

REJA

1. To'g'ri chiziqni proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklari, to'g'ri chiziq kesmasining haqiqiy uzunligini aniqlash.
2. To'g'ri chiziqning izlari.
3. Ikki to'g'ri chiziqning fazoda o'zaro joylashuvi.

Adabiyotlar:

1. Murodov Sh.K., Hakimov L.Q., Xolmurzayev A. Chizma geometriya. –T.: “Iqtisod-moliya”, 2006-2008. (35-49-betlar).
2. Qulnazarov B.B. Chizma geometriya. –T.: “O‘zbekiston”, 2006. (16-26 betlar).
3. Исмагуллаев Р. Чизма геометрия. –Т.: “ТДПУ ризографи”, 2003. (21-32 betlar).

1. To'g'ri chiziqni proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklari, to'g'ri chiziq kesmasining haqiqiy uzunligini aniqlash.

Umumiy vaziyatda joylashgan to'g'ri chiziq kesmasining proyeksiyalari orqali uning haqiqiy o'lchamini aniqlash va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlash masalasi amaliyotda ko'p uchraydi.

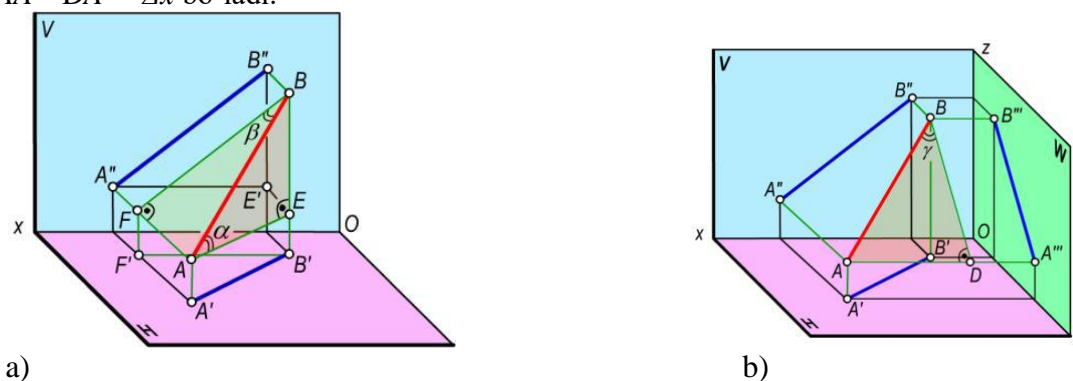
AB to'g'ri chiziq kesmasi hamda uning H , V va W tekisliklardagi proyeksiyalari berilgan bo'lsin (3.15-a, rasm). Kesmaning A nuqtasidan $AE \parallel A'B'$ to'g'ri chiziq o'tkaziladi va to'g'ri burchakli $\triangle ABE$ ni hosil qilinadi. Bunda $BE = BB' - AA'$, bu yerda $AA' = EB'$ bo'lgani uchun $BE = BB' - EB' = \Delta z$ bo'ladi.

To'g'ri burchakli ABE uchburchakning AB gipotenuzasi AE katet bilan α burchak hosil qiladi. Bu burchak AB kesmaning H tekislik bilan hosil qilgan burchagi bo'ladi.

To'g'ri chiziq kesmasining V proyeksiyalar tekisligi bilan hosil qilgan β burchagini aniqlash uchun to'g'ri burchakli ABF uchburchakdan foydalanamiz. Bu uchburchakning BF kateti AB kesmasining frontal proyeksiyasi $A''B''$ ga, ikkinchi AF kateti uning A va B uchlarning V tekislikdan uzoqliklarining ayirmasiga teng bo'ladi. Bunda $AF = AA'' - BB''$, bo'lib, $BB'' = FA''$ bo'lgani uchun $AF = AA'' - FA'' = \Delta y$ bo'ladi.

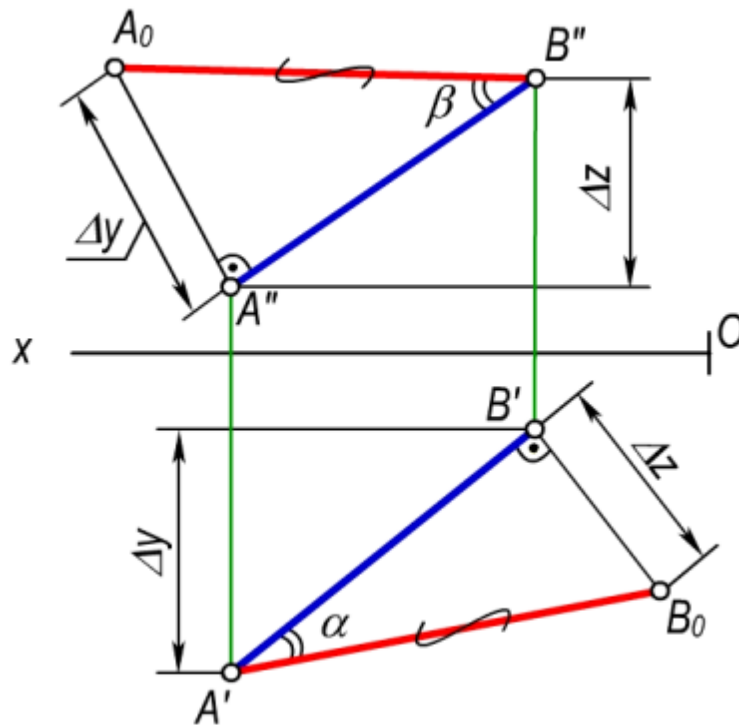
To'g'ri burchakli ABF ning AB gipotenuzasi BF katet bilan hosil qilgan γ burchak AB kesmaning V tekislik hosil qilgan burchagi bo'ladi.

