), bir tomonlama yaqinlashishda esa yaqinlashish shartiga $\phi(x)$ funksiyaning shu intervaldagi hosilasining maksimal qiymatidan bog‘liq ko‘paytuvchi kiradi.

Bob bo‘yicha end muhim umumiy xulosalar quyidagilar:
- chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni yechish ancha murakkab va bu masala hisoblash matematikasining mukammal yechilmagan muammosi ekan;
- chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni yechishning boshlang‘ich muammosi – bu chiziqli bo‘lmagan tenglama yechimlarining mavjudligi, soni va ular yotgan oraliqni topish muammolari o‘rganildi, bular aniq misollarni yechish orqali izohlandi;

- chiziqli bo‘lmagan tenglamaning ajratilgan ildizini topish muammosi bir nechta taqribiy usullarda bayon qilindi, aniq misollar yechimlari bilan izohlandi;
- chiziqli bo‘lmagan tenglamaning ildizlarini topishning taqribiy usullari soddadan murakkabga va ularning xususiy hollari bilan o‘rganildiki, bu shu mavzuni batafsilroq yoritish imkonini berdi;
- chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni matematik paketlar yordamida yechishning muammolari o‘rganildi, uni amalga oshirishning bosqichlari ishlab chiqildi;
- chiziqli bo‘lmagan tenglama funksiyasining grafigini matematik paketlar yordamida chizish orqali tenglama haqiqiy yechimlari mavjudligi, ularning soni, bu yechimlar yotgan oraliqlarni topish muammolari o‘rganildi;
- chiziqli bo‘lmagan tenglamalarning analitik yechimini matematik paketlar yordamida yechish o‘rganildi, hisob algoritmiga oid tushunchalar bilan tanishildi, amaliy masalalar yechildi;
- chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni matematik paketlar yordamida sonli yechishning algoritmi, dasturi, matematik paketlardan foydalanish bosqichlari bajarildi, har xil amaliy masalalar yechildi;
- qo‘yilgan masalani matematik paketlar yordamida samarali yechishga oid tavsiyalar ishlab chiqildi, undan foydalanishning mumkin bo‘lgan imkoniyatlari ketma-ket tahlil qilindi;
- sonli yechimlar analitik yechimlar bilan taqqoslandi, hisob jarayonining to‘g‘ri ekanligi, algoritm va dasturlardan samarali foydalanish mumkinligi ko‘rsatildi;
- ishlab chiqilgan hisob metodikasi va yaratilgan hisob dasturlatidan har xil chiziqli bo‘lmagan tenglamalarga oid amaliy masalalarini yechishda samarali foydalanish mumkin;
- chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni taqribiy yechish usullaridan Nyuton usuli juda samarali ekan, ammo uning qo‘llanilish sohasi juda tor;
- iteratsiyalar usuli ham juda qulay, ammo yaqinlashuvchi funksiyani topish ko‘p hollarda mushkulroq;
- oraliqni ikkiga bo‘lish usuli juda qulay, ammo uning yaqinlashish tezligi juda sust va karrali ildizlar uchun muammoli;
- iteratsion usullarning takomillashtirilgan har xil variantlari juda samarali, ammo bu boshlang‘ich yaqinlashishni yakkalashtirilgan ildizga juda yaqin olinganda va yaqinlashish shartlari bajarilgandagini bu usullarning yaqinlashsh tezligi keskin oshadi;

Shunday qilib, chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni yechish muammosi qo‘yilgan amaliy masala turiga qarab to‘g‘ri taqribiy usulni va boshlang‘ich shartni tanlash, bu usullardan va matematik paketlardan samarali foydalanishdan iborat ekan.

Mashqlar

1. Quyidagi tenglamalarning haqiqiy ildizlari chegaralarini toping.

$a)$ $x^4-35x^3+380x^2-1350x+1000=0.$ $b)$ $x^5+4x^4+x^3-3x^2+2x=0.$

$c)$ $-0{,}25x^3+5{,}5x^2-3x+0{,}5=0.$ $d)$ $x^3-0{,}4x+0{,}08=0.$

2. Quyidagi tenglamalarning haqiqiy ildizlarini ajrating va ularni kesmani teng ikkiga bo‘lish usuli yordamida ε = 0,01 aniqlik bilan toping:

$a)$ $x^5-4x^4+(6+a)x^3-3x^2+2x+b=0,$ a, b = 0, 1, 2, 3, 4, 5.

$b)$ $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}e^{\alpha x}+\dfrac{x}{\alpha^2+x^2}=0,$ $\alpha=0{,}5+0{,}1k,$ $k=0,1,2,3,4,5.$

$c)$ $0{,}1e^x-\sin^2 x+0{,}5=0,$ $x\in[-5\pi,\,5\pi].$

4. Quyidagi tenglamalarning haqiqiy ildizlarini oddiy iteratsiyalar usuli bilan toping:

$a)$ $x^2+4\sin x-1=0.$ $b)$ $x^5+x-1=0.$ $c)$ $3x-\cos x-1=0.$

$d)$ $e^x-6x-3=0.$ $e)$ $0{,}5x-\ln x=5.$ $f)$ $1{,}4^x-x=0.$

5. Ushbu $f(x)=0{,}26x^4-(2+\alpha)x^3+5x^2-6x+1$ funksiya uchun $\min f(x)$ ni toping, bunda α = 0, 1, 2, 3, 4.

6. Ushbu $\varphi_n(x)=x^{\varphi_{n-1}(x)},$ $\varphi_0(x)=1$ ketma-ketlik yaqinlashadigan x ning musbat qiymatlarini toping.

7. Quyidagi tenglamalarning haqiqiy ildizlarini grafik usulda ajrating va ularni Nyuton usuli yordamida ε = 0,000005 aniqlik bilan hisoblang:

$a)$ $x^2+4\sin x=0.$ $b)$ $5x^5+2x^2-15x-6=0.$ $c)$ $x^2-\cos^2\pi x=0.$

$d)$ $e^x-1+bx^3=0,$ $b=1+0{,}5k,$ $k=0,1,2,3,4.$ $e)$ $(x-1)^3+0{,}5e^x=0.$

$f)$ $3x^6+172x^5+125x^4-600x^3+125x^2+172x+3=0.$

8. Quyidagi tenglamalarning haqiqiy ildizlarini grafik usulda ajrating va ularni kesuvchi chiziqlar usuli yordamida ε = 0,000005 aniqlik bilan hisoblang:

$a)$ $x^3-4x^2+10x-10=0.$ $b)$ $x^5-3x^2+1=0.$ $c)$ $(x-1)^2-0{,}5e^x=0.$

$d)$ $x^6-x^2+0{,}5x-2=0.$ $e)$ $5x-e^x=0.$ $f)$ $\sqrt{x+1}-1/x=0.$

9. Kesuvchi chiziqlar va parabolalar usullarining yaqinlashish tartibini aniqlang.

10. Biseksiya, urinmalar, vatarlar, oddiy iteratsiyalar usullarining yaqinlashish tezligini aniqlang.

11. Quyidagi tenglamalarning haqiqiy ildizlarini grafik usulda ajrating va ularni parabolalar usuli yordamida ε = 0,0001 aniqlik bilan hisoblang:

$a)$ $x^3-\sin x=\alpha,$ $\alpha=1\,(0{,}1)\,2.$ $b)$ $x^5-3x^2+1=0.$ $c)$ $2x+\lg x=-0{,}5.$

$d)$ $3x-\alpha e^x=0,$ $\alpha=0{,}5\,(0{,}1)\,1.$ $e)$ $2\sin(x-0{,}6)=1{,}5-x.$ $f)$ $x^2=\sin x+1$

12. Ikkita zarracha bir vaqtning o‘zida har xil trayektoriyalar bo‘ylab harakat qilmoqda. Ulardan birining trayektoriyasi tenglamasi $s_1(t)$ = ln$t$+2 va ikkinchisiniki esa $s_2(t) = t^{1/2}$ (bunda t – vaqt, sekundlarda). Kuzatish boshlangan vaqtdan boshlab bu ikkala zarrachalarning to‘qnashish vaqtini 0,001 aniqlik bilan toping.

13. Jism yo‘lning 10 km dan 1 km gacha qismini $s_1(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ trayektoriya bo‘ylab bosib o‘tdi. Ikkinchi jismning shu yo‘l bo‘lagidagi trayektoriyasi $s_2(x) = e^x$ tenglama bilan aniqlanadi. Bu ikkala jism shu yo‘l bo‘lagining qaysi nuqtasida to‘qnashishini 1 m aniqlik bilan toping, bunda har ikkala jism shu kesmadagi yo‘lni bir xil vaqtda bosib o‘tadi.

14. Qo‘ng‘izcha suv sirti bo‘ylab v_1 tezlik bilan to‘g‘ri chiziqli harakat qilmoqda. Ana shu qo‘ng‘izchani suv yuzidan 1 m chuqurlikdagi baliq tutib olish uchun u v_2 tezlik bilan ushbu $y = \ln(x+1) + x^{1/2} - 1$ egri chiziq bo‘ylab yuqoriga harakat qilmoqda. Agar baliqning bu harakat qonuni aniq bo‘lsa, u holda bu baliq qo‘ng‘izchani 1 m uzunlikdagi yo‘lning qaysi nuqtasida tutib oladi?

15. Qirg‘oqning 2 m chuqurligida suv ostidagi jism uning yuziga qarab $y = -3e^{x^2-1} + 4x$ qonuniyat bilan harakat qilmoqda. Bu jismning qirg‘oqdan qancha uzoqlikda suv yuziga chiqishini 1 sm aniqlikda toping.

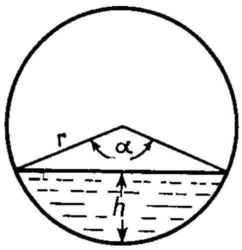
16. F kuch 0,5 dan 1,5 sekund vaqt oralig‘ida $F(t) = 2^{\ln t} - t$ qonuniyat bilan o‘zgarmoqda. Ushbu $F(t) = 0$ tenglik o‘rinli bo‘ladigan vaqtni 0,001 sek aniqlik bilan toping.

17. Moddiy nuqta $y = 2\sin(0{,}5x + 0{,}5)$ qonuniyat bilan tebranmoqda.Yorug‘lik nuri koordinata boshidan $y = 0{,}2x$ to‘g‘ri chiziq bo‘ylab yo‘naltirildi. Shu yorug‘lik nurining moddiy nuqta trayektoriyasi bilan [0;1] kesmada kesishgan nuqtasining absissasini 0,001 aniqlik bilan toping.

18. $\sin 40^0$ ning qiymatini $\sin 40^0 = 2\sin 20^0\cos 20^0$; $4\cos^3 20^0 - 3\cos 20^0 = \cos(3\cdot 20^0) = 1/2$; $3\sin 20^0 - 4\sin^3 20^0 = \sin(3\cdot 20^0) = \sqrt{3}/2$ tengliklardan foydalanib taqriban hisoblan va natijani Bradis jadvali qiymati bilan taqqoslang, xatolikni baholang.

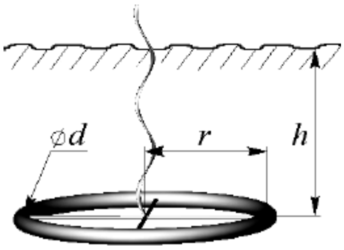
19. $\cos 40^0$ ning qiymatini $\cos 40^0 = \cos^2 20^0 - \sin^2 20^0$; $4\cos^3 20^0 - 3\cos 20^0 = \cos(3\cdot 20^0) = 1/2$; $3\sin 20^0 - 4\sin^3 20^0 = \sin(3\cdot 20^0) = \sqrt{3}/2$ tengliklardan foydalanib taqriban hisoblan va natijani Bradis jadvali qiymati bilan taqqoslang, xatolikni baholang.

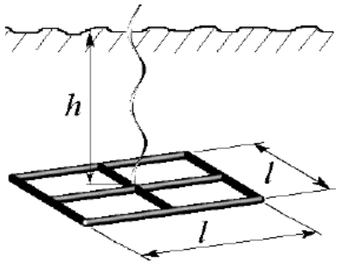
20. Ichki radiusi r =1,2 bo‘lgan silindrik quvur yotgan holida q = 0,25 qismi neft bilan to‘ldirilgan. Quvurdagi neft sathining balandligini $h = r(1 - \cos(\alpha/2))$ formuladan toping, bunda α – quvur kesimining markaziy burchak bo‘lib, u ushbu $\alpha - \sin\alpha - 2\pi q = 0$ tenglikdan topiladi.



21. Xalqa (yoki to‘g‘ri to‘rtburchakli to‘r) shaklidagi r radiusli (yoki quvurchalarining jami uzunligi L=6×l) yerlagich tuproqqa h chuqurlikka o‘rnatilgan. h>>r da uning qarshiligi quyidagi formula bilan hisoblanadi:

a) $R = \dfrac{1}{4\pi^2 rG}\left[\dfrac{\pi r}{h} + \ln\left(\dfrac{16r}{d}\right)\right]$ *b*) $R = \dfrac{\ln\left(\dfrac{L^2}{2rh}\right) + 4{,}95}{2\pi LG}$

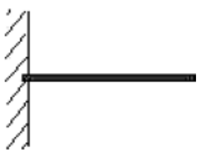




bunda π = 3,14…, G – tuproqning solishtirma elektr o‘tkazuvchanligi, d – xalqa (yoki to‘g‘ri to‘rtburchakli to‘r) shaklida tayyorlangan o‘tkazgichning diametri. Yerlagichning talab qilingan R = 22 Om qarshiligini ta’minlovchi r – quvurcha radiusini, berilgan h = 1,1 m, d = 0,015 m, G = 0,01 $^1/$Om·m parametrlar uchun toping.

22. Radioelektron tuzilma qurilmasi yupqa bir jinsli konsol sterjendan iborat. Sterjenning mexanik rezonanslari chastotalari bunday mahkamlanishda ushbu

a) $\cos(x)\mathrm{ch}(x) + 1 = 0$ *b*) $\cos(x)\mathrm{ch}(x) - 1 = 0$

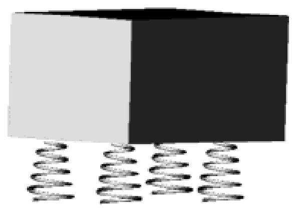



tenglamadan aniqlanadi, bu yerda $x = k{\cdot}L$ – o‘lchamsiz parametr, k – to‘lqin soni, L = 0,2 m – sterjen uzunligi. ω – sterjenning xususiy chastotasi k parametr orqali $\omega = k^2\sqrt{EJ/m_0}$ formuladan aniqlanadi, bunda $E = 6\cdot10^{10}$ N/m^2 – materialning elastiklik moduli, $J = 2\cdot10^{-12}$ m^4 – sterjen kesimining inertsiya momenti, m_0 = 0,2 kg/m – sterjenning bo‘ylama massasi. Berilgan ma’lumotlarga asoslanib sterjenning dastlabki beshta rezonans chastotalarini toping.

23. Samolyot radiolokatsion stansiyasi bloki titrashdan himoyalanishi uchun to‘rtta amortizatorga o‘rnatilgan. Bunday amortizatsiya sistemasi oltita xos mexanik rezonanslarga ega bo‘lib, ular ushbu

$$A\omega^{12} + B\omega^{10} + C\omega^{8} + D\omega^{6} + E\omega^{4} + F\omega^{2} + G = 0$$

chastota tenglamasidan aniqlanadi, bunda A, B, C, D, E, F, G – qurilma paramentrlari orqali aniqlanuvchi koeffitsiyentlar; ω – tebranish chastotasi. Ushbu tenglamaning tajribalardan aniqlangan A = 0,01; B = 1; C = –78; D = 2100; E = –25000; F = 120000; G = 190000 koeffitsiyentlari uchun ω – rezonans chastotalarni toping.



24. Yuqori temperaturali suyuqlikda P (MPa) - bosim o‘zgarishini ifodalovchi holat tenglamasi $\bar{\rho}$ (o‘lchamsiz parametr) - nisbiy zichlikka va T (Kelvin) – temperaturaga nisbatan ushbu

$$P{=}0{,}1\xi^{4} - 47\bar{\rho}F\xi + 0{,}47\bar{\rho}F(T-273)$$

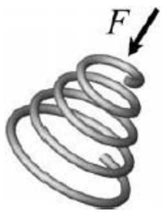
formula (N.Kuznetsov formulasi) bilan ifodalanadi, bu yerda

$$F=\frac{1+3{,}5\rho-2\rho^2+7{,}27\rho^6}{1+1{,}09\rho^6};\quad \xi=10(1-\bar{\rho})+66(1-\bar{\rho})^2-270(1-\bar{\rho})^3.$$

Berilgan P = 18,7 MPa va T = 550 K parametrlar uchun ρ ni toping.

25. Konussimon (yoki tekis spiral) prujinaning F (N) – kuch ta'siridagi z (mm) – deformatsiyalari (yoki φ (gradus) - buralish burchagi) ushbu

a) $z=AF^4+BF^3+CF^2+DF$ *b*) $\varphi=AF+B\exp(CF)$

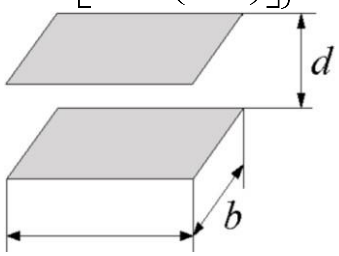


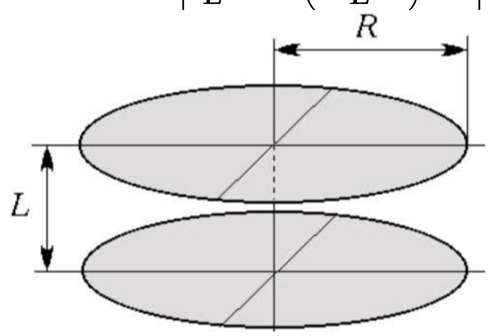
formuladan hisoblanishi eksperimentlar natijasida aniqlangan, bunda A, B, C, D (yoki A, B, C) – prujina qurilmasidan aniqlanuvchi o'zgarmaslar bo'lib, ushbu parametrlarning berilgan A = 0,02; B = 0,4; C = 0,1; D = 1,2; z = 6 yoki A = 2; B = 1; C = 0,5; φ = 10 qiymatlari uchun F kuchni toping.

26. To'g'ri to'rtburchak shaklidagi ikki parallel plastinka (yoki qo'sh o'qli ikki tekis disk)dan iborat tizimning elektr sig'imi $a\geq d$ va $b\geq d$ (yoki $L/R<1$) qiymatlarda ushbu

a) $C=\varepsilon_1\varepsilon_0\dfrac{ab}{d}\left\{1+\dfrac{1}{\pi}\dfrac{d}{a}\left[1+\ln\left(\dfrac{2\pi a}{d}\right)\right]\right\}\times\left\{1+\dfrac{1}{\pi}\dfrac{d}{b}\left[1+\ln\left(\dfrac{2\pi b}{d}\right)\right]\right\}$

b) $C=\varepsilon_1\varepsilon_0 R\left[\dfrac{\pi R}{L}+\ln\left(\dfrac{16\pi R}{L}\right)-1\right]$





formula bilan aniqlanishi mumkin, bunda ε_1 - muhitning nisbiy dielektrik o'tkazuvchanligi; $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ F/m; a va b – plastinkaning o'lchamlari (R – disklarning radiuslari); d – plastinkalar orasidagi masofa (L – disklar orasidagi masofa); π = 3,14159… . Talab qilingan sig'imni ta'minlovchi d – bo'shliqni (R – radiusini) parametrlarning berilgan ushbu a = 0,002 m; b = 0,005 m; ε_1 = 4,1; C = 10 pF (ε_1 = 1; L = 1 mm; C = 100 pF) qiymatlarida toping.

27. Ushbu

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_0)},\quad n=0,1,...$$

Nyutonning o'zgartirilgan (modifikatsiya qilingan) usuli va

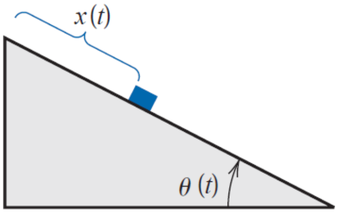
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f\left(x_n - \left[f'(x_n)\right]^{-1} f(x_n)\right)}{f'(x_n)}$$

usulning yaqinlashish tartibini aniqlang, ular yordamida 7-misolni ε = 0,00001 aniqlik bilan yeching va natijalarni taqqoslang.

28. P.L.Chebishevning 1838 yilda Moskva universiteti medaliga sazovor bo‘lgan talabalik ishida taklif qilgan ushbu

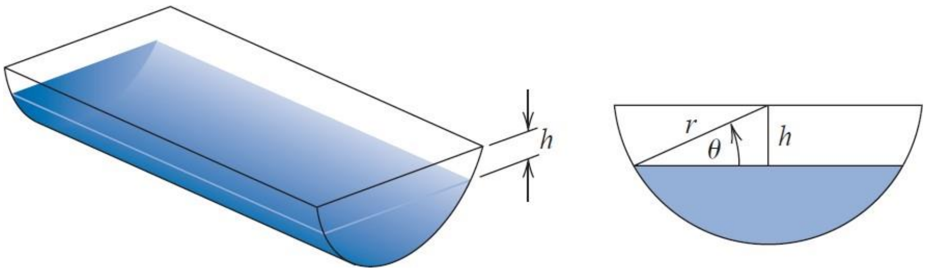
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n) f^2(x_n)}{2\left[f'(x_n)\right]^3}$$

usulining yaqinlashish tartibini aniqlang va uning yordamida 7-misolni $\varepsilon=10^{-4}$ aniqlik bilan yeching va natijalarni taqqoslang.



29. Qiyalik bo‘ylab pastga qarab ushbu $x(t)$=9,81(sin(at) – sh(at))/(2a^2) qonuniyat bilan siljiyotgan jism t =1 sek da x = 1,7 m masofaga ko‘chsa, u holda a parametrning bunga mos qiymatini $\varepsilon=10^{-5}$ aniqlik bilan toping va $d\theta(t)/dt = a < 0$ differensial tenglamani yeching.

30. Uzunligi L = 10 m, ichki radiusi r =1 m bo‘lgan silindrik quvur yotgan holida hajmining rasmda ko‘rsatilgandek V = 12,4 m^3 qismi suv bilan to‘ldirilgan. Silindr markazidan suv sathigacha bo‘lgan h masofani ushbu $V = L[0{,}5\pi r^2 - r^2\cdot\arcsin(h/r) - h(r^2 - h^2)^{1/2}]$ tenglikdan ε = 0,001 aniqlik bilan toping.



Sinov savollari

1. Algebraik tenglama transendent tenglamadan nimasi bilan farq qiladi?
2. Ildizlarni ajratishning ma’nosi va uning bajarilish ketma-ketligini ayting.
3. Oraliqni teng ikkiga bo‘lish usulining yaqinlashishi kafolatlanganmi?
4. Nyuton usulining boshlang‘ich yaqinlashishi qanday tanlanadi?
5. Qanday funksiyalar uchun Nyuton usulini qo‘llash tavsiya etilmaydi?
6. Takomillashtirilgan Nyuton usulining mazmuni, xususiyatlari va qo‘llanilishi.
7. Vatarlar usulida tenglamaning ildizi izlanayotgan interval shu ildizdan bir tomonda yotishi mumkinmi? Kesuvchilar usulida tenglamaning ildizi izlanayotgan intervalni tanlash shartini ayting.
9. Kesuvchilar va vatarlar usullarining birlashgan variantining ustunlik taraflari.
10. Iteratsiya usuli uchun funksiyani qanday ko‘rinishga keltirish ma’qul?

