

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.Н. КАРАЗИНА

В.Б. Казанский

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

И

ТЕРМОДИНАМИКА

Задачи, основные понятия и положения

Харьков – 2004

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.Н. КАРАЗИНА

В.Б. Казанский

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА
И
ТЕРМОДИНАМИКА

Задачи, основные понятия и положения

Харьков – 2004

УДК 530.1 (075)

Казанский В.Б. Статистическая физика и термодинамика. Задачи, основные понятия и положения: Методическое пособие.– Харьков: ХНУ, 2004.– 112 с. – библ. 24.

Книга является методическим пособием для активного усвоения теоретических знаний при решении задач, систематизированных по уровню образования в классических университетах и их значимости в прикладных разделах физики, включая радиофизику, электронику, спектроскопию, биофизику и т.п. В нем изложены необходимые сведения о теории вероятности, математическом аппарате, основных положениях и методах статистической физики и термодинамики. Особое внимание уделено классической и квантовой статистикам равновесных состояний, теории флуктуаций. Для развития культуры и приобретения навыков самостоятельной работы анализируются подробные решения характерных типовых задач.

Пособие предназначено для студентов – будущих физиков, радиофизиков, биофизиков, инженеров, а также для преподавателей, ведущих практические занятия по курсу статистической физики и термодинамике.

UDK 530.1 (075)

Kazanskij V.B. Statistic physics and thermodynamics. Tasks, basic concepts and rules (positions): Methodical manual.– Kharkov: KNU, 2004.– 112 p. – bibl. 24.

The present book is the methodic manual for active mastering of theoretic knowledge at solving tasks, systematized according to the level of education in classic universities and to their significance in applied areas of physics, including radiophysics, electronics, spectroscopy, biophysics and etc. It contains essential information on theory of probability, corpus of laws of mathematics, basic concepts and methods of statistics physics and thermodynamics. Special attention is payed to both classic and quantum statistics of the equilibrium conditions and the fluctuation theory. Detailed solutions of some typical tasks are analyzed in detail to develop culture and skills of independent work.

The book is intended for students – future physicists, radiophysicists, biophysicists, engineers, as well as for lecturers teaching practical courses in statistic physics and thermodynamics.

Рецензенти:

академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор Л.М.Літвіненко
доктор фіз.-мат. наук, професор О.О. Булгаков

Рекомендовано до друку Науково-методичним центром Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Протокол № 36 від 13.03.2001 р.

© В.Б. Казанський, 2004

© Харківський національний
університет ім. В.Н.Каразіна, 2004

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	5
1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ.....	6
1.1. Гамма-функция.....	6
1.2. Функции Гаусса и вероятности ошибок	6
1.3. Функциональный определитель.....	7
1.4. Дифференциал функций двух переменных.....	8
1.5. Разложение функций в ряд.....	9
1.6. Вычисление интеграла Ферми.....	10
1.7. Задачи и упражнения для самостоятельной работы.....	12
2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ.....	14
2.1 Определение и понятия теории вероятности.....	14
2.2 Свойства вероятностей.....	15
2.3 Основные характеристики случайных величин.....	17
2.4 Функции распределения.....	18
2.5 Примеры решения задач.....	19
2.6 Задачи и упражнения для самостоятельной работы.....	22
3. ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГИББСА.....	26
3.1 Уравнения движения.....	26
3.2 Фазовое пространство.....	27
3.3 Теорема Лиувилля.....	28
3.4 Распределения Гиббса.....	28
3.5 Примеры решения задач.....	31
3.6 Задачи и упражнения для самостоятельной работы.....	34
4. КЛАССИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА.....	37
4.1 Идеальный газ – простейшая статистическая система.....	37
4.2 Распределения Максвелла-Больцмана.....	37
4.3 Уравнение состояния и характерные величины идеального газа.....	39
4.4 Число и функция состояний молекулы идеального газа.....	40
4.5 Функция распределения и состояний идеального газа.....	41
4.6 Примеры решения задач.....	42
4.7 Задачи и упражнения для самостоятельной работы.....	47
5. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ПАРАМЕТРЫ.....	50
5.1. Начала термодинамики.....	50
5.2. Термодинамические потенциалы (характеристические функции).....	51

5.3. Дифференциальные соотношения термодинамики. Уравнения Гиббса-Гельмгольца.....	53
5.4. Тепловые и упругие коэффициенты. Критерии устойчивости.....	53
5.5. Примеры решения задач.....	54
5.6. Задачи и упражнения для самостоятельной работы.....	57
6. СТАТИСТИКА КВАНТОВЫХ СИСТЕМ.....	60
6.1. Общие положения и понятия.....	60
6.2. Идеальный газ из двухатомных молекул.....	61
6.3. Функция состояний и энергия твердого тела.....	62
6.4. Электронный газ в металлах.....	64
6.5. Законы и термодинамические параметры равновесного излучения.....	65
6.6. Примеры решения задач.....	67
6.7. Задачи и упражнения для самостоятельной работы.....	70
7. ТЕОРИЯ МАЛЫХ ФЛУКТУАЦИЙ.....	72
7.1. Общие положения.....	72
7.2. Вероятность неравновесных состояний.....	72
7.3. Флуктуации термодинамических величин в однородной среде.....	74
7.4. Флуктуации в токовых приборах.....	75
7.5. Примеры решения задач.....	76
7.6. Задачи и упражнения для самостоятельной работы.....	79
8. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ.....	81
8.1. Явления релаксации и переноса.....	81
8.2. Кинетическое уравнение Больцмана.....	83
8.3. Определение потоков.....	84
8.4. Примеры решения задач.....	85
9. УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ. ОТВЕТЫ.....	90
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	108
П.1. Значения некоторых физических величин.....	108
П.2. Типовые индивидуальные задания контрольных работ.....	109
ЛИТЕРАТУРА.....	112

ПРЕДИСЛОВИЕ

Методическое пособие отражает содержание практических занятий и частично лекций курса «Статистическая физика и термодинамика», который длительное время читал автор на радиофизическом факультете Харьковского национального университета. Курс является завершающим разделом общей дисциплины «Теоретическая физика», рассчитан на 54 часа лекций и 18 часов практических занятий, включающих 1 час контрольной работы по индивидуальным заданиям.

Цель издания – разработать, собрать и систематизировать в одном пособии представленные в различных учебниках, учебных пособиях и монографиях (см. список литературы) задачи и упражнения. Выбор их тематики определялся уровнем образования в классических и педагогических университетах и значимостью в прикладных разделах физики, включая радиофизику, электронику, спектроскопию, биофизику и т.п.

Активному усвоению материала способствует структура пособия. В нем излагаются необходимые сведения о теории вероятностей и математическом аппарате. В начале каждого раздела наряду с фундаментальными положениями, законами, методами статистической физики и термодинамики представлены основные формулы и соотношения. Для развития культуры и приобретения навыков самостоятельной работы приведены подробные решения с анализом характерных типовых задач. Завершает раздел набор задач различной трудности, которые могут быть предложены как на аудиторных занятиях, так и в качестве домашнего задания.

Из-за ограниченности времени, отводимого на практические занятия, в пособие не включены задачи, связанные с вопросами равновесия фаз и физической кинетики.