3.15-b, rasmda AB kesmaning W tekislik bilan hosil qilgan τ burchagini aniqlash ko'rsatilgan. Bu burchakni aniqlash uchun to'g'ri burchakli $DABF$ dan foydalanamiz. Bu uchburchakning bir kateti AB kesmasining profil $A'''B'''$ proyeksiyasiga, ikkinchi AD kateti A va B uchlarning W tekislikdan uzoqliklari ayirmasiga teng bo'ladi. Bunda $AD = AA''' - BB'''$, bo'lib, $BB''' = DA'''$ bo'lgani uchun $AD = AA''' - DA''' = \Delta x$ bo'ladi.



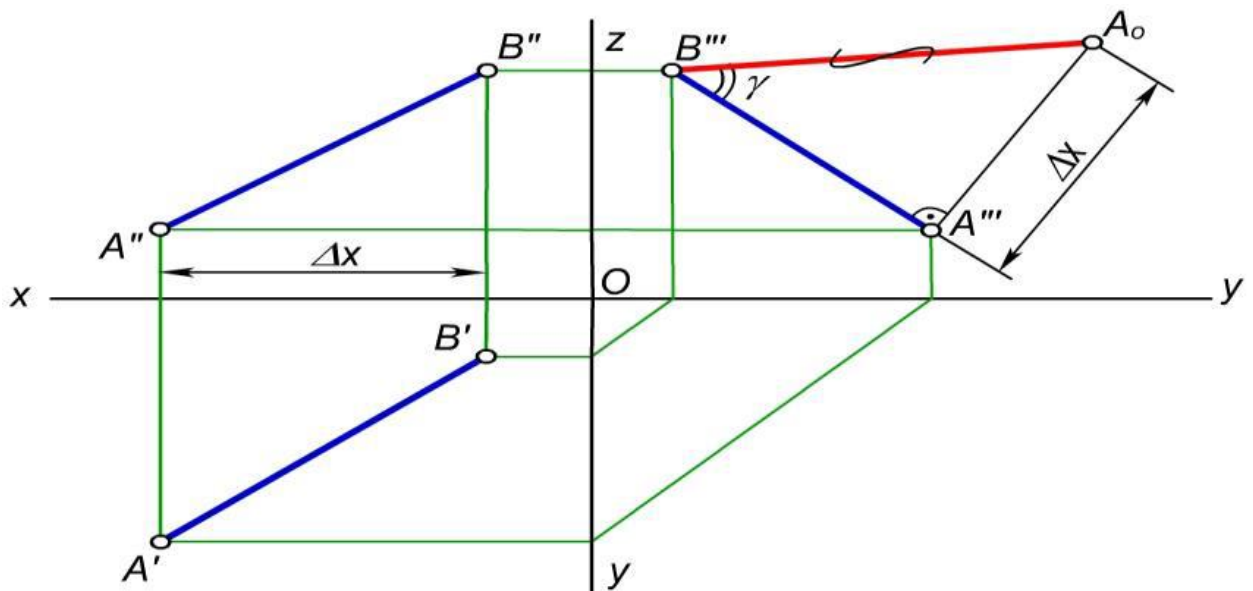
3.15-rasm

Chizmada kesmaning berilgan proyeksiyalari orqali uning haqiqiy uzunligi va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlash uchun yuqoridagi fazoviy model asosida to'g'ri burchakli uchburchaklar yasaladi. Shuning uchun bu usulni **to'g'ri burchakli uchburchak usuli** deb yuritiladi.



a)

3.16-rasm



b)

3.16-rasm

Masalan, AB kesmaning $A'B' \square A''B''$ va $A'''B'''$ proyeksiyalarga asosan uning (3.16-a, shakl) haqiqiy o'lchami va H bilan hosil qilgan α burchagini aniqlash uchun to'g'ri burchakli $A'B'Bo$ uchburchak yasaladi. Bu uchburchakning bir kateti kesmaning gorizontaal proyeksiyasiga, ikkinchi kateti esa kesmaning A va B uchlarning applikatorlari ayirmasi Δz ga teng bo'ladi. Bu uchburchakning $A'B'o$ gipotenuzasi AB kesmaning haqiqiy o'lchami, $A'B'o=AB$ bo'lib, $AB^{\wedge}H = \angle B'A'B'o = \alpha$ bo'ladi.