3-BOB.
NOCHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHISHNING SONLI USULLARI

Kalit so‘zlar: nochiziqli tenglamalar sistemasi; Nyuton, Nyuton-Rafson, oddiy iteratsiyalar, Zeydel, parametrlarni qo‘zg‘atish, Pikar iteratsiyalari, tezkor tushish, Broyden usullari.

3.1. Dastlabki tushunchalar

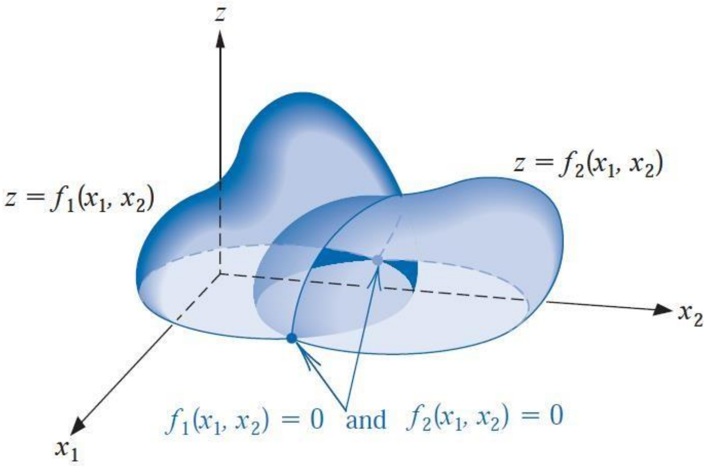
Ko‘plab amaliy masalalar nochiziqli tenglamalar sistemasini yechishga olib kelinadi. Umumiy holda n noma’limli n ta nochiziqli algebraik yoki transendent tenglamalar sistemasi quyidagicha yoziladi:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ \ldots, \ x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ \ldots, \ x_n) &= 0 \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ \ldots, \ x_n) &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{3.1}$$

Ushbu (3.1) sistemani vektor shaklida quyidagicha yozish mumkin:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0. \tag{3.1′}$$

bu yerda $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ – argumentlarning vektor ustuni; $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ \ldots, \ f_n)^T$ – funksiyalarning vektor ustuni; $(\ldots)^T$ – transponirlash operatsiyasi belgisi. Bu sistema yechimini topishni geometrik talqinda 3.1-rasmdagi ikki noma’lumli ikkita tenglamalar sistemasining fazoviy tasviri misolida tushuntirish mumkin. Nochiziqli tenglamalar sistemasi yechimini izlash – bu bitta nochiziqli tenglamani yechishga nisbatan ancha murakkab masala. Bitta tenglamani yechish uchun qo‘llanilgan usullarni nochiziqli tenglamalar sistemasini yechishga umumlashtirishjuda ko‘p hisoblashlarni talab qiladi yoki uni amaliyotda qo‘llab bo‘lmaydi. Xususan, bu oraliqni teng ikkiga bo‘lish usuliga tegishli. Shunga qaramasdan, nochiziqli tenglamani yechishning bir qator iteratsion usullarini nochiziqli tenglamalar sistemasini yechishga umumlashtirish mumkin.



3.1-rasm. Ikki noma’lumli ikkita tenglamalar sistemasining fazoviy tasviri.

3.2. Nyuton usuli

(3.1′) tenglamalar sistemasini yechish uchun ketma-ket yaqinlashish usulidan foydalanamiz. Faraz qilaylik, (3.1′) vektor tenglamaning izolyatsiyalangan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ildizlaridan bittasi bo‘lgan ushbu k -inchi yaqinlashish

$$\mathbf{x}^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right)$$

topilgan bo‘lsin. U holda (3.1′) vektor tenglamaning aniq ildizini ushbu

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}, \tag{3.2}$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin, bu yerda $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \left(\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \dots, \varepsilon_n^{(k)}\right)$ – xatolikni tuzatuvchi had (ildizning xatoligi).

(3.2) ifodani (3.1′) ga qo‘yib, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(k)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\right) = 0. \tag{3.3}$$

Faraz qilaylik, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ – bu $\mathbf{x}$ va $\mathbf{x}^{(k)}$ larni o‘z ichiga olgan biror qovariq D sohada uzluksiz differensiallanuvchan funlsiya bo‘lsin. (3.3) tenglamaning o‘ng tarafini $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}$ – kichik vektor darajalari bo‘yicha qatorga yoyamiz va bu qatorning chiziqli hadlari bilangina cheklanamiz:

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(k)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\right) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) + \mathbf{f}'\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = 0. \tag{3.4}$$

(3.4) formuladan kelib chiqadiki, $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ hosila deb $x_1, x_2, \dots, x_n$ – o‘zgaruvchilarga nisbatan $f_1, f_2, \dots, f_n$ – funksiyalar sistemasining quyidagi Yakob matritsasi tushuniladi:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

yoki uni qisqacha vektor shaklida yozsak,

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{W}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right], \quad i, j = \overline{1, n}.$$

(3.4) sistema bu xatolikni tuzatuvchi had $\varepsilon_i^{(k)}$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ larga nisbatan $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ matritsali chiziqli sistema. Bundan (3.4) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) + \mathbf{W}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = 0.$$

Bu yerdan, $\mathbf{W}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$ – maxsus bo‘lmagan matritsa deb faraz qilib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = -\mathbf{W}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)\mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right).$$

Natijada ushbu

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{W}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)\mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots . \tag{3.5}$$

Nyuton usuli formulasiga kelamiz, bunda $\mathbf{x}^{(0)}$ – nolinchi yaqinlashish sifatida izlanayotgan ildizning qo‘pol qiymatini olish mumkin.

Amaliyotda (3.1′) nochiziqli tenglamalar sistemasini bu usul bilan yechish uchun hisoblashlar (3.5) formula bo‘yicha quyidagi shart bajarilgunga qadar davom ettiriladi:

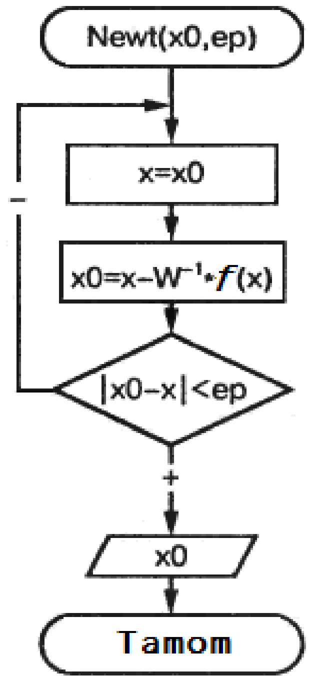
$$\left\| \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} \right\|_{\infty} < \varepsilon . \tag{3.6}$$

Yuqoridagilardan kelib chiqib, Nyuton usulining algoritmini quyidagicha yozamiz:

1. $\mathbf{x}^{(0)}$ – boshlang‘ich yaqinlashish aniqlanadi.
2. Ildizning qiymati (3.5) formula bo‘yicha aniqlashtiriladi.
3. Agar (3.6) shart bajarilsa, u holda masala yechilgan bo‘ladi va $\mathbf{x}^{(k+1)}$ – (3.1′) vektor tenglamaning ildizi deb qabul qilinadi, aks holda esa 2-qadamga o‘tiladi.

Hisoblashlarda (3.1′) nochiziqli tenglamalar sistemasining $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ funksiyalari va ularning hosilalari matritsasi $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ aniq berilgan geymiz, u holda bu sistemani yechishning blok-sxemasi 3.2-rasmdagi ko‘rinishda bo‘ladi.

$\mathbf{f}(\mathbf{x})$ vektor-funksiya x ildizi atrofida ikki martagacha uzluksiz differensiallanuvchi, Yakob matritsasi $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ maxsus bo‘lmagan (aynimagan), ko‘p o‘lchovli Nyuton usuli kvadratik yaqinlashishga ega:



3.2-rasm. Nochiziqli tenglamalar sistemasini yechish uchun Nyuton usulining algoritmi.

$$\left| \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x} \right| < C \left| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x} \right|^{2} .$$

Shuni ta’kidlaymizki, usulning yaqinlashishini ta’minlash uchun boshlang‘ich yaqinlashishni muvaffaqiyatli tanlash muhim ahamiyatga ega. Tenglamalar sonining oshishi va ularning murakkabligi ortishi bilan yaqinlashish sohasi torayib boradi.

Xususiy hol. Hisoblash amaliyotida n=2 bo‘lgan hol ko‘p uchraydi. Buni, masalan, $f(z)$=0 nochiziqli tenglamaning kompleks ildizlarini topishda ham ko‘rish mumkin. Haqiqatan ham, agar ushbu

$$f_1(x, y) = \mathrm{Re}\big(f\,(x + jy)\big) \text{ va } f_2(x, y) = \mathrm{Im}\big(f\,(x + jy)\big)$$

funksiyalarni kiritsak, z - kompleks ildizning x – haqiqiy qismi va y – mavhum qismi quyidagi ikki noma’lumli ikkita nochiziqli tenglamalar sistemasini taqribiy yechishdan hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0; \\ f_2(x, y) = 0, \end{cases} \tag{3.7}$$

bu taqribiy hisoblashni Nyuton usuli yordamida ε aniqlik bilan bajaraylik.

D sohaga tegishli $X_0 = (x_0, y_0)$ - nolinchi yaqinlashishni tanlab olamiz. (3.4) dan quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini tuzib olamiz:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_1}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(y - y_0) = -f_1(x_0, y_0); \\ &\frac{\partial f_2}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(y - y_0) = -f_2(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$x - x_0 = \Delta x_0, \qquad y - y_0 = \Delta y_0\ . \tag{3.9}$$

(3.8) sistemani $\Delta x_0,\ \Delta y_0$ larga nisbatan, masalan, Kramer usuli yordamida yechamiz. Kramer formulalarini quyidagicha yozamiz:

$$\Delta x_0 = \frac{\Delta_1}{J}, \quad \Delta y_0 = \frac{\Delta_2}{J}, \tag{3.10}$$

bu yerda (8) sistemaning asosiy determinanti quyidagicha:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{3.11}$$

(3.8) sistemaning yordamchi determinantlari esa quyidagicha:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -f_1(x_0, y_0) & \dfrac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \\ -f_2(x_0, y_0) & \dfrac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \end{vmatrix}; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} & -f_1(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} & -f_2(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

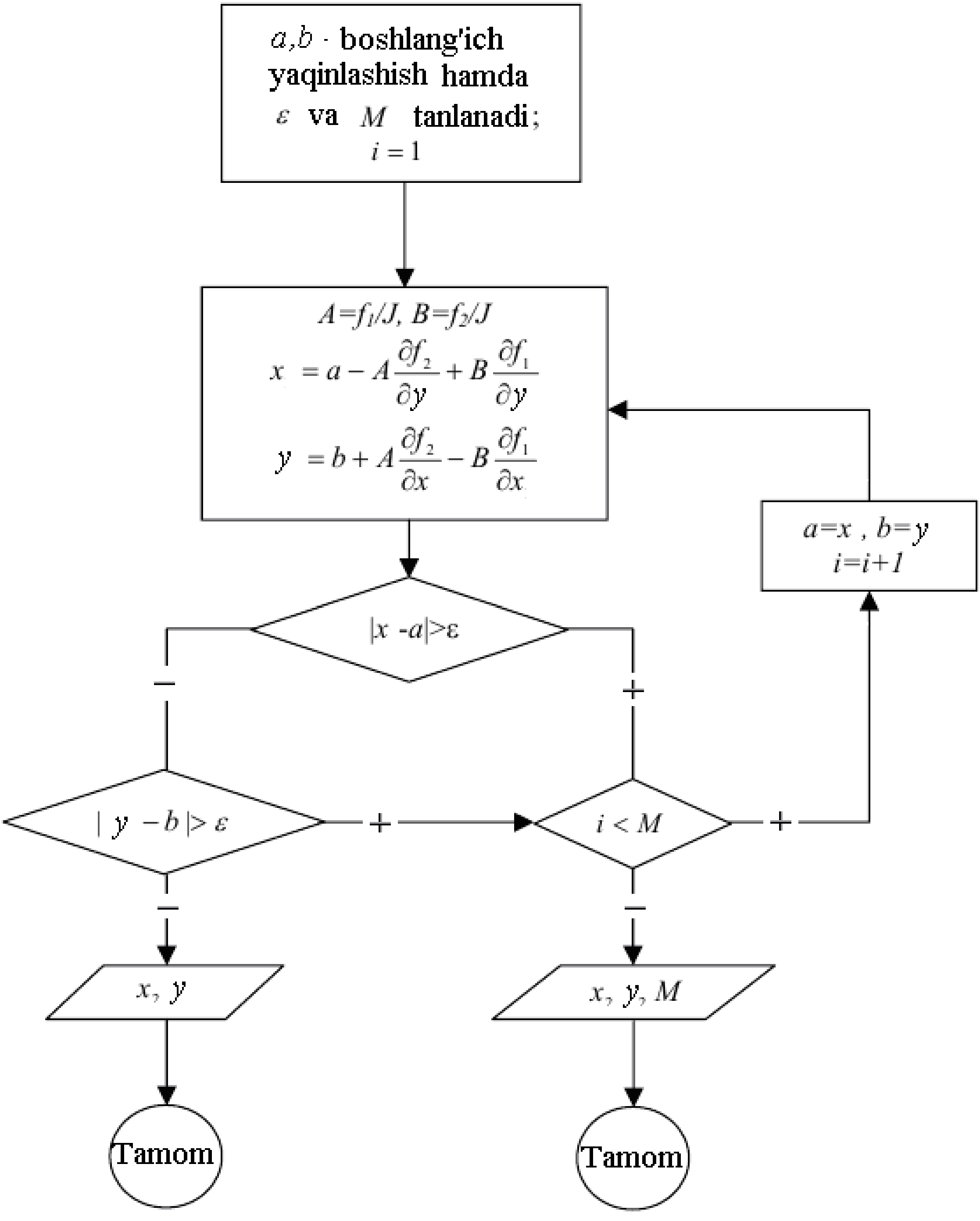
$\Delta x_0,\ \Delta y_0$ larning topilgan qiymatlarini (3.9) ga qo‘yib, (3.8) sistemaning $X_1 = (x_1, y_1)$ - birinchi yaqinlashishi komponentalarini topamiz:

$$x_1 = x_0 + \Delta x_0, \qquad y_1 = y_0 + \Delta y_0. \tag{3.12}$$

Quyidagi shartning bajarilishini tekshiramiz:

$$\max(|\Delta x_0|, |\Delta y_0|) \leq \varepsilon\ . \tag{3.13}$$

Agar bu shart bajarilsa, u holda $X_1 = (x_1, y_1)$ birinchi yaqinlashishni (3.8) sistemaning taqribiy yechimi deb, hisoblashni to‘xtatamiz. Agar (3.13) shart bajarilmasa, u holda $x_0 = x_1,\ y_0 = y_1$ deb olib, yangi (3.8) chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini tuzamiz. Uni yechib, $X_2 = (x_2, y_2)$ - ikkinchi yaqinlashishni topamiz. Topilgan yechimni ε ga nisbatan (3.13) bo‘yicha tekshiramiz. Agar bu shart bajarilsa, u holda (3.8) sistemaning taqribiy yechimi deb $X_2 = (x_2, y_2)$ ni qabul qilamiz. Agar (3.13) shart bajarilmasa, u holda $x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$ deb olib, $X_3 = (x_3, y_3)$ ni topish uchun yangi (3.8) sistemani tuzamiz va hokazo. Bu sistemani yechishning blok-sxemasi 3.3-rasmda tasvirlangan.



3.3-rasm. Ikki noma’lumli ikkita nochiziqli tenglamalar sistemasini taqribiy yechishning Nyuton usuli blok-sxemasi.

1-misol. Ushbu

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,y) &= x^5 + y^3 - xy - 1 = 0 \\ f_2(x,y) &= x^2 y + y - 2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

tenglamalar sistemasining nolinchi yaqinlashishni $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0)$ = (2; 2) deb olib, uning aniq yechimi $\mathbf{X} = (x, y)$ = (1; 1) ni Nyuton usuli yordamida aniqlang.

Yechish. Misolning yechimi jarayonini, iteratsiyalardagi yaqinlashishlarni $\mathbf{X}_k = (x_k, y_k)$, orttirmalarni esa $\Delta\mathbf{X}_k = (\Delta x_k, \Delta y_k)$ deb, quyidagi jadval shaklida ifodalaylik (3.1-jadval). Bu natijalar shuni koʻrsatadiki, iteratsion jarayon juda tez yaqinlashadi – verguldan keyin ettita raqamgacha aniqlikdagi yechimga sakkista iteratsiyadan keyin erishilgan. Agar berilgan tenglamalar sistemasini

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0{,}032 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

boshlangʻich yaqinlashish bilan iteratsiya usuli bilan yechsak, u holda taqqoslanayotgan xatolik bilan olingan yechimga 247 ta iteratsiyadan keyin erishiladi.

3.1-jadval.

k	x_k	y_k	$\lvert\mathbf{X}_k - \mathbf{X}\rvert$	$\lvert\Delta\mathbf{X}_k\rvert / \lvert\Delta\mathbf{X}_{k-1}\rvert^2$
0	2,000000000	2,000000000	1,414213562	-
1	1,693548387	0,890322581	0,702167004	0,351
2	1,394511613	0,750180529	0,466957365	0,947
3	1,192344147	0,82284086	0,261498732	1,199
4	1,077447418	0,918968807	0,112089950	1,639
5	1,022252471	0,976124950	0,032637256	2,598
6	1,002942200	0,996839728	4,317853366E-3	4,054
7	1,000065121	0,999930102	9,553233627E-5	5,124
8	1,000000033	0,999999964	4,871185259E-8	5,337
9	1,000000000	1,000000000	1,272646866E-14	5,363

Jadvalning oxirgi ustunidagi sonlar usulning kvadratik yaqinlashishga ega ekanligini tasdiqlaydi. Haqiqatan ham, $\lvert\Delta\mathbf{X}_k\rvert \approx C\lvert\Delta\mathbf{X}_{k-1}\rvert^2$ bogʻlanish ildizning yetarlicha yaqin atrofida oʻrinli, bunda C oʻzgarmas esa yetarlicha katta: $C \approx 5{,}4$.

Agar tenglamalar sistemasida tenglamalar soni koʻpayib borsa, u holda Yakob matritsasini hisoblashning qiyinlashishi hisobiga Nyuton usulining hisoblash samaradorligi pasayib borishini koʻrishimiz mumkin. Agar bir oʻlchovli holatni qaraydigan boʻlsak, u yerda $f(x)$ va $f\,'(x)$ larni hisoblash qiyinchiligi deyarli bir xil. N oʻlchovli holda esa $f_i'(\boldsymbol{x})$ larni hisoblash uchun n^2 ta hisoblashlarni bajarish talab etiladi, bu esa $f_i\,(\boldsymbol{x})$ larni n marta hisoblashga hisbatan bir necha marta qiyin demakdir.

2-Misol. Quyidagi

$$\left.\begin{aligned} F(x,y) &= 2x^3 - y^2 - 1 = 0 \\ G(x,y) &= xy^3 - y - 4 = 0 \end{aligned}\right\}$$

sistemaning yechimini Nyuton usulida taqribiy hisoblang.

Yechish. Grafik usulda yoki tanlov yoʻli bilan dastlabki yaqinlashish $x_0 = 1{,}2 \quad y_0 = 1{,}7$ aniqlangan boʻlsin. U holda

$$J(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} 6x^2 & -\ \ 2y \\ y^3 & 3xy^2 - 1 \end{vmatrix}, \text{ demak } \quad J(1{,}2; 1{,}7) = \begin{vmatrix} 8{,}64 & -3{,}40 \\ 4{,}91 & 9{,}40 \end{vmatrix} = 97{,}910$$

(12) formulaga ko‘ra

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1{,}2 - \frac{1}{97{,}91}\begin{vmatrix} 0{,}434 & -3{,}40 \\ 0{,}1956 & 9{,}40 \end{vmatrix} = 1{,}2 + 0{,}0349 = 1{,}2349; \\ y_1 &= 1{,}7 - \frac{1}{97{,}91}\begin{vmatrix} 8{,}64 & -0{,}434 \\ 4{,}91 & 0{,}1956 \end{vmatrix} = 1{,}7 - 0{,}0390 = 1{,}6610. \end{aligned}\right\}$$

Hisoblashlarni shu singari davom qilib,

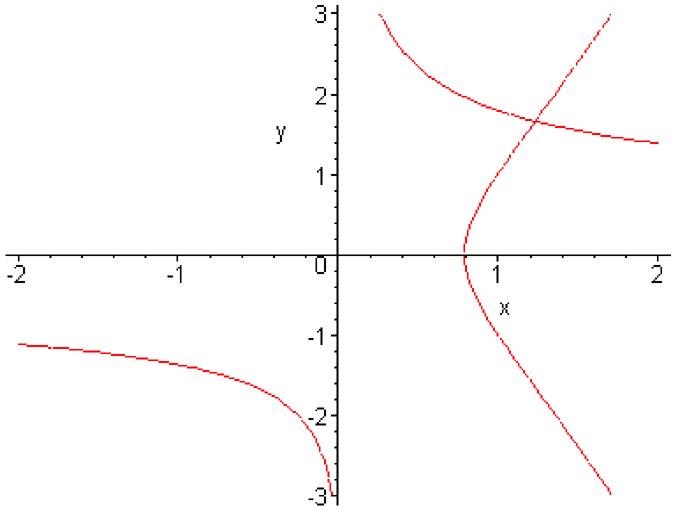
$$x_2 = 1{,}2343; \ y_2 = 1{,}6615$$

ni topamiz va hisoblashlarni talab qilingan aniqlikkacha davom ettiramiz.

Ushbu misolda berilgan tenglamalar sistemasi bitta haqiqiy yechimga ega ekanligini quyidagi Maple dastur va grafiklardan ko‘rish mumkin (3-rasm):

```
> plots[implicitplot]({2*x^3-y^2-1=0,x*y^3-y-4=0},x=-2..2,y=-3..3);
solve({2*x^3-y^2-1=0,x*y^3-y-4=0},{x,y});
allvalues(%); evalf(%);
```

$\{x = 1.234274484, y = 1.661526467\}$



3-rasm. Misolda berilgan tenglamalar sistemasidagi funksiyalarning Maple dasturida chizilgan grafiklari.