Автор считает, что работа с пособием закрепит теоретические знания студентов и подготовит их к изучению специальных дисциплин, сессионным и государственным экзаменам.

Автор

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

1.1 Гамма-функция

Тождественные интегральное и факториальное представления гамма-функции $\Gamma(z)$ для всех вещественных или комплексных значений z имеют вид:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{z-1} dx, \text{ для } \operatorname{Re} z > 0, \quad (1.1)$$

$$\Gamma(z, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-\beta x} x^{z-1} dx = \beta^{-z} \Gamma(z), \text{ для } \beta > 0,$$

$$\Gamma(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m! m^z}{z(z+1) \cdot \dots \cdot (z+m)}, \quad (1.2)$$

$$[\Gamma(z)]^{-1} = z e^{\gamma z} \prod_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{m}\right) \cdot \exp(-z/m) \right\}, \quad (1.3)$$

где $\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^m (1/n) - \ln m \right\} \approx 0.57721$ – постоянная Эйлера.

При произвольных значениях аргумента справедливы следующие рекуррентные соотношения

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z); \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = -z\Gamma(z)\Gamma(-z) = \pi/\sin \pi z. \quad (1.4)$$

Когда z является положительным целым или полуцелым числом, то

$$\Gamma(n+1) = n!; \quad \Gamma(n+1/2) = (2n)! \sqrt{\pi} / [2^{2n} \cdot (n!)] ; \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}; \quad (1.5a)$$

$$\Gamma(1/2 - n) = (-1)^n \cdot 2^n (n!) \sqrt{\pi} / (2n)!. \quad (1.5b)$$

Через гамма-функцию определяется интеграл Пуассона

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta y^2} y^z dy = 0.5 \beta^{-(z+1)/2} \Gamma[(z+1)/2]. \quad (1.6)$$

1.2. Функции Гаусса и вероятности ошибок (error function)

Функцией Гаусса называют нормированную зависимость вида:

$$\psi(x) = \left[\exp(-x^2/2\delta^2) \right] / \sqrt{2\pi\delta^2}. \quad (1.7)$$

Ее ширина 2δ есть расстояние между точками $x = -\delta$ и $x = \delta$, где вторая производная равна нулю.

Функция вероятности ошибок (интеграл вероятности):

$$\Phi(x) = \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (1.8)$$

Чтобы получить приближенное значение $\Phi(x)$, подынтегральную функцию представляют степенным рядом с последующим интегрированием слагаемых:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{n! \cdot (2n+1)} + \dots \right]. \quad (1.9)$$

Через функцию вероятности вычисляются интегралы

$$\int_{\pm x}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} (1 \pm \Phi(x)) / 2; \quad (1.10a)$$

$$\int_{\pm x}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} (1 \mp \Phi(x)) / 4 \pm x e^{-x^2} / 2. \quad (1.10b)$$

1.3. Функциональный определитель

1.3.1. **О п р е д е л е н и е .** Пусть в некоторой области $G \in R^n$ определены функции f_1, \dots, f_n , каждая из которых зависит от n аргументов x_1, \dots, x_n . Функции f_k непрерывны, соответственно дифференцируемы по каждой из координат x_j ($k, j = 1, \dots, n$). Функциональным определителем (якобианом преобразования (ЯП)) от функций $\{f_k\}_{k=1}^n$ по переменным $\{x_k\}_{k=1}^n$ называют определитель n -го порядка, элементы которого задаются частными производными:

$$\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}. \quad (1.11)$$

Абсолютное значение якобиана преобразования в некоторой точке равно коэффициенту искажения объема в n -мерном пространстве в этой точке. ЯП применяется в формулах преобразования кратных интегралов, например:

$$\iint_{\Delta_1} \dots \int \Phi(f_1, \dots, f_n) df_1 \dots df_n = \iint_{\Delta} \dots \int \Phi[f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)] \cdot \left| \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \right| dx_1 \dots dx_n.$$

Функции f_1, \dots, f_n называются зависимыми, если существует функция F , удовлетворяющая в каждой точке пространства x_1, \dots, x_n соотношению

$$F\{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)\} = 0.$$

Чтобы функции f_1, \dots, f_n были независимыми в рассматриваемом пространстве, ЯП не должен обращаться тождественно в нуль.

1.3.2. Свойства якобиана преобразования следуют из его определения:

$$\frac{D(f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_k, f_{k+1}, \dots, f_n)} = \frac{D(f_1, \dots, f_k)}{D(x_1, \dots, x_k)} \Big|_{(f_{k+1}, \dots, f_n) = \text{const}},$$

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(x_1, x_2)} = -\frac{D(f_2, f_1)}{D(x_1, x_2)} = \frac{D(f_2, f_1)}{D(x_2, x_1)},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{D(f_1, f_2)}{D(x_1, x_2)} = \frac{D\left(\frac{df_1}{dt}, f_2\right)}{D(x_1, x_2)} + \frac{D\left(f_1, \frac{df_2}{dt}\right)}{D(x_1, x_2)}.$$

Пусть функции f_j зависят от x_k , а функции x_k заданы уравнениями $x_k = g_k(z_1, \dots, z_n)$ ($j, k = 1, \dots, n$) и дифференцируемые по каждой из координат, тогда соответствующий ЯП равен

$$\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(z_1, \dots, z_n)} = \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \cdot \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(z_1, \dots, z_n)}.$$

1.4. Дифференциал функции двух переменных

1.4.1. О п р е д е л е н и е . Дифференциалом функции $f(x, y)$ называется главная линейная часть ее приращения

$$df = (\partial f / \partial x) dx + (\partial f / \partial y) dy. \quad (1.12)$$

При этом величина смешанной производной функции, непрерывной в области определения, не зависит от порядка переменных, по которым берутся производные

$$\partial^2 f / \partial x \partial y = \partial^2 f / \partial y \partial x. \quad (1.13)$$

Например, произвольное линейное приращение $\Delta F(x, y) = Q(x, y)\Delta x + P(x, y)\Delta y$ в случае существования и непрерывности функций $Q(x, y)$, $P(x, y)$ и их производных будет полным дифференциалом при равенстве $Q'_y = P'_x$. Если ΔF есть дифференциал, то $\oint \Delta F = 0$.

1.4.2. Д и ф ф е р е н ц и а л 2 – г о п о р я д к а ф у н к ц и и д в у х п е р е м е н н ы х $f(x, y)$:

$$d^2 f = \left(\partial^2 f / \partial x^2 \right) dx^2 + 2 \left(\partial^2 f / \partial x \partial y \right) dx dy + \left(\partial^2 f / \partial y^2 \right) dy^2.$$

Если $f(x, y)$ имеет экстремум в точке (x_0, y_0) , то в этой точке ее дифференциал 1-го порядка либо тождественно равен нулю, либо не существует. Условие $df(x, y) = 0$ равносильно системе двух равенств:

$$\partial f(x, y) / \partial x = 0, \partial f(x, y) / \partial y = 0. \quad (1.15)$$

Определение экстремума функции и его необходимое условие остаются теми же для любого числа аргументов.