Kesmaning V tekislik bilan hosil qilgan \square burchagini aniqlash uchun to'g'ri burchakli $\triangle A''B''A'o$ ni yasaladi. Bu uchburchakning bir kateti kesmaning frontal $A''B''$ proyeksiyasiga, ikkinchi kateti esa AB kesma uchlari ordinatalari ayirmasi Δy ga teng bo'ladi. Hosil bo'lgan $B''A'o=AB$ bo'lib, $AB^{\wedge}V = \angle A''B''A'o = \beta$ bo'ladi.

AB kesmaning W tekislik bilan hosil etgan burchagini aniqlash uchun esa to'g'ri burchakli $\triangle A'''B'''A'o$ ni yasaymiz (3.16,b-rasm). Bu uchburchakning bir kateti kesmaning profil $A'''B'''$ proyeksiyasi, ikkinchi kateti kesma uchlarning W tekislikdan uzoqliklarning absissalar ayirmasi Δx bo'ladi. Hosil bo'lgan $B'''A'o = AB$ bo'lib, $AB^{\wedge}W = \angle A'''B'''A'o = \gamma$ teng bo'ladi.

2. To'g'ri chiziqning izlari.

To'g'ri chiziqning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishish nuqtalari to'g'ri chiziqning izlari deyiladi.

Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq hamma proyeksiyalar tekisliklarini kesib o'tadi. Biror a to'g'ri chiziqning gorizontaal proyeksiyalar tekisligi bilan kesishgan nuqtasi uning *gorizontaal izi*, frontal proyeksiyalar tekisligi bilan kesishgan nuqtasi *frontal izi* deyiladi. Shuningdek, to'g'ri chiziqning profil proyeksiyalar tekisligi bilan kesishgan nuqtasi uning *profil izi* deyiladi:

$$a \cap H = a_H, a \cap V = a_V \text{ va } a \cap W = a_W.$$

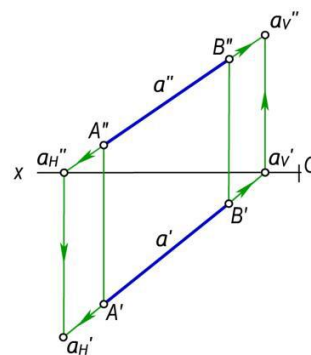
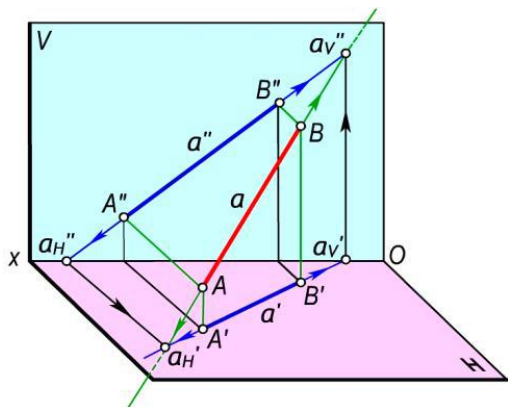
3.13,a-rasmda, a to'g'ri chiziq izlarini yasashning fazoviy modeli ko'rsatilgan.

To'g'ri chiziqning gorizontaal izini proyeksiyalarini chizmada aniqlash uchun quyidagi yasash algoritmlari bajariladi (3.13-rasm):

- To'g'ri chiziqni frontal a'' proyeksiyasining Ox o'qi bilan kesishish nuqtasi $a''_H = a'' \cap Ox$ topiladi;
- a''_H nuqtadan Ox o'qiga perpendikulyar o'tkaziladi;
- To'g'ri chiziqning gorizontaal proyeksiyasi a' bilan perpendikulyarning kesishish nuqtasi to'g'ri chiziqning gorizontaal izining gorizontaal proyeksiyasi $a'_H = a_H$ bo'ladi.

To'g'ri chiziq frontal izining proyeksiyalarini chizmada aniqlash uchun:

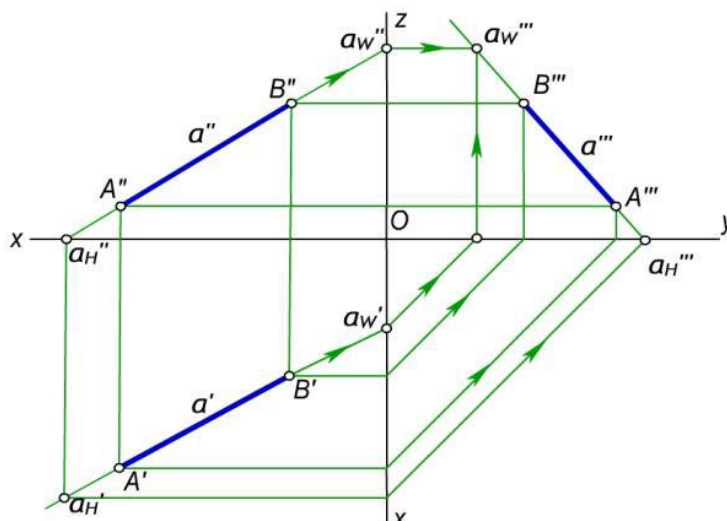
- ❖ To'g'ri chiziq gorizontaal a' proyeksiyasining Ox o'qi bilan kesishish nuqtasi $a'_V = a' \cap Ox$ topiladi;
- ❖ Bu nuqtadan Ox o'qiga perpendikulyar o'tkaziladi;
- ❖ To'g'ri chiziqning frontal proyeksiyasi a'' bilan perpendikulyarning kesishish nuqtasi uning frontal izining frontal proyeksiyasi $a''_V = a_V$ bo'ladi.



a)

3.13-rasm

b)



3.14-rasm

To'g'ri chiziqning profil izini yasash uchun:

- ❖ Uning frontal proyeksiyasini Oz o'qi bilan kesishguncha davom ettiriladi.
- ❖ Hosil bo'lgan aw''' nuqtadan Oz ga perpendikulyar chiqariladi.
- ❖ To'g'ri chiziqning profil proyeksiyasi bu perpendikulyar bilan kesishguncha davom ettiriladi va $aw''' \equiv aw'''$ aniqlanadi yoki to'g'ri chiziqning a' gorizontaal proyeksiyasi Oy o'qi bilan kesishguncha davom ettiriladi.
- ❖ Hosil bo'lgan nuqtadan y o'qiga perpendikulyar chiqariladi.
- ❖ Uni av'' dan Oz ga chiqarilgan perpendikulyar bilan kesishish nuqtasi a to'g'ri chiziqning profil izining profil proyeksiyasi bo'ladi.

Shakldagi $a'w$ $a''w$ nuqtalar mazkur a to'g'ri chiziq profil izining gorizontaal va frontal proyeksiyalari bo'ladi. $a'''w$ nuqta a to'g'ri chiziq profil izining profil proyeksiyasidir.

3. Ikki to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyatlari

Ikki to'g'ri chiziq fazoda o'zaro parallel, kesuvchi yoki ayqash vaziyatlarda bo'lishi mumkin.

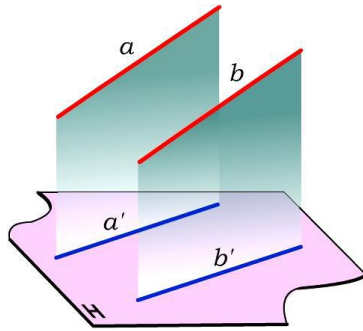
Parallel to'g'ri chiziqlar

Agar ikki to'g'ri chiziqning kesishuv nuqtasi bo'lmasa (yoki umumiy xosmas nuqtaga ega bo'lsa), ularni **parallel to'g'ri chiziqlar** deyiladi.

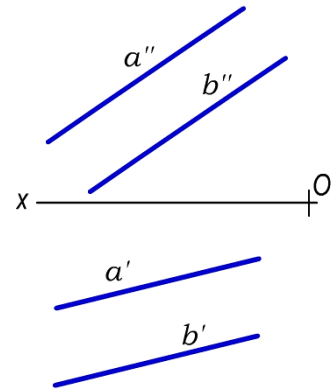
Parallel proyeksiyalarning xossasiga asosan parallel to'g'ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari ham o'zaro parallel bo'ladi (3.17,a,b-rasm), ya'ni $a \parallel b$ bo'lsa, u holda $a' \parallel b'$, $a'' \parallel b''$, $a''' \parallel b'''$ bo'ladi.

Fazodagi umumiy vaziyatda joylashgan parallel to'g'ri chiziqlarning ikkita bir nomli proyeksiyalari o'zaro parallel bo'lsa, ularning uchinchi proyeksiyalari ham o'zaro parallel bo'ladi.

Ammo to'g'ri chiziqlar biror proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lsa, u holda yuqorida keltirilgan shart bajarilmaydi. Masalan, W tekislikka parallel bo'lgan profil to'g'ri chiziq kesmalarining bir nomli gorizontaal va frontal proyeksiyalari (p_1 va p_2) ning o'zaro parallel bo'lishi yetarli bo'lmaydi (3.18,a-rasm). Bunday hollarda to'g'ri chiziqlarning profil proyeksiyalarini yasash zarur. Bunda $p_1''' \parallel p_2'''$ bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'ladi. Agar $p_1''' \cap p_2'''$, bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlar ayqash bo'ladi. Shuningdek, bu to'g'ri chiziqlarning o'zaro vaziyatini profil proyeksiyalaridan foydalanmasdan ham aniqlash mumkin.



a)