3-misol. Quyidagi nochiziqli tenglamalar sistemasini Nyuton usulida taqribiy yeching:

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{x_2^2}{3} = -0{,}5; \\ x_2 + \dfrac{x_1^2}{2} = 1; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1 - \dfrac{x_2^2}{3} + 0{,}5 = 0; \\ f_2(x_1, x_2) = x_2 + \dfrac{x_1^2}{2} - 1 = 0; \end{cases} \quad x_1^{(0)} = 0{,}5; \quad x_2^{(0)} = -1.$$

Yechish:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{2}{3}\cdot x_2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = x_1, \quad \frac{\partial f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}{\partial x_2} = 0.67,$$

$$\frac{\partial f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}{\partial x_1} = 0.5, \quad -f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = -0.67, \quad -f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = 1.87.$$

$$\begin{cases} 1\cdot(x_1-0.5)+0.67\cdot(x_2+1)=-0.67; \\ 0.5\cdot(x_1-0.5)+1\cdot(x_2+1)=1.87; \end{cases} \to \begin{cases} x_1+0.67x_2=-0.84; \\ 0.5x_1+x_2=1.12; \end{cases}$$

$$x_1^{(1)}=-2.36;\quad x_2^{(1)}=2.3;\quad \frac{\partial f_1(x_1^{(1)},x_2^{(1)})}{\partial x_2}\approx-1.53,\quad \frac{\partial f_2(x_1^{(1)},x_2^{(1)})}{\partial x_1}=-2.36,$$

$$-f_1(x_1^{(1)},x_2^{(1)})=3.6,\qquad -f_2(x_1^{(1)},x_2^{(1)})=-4.2,$$

ya'ni

$$\begin{cases} 1\cdot(x_1+2.36)-1.53\cdot(x_2-2.3)=3.6; \\ -2.36\cdot(x_1+2.36)+1\cdot(x_2-2.3)=-4.2; \end{cases} \to \begin{cases} x_1-1.53x_2=-2.28; \\ -2.36x_1+x_2=3.7; \end{cases}$$

$$x_1^{(2)}=-1.26,\ x_2^{(2)}=0.67;\ \varepsilon_{n=2}=\max\{(-1.26+2.36)^2,(0.67-2.3)^2\}=2.66.$$

Ushbu misolda berilgan tenglamalar sistemasi ikkita haqiqiy yechimga ega ekanligini quyidagi Maple dasturidan ko'rish mumkin:

>*fsolve*({*x*–*y*^2/3 = –0.5, *x*^2/2+*y* = 1}, {*x*,*y*}); *allvalues*(%);

{*x* = 2.895363758, *y* = –3.191565646}

{*x* = –0.1770315380, *y* = 0.9843299173}

3.3. Takomillashtirilgan Nyuton usuli

Nyuton hisob jarayoni (3.3) ni qurishda har bir qadamda teskari matritsa $\mathbf{W}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$ ni hisoblash zarurati noqulaylik tug'diradi.

Agar $\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{x})$ matritsa izlanayotgan $\mathbf{x}^*$ yechimning atrofida uzluksiz va boshlang'ich yaqinlashsh $\mathbf{x}^0$ izlanayotgan $\mathbf{x}^*$ yechimga yetarlicha yaqin bo'lsa, u holda taqriban ushbu

$$\mathbf{W}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)\approx\mathbf{W}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$$

tenglikni o'rinli deb qabul qilish yoki bu teskari matritsani bir qancha qadamlardan keyin qayta hisoblash mumkin. Bu esa iteratsion jarayonlardagi hisoblashlarni kamaytirib, quyidagi *takomillashtirilgan Nyuton usuli* formulasini vujudga keltiradi:

$$\xi^{(k+1)}\approx\xi^{(k)}-\mathbf{W}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right),\quad k=0,1,2,\ \ldots,\quad \xi^{(0)}=x^{(0)}. \qquad (3.14)$$

Shuni ta'kidlaymizki, (3.13) va (3.14) jarayonlar uchun dastlabki yaqinlashishlar $\mathbf{x}^{(1)}$ va $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ o'zaro mos keladi, ya'ni $\mathbf{x}^{(1)}=\boldsymbol{\xi}^{(1)}$.

Takomillashtirilgan Nyuton usulining algoritmi (blok-sxemasi 3.4-rasmda tasvirlangan):

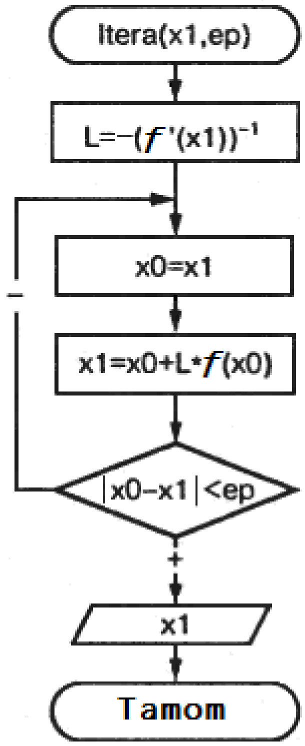
1. $\mathbf{x}^{(0)}$ – boshlang'ich yaqinlashish aniqlanadi.
2. $\mathbf{W}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$ matritsani hisoblaymiz.
3. (3.14) formula yordamida ildizni aniqlashtiramiz.
4. Agar (3.13) shart bajarilsa, u holda masala yechilgan bo'ladi va $\mathbf{x}^{(k+1)}$ (3.1′) vektor tenglamaning ildizi deb qabul qilinadi, aks holda 3-qadamga o'tiladi.

Agar Yakob matritsasidagi hosilalarni hisoblash murakkab yoki uni analitik yo'l bilan hisoblash mumkin bo'lmasa, u holda Nyuton usulini qo'llash murakkablashadi.

Bunday holda oldingi qadamdagi iteratsiyadan olingan yaqinlashishdan foydalanib, xususiy hosilalar chekli ayirmalarga almashtirilib approksimatsiyalanadi, masalan, $x_j^{(k)}$ nuqtada chap ayirma bilan hosilani ikki nuqtali approksimatsiyalash formulasi quyidagicha yoziladi:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{f_i\left(x_1^{(k)},\ldots,x_j^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}\right) - f_i\left(x_1^{(k)},\ldots,x_j^{(k)} - h,\ldots,x_n^{(k)}\right)}{h}.$$

Ana shu yo‘l bilan hisoblangan hosila qiymatlarini Nyuton formulasidagi Yakob matritsasini hisoblashga qo‘llab, iteratsion jarayonlar hisobini osonlashtirish mumkin. Ammo bunda Yakob matritsasi yomon shartlangan bo‘lib qolishi ehtimolligi mavjud. Shuni alohida ta’kidlaymizki, Yakob matritsasining analitik ifodasidan foydalanish hisoblashlar va dasturlash jarayonini ancha osonlashtiradi.



3.5-rasm. Nyuton usuli modifikatsiyasining algoritmi.

3.4. Nyuton-Rafson usuli

Bu usul nochiziqli tenglamalar sistemasini yechish uchun Nyuton usulining takomillashtirilgan variantlaridan biri hisoblanadi.

Faraz qilaylik, (3.1) yoki (3.1′) nochiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin. Iteratsion formulani hosil qilishimiz uchun $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ vektor-funksiya komponentalari bo‘lgan $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funksiyalarning Teylor qatoriga yoyilmasining ularning birinchi tartibligacha hosilasini o‘z ichiga olgan hadlari bilan cheklangan holini olamiz:

$$\begin{aligned}
&f_1^{(k)} + \frac{\partial f_1^{(k)}}{\partial x_1}\Delta x_1^{(k+1)} + \ldots + \frac{\partial f_1^{(k)}}{\partial x_n}\Delta x_n^{(k+1)} = 0,\\
&f_2^{(k)} + \frac{\partial f_2^{(k)}}{\partial x_1}\Delta x_1^{(k+1)} + \ldots + \frac{\partial f_2^{(k)}}{\partial x_n}\Delta x_n^{(k+1)} = 0,\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
&f_n^{(k)} + \frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial x_1}\Delta x_1^{(k+1)} + \ldots + \frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial x_n}\Delta x_n^{(k+1)} = 0.
\end{aligned}$$

Bu yerda $f_j^{(k)} = f_j(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$; $\Delta x_j^{(k+1)} = x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}$, ($j$=1,…$n$).

Bu tenglamalar sistemasini matritsa ko‘rinishida quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^{(k)}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1^{(k)}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1^{(k)}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2^{(k)}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2^{(k)}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2^{(k)}}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(k+1)} \\ \Delta x_2^{(k+1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(k)} \\ f_2^{(k)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

yoki buni belgilashlar bilan soddaroq qilib quyidagicha yozish ham mumkin:

$$\mathbf{W}^{(k)}\Delta\mathbf{x}^{(k+1)} = -\mathbf{f}^{(k)}.$$

Bu yerda ham xuddi yuqoridagidek, $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\mathbf{x})$ – Yakob matritsasi.

Bu chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechib, $\Delta\mathbf{x}^{(k+1)}$ ni aniqlaymiz:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k+1)}.$$

Bu usulning algoritmi quyidagicha:

1. $\mathbf{x}^{(0)}$ - boshlang‘ich yaqinlashish va ε - hisob aniqligi beriladi.
2. $|f_i| < \varepsilon$, (i=1,2,…,n) shart bajarilsa 6-qadamga o‘tiladi.
3. **W** – Yakob matritsasi hisoblanadi.
4. $\mathbf{W}\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{f}$ tenglamalar sistemasi yechiladi.
5. $\mathbf{x}=\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}$ hisoblanadi va 2-qadamga o‘tiladi.
6. x natijalar pechatga chiqariladi.

Nyuton-Rafson usulining nochiziqli tenglamalar sistemasini yechishga qo‘lla-nilishidagi asosiy shart bu Yakob matritsasining teskarisini hisoblashning mumkin yoki mumkin emasligida. Xususan, $\mathbf{W}^{-1}$ ning taqribiy qiymatini quyidagicha hisob-lash mumkin. Faraz qilaylik, $\mathbf{W}^{-1}$ – Yakob matritsasining k-iteratsiyadagi teskari mat-ritsasi bo‘lsin. (k+1)-iteratsiyadan keyin Yakob matritsasi quyidagicha hisoblanadi:

$$W_{k+1}^{-1} \approx W_k^{-1} - W_k^{-1}\,\Delta W_k\, W_k^{-1}.$$

Bu yondashuv hamma vaqt ham aniq emas va u bir qator kamchiliklarga ega. Ammo amaliyotdagi ko‘plab masalalarda bu oxirgi formula Yakob matritsasini hisoblashni ancha osonlashtiradi.

3.5. Iteratsiyalar usuli (ketma-ket yaqinlashishlar usuli)

Yuqoridagi (3.1) nochiziqli tenglamalar sistemasi ushbu

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n), \\ x_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \varphi_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

ko‘rinishga keltirilgan bo‘lsin, bu yerda $\varphi_1, \varphi_2, \ \ldots, \ \varphi_n$ - haqiqiy funksiyalar bo‘lib, ular bu sistema izolyatsiyalangan $\left(x_1^*, x_2^*, \ \ldots, \ x_n^*\right)$ yechimining biror atrofida aniqlangan va uzluksiz.

Qulaylik uchun quyidagi vektorni kiritamiz:

$$\mathbf{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \ \text{va} \ \varphi(\mathbf{x}) = \left(\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), ..., \varphi_n(\mathbf{x})\right).$$

U holda (3.15) ni quyidagi vektor shaklida yozish mumkin:

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{x}). \tag{3.16}$$

(3.16) tenglamaning $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ \ldots, \ x_n^*\right)$ vektor-ildizini topish uchun ko‘pincha quyidagi *iteratsiyalar usuli*ni qo‘llash juda qulay:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \varphi(\mathbf{x}^{(k)}) \quad \text{yoki} \quad \left.\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \varphi_1(x_1^{(k)}, \ x_2^{(k)}, \ ..., \ x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} &= \varphi_2(x_1^{(k)}, \ x_2^{(k)}, \ ..., \ x_n^{(k)}), \\ &\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ x_n^{(k+1)} &= \varphi_n(x_1^{(k)}, \ x_2^{(k)}, \ ..., \ x_n^{(k)}), \end{aligned}\right\} \ k = 0,1,2, \ \ldots, \tag{3.17}$$

bu yerda yuqoridagi indeks iteratsiyalar yaqinlashishi nomerini bildiradi; $\mathbf{x}^{(0)} \approx \mathbf{x}^*$ - boshlang‘ich yaqinlashish. Usulning blok-sxemali algoritmi 3.6-rasmda tasvirlangan. Agar (3.17) iteratsion jarayon yaqinlashivchan bo‘lsa, u holda ushbu

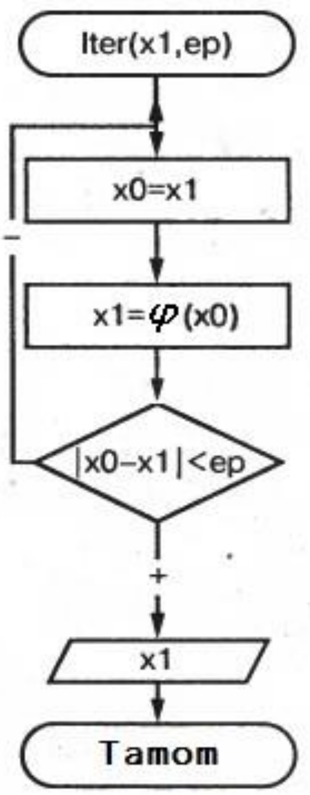
$$\xi = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} \tag{3.18}$$

limitik qiymat (3.17) tenglamaning ildizi bo‘ladi.

Haqiqatdan ham, agar (3.18) munosabat bajarilgan desak, u holda (3.17) tenglikda $k \to\infty$ bo‘yicha limitga o‘tib, $\varphi\left(x\right)$ funksiyalarning uzluksizligidan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k+1)} = \varphi\left(\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)}\right), \text{ ya'ni } \xi = \varphi\left(\xi\right).$$

Shunday qilib, ξ – bu (3.16) vektor tenglamaning ildizi. Agar, bundan tashqari, barcha $\mathbf{x}^{(k)}$ $\left(k = 0,1, \ \ldots\right)$ yaqinlashishlar biror Ω - sohaga tegishli bo‘lsa, u holda $\xi = \mathbf{x}^*$ ekanligi yaqqol ko‘rinadi. Soddaroq qilib aytganda, (3.17) iteratsion jarayon $\mathbf{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, \ x_2^{(0)}, \ ..., \ x_n^{(0)}\right)$ – boshlan-



3.6-rasm. Nochiziqli tenglamalar sistemasini yechish uchun iteratsiyalar usulining blok-sxemali algoritmi.

g‘ich yaqinlashishdan boshlanib, bitta iteratsiyadan keyin barcha argumentlar orttirmasining moduli berilgan ε miqdordan kichik bo‘lmaguncha davom ettiriladi, ya’ni

$$\left\|\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^{(k)}\right\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\left\{\left|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}\right|\right\}<\varepsilon .$$

Bu shartga teng kuchli bo‘lgan quyidagi shartdan ham foydalanish mumkin:

$$\left\|\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^{(k)}\right\|_2 = \left|\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^{(k)}\right| = \max_{1\le i\le n}\left\{\sqrt{\left(x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}\right)^2}\right\}<\varepsilon$$

Oddiy iteratsiya usuli dasturlash uchun juda qulay, ammo u quyidagi muhim kamchiliklarga ega:

a) $\|\varphi'(\mathbf{x})\|_\infty \le q<1$, bu yerda φ' - vektor-funksiya φ ning Yakob matritsasi, $\|\cdot\|_\infty$ belgi bilan esa matritsa normasi kiritilgan: $\|\varphi'(\mathbf{x})\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}\left\{\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right\}$;

b) $\|\varphi'(\mathbf{x})\|_l \le q<1$, bu yerda φ' - vektor-funksiya φ ning Yakob matritsasi, $\|\cdot\|_l$ belgi bilan esa matritsa normasi kiritilgan: $\|\varphi'(\mathbf{x})\|_l = \max\limits_{1\le j\le n}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right\}$;

c) agar boshlang‘ich yaqinlashish aniq yechimdan uzoqroq tanlangan bo‘lsa, *a*-shartning bajarilishiga qaramasdan, usulning yaqinlashishiga kafolat yo‘q; demak, boshlang‘ich yaqinlashishni tanlashning o‘zi ham sodda emas ekan;

d) iteratsion jarayon juda sekin yaqinlashadi.

3.6. Oddiy iteratsiyalar usuli

Iteratsiyalar usulini dastlabki $\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = 0$ umumiy sistemaga ham qo‘llash mumkin, bu yerda $\boldsymbol{f}(\mathbf{x})$ – vektor-funksiya bo‘lib, izolyatsiyalangan $\mathbf{x}^*$ - vektor-ildiz atrofida aniqlangan va uzluksiz.

Masalan, bu sistemani quyidagi ko‘rinishda yozaylik:

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}+\Lambda f(\mathbf{x}),$$

bu yerda Λ – xosmas matritsa. Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$\mathbf{x}+\Lambda f(\mathbf{x})=\varphi(\mathbf{x}). \tag{3.19}$$

U holda quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{x}). \tag{3.20}$$

Agar $f(x)$ funksiya $f'(x)$ – uzluksiz hosilaga ega bo‘lsa, u holda (3.19) formuladan quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$\varphi'(\mathbf{x})=E+\Lambda f'(\mathbf{x}).$$

Agar $\varphi'(\mathbf{x})$ o‘zining normasi bo‘yicha kichik bo‘lsa, u holda (3.20) tenglama uchun iteratsiyalar jarayoni tez yaqinlashadi. Bu holatni e’tiborga olib, Λ matritsani shunday tanlaymizki, ushbu

$$\varphi'(\mathbf{x}^{(0)})=E+\Lambda f'(\mathbf{x}^{(0)})=0$$

tenglik bajarilsin. Bu yerdan, agar $f'(\mathbf{x}^{(0)})$ - xosmas bo‘lsa, u holda quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz:

$$\Lambda = -\left| f'(\mathbf{x}^{(0)}) \right|^{-1}.$$

Shuni ta’kidlash muminki, bu mazmunan Nyuton modifikatsion jarayonining (3.19) tenglamaga qo‘llanilishi demakdir.

Xususan, agar det $f'(\mathbf{x}^{(0)})$ =0 bo‘lsa, u holda boshqa $\mathbf{x}^{(0)}$ - boshlang‘ich yaqinlashishni tanlash lozim bo‘ladi.

Oddiy iteratsiya usuli nafaqat haqiqiy ildizlarni, balki kompleks ildizlarni ham topish imkonini beradi. Oxirgi holda kompleks boshlang‘ich yaqinlashishni tanlash lozim bo‘ladi.

Iteratsiyalar jatayoni yaqinlashishining yetarli sharti quyidagicha.

Faraz qilaylik, shunday $D \subset R^n$ yopiq soha mavjud bo‘lsinki, bunda ixtiyoriy $x \in D$ uchun $\varphi(x) \in D$ bo‘lsin. Xuddi shunday, ixtiyoriy x_1 va $x_2 \in D$ lar uchun quyidagi shart bajarilsin:

$$\left\| \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \right\| \le q \left\| x_1 - x_2 \right\|, \quad q < 1, \tag{*}$$

bu yerda $\|\cdot\|$ - R^n dagi biror norma. U holda osongina ko‘rsatish mumkinki, D sohada (3.16) tenglamaning x^* yechimi mavjud bo‘lib, (3.17) iteratsion jarayon tanlangan ixtiyoriy $x_0 \in D$ uchun shu yechimga yaqinlashadi. Bunda quyidagi yaqinlashish tezligini baholash o‘rinli:

$$\left\| x^m - x^* \right\| \le \frac{cq^m}{1-q},$$

bu yerda c – biror o‘zgarmas.

Yuqoridagi (*) shartni qanoatlantiruvchi φ funksiya *siqiluvchan akslanish* deb, (3.18) tenglamaning yechimi esa φ funksiyaning *qo‘zg‘almas nuqtasi* deb ataladi.

Shuni ta’kidlaymizki,

$$\left\| x^{m+1} - x^* \right\| = \left\| \varphi(x^m) - \varphi(x^*) \right\| \le q \left\| x^m - x^* \right\|,$$

shuning uchun, oddiy iteratsiya usulining yaqinlashish tartibi 1 ga teng.

Agar $\varphi(x)$ funksiya D sohada uzluksiz va differensiallanuvchan bo‘lsa, u holda (*) shartning bajarilishi uchun ixtiyoriy $x \in D$ lar uchun $\left\| \varphi'(x) \right\| \le q < 1$ shartning bajarilishi yetarli.

Izoh. $\varphi(x)$ funksiya $f(x)$ funksiya orqali bir qiymatli aniqlanmaydi. $\left\| \varphi'(x) \right\| \le q < 1$ shartning bajarilishi uchun $\varphi(x)$ funksiyani qanday tanlash lozim? Agar $x^{(0)}$ nuqta atrofida $f(x)$ uzluksiz differensiallanuvchan va $f'(x)$ matritsa-funksiya aynimagan bo‘lsa, unda umumiy holda quyidagicha yozish mumkin:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)}.$$

Xususiy hollarda $\varphi(x)$ funksiyani tanlash va ushbu $\|\varphi'(x)\| \le q < 1$ shartning bajarilishini tekshirish ancha sodda bo‘lishi mumkin.

Xususiy hol. Hisoblashlarni amaliyot uchun qulay bo‘lgan n=2 bo‘lgan holda ko‘rib chiqaylik. (3.15) sistemani

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_1(x, y), \\ y &= \varphi_2(x, y) \end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

ko‘rinishda yozib olamiz. $\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)$ funkiyalar iterasiyalovchi funksiyalar deb yuritiladi. Taqribiy yechimni topish algoritmi ushbu

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= \varphi_1(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= \varphi_2(x_n, y_n) \end{aligned}\right\} \; n = 0,1,2,3,..... \tag{3.22}$$

ko‘rinishda beriladi. Bu yerda (x_0, y_0) - birinchi yaqinlashish qiymatlari.

(3.22) iterasion hisoblash jarayoni yaqinlashuvchi bo‘ladi, agarda ushbu

$$\left.\begin{aligned} \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| &\le q_1 < 1, \\ \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| &\le q_2 < 1 \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

tengsizliklar bajarilsa.

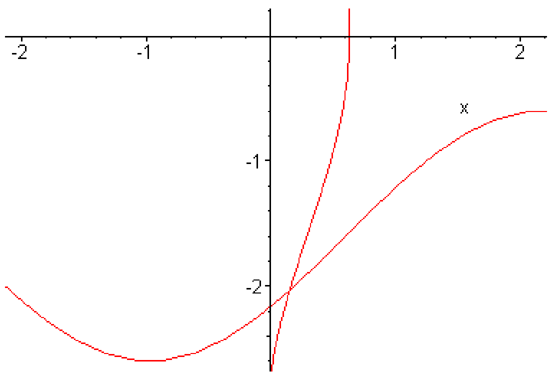
Quyida $\varphi(x)$ funksiyaning grafigini qurish va iteratsion jarayonning R^2 dagi yaqinlashishini ta’minlovchi shartni tekshirishga oid misollar qaraylik.

1-misol. Quyidagi sistemani qaraylik:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x - \dfrac{1}{3}\cos y - 0.3 = 0, \\ f_2(x, y) = y - \sin(x - 0.6) + 1.6 = 0. \end{cases}$$

Yechish. $f_1(x,y)$ va $f_2(x,y)$ funksiyalarning grafiklarini Maple paketidan foydalanib chizamiz:

> plots[implicitplot]({x-cos(y)/3-0.3=0,y-sin(x-0.6)+1.6=0},x=-3..3,y=-3..3);



3.7.rasm. 1-misolda berilgan $f_1(x,y)$ va $f_1(x,y)$ funksiyalarning grafiklari.