Достаточным условием экстремума функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) , удовлетворяющей уравнениям (1.15), является выполнение неравенства

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0. \quad (1.16)$$

Функция $f(x_0, y_0)$ имеет максимум, когда f''_{xx} (или f''_{yy}) отрицательна, – минимум, если f''_{xx} (или f''_{yy}) положительна. В силу (1.16) знаки вторых производных f''_{xx} и f''_{yy} совпадают.

1.5. Разложение функций в ряды

1.5.1. С т е п е н н ы е р я д ы . Функцию $f(x)$, непрерывную и имеющую все производные при $x = a$, можно (когда выполнено условие сходимости) представить в виде степенного ряда Тейлора или Маклорена ($a = 0$):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a) (x - a)^n / n!. \quad (1.17)$$

Для функции двух переменных:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(x, y), \quad (1.18)$$

здесь все производные функции, в том числе, нулевого порядка ($n=0$) определяются в точке $x=a$, $y=b$.

1.5.2. Ряды Фурье. Всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая на промежутке $0 \leq x \leq L$ условиям Дирихле, может быть разложена на этом промежутке в сходящийся ряд:

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi nx/L) + b_n \sin(2\pi nx/L)], \quad (1.19)$$

где $a_n = (2/L) \int_0^L f(x) \cos(2\pi nx/L) dx$, $b_n = (2/L) \int_0^L f(x) \sin(2\pi nx/L) dx$.

Для четных ($f(-x) = f(x)$, $b_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$) и нечетных ($f(x) = -f(-x)$, $a_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$) функций:

$$a_n = (4/L) \int_0^{L/2} f(x) \cos(2\pi nx/L) dx, \quad b_n = (4/L) \int_0^{L/2} f(x) \sin(2\pi nx/L) dx.$$

1.6. Вычисление интеграла Ферми

Интегралом Ферми называется интеграл вида:

$$I = \int_0^{\infty} g(\varepsilon) \cdot f((\varepsilon - \mu)/kT) d\varepsilon,$$

где $f(\varepsilon - \mu/kT) = (e^{(\varepsilon - \mu)/kT} + 1)^{-1}$ – функция распределения Ферми-Дирака, $g(\varepsilon)$ – монотонно возрастающая функция, равная нулю при $\varepsilon = 0$, а $\mu/kT \gg 1$. Функция $f(z)$, где $z = (\varepsilon - \mu)/kT$, при заданных условиях близка к единице, если $\varepsilon < \mu$, и стремится к нулю ($\sim e^{-z}$) при $z \rightarrow \infty$. Ее производная $\partial f/\partial \varepsilon$ – симметричная функция z с резким максимумом в точке $\varepsilon = \mu$, а при других значениях ε близка к нулю. После вычисления интеграла по частям и

представления функции $F(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon g(x) dx$ рядом Тейлора вблизи точки $\varepsilon = \mu$ имеем

$$I = F(\mu) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(kT)^m F^{(m)}(\mu)}{m!} \int_{-\mu/kT}^{\infty} \frac{z^m e^z dz}{(e^z + 1)^2}.$$

Так как при больших отрицательных значениях z подынтегральная функция близка к нулю, а $\mu/kT \gg 1$, то с высокой степенью точности нижний предел интеграла можно положить равным $(-\infty)$. Учитывая равенство $e^z (e^z + 1)^{-2} = e^{-z} (e^{-z} + 1)^{-2}$, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^m e^z dz}{(e^z + 1)^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{z^m e^z dz}{(e^z + 1)^2} + \int_0^{\infty} \frac{z^m e^z dz}{(e^z + 1)^2} = \int_0^{\infty} \frac{[1 + (-1)^m] z^m e^{-z}}{(e^{-z} + 1)^2} dz,$$

т.е. слагаемые с нечетным значением m исчезают, а интеграл I преобразуется к виду:

$$I = F(\mu) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(kT)^{2m} F^{(2m)}(\mu)}{(2m)!} \int_0^{\infty} \frac{z^{2m} e^{-z}}{(1 + e^{-z})^2} dz.$$

Поскольку $(1 + e^{-z})^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n e^{-(n-1)z}$, то после замены $z = y/n$ имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{2m} e^{-z}}{(1 + e^{-z})^2} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{2m}} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{2m} dy \quad y = (2m)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{2m}}.$$

Таким образом, вычисление фермиевского интеграла сводится к формуле

$$I = F(\mu) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (kT)^{2m} F^{(2m)}(\mu) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{2m}}. \quad (1.20)$$

Если ограничиться первым слагаемым в сумме ($m=1$), учитывая $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n^2 = \pi^2/12$ (см. задачу 1.16), то:

$$\int_0^{\infty} \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} + 1} = \int_0^{\mu} g(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{(\pi kT)^2}{6} \cdot g'(\mu) = F(\mu) + F^{(2)}(\mu) (\pi kT)^2 / 6. \quad (1.21)$$

Для частного случая: $g(\varepsilon) = \varepsilon^s$ ($s > 0$), имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^s d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} + 1} = \frac{\mu^{s+1}}{s+1} \left[1 + \frac{s(s+1)}{6} \left(\frac{\pi kT}{\mu} \right)^2 \right].$$

1.7. Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1.1. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} \exp(-\varepsilon/kT)g(\varepsilon)d\varepsilon$, где $g(\varepsilon) = \varepsilon^\alpha$, а α принимает значения: 0,5; 1,5; 2.

1.2. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} (p^3 - 2p + 1)\exp(-p^2/2m\theta)dp$.

1.3. Вычислить интеграл $\int_{-a}^{\infty} [\exp(-(x^2 + 2ax)/b)]x dx$.

1.4. Оценить с точностью до 0,01 интеграл вида , когда
а) $\alpha = 1/2$; б) $\alpha = -1/2$; в) $\alpha = 1$.

1.5. Исходя из определения $\operatorname{erf} x$, доказать, что

$$\text{а) } \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\pm x}^{\infty} e^{-t^2} dt = 1 \mp \operatorname{erf} x, \quad \text{б) } \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\pm x}^{\infty} e^{-t^2} t^2 dt = \frac{1}{2} \pm \left\{ \frac{x e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{\operatorname{erf} x}{2} \right\}.$$

1.6. Каждая из трех переменных A , B , C является дифференцируемой функцией двух других, рассматриваемых как независимые. Доказать равенство

$$\left(\frac{\partial A}{\partial B}\right)_C \cdot \left(\frac{\partial B}{\partial C}\right)_A \cdot \left(\frac{\partial C}{\partial A}\right)_B = -1.$$

1.7. Проинтегрировать дифференцируемые формы $du = dx + dy$, $dv = x(dx + dy)$ по следующим двум траекториям на плоскости: I. – прямые линии $(x_1, y_1) \rightarrow (x_2, y_1) \rightarrow (x_2, y_2)$; II. – прямые линии $(x_1, y_1) \rightarrow (x_1, y_2) \rightarrow (x_2, y_2)$. $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ – две точки, для которых $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$. Считая, что $u = x + y$, показать:

$$\int_I du = \int_{II} du = u(Q) - u(P), \quad \int_I dv \neq \int_{II} dv.$$

1.8. Найти якобиан преобразования от декартовых к полярным координатам.