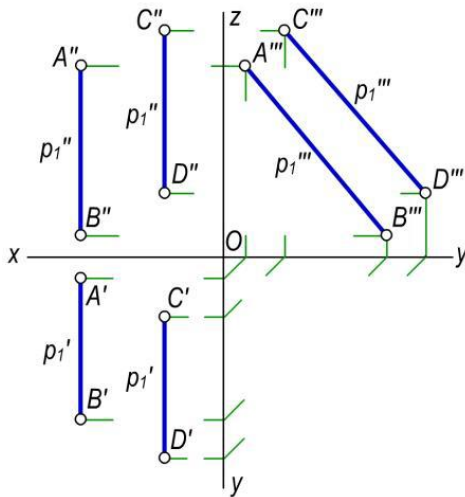


b)

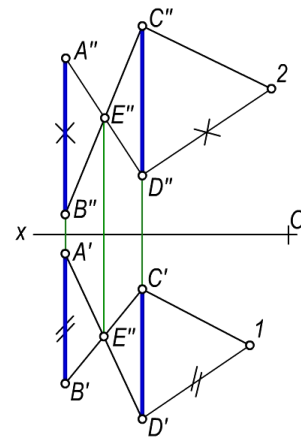
3.17-rasm.

Buning uchun:

- to'g'ri chiziq kesmalarining bir nomli proyeksiyalarining nisbatlari tengligini aniqlaymiz. Kesmaning biror, masalan, D' , D'' nuqtasidan ixtiyoriy (o'tkir burchak ostida) parallel chiziqlar o'tkazib, $D'1=A'B'$ va $D''2=A''B''$ kesmalarni qo'yiladi (3.18-b,rasm). So'ngra 1 va 2 nuqtalarni C' va C'' bilan tutashtiramiz. Agar $C'1 \parallel C''2$ bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'ladi. Aks holda bu to'g'ri chiziqlar ayqash to'g'ri chiziqlar ekanligini isbotlanadi;
- to'g'ri chiziq kesmalarining bir nomli nuqtalarini o'zaro kesishadigan qilib to'g'ri chiziqlar bilan tutashtiramiz (3.18-b,rasm). Agar chiziqlarning kesishish nuqtasining E' va E'' proyeksiyalari bir bog'lovchi chiziqda bo'lsa, u holda CD va AB to'g'ri chiziqlar bir tekislikka tegishli va o'zaro parallel bo'ladi.



a)

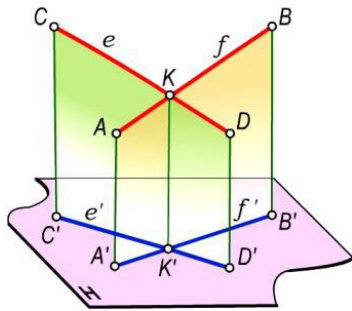


b)

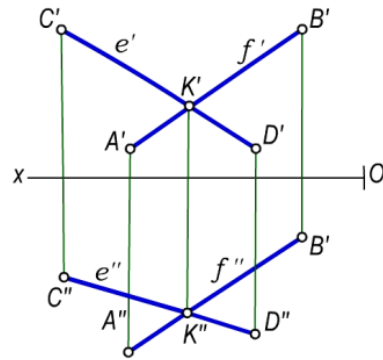
3.18-rasm

Kesishuvchi to'g'ri chiziqlar.

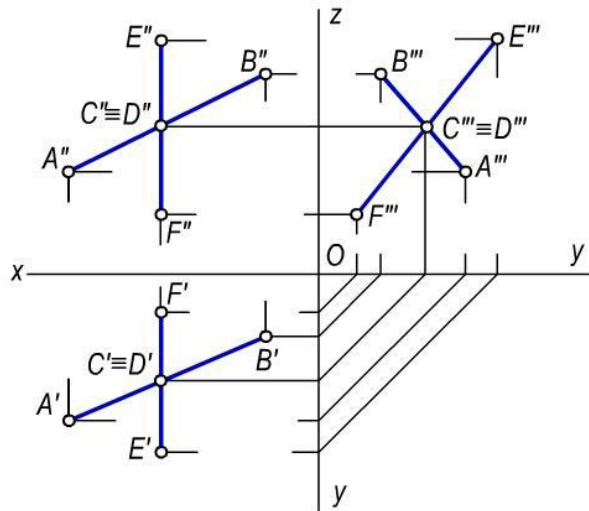
Agar ikki to'g'ri chiziq fazoda umumiy bir (xos) nuqtaga ega bo'lsa, ularni **kesishuvchi to'g'ri chiziqlar** deyiladi.



a)



b)



v)