3.7-rasmdan ko‘rinib turibdiki, sistemaning yechimi $D = \{0 \le x \le 0.3;\ -2.2 \le y \le -1.8\}$ sohada yotibdi. Bu yerda

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y) = \dfrac{1}{3}\cos y + 0.3, \\ \varphi_2(x, y) = \sin(x - 0.6) - 1.6 \end{cases}$$

deb tanlab olib, iteratsion jarayon yaqinlashishining yetarli shartini tekshiramiz:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| = \left|\cos(x-0.6)\right| \le \cos 0.3 < 1, \\ \left|\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| + \left|\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| = \left|\dfrac{1}{3}\sin y\right| \le \dfrac{1}{3} < 1. \end{cases}$$

Bu yaqinlashish shartining bajarilayotganligi D sohadan $x^{(0)}$ boshlang‘ich yaqinlash-ish sifatida ixtiyoriy nuqtani tanlash mumkinligini bildiradi.

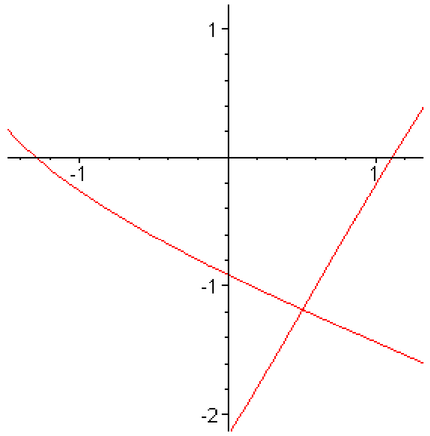
Agar ikkinchi tenglama $f_2(x,y) = y - 0.5\sin(x-0.6) + 1.6 = 0$ ko‘rinishda bo‘lsa, u holda yaqinlashish sharti ixtiyoriy $(x,y)\in R^2$ da bajariladi.

2-misol. Quyidagi sistemani qaraymiz:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = x + \cos y + y + 0.3 = 0, \\ f_2(x,y) = y - \sin(x-0.6) - x + 1.6 = 0. \end{cases}$$

Yechish. $f_1(x,y)$ va $f_2(x,y)$ funksiyalarning grafiklarini Maple paketidan foydalanib chizamiz (3.8-rasm):

```
> plots[implicitplot]({x+cos(y)+y+0.3=0, y-sin(x-0.6)-x+1.6=0}, x=-3..3, y=-3..3);
```



3.8-rasm. Misolda berilgan $f_1(x,y)$ va $f_1(x,y)$ funksiyalarning Maple paketidan foydalanib chizilgan grafiklari.

Rasmdan ko‘rinadiki, sistemaning yechimi $D = \{0.4 \le x \le 0.6;\ -1.1 \le y \le -1.3\}$ sohaga tegishli.

Bu yerda

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y) = -(\cos y + y + 0.3), \\ \varphi_2(x,y) = \sin(x-0.6) + x - 1.6 \end{cases}$$

deb tanlab olamiz. Bu yerdan ko‘rinadiki, D sohada

$$\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| = \left|\cos(x-0.6) + 1\right| \ge 1 + \cos 0.2 > 1.$$

Ko‘rinib turibdiki, yaqinlashish sharti har ikkala $\|\cdot\|_\infty$ va $\|\cdot\|_l$ holda ham bajarilmayapdi. Bunday yo‘l bilan tanlangan $\varphi(x)$ funksiya uchun boshlang‘ich yaqinlashishni qanday tanlashdan qat’iy nazar iteratsion jarayon uzoqlashadi. Yaqinlashuvchan iteratsion jarayonga erishish uchun izohdagi umumiy holdan foydalanish lozim, bu bilan boshlang‘ich yechimni aniq yechimga yetarlicha yaqin qilib tanlab olish mumkin bo‘ladi, masalan, $x^{(0)}$=(0.5;-1,1). $f'(x)$ matritsaning teskarisini, masalan, Kramer usulidan foydalanib topish mumkin.

3-Misol. Quyidagi

$$\left.\begin{aligned} x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0 \\ x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

sistemaning yechimini oddiy iterasiya usulida 0,001 aniqlikda taqribiy hisoblang.

Yechish. Iterasiya usulini qo‘llash uchun berilgan sistemani

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x^3+y^3}{6} - \frac{1}{2} \\ y &= \frac{x^3-y^3}{6} + \frac{1}{3} \end{aligned}\right\}$$

ko‘rinishda yozib olamiz.

Ushbu $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ kvadrat sohani qaraylik. Agar (x_0, y_0) shu sohaga qarashli bo‘lsa, u holda $0 < \varphi_1(x_0, y_0) < 1,\ 0 < \varphi_2(x_0, y_o) < 1$ o‘rinli bo‘ladi. Demak shu sohadan (x_0, y_0) nuqtani ixtiyoriy tanlaganimizda ham (x_n, y_n) nuqta ham o‘sha sohaga tegishli bo‘ladi. Bundan esa (3.23) yaqinlashish shartining bajarilishi kelib chiqadi, ya’ni ushbu

$$\left.\begin{aligned} \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| &= \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} < 1 \\ \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| &= \frac{x^2}{2} + \left|-\frac{y^2}{2}\right| < 1 \end{aligned}\right\}$$

o‘rinli bo‘ladi. Demak, qaralayotgan kvadrat sohada yagona yechim mavjud va uni iterasiya usuli yordamida taqribiy hisoblash mumkin. Dastlabki yaqinlashishni $x_0 = \frac{1}{2},\ y_0 = \frac{1}{2}$ deb olaylik.

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}{6} = 0{,}542;\quad y_1 = \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{8}}{6} = 0{,}333;$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{0{,}19615}{6} = 0{,}533;\quad y_2 = \frac{1}{3} + \frac{0{,}1233}{6} = 0{,}354;$$

Hisoblashlarni shu singari davom ettirib,

$$x_3 = 0{,}533;\quad y_3 = 0{,}351;\quad x_4 = 0{,}532;\quad y_4 = 0{,}351;$$

bo‘lishini aniqlaymiz. $q_1 = q_2 = \frac{34}{72} < 0{,}5$ bo‘lganligidan va uchinchi va to‘rtinchi taqribiy yechimlarning kasr qismidagi uchta raqamining mos kelishi talab qilingan aniqlikka erishilganligini bildiradi. Taqribiy yechim sifatida $x = 0{,}532;\ y = 0{,}351$ qiymatlarni olish mumkin.

Ushbu misolda berilgan tenglamalar sistemasi 3 ta haqiqiy yechimga ega ekanligini quyidagi Maple dastur hisobi natijasi va grafiklardan ham ko‘rish mumkin (3.9-rasm):

```
> plots[implicitplot]({x^3+y^3-6*x+3=0,x^3-y^3-6*y+2=0},x=-3..3,y=-3..3);
solve({x^3+y^3-6*x+3=0,x^3-y^3-6*y+2=0},{x,y});
allvalues(%); evalf(%);
```

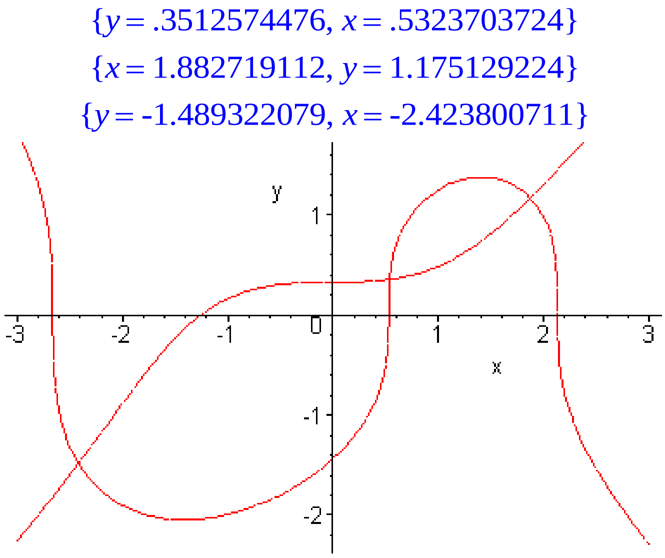
Yuqoridagi izohni n = 2 bo‘lgan xususiy hol uchun oydinlashtiraylik. Berilgan ikki noma’lumli ikkita nochiziqli tenglamalar sistemasini quyidagicha yozib olaylik:

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y) = x + \alpha\ f_1(x,y) + \beta\ f_2(x,y), \\ \varphi_2(x,y) = y + \gamma\ f_1(x,y) + \delta\ f_2(x,y). \end{cases}$$

Bu yerda $\alpha\,\delta \neq \beta\,\gamma$.

Bu sistemadagi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ noma’lim korffisiyentlarni quyidagi tenglamalar sistemasining taqribiy yechimi deb topamiz:

$$\begin{cases} 1 + \alpha \dfrac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial x} = 0, \\ \alpha \dfrac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial y} + \beta \dfrac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial y} = 0, \\ \gamma \dfrac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial x} + \delta \dfrac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial x} = 0, \\ 1 + \gamma \dfrac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial y} + \delta \dfrac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial y} = 0. \end{cases}$$



3.9-rasm. 3-misolda berilgan tenglamalar sistemasidagi funksiyalarning Maple dasturida chizilgan grafiklari.

Bu tenglamalar sistemasidan, faqatgina unda qatnashayotgan $f_1(x,y)$ va $f_2(x,y)$ funksiyalar xususiy hosilalari (x_0,y_0) nuqta atrofida keskin o‘zgaruvchan bo‘lmasagina, foydalanish mumkin.

Endi buni quyidagi misolda ko‘raylik.

4-misol. Quyidagi tenglamalar sistemasining iteratsiyalanuvchi $\varphi_1(x,y)$ va $\varphi_2(x,y)$ funksiyalarini (x_0,y_0) = (0,80; 0,55) boshlang‘ich nuqtada toping:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ f_2(x,y) = x^3 \quad y. \end{cases}$$

Yechish. Bu sistema uchun $\varphi_1(x,y)$ va $\varphi_2(x,y)$ funksiyalarni quyidagi ko‘rinishda izlaymiz:

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y) = x + \alpha\,(x^2 + y^2 - 1) + \beta\,(x^3 - y), \\ \varphi_2(x,y) = y + \gamma\,(x^2 + y^2 - 1) + \delta\,(x^3 - y). \end{cases}$$

α, β, γ, δ noma’lim korffisiyentlarni topish uchun yuqorida taklif etilgan sistemaga kiruvchi xususiy hosilalar va ularning (x_0,y_0) nuqtadagi qiymatlarini hisoblaylik:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial x} = 1{,}6; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial y} = 1{,}1;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 3x^2; \quad \frac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial x} = 1{,}92; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = -1; \quad \frac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial y} = -1;$$

Bularga ko‘ra α, β, γ, δ noma’lim korffisiyentlarga nisbatan quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga kelamiz:

$$\begin{cases} 1+1,6\alpha+1,92\beta=0, \\ 1,1\alpha-\beta=0, \\ 1,6\gamma+1,92\delta=0, \\ 1+1,1\gamma-\delta=0. \end{cases}$$

Buni yechib, quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$\alpha \approx -0,3;\ \ \beta \approx -0,5;\ \ \gamma \approx -0,3;\ \ \delta \approx 0,4.$$

Shunday qilib, $\varphi_1(x,y)$ va $\varphi_2(x,y)$ funksiyalarning quyidagi ifodalariga kelamiz:

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y)=x-0,3(x^2+y^2-1)-0,3(x^3-y), \\ \varphi_2(x,y)=y-0,5(x^2+y^2-1)+0,4(x^3-y). \end{cases}$$

Endi berilgan tenglamalar sistemasini taqribiy yechish uchun yaqinlashuvchan (3.22) iteratsiyalar formulasidan yoki quyida keltirilgan Zeydel usuli formulasidan foydalanish mumkin.

3.7. Zeydel usuli

Oddiy iteratsiya usulining iteratsion jarayon yaqinlashishini tezlashtirituchi modifikatsiyalaridan biri *Zeydel usuli* bo‘lib, bu usulning asosiy formulasi quyidagicha ifodalanadi:

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(k+1)}=\varphi_1(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ \ldots,\ x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)}=\varphi_2(x_1^{(k+1)},\ x_2^{(k)},\ \ldots,\ x_n^{(k)}), \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ x_n^{(k+1)}=\varphi_n(x_1^{(k+1)},\ \ldots,\ x_{n-1}^{(k+1)},\ x_n^{(k)}), \end{array}\right\}\ k=0,1,2,\ \ldots, \qquad (3.25)$$

Bu iteratsion jarayon bilan bir qatorda ushbu

$$\left.\begin{array}{l} f_1(\xi,\ x_2^{(k)},\ \ldots,\ x_n^{(k)})=0, \\ f_2(x_1^{(k+1)},\ \xi,\ \ldots,\ x_n^{(k)})=0, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ f_n(x_1^{(k+1)},\ \ldots,\ x_{n-1}^{(k+1)},\ \xi)=0 \end{array}\right\} \qquad (3.26)$$

iteratsion jarayonni qarab, yaqinlashish vektori komponentalarini shu tenglamalar sistemasidan topish mumkin. Bu tenglamalar sistemasining har birida bitta ξ noma’lum qatnashadi. Ana shu ξ_1 larning qiymatlari (26) tenglamalar sistemasining yangi birinchi $x_1^{(k+1)} = \xi_1$ yaqinlashishi qiymati to‘plami bo‘lib xizmat qiladi. Navbatdagi ξ_2 lar esa ikkinchi yaqinlashishning qiymatlar to‘plamini beradi, ya’ni $x_2^{(k+1)} = \xi_2$ va hokazo. Bu usulning qulayligi shundaki, uni bitta tenglama yechimini topishga qo‘llash juda oddiy, ammo bu usul amaliyotda juda katta hajmdagi hisoblashlarni bajarishni talab qilishi mumkin.

Xususiy hol. Ikki noma’lumli ikkita nochiziqli tenglamalar sistemasini taqribiy yechish uchun ba’zi hollarda (3.22) iterasion hisoblash jarayoni o‘rniga quyidagi «Zeydel jarayoni»dan foydalanish juda qulay:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= \varphi_1(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= \varphi_2(x_{n+1}, y_n) \end{aligned}\right\} n = 0,1,2,3,\ldots .$$

1-misol. Quyidagi sistemani oddiy iteratsiya va Zeydel usullari bilan yeching:

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{x_2^2}{3} = 1; \\ x_2 + \dfrac{1}{x_1+1} = -1; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + \dfrac{x_2^2}{3} = \varphi_1(x_1, x_2); \\ x_2 = -1 - \dfrac{1}{x_1+1} = \varphi_2(x_1, x_2); \end{cases} \quad \begin{aligned} &\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\right| = \left|\frac{2\cdot x_2}{3}\right| < 1; \\ &\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right| = \left|\frac{1}{(x_1+1)^2}\right| < 1; \end{aligned}$$

$x_1 > 0,\quad x_1 < -1;\quad -1.5 < x_2 < 1.5;\quad x_1^{(0)} = 1.5,\quad x_2^{(0)} = 0.$

Yechish: Oddiy iteratsiya usuli:

$$x_1^{(1)} = 1;\quad x_2^{(1)} = -1 - 1/2.5 = -1.4;$$

$$x_1^{(2)} = 1 + 1.96/3 = 1.65;\quad x_2^{(2)} = -1 - 1/2 = -1.5;$$

$$x_1^{(3)} = 1 + 2.25/3 = 1.75;\quad x_2^{(3)} = -1 - 1/2.65 = -1.38;$$

$$\varepsilon_{n=3} = \max(|1.75 - 1.65|, |-1.38 + 1.5|) = 0.12;\ x_1^* \approx 1.75,\ x_2^* \approx -1.38.$$

Zeydel usuli:

$$x_1^{(1)} = 1;\quad x_2^{(1)} = -1 - 1/2 = -1.5;$$

$$x_1^{(2)} = 1 + 2.25/3 = 1.75;\quad x_2^{(2)} = -1 - 1/2.75 = -1.36;$$

$$x_1^{(3)} = 1 + 1.85/3 = 1.61;\quad x_2^{(3)} = -1 - 1/2.61 = -1.39;$$

$$\varepsilon_{n=3} = \max(|1.61 - 1.75|, |-1.39 + 1.36|) = 0.14;\ x_1^* \approx 1.61,\ x_2^* \approx -1.39.$$

3.8. Parametrlarni qo‘zg‘atish usuli

Bu usulning g‘oyasi quyidagicha. Dastlab (3.1) tenglamalar sistemasi bilan bir qatorda avvaldan uning yechimi ma’lum bo‘lgan quyidagi biror tenglamalar sistemasi qaraladi:

$$\left.\begin{aligned} &h_1^{(0)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ &h_2^{(0)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ &\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ &h_n^{(0)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

Bunga misol qilib chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini olish mumkin. (3.27) tenglamalar sistemasinining chap tarafini shunday o‘zgartiramizki, u biror K songa nisbatan (3.1) tenglamaning chap tarafiga qo‘yilib, uni quyidagi ko‘rinishga keltirsin:

$$\left.\begin{aligned}
h_1^{(k+1)}(x_1, x_2, ..., x_n) &= h_1^{(k)}(x_1, x_2, ..., x_n) + \\
&+ \left[f_1(x_1, x_2, ..., x_n) - h_1^{(k)}(x_1, x_2, ..., x_n)\right]\frac{k+1}{K}, \\
h_2^{(k+1)}(x_1, x_2, ..., x_n) &= h_2^{(k)}(x_1, x_2, ..., x_n) + \\
&+ \left[f_2(x_1, x_2, ..., x_n) - h_2^{(k)}(x_1, x_2, ..., x_n)\right]\frac{k+1}{K}, \\
&... ... ... \\
h_n^{(k+1)}(x_1, x_2, ..., x_n) &= h_n^{(k)}(x_1, x_2, ..., x_n) + \\
&+ \left[f_n(x_1, x_2, ..., x_n) - h_n^{(k)}(x_1, x_2, ..., x_n)\right]\frac{k+1}{K},
\end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

bu yerda $k = 0,1,…,K$. Agar K ning qiymati kattaroq tanlansa bu funksiyalar qiymatlarining ketma-ket o‘zgarishi kichrayib boradi. Har bir o‘zgartirishdan keyin parametrlari qo‘zg‘atilgan ushbu

$$\left.\begin{aligned}
h_1^{(k+1)}(x_1, x_2, ..., x_n) &= 0, \\
h_2^{(k+1)}(x_1, x_2, ..., x_n) &= 0, \\
... ... \\
h_n^{(k+1)}(x_1, x_2, ..., x_n) &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (3.29)$$

tenglamalar sistemasi iteratsion usullar bilan yechib boriladi.

(3/27) tenglamalar sistemasining yechimi (3.29) uchun $k = 0$ da boshlang‘ich yaqinlash deb foydalaniladi. (3.29) tenglamalar sistemasining yechimi (3.27) sistema yechimidan kam farq qilganligi uchun iteratsion jarayonning yaqinlashishi ta’minlanadi deb hisoblashimiz mumkin. Shundan keyin olingan yechim (3.29) sistemaning $k = 1$ dagi boshlang‘ich yaqinlashishi deb qaraladi va hokazo. Oxiriga borib, $k = K$-1 bo‘lganda hosil bo‘lgan (3.29) tenglamalar sistemasi dastlabki (3.1) tenglamalar sistemasiga ekvivalent bo‘lib qoladi.

Shunday qilib, parametrlarni qo‘zgatish usulining boshlang‘ich yaqinlashishini tanlash masalasi yechiladi.

Bu usulning noqulayligi shundaki, (3.27) tenglamalar sistemasini yechiladigan tenglamalar sistemasiga aylantirish katta hisob qadamlarini (hatto 10 dan 100 gacha) talab qilishi mumkin. Shuning ushun, bu usulning qo‘llanilishi mashinada juda katta hisob vaqtini talab qilishi mumkin. Bu usulning afzalligi shundaki, (3.28) sistema muvaffaqiyatli yechilganda (3.29) sistemaning yechimi bir necha iteratsiya qadamlardagina topilishi mumkin.

3.9. Pikar iteratsiyalari

Bir qator hollarda (3.1) sistema maxsus ko‘rinishga ega bo‘lib, u vektor-matritsa ko‘rinishida quyidagicha yoziladi:

$$Ax - f(x) = 0, \tag{3.30}$$

bu yerda A – berilgan aynimagan matritsa; f – nochiziqli vektor-funksiya. Bunday tenglamalar sistemasiga, masalan, nochiziqli chegaraviy masalalarni chekli ayirmalar usuli bilan yechishda kelinadi.

(3.30) sistema uchun quyidagi iteratsion prosedura o‘rinli:

$$x^{(k+1)} = A^{-1} f\left(x^{(k)}\right) \tag{3.31}$$

va u *Pikar iteratsiyalari* deb ataladi. Iteratsion algoritmni ixcham yozish maqsadida (3.31) formulada A^{-1} teskari matritsadan foydalanildi. Aslida esa iteratsiyaning har bir qadamida quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi yechiladi:

$$Ax^{(k+1)} = f\left(x^{(k)}\right).$$

Pikar iteratsiyalarini quyidagi umumlashgan iteratsiyon jarayonning xususiy holi deb qarash mumkin:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - BF\left(x^{(k)}\right), \tag{3.32}$$

bu yerda B – berilgan aynimagan matritsa. Bu yerdan ko‘rinadiki, agar

$$F(x) = Ax - f(x) \quad \text{va} \quad B = A^{-1}$$

bo‘lsa, u holda (3.32) tenglik (3.31) ga aylanadi. Agar B matritsa boshqacharoq tanlansa, u holda boshqa bir necha algoritmlar yuzaga keladi, xususan, Nyuton usuli algoritmlari va ko‘p o‘chovli kesuvchilar usuli.

3.10. Broyden usuli

Nyuton-Rafson usuli juda yaxshi yaqinlashishni beradi, ammo Yakob matritsasining teskarisini hisoblash juda ko‘p mashina vaqtini oladi. Bunday hollarda Yakob matritsasini hisoblash o‘rniga biror boshqa yaqinlashishni tuzish uslubi *kvazinyuton usullar* (*algoritlar*) deb ham ataladi. Ana shunday usullardan biri bu 1965 yilda taklif etilgan *Broyden usuli* bo‘lib, u Nyuton-Rafson usulining takomillashtirilgan varianti hamda u yuqorida ta’kidlangan kamchilikdan holi. Bu usulning quyidagi ikkita muhim farqlari mavjud:

1) iteratsiyalarning har bir qadamida Yakob matritsasi to‘g‘risi yoki teskarisi hisoblanmaydi, o‘zgaruvchilar chetlashishini sonli baholash uchun qo‘shimcha funksiyalar hisoblanilmaydi, faqatgina sxema o‘zgarmas matritsasining mavjudligini topishdagi funksiyalardangina foydalaniladi;

2) yechimning yaqinlashishini ko‘rsatuvchi so‘nish koeffitsiyenti har bir iteratsiyada hisoblanadi, bu o‘z navbatida, Broyden usulining yutug‘i bo‘lib, Nyuton-Rafson usuli yaqinlashishni kafolat bera olmaydi. Bundan tashqari, bu koeffitsiyent

hatto, hali yechim topilmagan bo‘lsa ham, hisoblash xatoligini baholash imkonini beradi.