1.9. Найти якобиан преобразования от декартовых координат к сферическим.

1.10. Найти функциональный определитель по переменным $\{x_j\}_{j=1}^3$ от следующих функций а) $f_1 = x_1^2 + x_2^2$, $f_2 = 2x_1x_2 + x_3$, $f_3 = 2x_1x_3$; б) $f_1 = x_1x_2e^{x_3}$, $f_2 = 4x_1^2$, $f_3 = x_1x_3e^{x_2}$.

1.11. Определить, являются ли зависимыми следующие пары функций:
 а) $f_1 = \sin(xya)$, $f_2 = \cos(xyb)$; б) $f_1 = x^2 + y^2 + a$, $f_2 = bx^2 + y^2$;
 в) $f_1 = e^x \sin y$, $f_2 = e^y \sin x$.

1.12. Как изменится площадь при переходе от переменных (x, y) к (u, v) , если преобразование осуществляется по формулам а) $u = axe^y$, $v = bxy$;
 б) $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = 2xy$.

1.13. Определить точки экстремумов и их характер для следующих функций:
 а) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$, б) $f(x, y) = (x^3 + y^3)/3 + x^2y - y^2x - x$.

1.14. Определить, является ли приращение $\Delta F(x, y) = P(x, y)\Delta x + Q(x, y)\Delta y$ полным дифференциалом относительно переменных x, y , если
 а) $Q(x, y) = 3x^2y$, $P(x, y) = 3y^2x$; б) $Q(x, y) = y \sin ax$, $P(x, y) = x \sin ay$;
 в) $Q(x, y) = e^{ax}xy$, $P(x, y) = e^{ay}xy$; г) $Q(x, y) = b \sin(axy)$, $P(x, y) = a \sin(bxy)$.

1.15. Представить рядом Маклорена до второго порядка малости функции:
 а) $F(x, y) = (1 + x) \ln(x + y + 1)$; б) $F(x, y) = (y^2 + 1)e^{-xy}$.

1.16. Доказать, что а) $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} j^{-2} = \pi^2/12$; б) $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} = \pi^2/6$.

1.17. Доказать, что $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-4} = \pi^4/90$.

1.18. Доказать, что $\int_0^{\infty} (x^3/(e^x - 1)) dx = \pi^4/15$.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1. Определения и понятия теории вероятностей (ТВ)

ТВ изучает количественную характеристику массовых явлений. *Испытанием* в ТВ принято называть реализацию точно установленных предписаний и условий, которые принципиально могут воспроизводиться неограниченное число раз. Результат испытания называется *событием*.

Если событие A при N одинаковых испытаниях происходит $K_N(A)$ – раз, то величина

$$W_N(A) = K_N(A)/N \quad (2.1)$$

представляет собой частоту повторения события A в заданной серии испытаний. Если выражение (2.1) при $N \rightarrow \infty$ стремится к предельному значению

$$W(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} K_N(A)/N, \quad (2.2a)$$

то последнее называется *вероятностью* события. Вероятность некоторого k -го состояния системы может быть определена по формуле

$$W(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \Delta t_k / T, \quad (2.2б)$$

где Δt_k – время пребывания системы в k -ом состоянии, T – время наблюдения.

Следует отметить, что характер приближения к вероятности при увеличении числа испытаний отличается от “стремления к пределу” в математическом смысле слова. При возрастании числа испытаний частота приближается к вероятности, но не с полной достоверностью, а с большой вероятностью, которая при большом числе опытов может рассматриваться как практическая достоверность. (Строгое определение вероятности см. в соответствующих учебниках).

Если случайная величина (СВ) x имеет непрерывный спектр значений, то вероятность того, что она будет находиться в интервале от x до $x + dx$ равна

$$dW(x) = f(x) dx, \quad (2.2в)$$

где $f(x)$ – функция статистического распределения (функция распределения). Ее еще называют *плотностью вероятности*, так как она имеет смысл вероятности отнесенной к единичному интервалу изменения СВ.

2.2. Свойство вероятностей

Из определения (2.2) следует, что

$$0 \leq W(A) \leq 1. \quad (2.3)$$

Два события A и B называются *несовместимыми* (несовместными), если при испытании они не могут произойти одновременно. Суммой или объединением двух событий

$$C = A \cup B$$

называется наступление одного из двух событий. Знак \cup означает “или – или”. Вероятность наступления одного из двух несовместимых событий A или B определяется *теоремой сложения вероятностей*

$$W(A \cup B) = W(A) + W(B). \quad (2.4)$$

Эта теорема, следующая из (2.2), распространяется на случай любого числа несовместных событий, как с дискретным, так и непрерывным спектром значений.

$$W(\dots x_k \cup x_{k+1} \dots \cup x_n) = \sum_{k=1}^n W(x_k); \quad W(x \in [x_1, x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx. \quad (2.5)$$

Вероятность того, что СВ принимает значение, меньшее некоторого заданного числа x , равна

$$W(x_i < x) = \Phi(x) = \sum_{x_i < x} W(x_i).$$

Если СВ имеет непрерывный спектр значений из ограниченного или бесконечного интервала, то

$$W(x < x_0) = \Phi(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x) dx.$$

Совокупность всех событий, которые могут произойти при одном испытании, называется *полной системой*. Вероятность реализации хотя бы одного события из полной системы есть достоверное событие (условие нормировки):

$$\sum_{k=1}^N W(x_k) = 1; \quad \int f(x) dx = 1. \quad (2.6)$$

Здесь суммирование (интегрирование) ведется по всем возможным событиям (значениям).

Если полная система состоит из двух событий A и \bar{A} , \bar{A} – противоположное событие, заключающееся в том, что событие A не происходит, то этот факт можно представить формулой

$$A \cup \bar{A} = U,$$

где U – достоверное событие. В этом случае

$$W(A \cup \bar{A}) = W(U) = 1; \quad W(\bar{A}) = 1 - W(A). \quad (2.7)$$

Два события называются *независимыми*, если наступление одного из них не влияет на вероятность реализации другого. Сложное событие C , состоящее в одновременной или последовательной реализациях двух независимых A и B , называется *пересечением* (или произведением) составляющих его событий

$$C = A \cap B.$$

Знак \cap имеет смысл “как – так и”.

Для двух независимых событий выполняется *теорема умножения вероятностей*

$$W(A \cap B) = W(A)W(B); \quad dW(x, y) = dW(x) \cdot dW(y). \quad (2.8)$$

Эта теорема обобщается на произвольное число независимых событий.