3.19-rasm

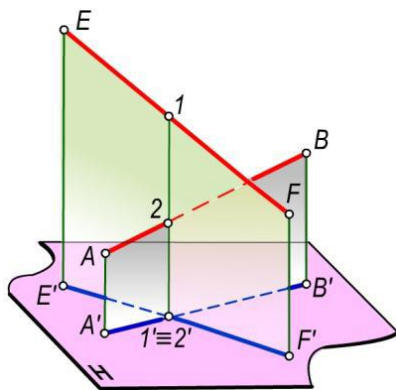
Agar kesishuvchi chiziqlarning biri proyeksiyalar tekisligining birortasiga parallel bo'lsa, u holda ularning ikkita bir nomli proyeksiyalarining o'zaro kesishuvi yetarli bo'lmaydi. Masalan, AB va EF to'g'ri chiziq kesmalarining biri EF kesma W tekislikka parallel joylashgan (3.19,v-rasm). Bu chiziqlarning o'zaro vaziyatini ularning profil proyeksiyalarini yasash bilan aniqlash mumkin. Agar kesishish nuqtasining proyeksiyalari bir bog'lovchi chiziqda joylashsa, bu to'g'ri chiziqlar o'zaro kesishadi, aks holda to'g'ri chiziqlar kesishmaydi.

Ayqash to'g'ri chiziqlar.

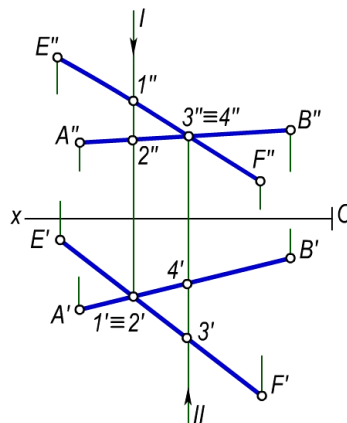
Ikki to'g'ri chiziq o'zaro parallel bo'lmasa yoki kesishmasa ular **ayqash to'g'ri chiziqlar** deyiladi.

Ma'lumki, parallel va kesuvchi to'g'ri chiziqlar bitta tekislikka tegishli bo'ladi. Uchrashmas to'g'ri chiziqlar esa bir tekislikda yotmaydi (3.20,a,b-rasm). Uchrashmas to'g'ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari chizmada o'zaro kesishsa ham, ammo kesishish nuqtalari bir bog'lovchi chiziqqa tegishli bo'lmaydi.

Masalan, 3.20-rasmda $AB(A'B', A''B'')$ va $EF(E'F', E''F'')$ uchrashmas chiziqlar berilgan. Bu to'g'ri chiziqlar proyeksiyalarining $1 \equiv 2'$ va $3'' \equiv 4''$ kesishish nuqtalari fazoda bu to'g'ri chiziqlarning har biriga tegishli ikki nuqtaning proyeksiyalari bo'lmay, aksincha, $1 \in EF$, $2 \in AB$ va $3 \in EF$, $4 \in AB$ bo'ladi.



a)



b)

3.20-rasm

3.7-§. To'g'ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatlari.

Agar to'g'ri burchakning bir tomoni tekislikka parallel bo'lib, ikkinchi tomoni bu tekislikka perpendikulyar bo'lmasa, mazkur to'g'ri burchak shu tekislikka haqiqiy kattalikda proyeksiyalanadi.

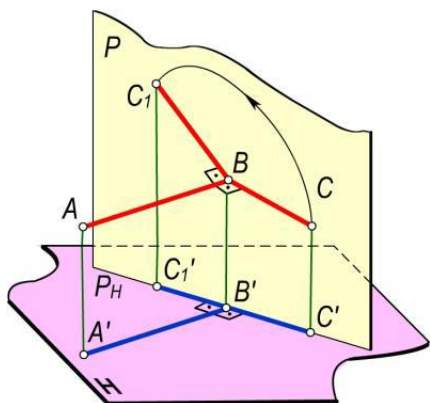
Bu teoremani isbotlash uchun 3.21,a-rasmdan foydalanamiz. Shakldagi $\angle ABC=90^\circ$ ga teng va uning ikki tomoni H tekislikka parallel vaziyatda joylashgan deb faraz qilamiz. Bu vaziyatda uning gorizontaal proyeksiyasining qiymati o'ziga teng bo'lib proyeksiyalanadi, ya'ni $\angle A'B'C'=90^\circ$ bo'ladi.

To'g'ri burchakning BC tomonidan H tekislikka perpendikulyar qilib P tekislik o'tkazamiz. U holda $AB \perp P$ bo'lib, $H \cap P = P_H$ hosil bo'ladi. Agar to'g'ri burchakning BC tomonini AB tomoni atrofida aylantirib, ixtiyoriy BC_1 vaziyatga keltirsak ham uning bu tomonining proyeksiyasi P_H bilan ustma-ust tushadi. Shunga ko'ra $\angle ABC_1 = \angle A'B'C' = 90^\circ$ bo'ladi. Demak:

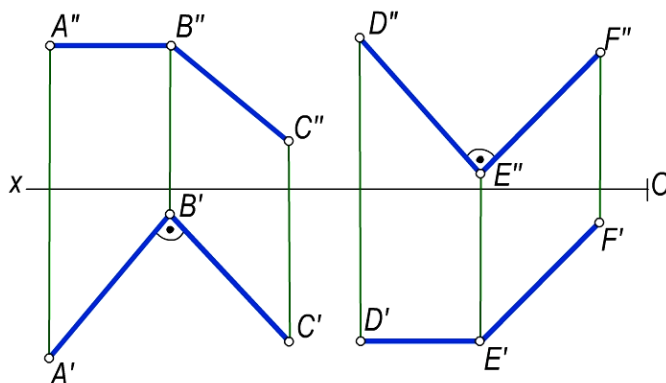
$\angle ABC=90^\circ$ bo'lib, $AB \parallel H$ va $BC \parallel H$ bo'lsa, $\angle A'B'C'=90^\circ$ bo'ladi.

Chizmada $\angle ABC (AB \parallel H)$ va $\angle DEF (DE \parallel V)$ to'g'ri burchaklarning tasvirlanishi 3.21,b va 3.21,v-raslarda keltirilgan.

To'g'ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatidan chizma geometriyada metrik masalalarni yechishda keng foydalanadi.



a)



b)

v)

3.21-rasm

Chizmalarda ko‘rinishlikni aniqlash

Geometrik figuraning fazodagi o‘zaro vaziyatlariga oid masalalar yechishda tasvirlarni yaqqolashtirish maqsadida ularning ko‘rinadigan va ko‘rinmaydigan qismlarini aniqlashga to‘g‘ri keladi.

Faqat birinchi oktantda joylashgan geometrik shakllarning kuzatuvchiga nisbatan yaqin turgan elementlari ko‘rinadi, uning orqasidagi elementlari ko‘rinmaydi. Boshqa oktantlarda joylashgan shakl yoki uning tarkibiy qismi ko‘rinmas deb hisoblanadi.

Geometrik shakllarning kuzatuvchiga nisbatan chizmada ko‘rinishligi konkurent nuqtalardan foydalanib aniqlanadi.

Bitta proyeksiyalovchi nurda (to‘g‘ri chiziqda) joylashgan nuqtalar konkurent nuqtalar deyiladi.

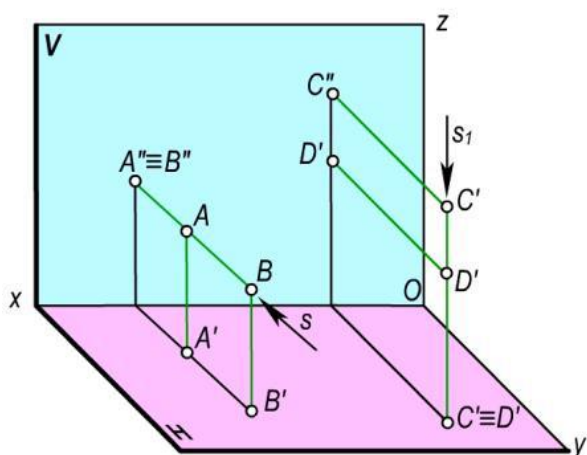
Agar kuzatuvchi proyeksiyalovchi nur yo‘nalishida konkurent nuqtalarga qarasa, u o‘ziga yaqin bo‘lgan nuqtani yoki proyeksiyalar tekisligidan uzoqroq joylashgan nuqtani ko‘radi.

Masalan, 3.22,a-rasmda berilgan bir proyeksiyalovchi nurda joylashgan va V ga nisbatan konkurent bo‘lgan A va B nuqtalarga s yo‘nalish bo‘yicha qaralganda, kuzatuvchiga yaqin bo‘lgan yoki V tekislikdan uzoqroq joylashgan B nuqta ko‘rinadi. Shuningdek, H ga nisbatan konkurent bo‘lgan C va D nuqtalarga s_1 yo‘nalish bo‘yicha qaralsa, H tekislikdan uzoqroq joylashgan C nuqta ko‘rinadi.

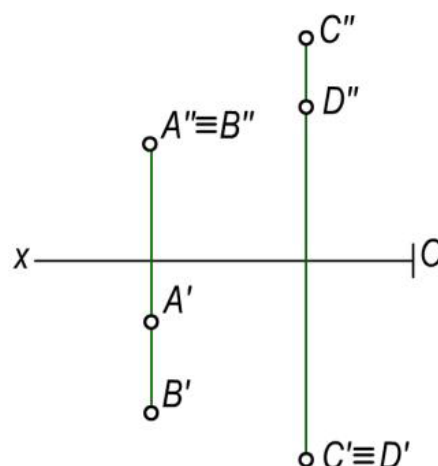
Chizmada konkurent nuqtalarning ko‘rinishligini ularning koordinatalari orqali aniqlash ham mumkin. Konkurent nuqtalarning H tekislikka nisbatan ko‘rinishligi z applikatasi, V tekislikka nisbatan y ordinatasi va W tekislikka nisbatan x absissasi aniqlaydi.