Broyden usulining mazmuni quyidagicha:

Nyuton-Rafson formulasi bo‘yicha navbatdagi $x^{(k+1)}$ yaqinlashishni olish uchun k-yaqinlashishga tuzatma vektor qo‘shiladi, ya’ni:

$$\Delta x^{(k+1)} = \left(-W^{(k)}\right)^{-1} f^{(k)}\ ; \qquad x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k+1)}.$$

Broyden usulida bu tuzatmaning hammasidan emas, balki uning bir qismidan foydalanilmaydi:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} \Delta x^{(k+1)},$$

bu yerda $\lambda^{(k)}$ - skalyar koeffitsiyent shunday tanlanadiki, $f^{(k+1)}$ vektor yoki uning maksimal qiymat qabul qiluvchi elementi normasi minimumlashtiriladi (yoki kamaytiriladi). Agar Nyuton-Rafson usulining yaqinlashishi ta’minlangan bo‘lsa, u holda $\lambda^{(k)}>1$ ni tanlash hisobiga Broyden usuli juda katta yaqinlashishga erishadi. Aksincha, agar Nyuton-Rafson usulining yaqinlashishi ta’minmalangan bo‘lsa, u holda $\lambda^{(k)}<1$ ni tanlash hisobiga bu yaqinlashish ta’minlanadi.

Broyden usuli Yakob matritsasi va uning teskarisini hisoblash bilan bog‘liq bo‘lgan Nyuton-Rafson usulining qiyinchiligini bartaraf qiladi. Bunga iteratsiyaning har bir qadamida Yakob matritsasining o‘rniga quyidagi formula bilan berilgan yaqinlashishni hisoblash evaziga erishiladi:

$$H^{(k+1)} = H^{(k)} - \frac{\left[\lambda^{(k)}\Delta x^{(k)} + H^{(k)}\left(f^{(k+1)} - f^{(k)}\right)\right]\left(\Delta x^{(k)}\right)^T H^{(k)}}{\left(\Delta x^{(k)}\right)^T H^{(k)}\left(f^{(k+1)} - f^{(k)}\right)}. \qquad (3.33)$$

Broyden usulining algoritmi quyidagicha:

1. $x^{(0)}$ boshlang‘ich yaqinlashish tanlanadi.
2. Yakob matritsasi $W^{(0)}$ ning teskarisini hisoblash bilan $H^{(0)}$ matritsaning boshlang‘ich qiymati hisoblanadi.
3. $f^{(k)} = f\left(x^{(k)}\right)$, k=0,1,2, … hisoblanadi.
4. $\Delta x^{(k)} = H^{(k)} f^{(k)}$ hisoblanadi.
5. $\lambda^{(k)}$ koeffitsiyent shunday tanlanadiki, $\left\| f^{(k+1)} \right\| < \left\| f^{(k)} \right\|$ bo‘lsin.
6. $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} \Delta x^{(k+1)}$ hisoblanadi.
7. $\left\| f^{(k+1)} \right\|$ matritsa normasining yaqinlashishi tekshiriladi.
8. $\left(f^{(k+1)} - f^{(k)}\right)$ hisoblanadi.
9. $H^{(k+1)}$ matritsa (33) formula bo‘yicha hisoblanadi.
10. Hisoblash jarayoni 3-qadamdan takrorlanadi.

Misol. Ushbu

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,y) &= x^5 + y^3 - xy - 1 = 0 \\ f_2(x,y) &= x^2 y + y - 2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

tenglamalar sistemasining nolinchi yaqinlashishini $X_0 = (x_0, y_0)$ = (2; 2) deb olib, uning aniq yechimi $\mathbf{X} = (x, y)$ = (1; 1) ni Broyden usuli yordamida aniqlang.

Yechish. Misolning yechimi jarayonini, iteratsiyalardagi $\mathbf{X}_k = (x_k, y_k)$ yaqinlashishlarni quyidagi jadval shaklida ifodalaylik:

K	x_k	y_k	$\lvert \mathbf{X}_k - \mathbf{X} \rvert$
0	2,000000000	2,000000000	1,414213562
1	1,694513211	0,889023252	0,703323850
2	1,532940994	0,835742461	0,557679695
3	1,330935487	0,770464391	0,402746685
4	1,251500757	0,804076528	0,318808151
5	1,139841409	0.866849425	0.193092452
6	1.087198127	0.913245001	0.123003835
7	1.039140157	0.958904664	0.056751903
8	1.016525113	0.982554663	0.024029547
9	1.003700722	0.996037640	0.005421774
10	1.000537288	0.999428320	0.000784536
11	1.000005832	0.999993444	8.774735736E-6
12	1.000000808	0.999999157	1.167386327E-6
13	0.999999806	1.000000202	2.795316564E-7
14	1.000000000	1.000000000	3.994662952E-10

Jadvaldan ko‘rinadiki, bu misolning natijasiga Nyuton usuli bilan 8 qadamda erishilgan edi. Bu esa Broyden usulining iteratsiya tezligi Nyuton usulinikidan past ekanligini ko‘rsatadi. Shunga qaramasdan, Broyden usuli ommabop bo‘lib, hisoblash amaliyotida keng qo‘llanilib kelinmoqda.

3.11. Tezkor tushish usuli (gradiyentlar usuli)

Yuqoridagi (3.1) tenglamalar sistemasini qaraymiz. Faraz qilaylik, f_i funksiyalar o‘zlarining umumiy aniqlanish sohasida haqiqiy va uzluksiz differensiallanuvchan. Quyidagi funksiyani qaraymiz:

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[f_i(x) \right]^2 = \left(f(x),\ f(x) \right).$$

Ravchanki, (3.1) sistemaning har bir yechimi $U(x)$ funksiyani nolga aylantiradi; va aksincha $U(x)$ funksiya nolga teng bo‘ladigan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sonlar (3.1) sistemaning ildizlari.

Faraz qilamizki, (3.1) sistema izolyatsiyalangan yechimgagina ega bo‘lib, bu yechim $U(x)$ funksiyaning qat’iy minimum nuqtasi bo‘lsin. Bu bilan masala n o‘lchovli fazoda $U(x)$ funksiyaning minimumini topishga olib kelinadi.

Faraz qilaylik, x – (1) sistemaning vektor-ildizi, $x^{(0)}$ esa uning boshlang‘ich yaqinlashishi bo‘lsin. $x^{(0)}$ nuqta orqali $U(x)$ funksiyaning sath sirtini o‘tkazamiz. Agar $x^{(0)}$ nuqta x ildizga yetarlicha yaqin bo‘lsa, u holda bizning farazimiz bo‘yicha sath sirti $U(x)=U\left(x^{(0)}\right)$ ellipsoidga o‘xshash.

$x^{(0)}$ nuqtadan boshlab $U(x)=U\left(x^{(0)}\right)$ sirt normali bo‘ylab harakatlanib, bu harakatni shu normal qaysidir boshqa bir $U(x)=U\left(x^{(1)}\right)$ sath sirtiga biror $x^{(1)}$ nuqtada urinmaguncha davom ettiramiz. Keyin yana $x^{(1)}$ nuqtadan harakatni $U(x)=U\left(x^{(1)}\right)$ sath sirti bo‘ylab davom ettirib, bu harakatni shu normal boshqa bir yangi $U(x)=U\left(x^{(2)}\right)$ sath sirtiga biror $x^{(2)}$ nuqtada urinmaguncha davom ettiramiz va hokazo. Vaholanki, $U\left(x^{(0)}\right)>U\left(x^{(1)}\right)>U\left(x^{(2)}\right)>\ldots$ bo‘lsa, u holda biz shu yo‘l bilan harakatlanib, $U(x)$ ning (3.1) sistemaning izlanayotgan x ildiziga mos keluvchi eng kichik qiymatli nuqtasiga tezkor yaqinlashib boramiz. Ushbu $\nabla U(x)=\begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial U}{\partial x_n} \end{bmatrix}$ – tuzilgan $U(x)$ funksiyaning gradiyenti belgilashini kiritib, OM_0M_1, OM_1M_2, … vektorli uchburchaklardan quyidagini yozamiz (xususiy holda 3.10-rasmga qarang):

$$x^{(p+1)}=x^{(p)}-\lambda_p\nabla U\left(x^{(p)}\right),\ \ (p=0,1,2,\cdots).$$

Endi λ_p ko‘paytuvchin aniqlash qoldi. Buning uchun quyidagi skalyar funksiyani qaraymiz:

$$\Phi(\lambda)=U\left[x^{(p)}-\lambda_p\nabla U\left(x^{p}\right)\right].$$

Bu $\Phi(\lambda)$ funksiya U funksiya sathining $x^{(p)}$ nuqtadagi sath sirtiga o‘tkazilgan normalga mos keluvchi o‘zgarishini beradi. $\lambda=\lambda_p$ ko‘paytuvchini shunday tanlash lozimki, $\Phi(\lambda)$ funksiya minimumga erishsin. Bu funksiyadan λ bo‘yicha hosila olib, uni nolga tenglashtiramiz. Unda quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\Phi'(\lambda)=\frac{d}{d\lambda}U\left[x^{(p)}-\lambda_p\nabla U\left(x^{(p)}\right)\right]=0. \qquad (3.40)$$

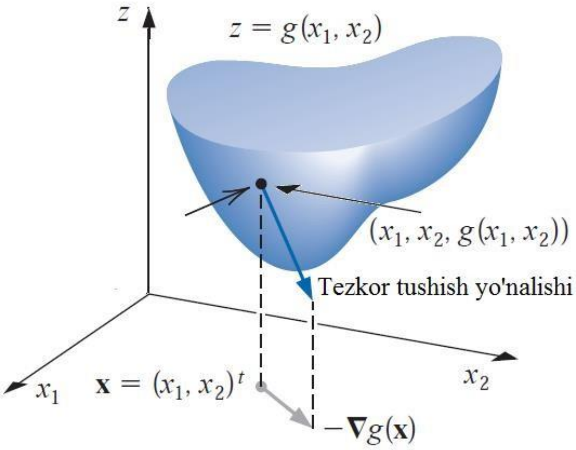
(3.40) tenglamaning eng kichik musbat ildizi bizga λ_p ning qiymatini beradi. Endi λ_p sonni taqribiy topish usulini qarab chiqaylik. Faraz qilamizki, λ – kichik parametr bo‘lib, uning kvadrati va undan yuqori darajalarini e’tiborga olmaslik mumkin. U holda quyidagiga kelamiz:

$$\Phi(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\left\{f_i\left[x^{(p)}-\lambda\nabla U\left(x^{(p)}\right)\right]\right\}^2 .$$

f_i funksiyani λ ning chiziqli hadlarigacha aniqlikdagi darajalariga yoyib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\Phi(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\left[f_i\left(x^{(p)}-\lambda\frac{\partial f_i\left(x^{(p)}\right)}{\partial x}\nabla U\left(x^{(p)}\right)\right)\right]^2,$$

bu yerda $\dfrac{\partial f_i}{\partial x}=\left[\dfrac{\partial f_i}{\partial x_1},\dfrac{\partial f_i}{\partial x_2},\ \dots,\ \dfrac{\partial f_i}{\partial x_n}\right].$



3.10-rasm. Ikki o‘zgaruvchili funksiya holida gradiyentlar usulining geometrik talqini.

Bulardan

$$\Phi'(\lambda)=-2\sum_{i=1}^{n}\left[f_i\left(x^{p}\right)-\lambda\frac{\partial f_i\left(x^{(p)}\right)}{\partial x}\nabla U\left(x^{(p)}\right)\right]\times\frac{\partial f_i\left(x^{(p)}\right)}{\partial x}\nabla U\left(x^{(p)}\right)=0 .$$

Natijada,

$$\lambda_p=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\left(x^{(p)}\right)\frac{\partial f_i\left(x^{(p)}\right)}{\partial x}\nabla U\left(x^{(p)}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f_i\left(x^{(p)}\right)}{\partial x}\nabla U\left(x^{(p)}\right)\right]^2}=\frac{\left(f\left(x^{(p)}\right),\ W\left(x^{(p)}\right)\nabla U\left(x^{(p)}\right)\right)}{\left(W\left(x^{(p)}\right)\nabla U\left(x^{(p)}\right),\ W\left(x^{(p)}\right)\nabla U\left(x^{(p)}\right)\right)},$$

bu yerda $W(x)=\partial f_i/\partial x$ – vektor-funksiya f ning Yakob matritsasi.

Yuqoridagilardan quyidagi tenglikka kelamiz:

$$\frac{\partial U}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[f_i(x)\right]^2\right\}=2\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} .$$

Bu yerdan esa

$$U(x)=2\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_1}f_i(x)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_n}f_i(x)\end{bmatrix}=2W'(x)\,f(x),$$

bu yerda $W'(x)$ transponirlangan Yakob matritsasi.

Shularga ko‘ra quyidagi natijaga kelamiz:

$$\mu_p = 2\lambda_p = \frac{\left(f^{p}, W_p W_p' f^{(p)}\right)}{\left(W_p W_p' f^{(p)},\ W_p W_p' f^{(p)}\right)}, \quad (3.41)$$

bu yerda soddalik uchun quyidagicha yozuv qabul qilingan:

$$f^{(p)} = f\left(x^{(p)}\right);\ \ W_p = W\left(x^{(p)}\right),$$

bularga ko‘ra

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} - \mu_p W_p' f^{(p)}\ ,$$

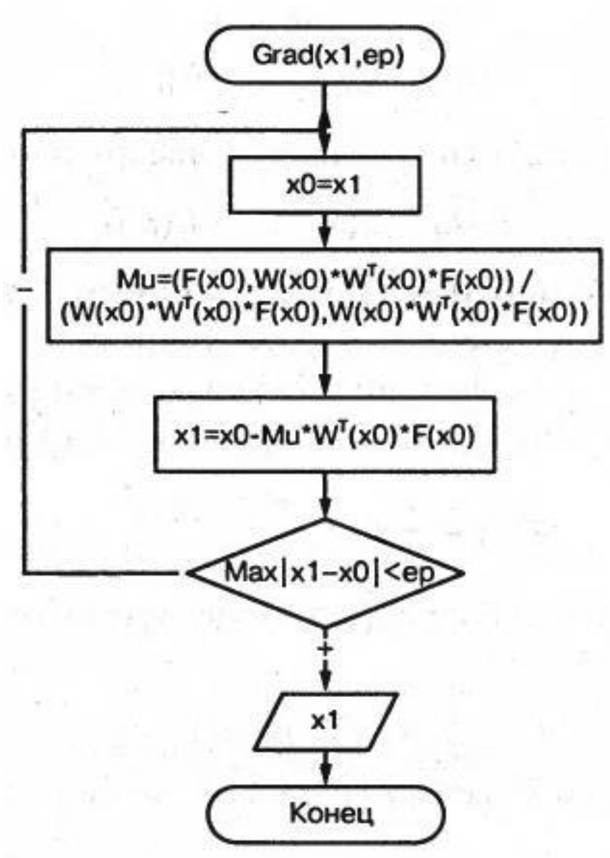
$$(p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (3.42)$$

Gradiyent usuli algoritmining blok-sxemasi 3.11-rasmda tasvirlangan.

1-misol. Tezkor tushish usili (gradiyent usuli) yordamida ushbu

$$\left.\begin{aligned} x + x^2 - 2yz &= 0{,}1; \\ y - y^2 + 3xz &= -0{,}2; \\ z + z^2 + 2xy &= 0{,}3. \end{aligned}\right\}$$

tenglamalar sistemaning koordinata boshi atrofida yotgan ildizlarini taqribiy hisoblang.



3.11-rasm. Gradiyent usuli algoritmining blok-sxemasi.

Yechish Berilganlarga ko‘ra

$$f = \begin{bmatrix} x + x^2 - 2yz - 0{,}1 \\ y - y^2 + 3xz + 0{,}2 \\ z + z^2 + 2xy - 0{,}3 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 1 + 2x & -2z & -2y \\ 3z & 1 - 2y & 3x \\ 2y & 2x & 1 + 2z \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(3.41) va (3.42) formulalar bo‘yicha quyidagi birinchi yaqinlashishni olamiz:

$$\mu_0 = \frac{\left(f^{(0)}, f^{(0)}\right)}{\left(f^{(0)},\ f^{(0)}\right)} = 1, \quad x^{(1)} = x^{(0)} - 1 \cdot E f^{(0)} = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ -0{,}2 \\ 0{,}3 \end{bmatrix}.$$

Xuddi shunday $x^{(2)}$ - ikkinchi yaqinlashishni aniqlaymiz. Bu yerdan:

$$f^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}13 \\ 0{,}05 \\ 0{,}05 \end{bmatrix}, \quad W_1 = \begin{bmatrix} 1{,}2 & -0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}9 & 1{,}4 & 0{,}3 \\ -0{,}4 & 0{,}2 & 1{,}6 \end{bmatrix}, \quad W_1' f^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}181 \\ 0{,}002 \\ 0{,}147 \end{bmatrix}.$$

$$W_1 W_1' f^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}181 \\ 0{,}002 \\ 0{,}147 \end{bmatrix}, \quad \mu_1 = \frac{0{,}13 \cdot 0{,}2748 + 0{,}05 \cdot 0{,}2098 + 0{,}05 \cdot 0{,}1632}{0{,}2748^2 + 0{,}2098^2 + 0{,}1632^2} = 0{,}3719.$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ -0{,}2 \\ 0{,}3 \end{bmatrix} - 0{,}37119 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}181 \\ 0{,}002 \\ 0{,}147 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0327 \\ -0{,}2007 \\ 0{,}2453 \end{bmatrix}.$$

Natijaning qanchalik to‘g‘ri va aniq ekanligini tekshirish uchun tafovut hisoblanadi.

Namunaviy misollar va ularning yechimlari

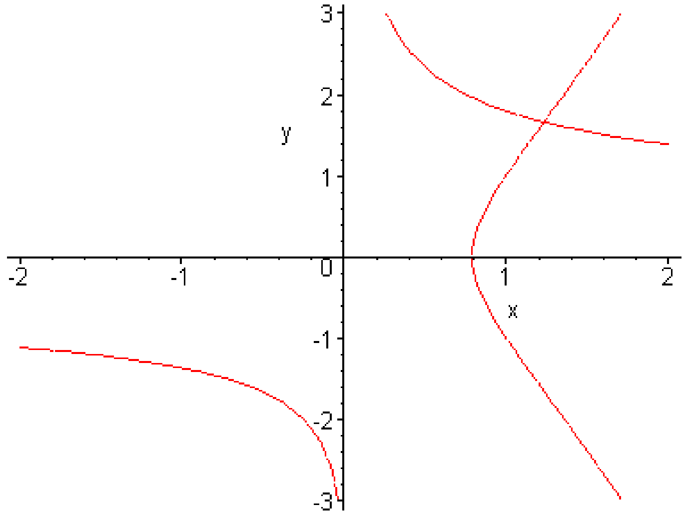
Nochiziqli tenglamalar sistemasini Maple dasturi yordamida taqribiy yechish.

1-misol. Quyidagi nochiziqli tenglamalar sistemaning yechimini ε = 0,001 aniqlik bilan Nyuton usulida taqribiy hisoblang:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,y) &= 2x^3 - y^2 - 1 = 0; \\ f_2(x,y) &= xy^3 - y - 4 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Yechish. Ushbu misolda berilgan tenglamalar sistemasi bitta musbat haqiqiy yechimga ega ekanligini quyidagi Maple dasturi **plots** paketining **implication** funksiyasidan foydalanib $f_1(x, y) = 0$ va $f_2(x, y) = 0$ funksiyalarning chizilgan grafiklaridan ko‘rish mumkin (3.12-rasm):

```
> plots[implicitplot]({2*x^3-y^2-1=0,x*y^3-y-4=0},x=-2..2,y=-3..3);
```



3.12-rasm. 1-misolda berilgan nochiziqli tenglamalar sistemasi ildizining boshlang‘ich yaqinlashishni grafik usul bilan Maple dasturi yordamida aniqlash.

Bu usulga ko‘ra dastlabki yaqinlashish $x_0 = 1{,}2$; $y_0 = 1{,}7$ kabi bo‘lsin. U holda

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} 6x_0^2 & -2y_0 \\ y_0^3 & 3x_0y_0^2 - 1 \end{vmatrix} \quad \text{yoki}$$

$$\Delta(1{,}2;\, 1{,}7) = \begin{vmatrix} 8{,}64 & -3{,}40 \\ 4{,}91 & 9{,}40 \end{vmatrix} = 97{,}910 \,.$$

(12) formulaga ko‘ra

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1{,}2 - \frac{1}{97{,}91}\begin{vmatrix} -0{,}434 & -3{,}40 \\ 0{,}1956 & 9{,}40 \end{vmatrix} = 1{,}2 + 0{,}0349 = 1{,}2349; \\ y_1 &= 1{,}7 - \frac{1}{97{,}91}\begin{vmatrix} 8{,}64 & -0{,}434 \\ 4{,}91 & 0{,}1956 \end{vmatrix} = 1{,}7 - 0{,}0390 = 1{,}6610. \end{aligned}\right\}$$

Hisoblashlarni shu singari davom ettirib, $x_2 = 1{,}2343$ $y_2 = 1{,}6615$ ni topamiz va hisoblashlarni talab qilingan aniqlikkacha davom ettiramiz.

Berilgan tenglamalar sistemasining mavjud bitta haqiqiy yechimini Maple dasturi yordamida ham analitik usulda aniqlaylik:

```
> solve({2*x^3-y^2-1=0,x*y^3-y-4=0},{x,y});  allvalues(%);   evalf(%);
```

$$\{x = 1.234274484,\ y = 1.661526467\}$$

Natijalardan ko‘rinadiki, topilgan $x_2 = 1{,}2343$ $y_2 = 1{,}6615$ - taqribiy yechimni yetarlicha ε aniqlikda topilgan deb hisoblash mumkin.