Если событие A изменяет условия испытания и тем самым вероятность наступления события B , то эти события называются *взаимозависимыми*. Вероятность наступления события B в предположении, что событие A произошло, называется *условной вероятностью* и обозначается символом $W(B/A)$. Для одновременного или последовательного наступления двух взаимозависимых событий A и B теорема умножения принимает вид

$$W(A \cap B) = W(A)W(B/A) = W(B)W(A/B). \quad (2.9)$$

2.3. Основные характеристики случайной величины

В качестве важных параметров распределения в теории вероятностей рассматривают *среднее значение* СВ:

$$\bar{x} = \sum_i x_i W(x_i), \quad \bar{x} = \int x f(x) dx, \quad (2.10)$$

ее *среднеквадратичное отклонение* (флуктуацию)

$$\sigma = \sqrt{(\Delta x)^2} = \sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 W(x_i)}, \quad \sigma = \sqrt{\int (x - \bar{x})^2 f(x) dx}. \quad (2.11)$$

и *дисперсию* $-D = \sigma^2$. Последняя характеризует разброс СВ относительно ее среднего значения. *Относительной флуктуацией* называется величина

$$\delta_x = \sqrt{(\Delta x)^2} / \bar{x} = \sigma / \bar{x}. \quad (2.12)$$

Наряду со средними значениями СВ используют понятие среднего значения функций СВ:

$$\overline{F(x_i)} = \sum_i F(x_i) \cdot W(x_i), \quad \overline{F(x)} = \int F(x) f(x) dx. \quad (2.13)$$

Или с учетом условий нормировки:

$$\overline{F(x_i)} = \sum_i F(x_i) \cdot W(x_i) / \sum_i W(x_i), \quad \overline{F(x)} = \int F(x) f(x) dx / \int f(x) dx. \quad (2.14)$$

Среднее значение суммы СВ равно сумме их средних значений

$$\overline{\sum x_i} = \sum \bar{x}_i, \quad (2.15)$$

среднее значение произведения независимых СВ равно произведению их средних значений

$$\overline{\prod_{i=1} x_i} = \prod_{i=1} \bar{x}_i. \quad (2.16)$$

Здесь под x_i понимается совокупность произвольных СВ.

2.4. Функции распределения

Если в каждом из N независимых испытаниях вероятность наступления события A равна w , то вероятность, что это событие реализуется в точности k раз, не учитывая порядка событий, определяется *биномиальным законом распределения* (или распределением Бернулли):

$$W_N(k) = C_N^k w^k (1-w)^{N-k} = N! w^k (1-w)^{N-k} / (k!(N-k)!). \quad (2.17)$$

Эта формула обобщается на несколько независимых событий A_i ($i=1,2,\dots$). Если их вероятности соответственно равны $w_i(A_i)$, то вероятность, что в N испытаниях точно k_i раз произойдет событие A_i ($N = \sum_i k_i$), равна

$$W_N(k_1, k_2, \dots) = N! (w_1^{k_1} \cdot w_2^{k_2} \cdot w_3^{k_3} \cdot \dots) / (k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \dots) = N! \prod_i (w_i^{k_i} / k_i!). \quad (2.18)$$

Вероятность, что событие A осуществляется в N опытах *по крайней мере* k раз, есть сумма $N - k + 1$ первых членов разложения бинома $(w + q)^N$:

$$\sum_{j=0}^{N-k} C_N^j w^{N-j} (1-w)^j = w^N + C_N^1 w^{N-1} q + \dots + C_N^k w^k q^{N-k}, \quad (2.19)$$

где $q = 1 - w$ – вероятность события \overline{A} .

Распределение Бернулли удовлетворяет условию нормировки

$$\sum_{k=0}^N W_N(k) = 1. \quad (2.20)$$

При биномиальном распределении среднее число реализаций случайного события равно произведению числа испытаний и его вероятности при одном испытании

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^N k W_N(k) = Nw. \quad (2.21)$$

Дисперсия такого случайного события равна произведению трех сомножителей

$$\overline{(\Delta k)^2} = \overline{k^2} - \bar{k}^2 = Nw(1-w).$$

Асимптотическими выражениями распределения Бернулли является нормальное гауссовское (см. раздел 1) и распределение Пуассона, когда при

большом числе испытаний ($N \gg k$) вероятность w события – малая величина ($w \ll 1$) (закон редких явлений):

$$W_N(k) = (Nw)^k e^{-Nw} / k!. \quad (2.22)$$

Оно является математической моделью радиоактивного распада, количества экстремальных ситуаций, дробового эффекта и других “редких событий”. Среднее значение и дисперсия случайного события, распределенного по этому закону, совпадают и равны

$$\bar{k} = \overline{(\Delta k)^2} = Nw. \quad (2.23)$$

2.5. Примеры решения задач

Пример 1. Система содержит N статически независимых частиц. Вероятность, что одна частица попадет в состояние P , равна p . Найти вероятность попадания n частиц в это состояние.

Решение . 1. Событие нахождения n частиц в состоянии P – сложное, состоящее из двух независимых: 1) n – частиц находятся в состоянии P и 2) остальные $N - n$ не находятся в этом состоянии. Поэтому вероятность нахождения n конкретных (“номерованных”) частиц в состоянии P определяется теоремой умножения:

$$p^n (1 - p)^{N - n}.$$

2. Для тождественных частиц искомая вероятность описывается биномиальным распределением:

$$W_N(n) = \frac{N!}{n!(N - n)!} p^n (1 - p)^{N - n}.$$

Пример 2. Решить задачу примера 1 при условии $N \gg n$. Рассмотреть два случая 1. $N \rightarrow \infty$, $p \ll 1$; 2. $n \gg 1$, $N \gg 1$.

Решение . Среднее число частиц в состоянии P

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^N n W_N(n) = \sum_{n=1}^N \frac{N!}{(n-1)! \cdot (N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}.$$

После замены n на $v = n - 1$ и очевидных преобразований с учетом (2.20) имеем

$$\bar{n} = Np \sum_{v=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{[(N-1)-v]! \cdot v!} \cdot p^v (1-p)^{(N-1)-v} = Np \sum_{v=0}^{N-1} W_{N-1}(v) = Np.$$

1. Для случая $N \gg n$ и $p \ll 1$

$$\begin{aligned} W_N(n) &= N(N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1) \cdot p^n (1-p)^{N-n} / n! = \\ &= (pN)^n \cdot (1-1/N) \cdot \dots \cdot (1-(n-1)/N) \cdot (1-p)^N / n! \approx (pN)^n (1-p)^N / n!. \end{aligned}$$

Поскольку $Np = \bar{n}$ – постоянная величина, в том числе, при условии

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} Np = \bar{n}, \text{ то}$$

$$W_N(n) = (pN)^n (1-pN/N)^N / n!.$$

Отсюда следует распределение Пуассона:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} W_N(n) = W(n) = (pN)^n e^{-pN} / n! = \left(\bar{n}\right)^n \cdot e^{-\bar{n}} / n!.$$

2. Условие $n \gg 1$ и $N \gg 1$ означает, что \bar{n} и n можно считать большими, а разность $\Delta n = \bar{n} - n \ll \bar{n}$. Прологарифмируем распределение Пуассона, используя приближенную формулу Стирлинга $\ln n! \cong n \ln n - n$:

$$\begin{aligned} \ln W(n) &= n \ln \bar{n} - \bar{n} - [n \ln n - n] = -(\bar{n} - \Delta n) \ln \left[(1 - \Delta n) / \bar{n} \right] - \Delta n \cong \\ &\cong -\bar{n} \cdot \left\{ \left((1 - \Delta n) / \bar{n} \right) \cdot \left(-\Delta n / \bar{n} - (\Delta n)^2 / 2\bar{n}^2 - \dots \right) + \Delta n / \bar{n} \right\} = -(\Delta n)^2 / 2\bar{n}. \end{aligned}$$

Рассмотренный случай с учетом условия нормировки и приводит к распределению Гаусса:

$$W(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\Delta n)^2}} \cdot \exp \left(-\frac{(n - \bar{n})^2}{2(\Delta n)^2} \right).$$

Пример 3. Распределение случайной величины x задано функцией $f(x) = A \exp(-(x-1)^2)$. Найти: среднее значение \bar{x} и вероятность, что $x \leq x_0 = 1.1$.