H tekislikka nisbatan applikatasi eng katta bo‘lgan konkurent nuqta kuzatuvchiga ko‘rinadi. 3.22,b-rasmda $A(A', A'')$, $B(B', B'')$, va $C(C', C'')$, $D(D', D'')$ konkurent nuqtalarning proyeksiyalari berilgan. Bunda $y_A < y_B$ va $z_S < z_D$ bo‘lgani uchun V tekislikka nisbatan B nuqta, H tekislikka nisbatan C nuqta ko‘rinuvchi nuqtalar bo‘ladi.

Fazoda turli vaziyatlarda joylashgan geometrik shakllarning chizmada ko‘rinishligi ularga tegishli bo‘lgan ayrim konkurent nuqtalarning ko‘rinishligini tekshirish yo‘li bilan aniqlanadi.



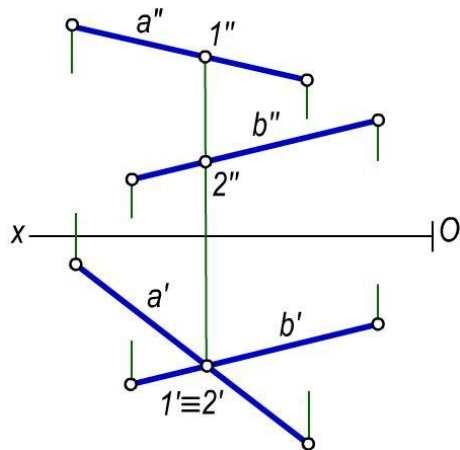
a)



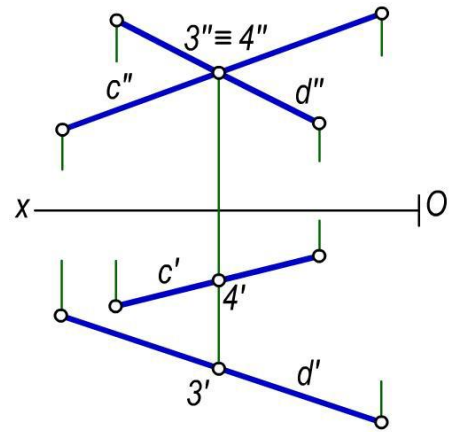
b)

3.22-rasm 3.23,a-rasmda $a(a', a'')$ va $b(b', b'')$ uchrashmas to‘g‘ri chiziqlar berilgan. Bu to‘g‘ri chiziqlar gorizonttal proyeksiyalarning o‘zaro kesishgan va H ga nisbatan konkurent bo‘lgan nuqtalari $1' \equiv 2'$ ustma-ust proyeksiyalangan. Bu nuqtalardan qaysi birini ko‘rinishligini aniqlash uchun ularning gorizonttal proyeksiyasidan proyeksiyalovchi chiziq o‘tkazib, to‘g‘ri chiziqlarning frontal a'' va b'' proyeksiyalarida $1''$ va $2''$ nuqtalar belgilanadi va $z_1 > z_2$ ekanligi aniqlanadi. Natijada, a chiziqqa

tegishli 1 nuqta kuzatuvchiga ko‘rinadi, b chiziqqa tegishli 2 nuqta esa uning ostida bo‘ladi. Demak, $a(a', a'')$ va $b(b', b'')$ to‘g‘ri chiziqqlarga yuqoridan qaraganda a to‘g‘ri chiziq b to‘g‘ri chiziqqa nisbatan kuzatuvchiga yaqin joylashgan.



a)



b)

3.23-rasm

3.23,b-rasmda ham $c(c', c'')$ va $d(d', d'')$ chiziqlarni V ga nisbatan qaraganda $y_3 > y_4$ bo‘lgani uchun 3 nuqta kuzatuvchiga ko‘rinadi. Shuning uchun $c(c', c'')$ va $d(d', d'')$ to‘g‘ri chiziqqlarga oldidan qaraganimizda d to‘g‘ri chiziq c to‘g‘ri chiziqqa nisbatan kuzatuvchiga yaqinroq joylashgan.

Hazorat savollari

1. To‘g‘ri chiziqning proyeksiyalari qanday hosil bo‘ladi?
2. Umumiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziq nima?
3. To‘g‘ri chiziqning izlari nima?
4. Qanday xususiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziqlarni bilasiz?
5. Umumiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziq kesmasining haqiqiy uzunligi qanday yasaladi?
6. O‘zaro parallel to‘g‘ri chiziqlarning proyeksiyalari qanday bo‘ladi?
7. Kesishuvchi va ayqash to‘g‘ri chiziqlarning proyeksiyalari bir-biridan qanday farqlanadi?
8. To‘g‘ri burchakning proyeksiyalanishi haqidagi teoremani tushuntirib bering.
9. Ko‘rinishlikni aniqlashda konkurent nuqtalardan qanday foydalaniladi?