Endu bu masalani Maple tizimida sonli yechishni qaraymiz. Avvalo Yakob matritsasini **linalg** paketining **jacobian** funksiyasi yordamida hisoblaymiz, keyin esa uning teskarisini **linalg** paketining **inverse** funksiyasidan foydalanib hisoblaymiz. **eval** funksiyasi ifodaning son qiymatini beradi. **evalm** funksiyasi esa matritsa va vektorlar ustida amal bajarib, son natija beradi. Boshlang‘ich vektorni **xx** va **eps** aniqlik darajasi deb, Nyuton usuli bo‘yicha taqribiy hisoblashlarni bajaramiz:

```
> with(linalg):
F:=(x,y)->[2*x^3-y^2-1,x*y^3-y-4];
FP:=jacobian(F(x,y),[x,y]); FPINV:=inverse(FP);
 xx:=[1.2,1.7]; eps:=0.0001; Err:=1000; v:=xx; v1:=[1e10,1e10];
j:=0:
for i while Err>eps do
   v1:=eval(v);
   M:=eval(eval(FPINV),[x=v[1],y=v[2]]):
   v:=evalm(v-M&*F(v[1],v[2]));
Err:=max(abs(v1[1]-v[1]),abs(v1[2]-v[2]));
j:=j+1;
end do;
```

Hisob natijasi quyidagicha:

$$F := (x, y) \rightarrow [2\,x^3 - y^2 - 1,\ x\,y^3 - y - 4]$$

$$FP := \begin{bmatrix} 6\,x^2 & -2\,y \\ y^3 & 3\,x\,y^2 - 1 \end{bmatrix}$$

$$FPINV := \begin{bmatrix} \dfrac{3\,x\,y^2 - 1}{2\,(9\,x^3\,y^2 - 3\,x^2 + y^4)} & \dfrac{y}{9\,x^3\,y^2 - 3\,x^2 + y^4} \\ -\dfrac{y^3}{2\,(9\,x^3\,y^2 - 3\,x^2 + y^4)} & \dfrac{3\,x^2}{9\,x^3\,y^2 - 3\,x^2 + y^4} \end{bmatrix}$$

$xx := [1.2,\ 1.7]$

$eps := 0.0001$

$Err := 1000$

$v := [1.2,\ 1.7]$

$v1 := [0.1\ 10^{11},\ 0.1\ 10^{11}]$

$v1 := [1.2,\ 1.7]$

$$M := \begin{bmatrix} 0.09600350200 & 0.03470990077 \\ -0.05015580660 & 0.08820398313 \end{bmatrix}$$

$v := [1.234876263,\ 1.660979681]$

$Err := 0.039020319$

$j := 1$

$v1 := [1.234876263,\ 1.660979681]$

$$M := \begin{bmatrix} 0.09258867450 & 0.03335772210 \\ -0.04601453420 & 0.09187560387 \end{bmatrix}$$

$v := [1.234274675,\ 1.661526276]$

$Err := 0.000601588$

$j := 2$

$v1 := [1.234274675,\ 1.661526276]$

$$M := \begin{bmatrix} 0.09264916080 & 0.03338417877 \\ -0.04608134315 & 0.09182868696 \end{bmatrix}$$

$v := [1.234274484,\ 1.661526467]$

$Err := 0.191\ 10^{-6}$

$j := 3$

Natija shuni ko‘rsatadiki, hisob jarayonining 3-qadamida berilgan aniqlikdagi yechimga erishildi.

2-misol. Quyidagi nochiziqli tenglamalar sistemasining musbat yechimini ε = 0,001 aniqlik bilan Nyuton usulida taqribiy hisoblang:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y) &= 0{,}1x^2 + x + 0{,}2y^2 - 0{,}3 = 0; \\ f_2(x, y) &= 0{,}2x^2 + y - 0{,}1xy - 0{,}7 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Yechish. Boshlang‘ich yaqinlashishni tanlab olish uchun grafik usuldan, Maple dasturi **plots** paketining **implication** funksiyasidan foydalanib, (x,y) tekislikning bizni qiziqtiradigan sohasida $f_1(x,y)=0$ va $f_2(x,y)=0$ egri chiziqlarning grafiklarini chizamiz (3.13-rasm):

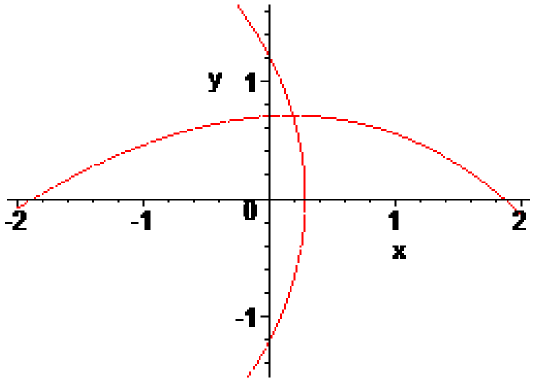
```
> plots[implicitplot]({0.1*x^2+x+0.2*y^2-0.3=0,0.2*x^2+y-0.1*x*y-0.7=0},x=-2..2,y=-2..2);
```

Bundan berilgan tenglamalar sistemasining biz izlayotgan musbat yechimi $0<x<0{,}5$; $0<y<1{,}0$ kvadrat ichida ekanligini ko‘ramiz.

Boshlang‘ich yaqinlashishni $x_0=0{,}25$; $y_0=0{,}75$ deb qabul qilamiz. U holda qaralayotgan misol uchun quyidagilarni yozamiz:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_0,y_0)&=0{,}1x_0^2+x_0+0{,}2y_0^2-0{,}3=0;\\ f_2(x_0,y_0)&=0{,}2x_0^2+y_0-0{,}1x_0y_0-0{,}7=0,\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial x}=0{,}2x_0+1;\quad \frac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial y}=0{,}4y_0;$$



3.13-rasm. 2-misolda berilgan tenglamalar sistemasi ildizining boshlang‘ich yaqinlashishini grafik usul bilan aniqlash.

$$\frac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial x}=0{,}4x_0-0{,}1y_0;\quad \frac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial y}=1-0{,}1x_0.$$

Tanlangan $X_0=(x_0,y_0)$ larni (3.12) ning o‘ng tarafiga qo‘yib, dastlab taqribiy $X_1=(x_1,y_1)$ ni topamiz:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=0{,}25-\frac{0{,}05391}{0{,}97969}=0{,}19498;\\ y_1&=0{,}75-\frac{0{,}04258}{0{,}97969}=0{,}70654,\end{aligned}\right\}$$

o‘z navbatida esa $X_2=(x_2,y_2)$ = (0,19646, 0,70615) ni va $X_3=(x_3,y_3)$ = (0,19641, 0,70615) ni topamiz va hokazo. Iteratsiya jarayonini (3.13) shart bajarilgunga qadar davom ettiramiz. Bu hisoblashlar berilgan sistemaning yechimi (x,y) = (0,1964; 0,7062) ekanligini ko‘rsatadi.

Bu topilgan yechimning qanchalik to‘g‘riligini Maple dasturi yordamida aniqlashtiramiz:

```
> solve({0.1*x^2+x+0.2*y^2-0.3=0,0.2*x^2+y-0.1*x*y-0.7=0},{x,y});
```

$$\{x=.1964115055,\ y=.7061541848\}$$

Endi Nyuton usuli bilan misolning taqribiy yechimini topamiz:

```
> with(linalg):
F:=(x,y)->[0.1*x^2+x+0.2*y^2-0.3,0.2*x^2+y-0.1*x*y-0.7];
FP:=jacobian(F(x,y),[x,y]); FPINV:=inverse(FP);
```

```
xx:=[0.25,0.75]; eps:=0.0001; Err:=1000; v:=xx; v1:=[1e10,1e10];  j:=0:
for i while Err>eps do
   v1:=eval(v);     M:=eval(eval(FPINV),[x=v[1],y=v[2]]):
   v:=evalm(v-M&*F(v[1],v[2])); Err:=max(abs(v1[1]-v[1]),abs(v1[2]-v[2])); j:=j+1;
 end do;
```

$$F := (x, y) \to [0.1\ x^2 + x + 0.2\ y^2 - 0.3,\ 0.2\ x^2 + y - 0.1\ x\ y - 0.7\ ]$$

$FP := \begin{bmatrix} 0.2\,x + 1 & 0.4\,y \\ 0.4\,x - 0.1\,y & 1 - 0.1\,x \end{bmatrix}$

$xx := [0.25, 0.75]$

$eps := 0.0001$

$Err := 1000$

$v := [0.25, 0.75]$

$v1 := [0.1\ 10^{11}, 0.1\ 10^{11}]$

$v1 := [0.25, 0.75]$

$M := \begin{bmatrix} 0.9594095941 & -0.2952029520 \\ -0.02460024600 & 1.033210332 \end{bmatrix}$

$v := [0.1969557196, 0.7064883149]$

$Err := 0.0530442804$

$j := 1$

$v1 := [0.1969557196, 0.7064883149]$

$M := \begin{bmatrix} 0.9642769266 & -0.2779750296 \\ -0.008000478288 & 1.022397604 \end{bmatrix}$

$v := [0.1964115443, 0.7061542263]$

$Err := 0.0005441753$

$j := 2$

$v1 := [0.1964115443, 0.7061542263]$

$M := \begin{bmatrix} 0.9643276107 & -0.2778427597 \\ -0.007819206552 & 1.022287533 \end{bmatrix}$

$v := [0.1964115055, 0.7061541848]$

$Err := 0.415\ 10^{-7}$

$j := 3$

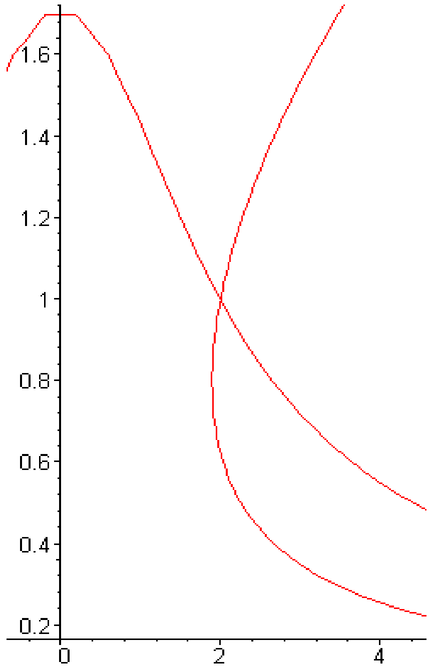
3-Misol. Faraz qilaylik, ushbu

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y) = xy - y^3 - 1 = 0; \\ f_2(x,y) = x^2y^2 + y^3 - 5 = 0 \end{array}\right\}$$

nochiqli tenglamalar sistemasining aniq yechimi (x,y)=(2;1) bo‘lib, uni dastlab analitik usulda Maple dasturi yordamida, keyin esa uning taqribiy yechimini Nyuton usulida topaylik.

Yechish. Dastlab berilgan nochiqli tenglamalar sistemasining yechimi mavjudligini Maple dasturi yordamida grafik usulda aniqlaylik (3.14-rasm):

```
> plots[implicitplot]({x*y-y^3-1=0,x^2*y^2+y^3-5=0},x=-5..5,y=0..2);
```



3.14-rasm. 3-misolda berilgan tenglamalar sistemasi ildizining boshlang‘ich yaqinlashishini grafik usul bilan aniqlash.

Berilgan nochiqli tenglamalar sistemasining aniq yechimi analitik usulda Maple dasturi yordamida quyidagicha topiladi:

```
> solve({x*y-y^3-1=0,x^2*y^2+y^3-5=0},{x,y});
```

$$\{x = 2, y = 1\}$$

Shu yechimni Nyuton usuli yordamida Maple dasturida taqribiy hisoblaymiz:

Avvalo Yakob matritsasini **linalg** paketining **jacobian** funksiyasi yordamida hisoblaymiz, keyin esa uning teskarisini **linalg** paketining **inverse** funksiyasidan foydalanib hisoblaymiz. **eval** funksiyasi ifodaning son qiymatini beradi. **evalm** funksiyasi esa matritsa va vektorlar ustida amal bajarib, son natija beradi. Boshlang‘ich vektorni **xx:=[0.5;1.5]** va **eps:=0.001** aniqlik darajasi deb, Nyuton usuli bo‘yicha taqribiy hisoblashlarni bajaramiz:

```
> with(linalg):
 F:=(x,y)->[x*y-y^3-1,x^2*y^2+y^3-5];
FP:=jacobian(F(x,y),[x,y]); FPINV:=inverse(FP);
 xx:=[0.5,1.5]; eps:=0.001; Err:=1000; v:=xx; v1:=[1e10,1e10];  j:=0;
for i while Err>eps do
   v1:=eval(v);     M:=eval(eval(FPINV),[x=v[1],y=v[2]]):
   v:=evalm(v-M&*F(v[1],v[2])); Err:=max(abs(v1[1]-v[1]),abs(v1[2]-v[2]));
    j:=j+1;
 end do;
```

Natijalar quyidagicha:

$F := (x, y) \to [x\,y - y^3 - 1,\ x^2\,y^2 + y^3 - 5]$

$FP := \begin{bmatrix} y & x - 3\,y^2 \\ 2\,x\,y^2 & 2\,x^2\,y + 3\,y^2 \end{bmatrix}$

$FPINV := \begin{bmatrix} \dfrac{2\,x^2 + 3\,y}{3\,y^2\,(1 + 2\,x\,y)} & -\dfrac{x - 3\,y^2}{3\,y^3\,(1 + 2\,x\,y)} \\ -\dfrac{2\,x}{3\,y\,(1 + 2\,x\,y)} & \dfrac{1}{3\,y^2\,(1 + 2\,x\,y)} \end{bmatrix}$

$xx := [0.5, 1.5]$

$eps := 0.001$

$Err := 1000$

$v := [0.5, 1.5]$

$v1 := [0.1\ 10^{11}, 0.1\ 10^{11}]$

$j := 0$

$v1 := [0.5, 1.5]$

$M := \begin{bmatrix} 0.2962962963 & 0.2469135803 \\ -0.08888888887 & 0.05925925927 \end{bmatrix}$

$v := [1.836419753, 1.240740741]$

$Err := 1.336419753$

$j := 1$

$v1 := [1.836419753, 1.240740741]$

$M := \begin{bmatrix} 0.4078488757 & 0.08736397583 \\ -0.1775644435 & 0.03896485017 \end{bmatrix}$

$v := [1.910372475, 1.046712441]$

$Err := 0.194028300$

$j := 2$

$v1 := [1.910372475, 1.046712441]$

$M := \begin{bmatrix} 0.6353135777 & 0.08003024373 \\ -0.2433868149 & 0.06085855173 \end{bmatrix}$

$v := [1.992251965, 1.002053670]$

$Err := 0.081879490$

$j := 3$

$v1 := [1.992251965, 1.002053670]$

$M := \begin{bmatrix} 0.7276965560 & 0.06768724860 \\ -0.2654774883 & 0.06649093770 \end{bmatrix}$

$v := [1.999976663, 1.000005095]$

$Err := 0.007724698$

$j := 4$

$v1 := [1.999976663, 1.000005095]$

$M := \begin{bmatrix} 0.7333182897 & 0.06666959200 \\ -0.2666635987 & 0.06666633793 \end{bmatrix}$

$v := [2.000000000, 1.000000000]$

$Err := 0.000023337$

$j := 5$

Iteratsion jarayonning 5-qadamida berilgan aniqlikdagi yechimga erishildi.

4-Misol. Quyidagi uch noma’lumli uchta nochiziqli tenglamalar sustemasini Nyuton usuli bilan yeching:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,y) &= 0.1 - x^2 + 2yz - x = 0; \\ f_2(x,y) &= -0.2 + y^2 - 3xz - y = 0, \\ f_3(x,y) &= 0.3 - z^2 - 2xy - z = 0. \end{aligned}\right\}$$

Yechish. Misolni Maple dasturida yechamiz. Yakob matritsasini tuzamiz:

```
>restart; with(LinearAlgebra):
f1:=0.1-x0^2+2*y0*z0-x0;
```

$f1 := 0.1 - x0^2 + 2\,y0\,z0 - x0$

```
f2:=-0.2+y0^2-3*x0*z0-y0;
```

$f2 := -0.2 + y0^2 - 3\,x0\,z0 - y0$

```
f3:=0.3-z0^2-2*x0*y0-z0;
```

$f3 := 0.3 - z0^2 - 2\,x0\,y0 - z0$

```
f1x:=diff(f1,x0); f1y:=diff(f1,y0);
f1z:=diff(f1,z0); f2x:=diff(f2,x0);
f2y:=diff(f2,y0);  f2z:=diff(f2,z0);
f3x:=diff(f3,x0); f3y:=diff(f3,y0);
f3z:=diff(f3,z0);
A:=<<f1x|f1y|f1z>,
<f2x|f2y|f2z>, <f3x|f3y|f3z>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} -2\,x0 - 1 & 2\,z0 & 2\,y0 \\ -3\,z0 & 2\,y0 - 1 & -3\,x0 \\ -2\,y0 & -2\,x0 & -2\,z0 - 1 \end{bmatrix}$$

```
# Ildizga yaqin bo'lgan
boshlang'ich yaqinlashishni
tanlaymiz:
x0:=0: y0:=0: z0:=0:
A:=A;
```

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

```
A1:=A^(-1);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

```
f:=<f1,f2,f3>;
```

$$f := \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

```
X0:=<x0,y0,z0>:
X:=Add(X0,(Multiply(A1,f)),1,-1);
```

$$X := \begin{bmatrix} 0.1000000000000000004 \\ -0.20000000000000001\;0 \\ 0.2999999999999999988 \end{bmatrix}$$

```
X0:=X; x0:=X[1];y0:=X[2];z0:=X[3];
A:=<<f1x|f1y|f1z>,<f2x|f2y|f2z>,<f3x|f3y|f3z>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} -1.200000000 & 0.6000000000 & -0.4000000000 \\ -0.9000000000 & -1.400000000 & -0.3000000000 \\ 0.4000000000 & -0.2000000000 & -1.600000000 \end{bmatrix}$$

```
A1:=A^(-1); f:=<f1,f2,f3>;
```

$$f := \begin{bmatrix} -0.1300000000 \\ -0.0500000000 \\ -0.0500000000 \end{bmatrix}$$

```
X:=Add(X0,(Multiply(A1,f)),1,-1);
```

$$X := \begin{bmatrix} 0.0224532224532224546 \\ -0.1743243243243243240 \\ 0.246153846153846140 \end{bmatrix}$$

```
i:=2: while (Norm(f))>0.0001 do
X0:=X; x0:=X[1];y0:=X[2];z0:=X[3];
A:=<<f1x|f1y|f1z>,<f2x|f2y|f2z>,<f3x|f3y|f3z>>;
A1:=A^(-1); f:=<f1,f2,f3>;
X:=Add(X0,(Multiply(A1,f)),1,-1);
i:=i+1; end do: X:=X;
# Natija:
```

$$X := \begin{bmatrix} 0.0128241509376391898 \\ -0.177800663726073254 \\ 0.244688047122264718 \end{bmatrix}$$

Sistemaning barcha haqiqiy yechimlarini topaylik:

> $solve(\{0.1\text{-}x^2+2\cdot x\cdot y\text{-}x=0,\text{-}0.2+y^2\text{-}3\cdot x\cdot z\text{-}y=0,0{,}3\text{-}z^2\text{-}2\cdot x\cdot y\text{-}z=0\})$;

$x = 0.05788020507, y = 0.01562790359, z = -1.24039915$

$x = 0.1210932974, y = 1.174928066, z = 0.0152166268$

$x = 0.01282414583, y = -0.1778006680, z = 0.244688044$

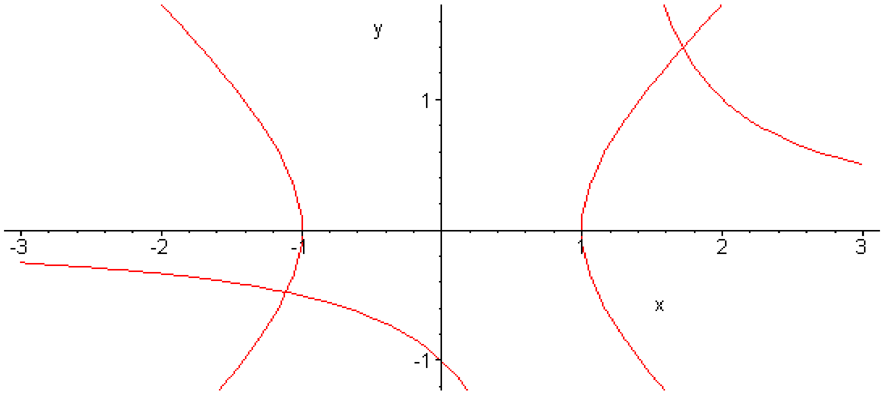
$x = -1.088041227, y = -0.1303245512, z = 0.0161424521$

5-Misol. Quyidagi nochiziqli tenglamalar sistemasini yechishning iteratsion jarayonini quring:

$$\begin{cases} f(x,y) = y(x-1)-1=0, \\ g(x,y) = x^2 - y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Yechish. Dastlab berilgan nochiqli tenglamalar sistemasining yechimi mavjudligini Maple dasturi yordamida grafik usulda aniqlaylik (3.15-rasm):

```
> plots[implicitplot]({y*(x-1)-1=0,x^2-y^2-1=0},x=-3..3,y=-3..3);
```



3.15-rasm. 5-misolda berilgan tenglamalar sistemasi ildizining boshlang‘ich yaqinlashishini grafik usul bilan Maple dasturi yordamida aniqlash.

3.14-rasmdagi grafikdan ko‘rinadiki, bu tenglamalar sistemasi 2 ta haqiqiy yechimga ega.

Berilgan nochiziqli tenglamalar sistemasining 1-chorakdagi aniq yechimi analitik usulda Maple dasturi yordamida quyidagicha topiladi:

```
> evalf(solve({y*(x-1)-1=0,x^2-y^2-1=0},{x,y}));
```

$$\{x = 1.716672747,\ y = 1.395336994\}$$

Birinchi chorakda yotgan yechimni taqribiy usul bilan topish uchun quyidagi iteratsion jarayondan foydalaniladi:

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{y_n}, \qquad y_{n+1} = +\sqrt{x_{n+1}^2 - 1},\ n=0,1,2,\ldots$$

Natijalar esa quyidagi jadvalda keltirilgan:

$n =$	0	1	…	17	18
$x_n =$ $y_n =$	2.0000 1.7321	1.5773 1.2198	…	1.7166 1.3952	1.7167 1.3954

Buning uchun quyidagi baholash o‘rinli:

$$\left. \begin{array}{l} |x - x_{18}| \\ |y - y_{18}| \end{array} \right\} \le 8*10^{-4}.$$

Hisoblashlarning Maple dasturi quyidagicha bo‘lib, yuqoridagi jadval natijalarini tasdiqlaydi:

```
> with(linalg): G:=(x,y)->[1+1/y,sqrt(x^2-1)]; v:=evalf(G(v[1],v[2]));
eps:=0.0001;  Err:=1000;  v:=[2,1.7];    j:=0;
for i while Err>eps do
   v1:=evalf(v):      v:=evalf(G(v[1],v[2]));
Err:=max(abs(v1[1]-v[1]),abs(v1[2]-v[2])):   j:=j+1;  end do;
```

Uchinchi chorakda yotgan yechimni taqribiy usul bilan topish uchun quyidagi iteratsion jarayondan foydalaniladi:

$$x_{n+1} = -\sqrt{y_n^{\,2} + 1}, \qquad y_{n+1} = \frac{1}{x_{n+1} - 1}.$$

Natijalar esa quyidagi jadvalda keltirilgan:

$n =$	0	1	2	3	4
$x_n =$ $y_n =$	-1.1 -0.5	-1.1076 -0.4721	-1.1059 -0.4745	-1.1069 -0.4749	-1.1070 -0.4746

Buning uchun quyidagi baholash o‘rinli:

$$\left.\begin{array}{l} |x - x_3| \\ |y - y_3| \end{array}\right\} \le 2*10^{-4}.$$

Hisoblashlarning Maple dasturi quyidagicha bo‘lib, jadval natijalarini tasdiqlaydi:

```
> with(linalg): G:=(x,y)->[-sqrt(y^2+1),1/(x-1)]; v:=evalf(G(v[1],v[2]));
eps:=0.0001;  Err:=1000; v:=[-1.1,-0.5];  j:=0;
for i while Err>eps do     v1:=evalf(v):      v:=evalf(G(v1[1],v[2]));
Err:=max(abs(v1[1]-v[1]),abs(v1[2]-v[2])):  j:=j+1;   end do;
```

Nochiziqli tenglamalar sistemasini Mathcad dasturi yordamida taqribiy yechish.

Quyida Mathcad hisoblash tizimida tuzilgan 3 ta dasturiy modul keltirilgan bo‘lib, ular ushbu

$$F(x)=0$$

nochiziqli tenglamalar sistemasini taqribiy yechadi. Bu modullarning sarlavhalari quyidagicha:

NSys_Z(x,F,ε) – Zeydel algoritmini amalga oshiruvchi dastur;
NSys_N(x,F,ε) – Nyuton algoritmini amalga oshiruvchi dastur;
NSys_B(x,F,ε) – Broyden algoritmini amalga oshiruvchi dastur,

bu yerda x – boshlang‘ich yaqinlashishning ustun-vektori; F – tenglamalar sistemasi chap qismining vektor funksiyasi nomi; J – Yakob matritsasi nomi; ε – yechimni topishning aniqligi. Bu dasturlardan NSys_B(x,F,ε) dastur Der(x,F,ε) – yordamchi modulga murojaat qiladi, bu Yakob matritsasining x nuqtadagi qiymatini hisoblab beradi.

Dasturlarning ishlash jarayonini ko‘rsatish maqsadida quyidagi misolni keltirilgan modullarda yechish ko‘rsatilgan:

- Nochiziqli tenglamalar sistemasini yechish dasturiga murojaat:

$$F(x) := \begin{bmatrix} x_0 \cdot x_1 - (x_1)^3 - (x_0)^5 + 1 \\ (x_0)^2 \cdot x_1 + x_1 - 2 \end{bmatrix} \qquad J(x) := \begin{bmatrix} x_1 - 5 \cdot (x_0)^4 & x_0 - 3 \cdot (x_1)^2 \\ 2 \cdot x_0 \cdot x_1 & (x_0)^2 + 1 \end{bmatrix}$$

$$x := \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad NSys\_B(x, F, 10^{-4}) = \begin{bmatrix} 1.000001339 \\ 0.999998612 \end{bmatrix} \quad NSys\_N(x, F, J, 10^{-4}) = \begin{bmatrix} 1.000000033 \\ 0.999999964 \end{bmatrix}$$

Nochiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Zeydel usuli dasturi:

```
NSys_Z(x, f, ε) :=
| N ← length(x) − 1
| Imax ← 1000
| I ← 0
| for k ∈ 0 .. Imax
|   | z ← x
|   | for n ∈ 0 .. N
|   |    x_n ← x_n + f(x)_n
|   | I ← I + 1
|   | return x if |x − z| < ε
|   | return I if I > Imax
```

Nochiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Nyuton usuli dasturi:

```
NSys_N(x, f, J, ε) :=
| while 1
|   | Δx ← -lsolve(J(x), f(x))
|   | x ← x + Δx
|   | return x if √(|Δx^T · Δx|) ≤ ε
```

Nochiziqli tenglamalar sistemasini
yechishning Broyden usuli dasturi:

```
Der(x, f, N) :=
  x1 ← x
  x2 ← x
  h ← 0.001
  for i ∈ 0.. N − 1
    for j ∈ 0.. N − 1
      x1_j ← x1_j − h
      x2_j ← x2_j + h
      Q_i,j ← (f(x2)_i − f(x1)_i) / (x2_j − x1_j)
      x1_j ← x_j
      x2_j ← x_j
  Q
```

```
NSys_B(x, f, ε) :=
  N ← length(x)
  A ← Der(x, f, N)
  while 1
    Δx ← -lsolve(A, f(x))
    x1 ← x + Δx
    Δy ← f(x1) − f(x)
    R2 ← (|Δx|)^2
    A ← A + ((Δy − A·Δx)·(Δx)^T) / R2
    x ← x1
    return x if √R2 ≤ ε
```

1-misol. Quyidagi nochiziqli tenglamalar sistemasi berilgan:

$$\begin{cases} tg(x_1 x_2 + 1) = x_2^{\,2} \\ x_1^2 + 0{,}7x_2^2 = 1 \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasini oddiy iteratsiya usulining Zeydel takomillashgan varianti bilan ε = 0.001 va ε = 0.0001 aniqliklarda yechish talab qilinadi.

Yechish. Berilgan sistemani standart shaklda yozib olamiz:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = tg(x_1 x_2 + 1) - x_2^{\,2} = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1^{\,2} + 0{,}7x_2^{\,2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Bu funksiyalarning aniqlanish sohalari:

$$D_{f1} = \{-\infty < x_1 < \infty;\ -\infty < x_2 < \infty\};$$
$$D_{f2} = \{-1 \le x_1 \le 1;\ -1{,}195 \le x_2 \le 1{,}195\};$$

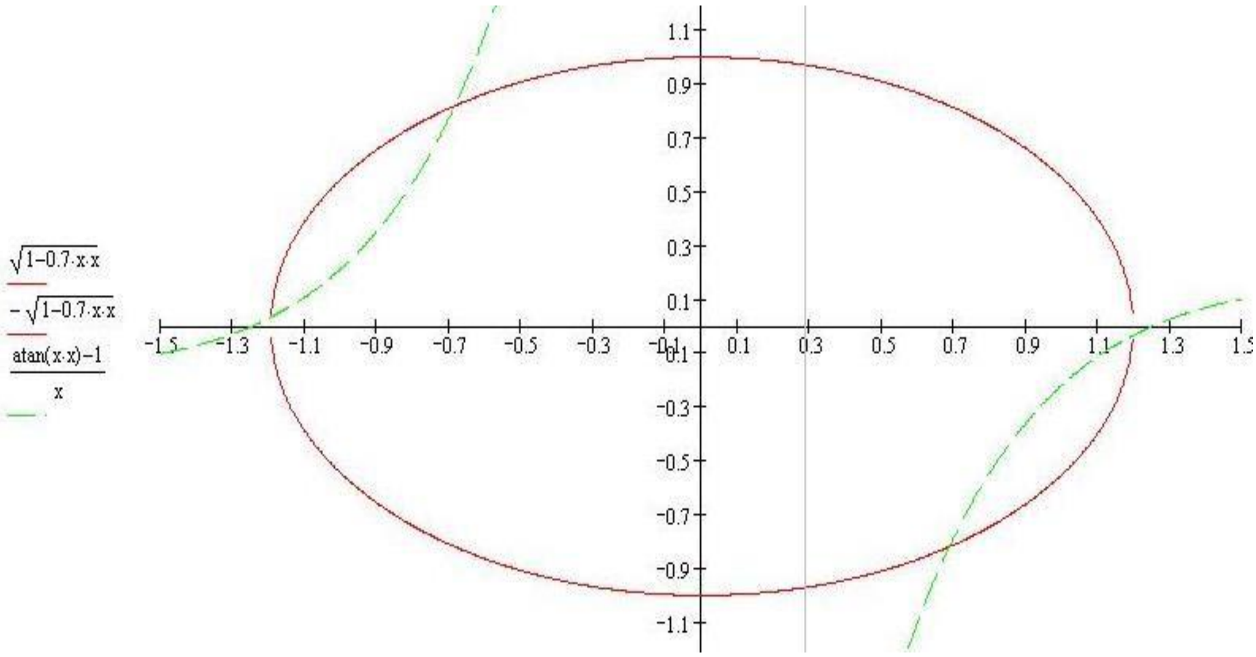
Bu funksiyalarning qiymatlar sohalari:

$$D_o = \{-1 \le x_1 \le 1;\ -1{,}195 \le x_2 \le 1{,}195\};$$

Bu funksiyalarning grafiklarini Mathcad dasturida chizamiz (3.16-rasm). Grafiklardan ko‘rinadiki, misolda berilgan sistema 4 ta haqiqiy yechimga ega:

$D_I = \{0 < x_1 < 0{,}1;\ -1{,}3 < x_2 < -1{,}1\};$

$D_{II} = \{0,7 < x_1 < 0,9;\ 0,6 < x_2 < 0,8\}$;
$D_{III} = \{-0,1 < x_1 < 0;\ 1,1 < x_2 < 1,3\}$;
$D_{IV} = \{-0,9 < x_1 < -0,7;\ 0,6 < x_2 < 0,8\}$;



3.16-rasm. 1-misolda berilgan tenglamalar sistemasi ildizining boshlang‘ich yaqinlashishini grafik usul bilan Mathcad dasturi yordamida aniqlash.

Sistemaning barcha yechimlari uchun iteratsion jarayonning yaqinlashish formulasini chiqaramiz.

I-yechim uchun: $$\begin{cases} x_1 = x_1 + \dfrac{1}{3}(x_1^2 + 0,7\cdot x_2^2 - 1) \\ x_2 = -\sqrt{tg(x_1\cdot x_2 + 1)} \end{cases}$$

Xususiy hosilalarni aniqlaymiz:

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} = -\frac{x_2}{2\sqrt{tg(x_1\cdot x_2 + 1)}};\qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{2\sqrt{tg(x_1\cdot x_2 + 1)}};$$

Birinchi yechim uchun boshlang‘ich yaqinlashishni aniqlanish sohasidan unga yaqin bo‘lgan x_1=0,1; x_2=–1,2 nuqtani olib, yaqinlashish shartini tekshiramiz:

$$\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right| = \left|-\frac{x_2}{2\sqrt{tg(x_1\cdot x_2 + 1)}}\right| + \left|-\frac{x_1}{2\sqrt{tg(x_1\cdot x_2 + 1)}}\right| =$$

$$= \frac{1,2}{2\cdot\sqrt{tg(0,1\cdot(-1,2)+1)}} + \frac{0,1}{2\cdot\sqrt{tg(0,1\cdot(-1,2)+1)}} \approx 0,59 < 1.$$

Ko‘rinadiki, yaqinlashish sharti bajarilayapti. Demak, hosil qilingan ekvivalent sistemadan birinchi yechimni aniqlashtirish uchun foydalanish mumkin.

II yechim uchun: $\begin{cases} x_1 = \sqrt{1-0{,}7\cdot x_2^2)} \\ x_2 = -\sqrt{tg(x_1\cdot x_2+1)} \end{cases}$

Xususiy hosilalarni aniqlaymiz:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}=0; \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}=-\frac{0{,}7\cdot x_2}{\sqrt{1-0{,}7\cdot x_2^2}};$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}=-\frac{x_2}{2\sqrt{tg(x_1\cdot x_2+1)}}; \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}=-\frac{x_1}{2\sqrt{tg(x_1\cdot x_2+1)}}.$$

Ikkinchi yechim uchun boshlang‘ich yaqinlashishni aniqlanish sohasidan unga yaqin bo‘lgan x_1=0,7; x_2=–0,7 nuqtani olib, yaqinlashish shartini tekshiramiz:

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\right| = 0+\left|-\frac{0{,}7\cdot x_2}{\sqrt{1-0{,}7\cdot x_2^2}}\right| = \frac{0{,}7\cdot 0{,}7}{\sqrt{1-0{,}7\cdot(-0{,}7)^2}} \approx 0{,}61<1;$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right| = \left|-\frac{x_2}{2\sqrt{tg(x_1\cdot x_2+1)}}\right|+\left|-\frac{x_1}{2\sqrt{tg(x_1\cdot x_2+1)}}\right| =$$

$$=\frac{0{,}7}{2\cdot\sqrt{tg(0{,}7\cdot(-0{,}7)+1)}}+\frac{0{,}7}{2\cdot\sqrt{tg(0{,}7\cdot(-0{,}7)+1)}} \approx 0{,}94<1.$$

Ko‘rinadiki, yaqinlashish sharti bajarilayapti. Demak, hosil qilingan ekvivalent sistemadan ikkinchi yechimni aniqlashtirish uchun foydalanish mumkin.

III yechim uchun: $\begin{cases} x_1 = x_1 - \frac{1}{3}(x_1^2+0{,}7\cdot x_2^2-1) \\ x_2 = \sqrt{tg(x_1\cdot x_2+1)} \end{cases}$

Xususiy hosilalarni aniqlaymiz:

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}=\frac{x_2}{2\sqrt{tg(x_1\cdot x_2+1)}}; \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}=\frac{x_1}{2\sqrt{tg(x_1\cdot x_2+1)}}.$$

Uchinchi yechim uchun boshlang‘ich yaqinlashishni aniqlanish sohasidan unga yaqin bo‘lgan x_1=–0,1; x_2=1,2 nuqtani olib, yaqinlashish shartini tekshiramiz:

$$\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right| = \left|-\frac{x_2}{2\sqrt{tg(x_1\cdot x_2+1)}}\right|+\left|-\frac{x_1}{2\sqrt{tg(x_1\cdot x_2+1)}}\right| =$$

$$=\frac{1{,}2}{2\cdot\sqrt{tg(0{,}1\cdot(-1{,}2)+1)}}+\frac{0{,}1}{2\cdot\sqrt{tg(0{,}1\cdot(-1{,}2)+1)}} \approx 0{,}59<1.$$

Ko‘rinadiki, yaqinlashish sharti bajarilayapti. Demak, hosil qilingan ekvivalent sistemadan uchinchi yechimni aniqlashtirish uchun foydalanish mumkin.

IV yechim uchun: $\begin{cases} x_1 = x_1 + \dfrac{1}{3}(x_1^2 + 0{,}7 \cdot x_2^2 - 1) \\ x_2 = \sqrt{tg(x_1 \cdot x_2 + 1)} \end{cases}$

Xususiy hosilalarni aniqlaymiz:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = \frac{x_2}{2\sqrt{tg(x_1 \cdot x_2 + 1)}}; \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = \frac{x_1}{2\sqrt{tg(x_1 \cdot x_2 + 1)}}.$$

To‘rtinchi yechim uchun boshlang‘ich yaqinlashishni aniqlanish sohasidan unga yaqin bo‘lgan x_1=–0,7; x_2=0,7 nuqtani olib, yaqinlashish shartini tekshiramiz:

$$\left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right| = \left|-\frac{x_2}{2\sqrt{tg(x_1 \cdot x_2 + 1)}}\right| + \left|-\frac{x_1}{2\sqrt{tg(x_1 \cdot x_2 + 1)}}\right| =$$

$$= \frac{0{,}7}{2 \cdot \sqrt{tg(0{,}7 \cdot (-0{,}7) + 1)}} + \frac{0{,}7}{2 \cdot \sqrt{tg(0{,}7 \cdot (-0{,}7) + 1)}} \approx 0{,}94 < 1.$$

Ko‘rinadiki, yaqinlashish sharti bajarilayapti. Demak, hosil qilingan ekvivalent sistemadan to‘rtinchi yechimni aniqlashtirish uchun foydalanish mumkin. Bu sistemalarning MathCAD dasturi yordamidagi yechimlari quyidagilar:

```
x1 := -0.1        x2 := 1.2
Given
   tan(x1·x2 + 1) = x2·x2
   x1·x1 + 0.7·x2·x2 = 1
Find(x1 ,x2) = ( -0.034 )
               (  1.195 )
```

```
x1 := -0.7        x2 := 0.7
Given
   tan(x1·x2 + 1) = x2·x2
   x1·x1 + 0.7·x2·x2 = 1
Find(x1 ,x2) = ( -0.82  )
               (  0.685 )
```

```
x1 := 0.1         x2 := -1.2
Given
   tan(x1·x2 + 1) = x2·x2
   x1·x1 + 0.7·x2·x2 = 1
Find(x1 ,x2) = (  0.034 )
               ( -1.195 )
```