Решение: После определения коэффициента нормировки $A = 1/\sqrt{\pi}$ находим среднее значение:

$$\bar{x} = \left(1/\sqrt{\pi}\right) \int_{-\infty}^{\infty} [(x-1)+1] e^{-(x-1)^2} dx = 1.$$

2. После замены переменной $y = x - 1$ выражение для искомой вероятности примет вид

$$w(x \leq x_0) \equiv w(y \leq y_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{y_0} e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 e^{-y^2} dy + \int_0^{y_0} e^{-y^2} dy \right].$$

Первое слагаемое в скобках сводится к интегралу Пуассона и равно $0.5\sqrt{\pi}$. Второе – интеграл ошибок. Но поскольку $y_0 = 0.1 < 1$, то можно подынтегральную функцию разложить в ряд, а затем почленно проинтегрировать

$$\int_0^{y_0} e^{-y^2} dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^{y_0} y^{2n} dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_0^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n!}.$$

Вычисления дают $w(x \leq x_0) \cong 0.5 + 0.1/\sqrt{\pi}$.

Пример 4. Плотность вероятности случайной величины задана функцией Гаусса $(2\pi\sigma^2)^{-1} \exp[-(x-x_0)^2/2\sigma^2]$, где x_0 – ее среднее значение, а σ – среднее квадратичное отклонение. Каково должно быть значение σ , чтобы вероятность попадания ее в интервал $x_- \leq x \leq x_+$ ($x_{\mp} = x_0 + D \mp \Delta$, $D > \Delta > 0$) достигала максимума?

Решение. Искомая вероятность при замене переменной $t = (x - x_0)/\sigma$ описывается формулой:

$$W(x_- \leq x \leq x_+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{x_-}^{x_+} \exp(-(x-x_0)^2/2\sigma^2) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(D-\Delta)/\sigma}^{(D+\Delta)/\sigma} \exp(-t^2/2) dt.$$

Заметим, что $\lim_{\substack{\sigma \rightarrow 0 \\ \sigma \rightarrow \infty}} W = 0$. Чтобы найти экстремум $W(\sigma)$, воспользуемся

условием $\partial W / \partial \sigma = 0$:

$$(D + \Delta) \cdot e^{-(D+\Delta)^2/2\sigma^2} = (D - \Delta) \cdot e^{-(D-\Delta)^2/2\sigma^2}.$$

Отсюда следует $\sigma_{(\max)} = \sqrt{2D \cdot \Delta / [\ln((D + \Delta)/(D - \Delta))]}$. Если считать интервал узким $\Delta/D < 1$, то, представляя логарифм рядом, имеем $\sigma \approx D \cdot [1 - (\Delta/D)^2/6]$.

Пример 5. Аппаратура состоит из $N = 2000$ элементов. Вероятность выхода из строя каждого из них $w = 0.0005$. Определить вероятность выхода из строя аппаратуры.

Решение. Аппаратура не работает при выходе из строя хотя бы одного элемента. Искомая вероятность определяется из (2.19) при $k = 1$:

$$W_N = \sum_{j=0}^{N-1} C_N^j w^{N-j} (1-w)^j = \sum_{j=0}^N C_N^j w^{N-j} (1-w)^j - (1-w)^N = 1 - (1-w)^N = 0.63.$$

Здесь учтено, что распределение Бернулли удовлетворяет условию нормировки ($\sum_{j=0}^N C_N^j w^{N-j} (1-w)^j = 1$). Поскольку по условию задачи $N \gg 1$, $w \ll 1$, то можно воспользоваться и распределением Пуассона:

$$W_N \approx \sum_{j=0}^{N-1} (Nw)^{N-j} e^{-Nw} / (N-j)! = \sum_{j=0}^N (Nw)^{N-j} e^{-Nw} / (N-j)! - e^{-Nw} = 1 - e^{-Nw}.$$

Заметим, что $\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ w \rightarrow 0}} Nw = \bar{n}$ и $\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ w \rightarrow 0}} (1-w)^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left((1 - \bar{n}/N)^{N/\bar{n}} \right)^{\bar{n}} = e^{-Nw}$.

2.6. Задачи и упражнения для самостоятельной работы

2.1. Производится три независимых выстрела по мишени, вероятность попадания при каждом выстреле равна $p = 0.4$. Определить вероятность: 1. двух и трех попаданий; 2. хотя бы одного попадания; 3. промаха при трех выстрелах.

2.2. Используя условия предыдущей задачи, найти среднее число попаданий в мишень, их дисперсию и относительную флуктуацию.

2.3. Плотность вероятности случайной величины x имеет вид $f(x) = Ae^{-|x-1|}$. Определить среднее значение, дисперсию и относительную флуктуацию x .

2.4. Система характеризуется распределением вероятностей $f(x, y) = Ax y dx dy$, когда $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, ($a = 1$, $b = 2$), а вне этих

интервалов $f(x, y) = 0$. Найти 1) вероятность, что система имеет значение величины x в интервале $x \in [0.5; 0.6]$ при любом значении y ; 2) средние значения x , y и их произведения.

2.5. Вероятность работы прибора (надежность) равна $p = 0.9$. Для повышения надежности он дублируется такими же самими. Сколько нужно поставить дублирующих приборов, чтобы надежность схемы была не ниже $P = 0.999$.

2.6. Плотность распределения случайных величин x и y задана законом Коши $f(x, y) = A / [(1 + x^2)(1 + y^2)]$. Найти среднее значение x , y и вероятность того, что 1) каждая из величин x и y при произвольном значении другой будет находиться в интервале от -1 до 1 ; 2) две величины находятся в заданных интервалах.

2.7. Распределение случайной величины x задано распределением Гаусса. Доказать, что $\overline{x^4} = 3(\overline{x^2})^2$.

2.8. Найти вероятность выпадения хотя бы раз двух шестерок при 24 бросаниях пары игральных костей.

2.9. Как велика вероятность того, что при шестикратном бросании игральной кости будет выброшена а) только одна шестерка; б) по крайней мере одна шестерка.

2.10. Из двух колод вынимается наугад по карте. Определить вероятность того, что 1) обе карты окажутся масти пик; 2) хотя бы одна из карт окажется масти пик.

2.11. На полупрямой случайно ставятся три точки. Найти вероятность, что из трех отрезков, равных расстояниям этих точек от начала полупрямой, можно составить треугольник.

2.12. Найти вероятность, что лампа, работающая в момент времени t_0 , не выйдет из строя до момента $t_0 + t$ при следующих условиях: 1) вероятность зависит только от величины промежутка времени $[t_0; t_0 + t]$; 2) вероятность выхода лампы из строя за промежуток времени Δt пропорциональна Δt ; 3) события в непересекающиеся промежутки времени независимы между собой.