```
x1 := 0.7         x2 := -0.7
Given
   tan(x1·x2 + 1) = x2·x2
   x1·x1 + 0.7·x2·x2 = 1
Find(x1 ,x2) = (  0.82  )
               ( -0.685 )
```

Bu natijalar shuni ko‘rsatadiki, dastur to‘g‘ri ishlayapti va nochiziqli tenglamalar sistemasining yechimlari to‘g‘ri topilgan. Aniqlikni oshirish bilan iteratsiyalar soni ham oshib boradi. Agar boshlang‘ich yaqinlashish aniq yechimga yaqinroq olinsa yaqinlashish tezligi ortadi va, tabiiyki, iteratsiyalar soni ham kamayadi.

2-misol. Quyidagi tenglamalar sistemasini Mathcad dasturi yordamida yeching:

$$\begin{cases} x^2 - y = 13, \\ x^2 y = 44. \end{cases}$$

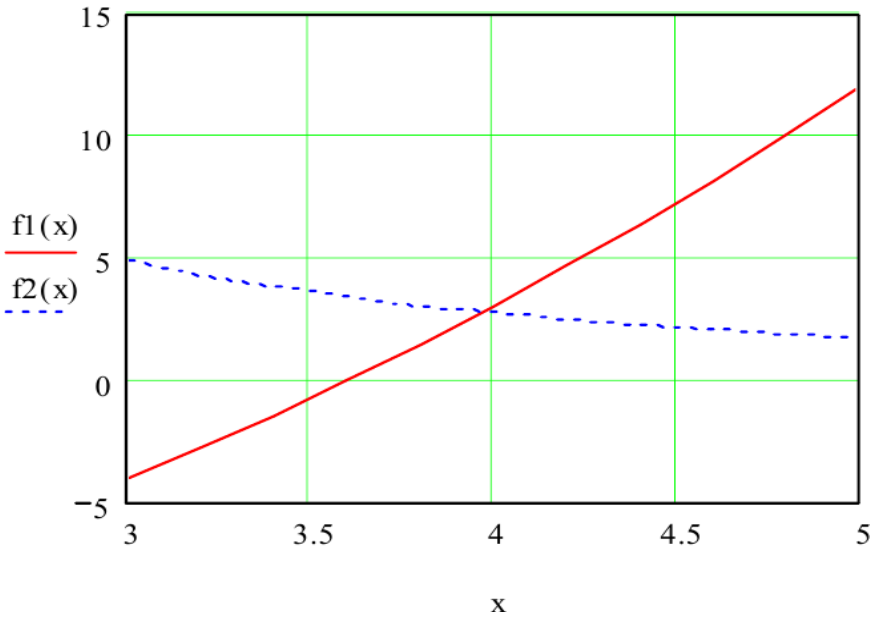
Yechish. Dastur matni quyidagicha:

$x := 1 \qquad\qquad y := 1$

Given

$x^2 - y = 13 \qquad x^2 \cdot y = 44$

$\mathrm{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} 3.973 \\ 2.787 \end{pmatrix} \qquad x := 3, 3.2 .. 5 \qquad f1(x) := x^2 - 13 \qquad f2(x) := \dfrac{44}{x^2}$



3.17-rasm.

Given

$x^2 - y = 13 \qquad x^2 \cdot y = 44$

$f(x, y) := \mathrm{Find}(x, y)$

$f(1, 1) = \begin{pmatrix} 3.973 \\ 2.787 \end{pmatrix} \quad f(-1, 1) = \begin{pmatrix} -3.973 \\ 2.787 \end{pmatrix} \quad f(3, 4) = \begin{pmatrix} 3.973 \\ 2.787 \end{pmatrix} \quad f(i, -1) = \begin{pmatrix} 1.669i \\ -15.787 \end{pmatrix}$

Mashqlar

Amaliyotda mashina va apparatlarning texnologik va mexanik hisoblari, avtomatik boshqaruv tizimlari hisobi, qurilmalarning xos tebranishlari, gomogen kimyoviy reaksiyalarning muvozanatli konsentratsiyasi, matematik jarayonlarda koʻp oʻzgaruvchili funksiyaning ektremumini topish va shu kabi masalalar koʻpincha nochiziqli tenglamalar sistemasini yechishga olib kelinadi. Shuning uchun quyidagi variantlarda ana shunday ba'zi amaliy masalalarning nochiziqli tenglamalari sistemasi keltirilgan va ularni yuqorida tavsiflangan sonli usullardan foydalanib, ushbu topshiriqlar bo'yicha yechish talab etiladi:

1. Grafik usulda tenglamalar sistemaning ildizlarini ajrating va ildizlar uchun boshlang'ich yaqinlashishni tanlang.

2. Tenglamalar sistemasining yechimlarini oddiy iteratsiyalar, Zeydel, Nyuton va Broyden usullari bilan 0,00001 aniqlikda toping, bunda iterasiya funksiyalari $\varphi_i(x)$ (i = 1,2,…) larni tanlashda yaqinlashishning yetarli shartini tekshiring.

3. Yechish usullari natijalarini taqqoslang (aniqlik, iteratsiyalar soni).

4. Barcha hisoblashlarni matematik paketlar (Maple, Mathcad, Matlab, Mathematica) yordamida aniqlashtiring. Olingan natijalarni Pascal, Delphi va C++ dasturlari yoki MS Excel dasturi natijalari bilan ham taqqoslash tavsiya etiladi.

№	Sistema	№	Sistema
1.	$\begin{cases} x^2+y^2-4=0, \\ x-y^2-1=0. \end{cases}$	**2.**	$\begin{cases} x^2+y^2-1=0, \\ x^3-y=0. \end{cases}$
3.	$\begin{cases} (x^2+y^2)^2-4(x^2-y^2)=0, \\ x^2+y^2-1=0. \end{cases}$	**4.**	$\begin{cases} x+y+xy-7=0, \\ x^2+y^2+xy-13=0. \end{cases}$
5.	$\begin{cases} 3x^2+5xy-2y^2-20=0, \\ x^2+xy+y^2-7=0. \end{cases}$	**6.**	$\begin{cases} 2x^2+xy-y^2-20=0, \\ x^2-4xy+7y^2-13=0. \end{cases}$
7.	$\begin{cases} x^2-y^2+3y=0, \\ x^2+3xy+2y^2+2x+4y=0. \end{cases}$	**8.**	$\begin{cases} (x+y)(x^2-y^2)-16=0, \\ (x-y)(x^2+y^2)-40=0. \end{cases}$
9.	$\begin{cases} (x+y)(x+2y)(x+3y)-60=0, \\ (x+y)(2x+y)(3x+y)-105=0. \end{cases}$	**10.**	$\begin{cases} x^4+6x^2y^2+y^4-136=0, \\ x^3y+xy^3-30=0. \end{cases}$
11.	$\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0, \\ 3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0. \end{cases}$	**12.**	$\begin{cases} x^3+y^3-19=0, \\ (xy+8)(x+y)-2=0. \end{cases}$
13.	$\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0, \\ 2x^2-4x+3+y^3=0. \end{cases}$	**14.**	$\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3-17=0, \\ x+xy+y-5=0. \end{cases}$
15.	$\begin{cases} (x^2+y^2)(x+y)-15xy=0, \\ (x^4+y^4)(x^2+y^2)-85x^2y^2=0. \end{cases}$	**16.**	$\begin{cases} \sqrt{-1-x}-\sqrt{2y-x}-1=0, \\ \sqrt{1-2y}+\sqrt{2y-x}-4=0. \end{cases}$
17.	$\begin{cases} tg(xy)=x^2, \\ 0{,}8x^2+2y^2=1. \end{cases}$	**18.**	$\begin{cases} \sin(x-y)-xy=-1, \\ x^2-y^2=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

19.	$\begin{cases} x+tg(xy)=0, \\ (y^2-7{,}5)^2+\ln x=0. \end{cases}$	**20.**	$\begin{cases} 0{,}6x^2+2y^2=1, \\ \cos(y-1)+x=0{,}5. \end{cases}$
21.	$\begin{cases} \sin x-\sin 2y=0, \\ \cos x-\sin y=0. \end{cases}$	**22.**	$\begin{cases} \cos x+y=1{,}5, \\ 2x-\sin(y-0{,}5)=1. \end{cases}$
23.	$\begin{cases} 0{,}16x+2y+x^2y=0, \\ \cos y+1{,}1x=0. \end{cases}$	**24.**	$\begin{cases} \cos(y-1)+x-0{,}5=0, \\ y-\cos x-3=0. \end{cases}$
25.	$\begin{cases} y-\sin x-1{,}6x=0, \\ x-\cos 1{,}4y=0. \end{cases}$	**26.**	$\begin{cases} \sin(1{,}1x+y)-x+1{,}4=0, \\ y^2-\dfrac{1}{x}=0. \end{cases}$
27.	$\begin{cases} \cos(x-y)-2\cos(x+y)=0, \\ \cos x\cos y-\dfrac{3}{4}=0. \end{cases}$	**28.**	$\begin{cases} 2^{2x}-3^y+17=0, \\ 2^x+3^{y/2}+1=0. \end{cases}$
29.	$\begin{cases} 10^{-3}e^{40x-1}-y=0, \\ 10^{-3}e^{40y-1}+2x=0. \end{cases}$	**30.**	$\begin{cases} \log_y x-2\log_x y-1=0, \\ x^2+2y^2-3=0. \end{cases}$
31.	$\begin{cases} 12x^2-xy-5x+1=0, \\ x+3\lg x-y^2=0. \end{cases}$	**32.**	$\begin{cases} \log_x y+\log_y x-2{,}5=0, \\ 4\sqrt{x}-3\sqrt{y}-1=0. \end{cases}$
33.	$\begin{cases} \mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}z-3=0, \\ \mathrm{tg}y\,\mathrm{tg}z-6=0, \\ x+y+z-\pi=0. \end{cases}$	**34.**	$\begin{cases} x-2y+3z-9=0, \\ x^2+4y^2+9z^2-189=0, \\ 3xz-4y^2=0. \end{cases}$
35.	$\begin{cases} (x+y)^2-z^2-4=0, \\ (y+z)^2-x^2-2=0, \\ (z+x)^2-y^2-3=0. \end{cases}$	**36.**	$\begin{cases} x/y+y/z+z/x-3=0, \\ y/x+z/y+x/z-3=0, \\ x+y+z-3=0. \end{cases}$
37.	$\begin{cases} x^2+y-37=0, \\ x-y^2-5=0, \\ x+y+z-3=0. \end{cases}$	**38.**	$\begin{cases} x^2+2y^2-y-2z=0, \\ x^2-8y^2+10z=0, \\ x^2-7yz=0. \end{cases}$
39.	$\begin{cases} 15x+y^2-4z-13=0, \\ x^2+10y-z-11=0, \\ y^2-25z+22=0. \end{cases}$	**40.**	$\begin{cases} 10x-2y^2+y-2z-5=0, \\ 8y^2+4z^2-9=0, \\ 8yz+4=0. \end{cases}$

Namuna misol. Ushbu

$$\begin{cases} 15x + y^2 - 4z - 13 = 0; \\ x^2 + 15y - z - 11 = 0; \\ y^2 - 25z + 22 = 0 \end{cases}$$

nochiziqli tenglamalar sistemasining yechimlarini oddiy iteratsiyalar, Zeydel, Nyuton, Broyden usullari bilan 0,00001 aniqlikda toping.

Yechish. Dastlab berilgan sistemani vektor fazoda vektor shakliga keltiramiz:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)) =$$

$$= \left(15x + y^2 - 4z - 13 = 0;\ x^2 + 15y - z - 11 = 0;\ y^2 - 25z + 22 = 0\right)^T.$$

Maple dasturi yordamida ushbu sistemaning haqiqiy yechimini topamiz:

$$> fsolve\left(15 \cdot x + y^2 - 4 \cdot z - 13 = 0,\ x^2 + 15 \cdot y - z - 11 = 0,\ y^2 - 25 \cdot z + 22 = 0\right);$$

$$\{x = 1.072570374, y = 0.7166758509, z = 0.9005449710\}$$

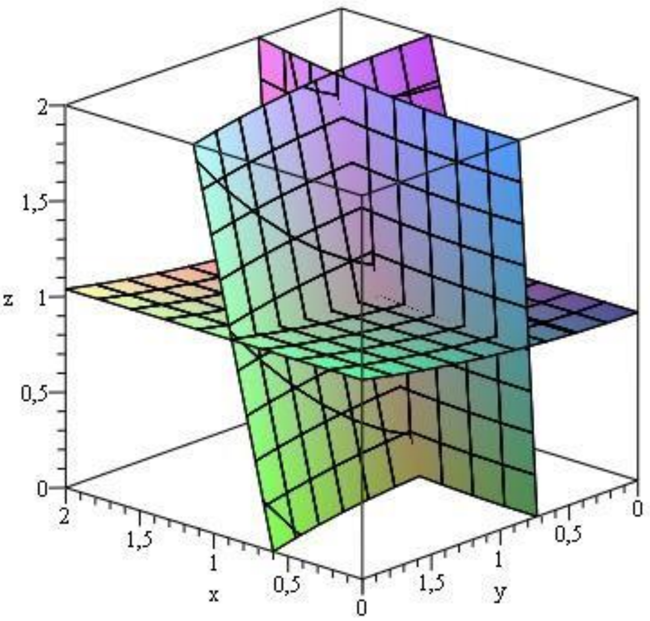
Buni uch o‘lchovli grafikda chizib ham ko‘rish mumkin (3.18-rasm):

$> with(plots):$

$$> implicitplot3d\left(\left\{15 \cdot x + y^2 - 4 \cdot z - 13 = 0,\ x^2 + 15 \cdot y - z - 11 = 0, y^2 - 25 \cdot z + 22 = 0\right\},\right.$$
$$\left. x = 0..2, y = 0..2, z = 0..2\right);$$

Ushbu sistemani oddiy iteratsiyalar, Zeydel, Nyuton, Broyden usullari bilan 0,00001 aniqlikda taqribiy yechamiz.

1) *Oddiy iteratsiyalar usuli*. Usulning g‘oyasiga ko‘ra berilgan **F**(**x**)=0 sistemani **x** = **Φ**(**x**) ko‘rinishga keltiramizki, aniq yechim $D=\{(x,y,z)^T\colon 0\le x,y,z\le 2\}$ sohaga tegishli, boshlang‘ich yaqinlashishni $\mathbf{x}_0 = (1.0,\ 0.8,\ 0.9)^T$ deb olib, yechimni 10^{-5} aniqlikda topish talab etilsin.



3.18-rasm. Uchta sirtning bir nuqtada kesishishini tasvirlovchi grafik.

Sistemaning tenglamalarini ushbu

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x, y, z) = -\dfrac{1}{15}y^2 + \dfrac{4}{15}z + \dfrac{13}{15} = 0; \\ y = \varphi_2(x, y, z) = -\dfrac{1}{15}x^2 + \dfrac{1}{15}z + \dfrac{11}{15}; \\ z = \varphi_3(x, y, z) = \dfrac{1}{25}y^2 + \dfrac{22}{25} \end{cases}$$

ko‘rinishga keltiramiz. Bu yerda aniq yechim $D = \{(x,y,z)^T\colon 0\le x,y,z\le 2\}$ sohaga tegishli. D sohada olingan xususiy hosilalar:

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| = 0; \quad \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| = \left|-\frac{2}{15}y\right| < 0.3; \quad \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right| = \frac{4}{15} < 0.3;$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| = \left|-\frac{2}{15}x\right| < 0.3; \quad \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| = 0; \quad \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right| = \frac{1}{15} \le 0.1;$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}\right| = 0; \quad \left|\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}\right| = \left|\frac{2}{25}y\right| < 0.2; \quad \left|\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right| = 0.$$

Ko‘rinib turibdiki, barcha xususiy hosilalar qiymatlarining moduli 1 dan kichik, ya’ni $\left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right| < K = 0.3$ (K – maksimal chegaraviy qiymat), demak 3 ta noma’lumli 3 ta nochiziqli tenglamalar sistemasi (m = 3) uchun $q = mK = 3\cdot 0{,}3 = 0{,}9 < 1$. Tanlangan $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ bog‘lanish orqali quyidagi iteratsion formulalarni qurishimiz mumkin:

$$\begin{cases} x_{n+1} = -\frac{1}{15}y_n^2 + \frac{4}{15}z_n + \frac{13}{15} = 0; \\ y_{n+1} = -\frac{1}{15}x_n^2 + \frac{1}{15}z_n + \frac{11}{15}; \\ z_{n+1} = \frac{1}{25}y_n^2 + \frac{22}{25}. \end{cases}$$

Bu hisoblashlarni $\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\|_\infty \le 10^{-5}$ shart bajarilgunga qadar davom ettirsak, quyidagi jadval natijalariga kelamiz:

n	x_n	y_n	z_n	$\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\|_\infty$
0	1.000000000	0.800000000	0.900000000	
1	1.064000000	0.726666667	0.905600000	0.07333
2	1.072957037	0.718233600	0.901121778	0.00896
3	1.072575174	0.716658998	0.900634380	$9.0\cdot10^{-5}$
4	1.072595827	0.716681125	0.900544005	$2.6\cdot10^{-5}$
5	1.072569612	0.716672146	0.900545273	$8.2\cdot10^{-5}$
6	1.072570809	0.716675980	0.900544759	$3.8\cdot10^{-6}$
7	1.072570305	0.716675775	0.900544978	$5.0\cdot10^{-7}$

Bu yerda topilgan $\mathbf{x}_7$ yechim yetarlicha aniqlikda. Bunda yaqinlashish tezligini quyidagicha baholash o‘rinli:

$$\|\mathbf{x}_7 - \mathbf{x}^*\|_\infty \le \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|_\infty \cdot \frac{q^7}{1-q} = 0.07333 \cdot \frac{0.9^7}{1-0.9} < 0.351, \text{ chunki } \|\mathbf{x}_7 - \mathbf{x}^*\|_\infty \le 7.6\cdot10^{-8}.$$

2) *Zeydel usuli*. Iteratsion jarayonni $\mathbf{x}_0 = (1.0, 0.8, 0.9)^{\mathrm{T}}$ boshlang‘ich yaqinlash-ish bilan quyidagi formulalarda amalga oshiramiz (hisob natijalari quyidagi jadvalda keltirilgan):

$$\begin{cases} x_{n+1} = -\dfrac{1}{15} y_n^2 + \dfrac{4}{15} z_n + \dfrac{13}{15} = 0; \\ y_{n+1} = -\dfrac{1}{15} x_{n+1}^2 + \dfrac{1}{15} z_n + \dfrac{11}{15}; \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{25} y_{n+1}^2 + \dfrac{22}{25}. \end{cases}$$

n	x_n	y_n	z_n	$\Vert \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n \Vert_\infty$
0	1.000000000	0.800000000	0.900000000	
1	1.064000000	0.717860267	0.900612934	0.08214
2	1.072475225	0.716693988	0.900546011	0.00848
3	1.072568918	0.716676128	0.900544987	$9{,}4 \cdot 10^{-5}$
4	1.072570352	0.716675855	0.900544971	$1{,}4 \cdot 10^{-6}$
5	1.072570374	0.716675851	0.900544971	$2{,}2 \cdot 10^{-8}$

Bu yerda topilgan $\mathbf{x}_5$ yechim yetarlicha aniqlikda. Bu yerda ham

$$\Vert \mathbf{x}_5 - \mathbf{x}^* \Vert_\infty \le \Vert \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \Vert_\infty \cdot \frac{q^5}{1-q} = 0.08214 \cdot \frac{0.9^5}{1-0.9} < 0.486 \text{, chunki } \Vert \mathbf{x}_5 - \mathbf{x}^* \Vert_\infty \le 10^{-10}.$$

Demak, ushbu misolni yechishda Zeydel usulining yaqinlashish tezligi yuqoriroq ekan. Ammo bu ijobiy hol ba’zi nochiziqli tenglamalar sistemasini Zeydel usuli bilan yechishda kuzatilmasligi mumkin.

3) *Nyuton usuli*. Berilgan sistema uchun ushbu

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(x, y, z) = (f_1(x, y, z),\ f_2(x, y, z),\ f_3(x, y, z)) =$$
$$= \left(15x + y^2 - 4z - 13 = 0;\ x^2 + 15y - z - 11 = 0;\ y^2 - 25z + 22 = 0\right)^T.$$

belgilashlarni yuqorida qabul qilgan edik, bu yerda

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 15x + y^2 - 4z - 13 = 0, \\ f_2(x, y, z) = x^2 + 15y - z - 11 = 0, \\ f_3(x, y, z) = y^2 - 25z + 22 = 0. \end{cases}$$

Boshlang‘ich yaqinlashishni $\mathbf{x}_0 = (1.0,\ 0.8,\ 0{,}9)^{\mathrm{T}}$ deb olib, yechimni 10^{-5} aniqlikda topamiz.

Usul qoidalariga ko‘ra $J(x)$ – Yakob matritsasini quyidagicha yozamiz:

$$J(x, y, z) = \begin{bmatrix} 15 & 2y & -4 \\ 2x & 15 & -1 \\ 0 & 2y & -25 \end{bmatrix}.$$

Ushbu $\mathbf{x}_0 = (1.0,\ 0.8,\ 0{,}9)^{\mathrm{T}}$ boshlang‘ich yaqinlashish uchun

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = (-0.96,\ 1.1,\ 0.14)^T$$

va

$$J(\mathbf{x}_0)=\begin{bmatrix}15 & 1.6 & -4\\ 2 & 15 & -1\\ 0 & 1.6 & -25\end{bmatrix}.$$

Endi $J(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}_0=-\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ tenglamaning yechimi quyidagicha:

$$\mathbf{u}_0=\begin{bmatrix}0.07293361\\ -0.0830388\\ 0.00028552\end{bmatrix} \text{ va } \mathbf{x}_1=\mathbf{x}_0+\mathbf{u}_0=\begin{bmatrix}1.07293361\\ 0.71696122\\ 0.90028552\end{bmatrix}.$$

Bu hisoblash jarayonini xuddi shu tartibda k = 1, 2, … lar uchun davom ettirsak,

$$\begin{bmatrix}x_{k+1}\\ y_{k+1}\\ z_{k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_k\\ y_k\\ z_k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}u_k\\ v_k\\ w_k\end{bmatrix},$$

bu yerda

$$\begin{bmatrix}u_k\\ v_k\\ w_k\end{bmatrix}=-\left(J(x_k,y_k,z_k)\right)^{-1}\mathbf{F}\left(x_k,y_k,z_k\right); \quad J(\mathbf{x}_k)=\begin{bmatrix}15 & 2y_k & -4\\ 2x_k & 15 & -1\\ 0 & 2y_k & -25\end{bmatrix}.$$

Nyuton usuli iteratsiyalarining yaqinlashishini quyidagi jadvaldan ko‘rish mumkin:

n	x_n	y_n	z_n	$\lVert\mathbf{x}_{n+1}-\mathbf{x}_n\rVert_\infty$
0	1.00000000	0.80000000	0.90000000	
1	1.07293361	0,71696122	0.90028552	0.073
2	1.07257038	0.71667586	0.90054497	$3.6\cdot10^{-4}$
3	1.07257037	0.71667585	0.90054497	$8{,}05\cdot10^{-9}$

Bu yerda topilgan $\mathbf{x}_3$ yechim yetarlicha aniqlikda. Bu yerda ham

$$\lVert\mathbf{x}_3-\mathbf{x}^*\rVert_\infty \le \lVert\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0\rVert_\infty\cdot\frac{q^3}{1-q}=0.073\cdot\frac{0.9^3}{1-0.9}<0.533\text{, chunki } \lVert\mathbf{x}_3-\mathbf{x}^*\rVert_\infty\le10^{-9}.$$

Demak, ushbu misolni yechishda Nyuton usulining yaqinlashish tezligi oddiy iteratsiyalar va Zeydel usullariga nisbatan ancha yuqori ekan.

4) *Broyden usuli*. Bu yerda ham Nyuton usulidagi kabi berilgan sistema uchun ushbu

$$\mathbf{F}(\mathbf{x})=\mathbf{F}(x,y,z)=(f_1(x,y,z),\ f_2(x,y,z),\ f_3(x,y,z))=$$
$$=\left(15x+y^2-4z-13=0;\ x^2+15y-z-11=0;\ y^2-25z+22=0\right)^T.$$

belgilashlarni yuqorida qabul qilgan edik, bu yerda

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = 15x + y^2 - 4z - 13 = 0, \\ f_2(x,y,z) = x^2 + 15y - z - 11 = 0, \\ f_3(x,y,z) = y^2 - 25z + 22 = 0. \end{cases}$$

Boshlang‘ich yaqinlashishni $\mathbf{x}_0$ = (1.0, 0.8, 0,9)^T deb olib, yechimni 10^{-5} aniqlikda topamiz.

Usul qoidalariga ko‘ra $J(x)$ – Yakob matritsasini quyidagicha yozamiz:

$$J(x,y,z) = \begin{bmatrix} 15 & 2y & -4 \\ 2x & 15 & -1 \\ 0 & 2y & -25 \end{bmatrix}.$$

Ushbu $\mathbf{x}_0$ = (1.0, 0.8, 0,9)^T boshlang‘ich yaqinlashish uchun

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = (-0.96, 1.1,\ 0.14)^T \quad \text{va} \quad A_0 = J(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 15 & 1.6 & -4 \\ 2 & 15 & -1 \\ 0 & 1.6 & -25 \end{bmatrix}.$$

Endi tenglamaning yechimini quyidagicha izlaymiz:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - A_0^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 1.07293361 \\ 0.71696122 \\ 0.90028552 \end{bmatrix}.$$

Bu yerdan

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 0.006895461 \\ 0.005319311 \\ 0.006895391 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.96 \\ 1.1 \\ 0.14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.953104539 \\ -1.094680689 \\ -0.133104609 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.07293361 \\ -0.08303878 \\ 0.00028552 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s}_1^T A_0^{-1}\mathbf{u}_1 = 0.000917385;$$

$$A_1^{-1} = A_0^{-1} + \frac{1}{0.000917385} \cdot \left[\left(\mathbf{s}_1 - A_0^{-1}\mathbf{u}_1 \right) \cdot \mathbf{s}_1^T A_0^{-1} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.065249361 & -0.003688885 & -0.01027858 \\ -0.010824741 & 0.069680092 & -0.001051642 \\ 0.001012361 & 0.002634918 & -0.040270578 \end{bmatrix}.$$

Bularga ko‘ra

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 - A_1^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_1) = \begin{bmatrix} 1.072574247 \\ 0.716672463 \\ 0.900542205 \end{bmatrix}.$$

Keyingi iteratsiyaning natijalari quyidagicha:

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{F}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_1) = \begin{bmatrix} 6.43008\cdot 10^{-5} \\ -3.9746\cdot 10^{-5} \\ 6.43008\cdot 10^{-5} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.006895461 \\ 0.005319311 \\ 0.006895391 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00683116 \\ -0.005359057 \\ -0.00683109 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{s}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -0.000359363 \\ -0.000288757 \\ 0.000256685 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s}_2^T A_1^{-1}\mathbf{u}_2 = 2.78414\cdot 10^{-7};$$

$$A_2^{-1} = A_1^{-1} + \frac{1}{0.000917385}\cdot\left[\left(\mathbf{s}_2 - A_1^{-1}\mathbf{u}_2\right)\cdot \mathbf{s}_2^T A_1^{-1}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.067443808 & -0.005434321 & -0.010573633 \\ -0.009682179 & 0.067702574 & -0.001158947 \\ 0.000555101 & 0.003881658 & -0.040066453 \end{bmatrix}.$$

Bularga ko‘ra

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 - A_2^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_2) = \begin{bmatrix} 1.072570374 \\ 0.716675851 \\ 0.900544971 \end{bmatrix}.$$

Hisob natijalarini jadval shaklida keltiramiz:

n	x_n	y_n	z_n	$\lVert \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n \rVert_\infty$
0	1.000000000	0.800000000	0.900000000	
1	1.07293361	0,71696122	0.90028552	0.073
2	1.072574247	0,716672463	0.900542205	$3.594\cdot 10^{-4}$
3	1.072570374	0,716675851	0.900544971	$3.389\cdot 10^{-6}$

Bu yerda topilgan $\mathbf{x}_3$ yechim yetarlicha aniqlikda. Bu yerda ham

$$\lVert \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}^* \rVert_\infty \le \lVert \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \rVert_\infty \cdot \frac{q^3}{1-q} = 0.073\cdot\frac{0.9^3}{1-0.9} < 0.533, \text{ chunki } \lVert \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}^* \rVert_\infty \le 10^{-10}.$$

Demak, ushbu misolni yechishda Broyden usulining ham Nyuton usuli kabi yaqinlashish tezligi oddiy iteratsiyalar va Zeydel usullariga nisbatan ancha yuqori ekan.

Sinov savollari

1. Nyuton va oddiy iteratsiyalar usullarining qo‘llanilish shartlarini ayting.
2. Iteratsion jarayonlarning yaqinlashishi deganda nimani tushunasiz?
3. Asosiy hisob formulalarini chiqaring.
4. Hisoblashlarni tugatish shartlarini tushuntiring.
5. Hisoblash usullarining afzalliklari va kamchiliklarini ko‘rsating.
6. Hisoblash usullarining algoritmlarini izohlang.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Richard L. Burden and J. Douglas Faires. Numerical Analysis. Ninth Edition, Boston, USA, 2011. – 895 p.
2. L.Ridgway Scott. Numerical Analysis. Princeton University Press, 2011.- 342 p.
3. Абдухамидов А.У., Худойназаров С. Ҳисоблаш усулларидан амалиёт ва лаборатория машғулотлари. – Тошкент: Ўқитувчи, 1995. – 240 б.
4. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad, Mathlab, Maple (Самоучитель). – М.: НТ Пресс, 2006. – 496 с.
5. Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В. Вычислительные методы. - М.: Издательский дом МЭИ, 2008. - 672 с.
6. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: Изд-во Бином. Лаборатория знаний, 2011. – 640 с.
7. Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В. Численные методы в задачах и упражнениях. – М.: Изд-во Бином. Лаборатория знаний, 2010. – 240 с.
8. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2009. – 848 с.
9. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966. – 566 б.
10. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. – М.: СОЛОН-Пресс, 2006. – 720 с.
11. Дьяконов В. П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. — М.: ДМК-Пресс, 2011.
12. Исраилов М.И. Ҳисоблаш методлари. 1- қисм. – Тошкент: Ўқитувчи, 2003. – 440 б.
13. Калиткин Н.Н., Альшина Е.А. Численные методы: в 2 кн. Кн. 1. Численные анализ. - М. : Издательский центр «Академия», 2013. - 304 с.
14. Кирянов Д.В. Mathcad 13. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 608 с.
15. Копченова Н.В., Марон И. А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 2009. – 368 с.
16. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Изд-во Лань, 2010. – 608 с.
17. Матросов А. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. – СПб.: БХВ-Петербург, 2001.
18. Мэтьюз Джон Г., Финк Куртис Д. Численные методы. Использование Matlab. 3-издание: Пер. с англ. – М.: Изд-во дом «Вильямс», 2001. - 720 с.
19. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Изд-во Лань, 2009. - 288 с.
20. Сборник задач по методам вычислений. Учебное пособие / Под ред. П.И.Монастырного. – 2-е изд. – Мн.: Университецкое, 2000. – 311 с.

MUNDARIJA

Abdurаimov D.E., Bo‘tabоyev A.A.

HISOBLASH USULLARI

fanidan amaliy mashg‘ulotlar

1-qism

O‘quv qo‘llanma