2.13. Определить время выхода из строя системы, содержащей n электронных ламп, если средний срок службы каждой лампы составляет τ

часов. Вероятность выхода из строя лампы пропорциональна времени, а коэффициент пропорциональности $-q$ предполагается постоянным, т.е. $q(t) = const$.

2.14. Определить интервал времени между сменами ламп приемника, содержащего 6 ламп с гарантийным сроком службы 1000 часов. Предполагается одинаковая вероятность выхода из строя ламп в течение гарантированного срока службы и возможность эксплуатации приемника с надежностью $P = 0.90$.

2.15. Определить гарантированный срок службы ламп телевизора, работающего с надежностью $P = 0.90$, если потребитель меняет все 12 ламп через $t = 500$ часов эксплуатации.

2.16. Выход из строя радиоаппаратуры составляет $n\%$. Для увеличения надежности поставлены m дублирующих цепей. Какова надежность системы?

2.17. Вероятность выхода из строя радиолампы до тренировки составляет $P_1(e) = 0.1$, после тренировки $P_2(e) = 0.05$. Во сколько раз возрастает надежность радиолампы после проведения тренировок?

2.18. Идеальный газ находится в коническом сосуде высотой H . Найти функцию распределения его молекул по высоте z в отсутствие сил тяжести.

2.19. Разрыв электрической цепи наступает вследствие выхода из строя элемента k или двух элементов k_1 и k_2 , которые выходят из строя независимо друг от друга соответственно с вероятностями 0.3; 0.2 и 0.2. Определить вероятность разрыва электрической цепи.

2.20. Найти значения \bar{x} и $\overline{x^2}$ и $\overline{\Delta x^2}$ при равномерном распределении величины x между a и b .

2.21. Получить выражение для вероятности, найти гармонически колеблющуюся точку в интервале dx на линии колебания между крайними значениями A и $-A$.

2.22. Найти функцию распределения угла между полупрямыми на плоскости, из которых одна закреплена, а у другой все ориентации равновероятны.

2.23. Найти функцию распределения угла между закрепленной полупрямой и полупрямой, все направления которой в пространстве равновероятны.

2.24. Плотность распределения вероятности случайных амплитуд боковой качки корабля ($x \geq 0$) имеет вид (закон Релея) $f(x) = (x/a^2) \cdot \exp(-x^2/2a^2)$, где a – наиболее вероятное отклонение корабля. Найти среднее отклонение корабля во время качки.

2.25. Пространство заполняет газ. Вероятность встретить молекулу газа внутри бесконечно малого объема dv равна adv . Для любой молекулы в любой момент времени найдется какая-то молекула – ближайший сосед. Расстояние до ближайшего соседа есть случайная величина. В разные моменты времени она различна. Найти функцию распределения расстояния до ближайшего соседа.

2.26. В центре основания кругового цилиндра радиуса r находится источник излучения. Найти функцию распределения случайной величины – высоты попадания фотона в стенку цилиндра.

2.27. Источник излучения находится над поверхностью прозрачного вещества. Найти функцию распределения углов преломления лучей в прозрачном веществе (отношение показателей преломления в прозрачной среде и воздухе равно κ).

2.28. Вероятность столкновения двух молекул разреженного газа на участке dx равна adx . Найти вероятность прохождения молекулой пути x без столкновения, среднюю длину свободного пробега. Рассмотреть возможность экспериментального определения длины свободного пробега.

2.29. Определить вероятность предсказания трех и шести чисел из 49 в “спортлото”.

2.30. Система радиолокационных станций отслеживает $N = 20$ независимых целей. Вероятность потери одной цели равна $w = 0.05$. Оценить вероятность потери а) S – целей ($S = 1, 2$); б) хотя бы m – целей ($m = 1, 2$).

3. ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГИББСА

3.1 Уравнения движения

Если изолированная система состоит из N частиц (материальных точек), то уравнение движения j -ой точки имеет вид

$$d\vec{P}_j/dt = \dot{\vec{P}}_j = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{kj}, \quad (3.1)$$

где \vec{P}_j – импульс j -ой частицы, \vec{F}_{kj} – сила, с которой k -ая частица действует на j -ую. При наличии в системе связей не все уравнения (3.1) будут независимыми; существуют ограничения, которые записываются дополнительными уравнениями

$$f_v(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \quad v = 1, 2, \dots, m \quad (3.2)$$

относительно координат частиц r_j в системе центра масс. Последние позволяют исключить m координат из общего числа $3N$ и ввести независимые переменные – обобщенные координаты $q_1, q_2, \dots, q_{3N-m}$, через которые и выражаются координаты \vec{r}_n : $\vec{r}_n = \vec{r}_n(q_1, q_2, \dots, q_{3N-m}, t)$, $n = 1, 2, \dots, N$.

Для всякой системы можно ввести *функцию Лагранжа*

$$L(q_1, q_2, \dots, q_s; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s; t) = L(q; \dot{q}; t),$$

где q_j – обобщенные координаты; $\dot{q}_j = dq_j/dt$ – обобщенные скорости; $s = 3N - m$ – число степеней свободы.

Движение системы частиц в этом случае описывается уравнениями Лагранжа второго рода

$$d(dL/d\dot{q}_j)/dt = dL/dq_j, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (3.3)$$

Для статистической механики принята иная формулировка уравнения движения, основанная на введении *обобщенного импульса* $p_j = \partial L/\partial \dot{q}_j$ и *функции Гамильтона* $H(p, q)$:

$$\dot{q}_j = \partial H/\partial p_j; \quad \dot{p}_j = -\partial H/\partial q_j, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (3.4)$$

В случае *консервативной системы* функция Гамильтона есть ее полная

механическая энергия

$$H(p, q) = T(p, q) + U(q), \quad (3.5)$$

где $T(p, q)$ – кинетическая, а $U(q)$ – потенциальная энергии системы.

3.2. Фазовое пространство

Под фазовым понимается воображаемое $6N$ -мерное пространство, осями которого являются $3N$ обобщенных координат и $3N$ обобщенных импульсов. Состояние системы из N частиц в фазовом пространстве в произвольный момент времени задается *изобразительной точкой*. Изменение координат и импульса любой частицы системы приводит к перемещению изобразительной точки в фазовом пространстве. Эволюцию во времени изобразительной точки описывает фазовая траектория. В силу единственности решения уравнения движения с начальными условиями траектория нигде не имеет точек пересечения. Фазовое пространство одной молекулы называется μ -пространством, для одноатомной молекулы μ -пространство шестимерное.

Элементом объема фазового пространства для частиц с непрерывным спектром значений координат и импульсов называется произведение

$$d\Gamma = \prod_{k=1}^3 \prod_{j=1}^N d p_{jk} \cdot d q_{jk} = d\vec{p} \, d\vec{q} = d\Gamma_p \cdot d\Gamma_q. \quad (3.6)$$

Для свободных частиц (не взаимодействуют между собой в отсутствие внешних сил) элемент объема $d\Gamma_q$ равен объему пространства V , где они могут находиться: $d\Gamma_q = V$. При дискретном спектре значений импульса и координат элемент объема фазового пространства системы с f степенями свободы равен

$$d\Gamma = d\Gamma_p \cdot d\Gamma_q = h^f, \quad (3.7)$$

где h – постоянная Планка. Здесь речь идет, кроме квантовых, и о квазиклассических коллективах. Квазиклассическими называют системы, частицы которых подчиняются классическим уравнениям движения, но не все траектории реализуются. Если такие частицы считать свободными, то

$$d\Gamma_p = h^f / V. \quad (3.8)$$

Число состояний (плотность состояний) в заданном фазовом объеме для

квантовых и квазиклассических систем равно

$$\Omega(p, q) d\vec{p} d\vec{q} = \Delta\Gamma/h^f = (1/h^f) \cdot (\partial\Gamma/\partial\varepsilon) d\varepsilon. \quad (3.9)$$

3.3. Теорема Лиувилля

При движении изобразительной точки в фазовом пространстве по фазовой траектории форма элемента фазового пространства $d\Gamma$ с течением времени меняется произвольным образом, однако величина его при этом остается неизменной. Это утверждение называется *теоремой Лиувилля* и записывается в виде $df(q, p, t)/dt = 0$, где $f(q, p, t)$ – функция распределения или плотность изобразительных точек.

3.4. Распределения Гиббса (РГ)

РГ отвечают на вопрос о том, какова вероятность w_i найти систему в состояниях с энергией, заключенной между ε_i и $\varepsilon_i + \delta\varepsilon_i$ ($\delta\varepsilon_i \ll \varepsilon_i$, $i = 1, 2, 3, \dots$). Каждому значению энергии ε_i отвечает своя плотность $\Omega(\varepsilon_i)$ состояний.

Для решения поставленной задачи вводится очень большое число S копий данной системы (тождественных систем) в какой-либо момент времени t . Речь идет об одном гамильтониане $H(p_i, q_i)$, но для разных начальных условий. Такой ансамбль систем распределен в фазовом пространстве с плотностью вероятности $f(p_i, q_i, t)$. Выделенному интервалу энергий соответствует фазовый объем $\Delta\Gamma$ в определенном месте фазового пространства с n числом систем ансамбля. Поэтому вероятность нахождения системы в заданном состоянии равна

$$w_i = \lim_{S \rightarrow \infty} (n/S) = f(p_i, q_i, t) \Delta\Gamma. \quad (3.10)$$

Различают замкнутые (изолированные) и квазинезависимые, слабо взаимодействующие с окружающей средой системы.

3.4.1. Микроканоническое распределение. В термодинамике под замкнутыми условно понимают такие системы, энергия которых за все время наблюдения остается заключенной в заданных узких пределах $\delta\varepsilon_i$. Можно считать, что ее энергия является постоянной $H(p_i, q_i) = E_i$, а изобразительные точки такого ансамбля распределены по гиперповерхности постоянной энергии. Плотность вероятности в этом случае

находится из распределения

$$f [H(p_i, q_i, t)] = \delta[H(p_i, q_i, t) - E] / \Omega(E), \quad (3.11)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, которая определяется для непрерывной функции $\varphi(x)$ при $\varphi(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$ операторным соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta(x - a) dx = \varphi(a).$$

Поскольку все состояния с данной энергией ε_i равновероятны, вероятность, что замкнутая система находится в одном из них, пропорциональна плотности числа состояний

$$w(\varepsilon_i) \sim \Omega(\varepsilon_i). \quad (3.12)$$

Формулы (3.11) или (3.12) суть *микрoканоническое распределение Гиббса*.

3.4.2. **К а н о н и ч е с к о е р а с п р е д е л е н и е .** Рассматриваются физические системы, которые слабо взаимодействуют с окружающей средой (термостатом) и находятся в равновесном состоянии. При постоянном числе частиц вероятность состояния таких систем с данным значением энергии находится из канонического распределения Гиббса

$$w(\varepsilon_i) = e^{-\varepsilon_i/\theta} \Omega(\varepsilon_i) / \sum_i e^{-\varepsilon_i/\theta} \Omega(\varepsilon_i), \quad (3.13.a)$$

$$dw(\varepsilon_i) = e^{-\varepsilon_i/\theta} d\Gamma / \int e^{-\varepsilon/\theta} d\Gamma = e^{-\varepsilon_i/\theta} (\partial\Gamma/\partial\varepsilon) d\varepsilon / \int e^{-\varepsilon/\theta} (\partial\Gamma/\partial\varepsilon) d\varepsilon. \quad (3.13.б)$$

Первое из них относится к системам с дискретным, а второе – с непрерывным спектром значений энергий. Здесь учтено условие нормировки $\sum_i w(\varepsilon_i) = 1$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon/\theta} (\partial\Gamma/\partial\varepsilon) d\varepsilon = 1. \quad \text{Модуль статистического распределения или}$$

статистическая температура $\theta = kT$ является существенно положительной величиной.

Число состояний $\Omega(\varepsilon_i)$ быстро растет с увеличением энергии и числа частиц в системе. Произведение экспоненциально убывающей с ростом энергии ($e^{-\varepsilon_i/\theta}$) и быстро возрастающей функций приводит к резкому максимуму в распределении Гиббса. Поэтому среднее значение функций от любой физической величины макроскопических систем ($N \sim 10^{26}$) практически

совпадает с ее значением, относящимся к наиболее вероятной энергии ε_{\max} :

$$\overline{F(\varepsilon)} = \sum F(\varepsilon_i) w(\varepsilon_i) \cong F(\varepsilon_{\max}),$$

$$\overline{F(\varepsilon)} = \int F(\varepsilon) dw(\varepsilon) \cong \int F(\varepsilon) \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\max}) d\varepsilon \cong F(\varepsilon_{\max}).$$

Это означает, что состояние с $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$ осуществляется с вероятностью $w(\varepsilon_{\max}) \cong 1$. Среднее значение всех величин в состоянии равновесия близко к их наиболее вероятному значению ($\bar{\varepsilon} \cong \varepsilon_{\max}$).

3.4.3. Большое каноническое распределение относится к системам, которые, кроме энергии, обмениваются с термостатом и частицами. Когда число входящих (уходящих) частиц системы мало по сравнению с их общим числом, то

$$w(\varepsilon_i, n) = e^{-(\varepsilon_i - \mu n)/\theta} \Omega(\varepsilon_i, n) / \sum_i \sum_n e^{-(\varepsilon_i - \mu n)/\theta} \Omega(\varepsilon_i, n), \quad (3.14.a)$$

$$dw(\varepsilon, n) = e^{-(\varepsilon - \mu n)/\theta} (\partial \Gamma_n / \partial \varepsilon) d\varepsilon / \sum_n \int e^{-(\varepsilon - \mu n)/\theta} (\partial \Gamma_n / \partial \varepsilon) d\varepsilon, \quad (3.14.б)$$

где μ – химический (парциальный) потенциал, равный энергии, которую теряет (приобретает) система при изменении числа частиц в ней на единицу. Размерность фазового объема (плотность числа состояний) зависит от числа частиц в системе.

3.4.4. Функциями состояний (интегралом состояний) называются следующие выражения (знаменатели распределений Гиббса):

$$\begin{aligned} Z &= \sum_i e^{-\varepsilon_i/\theta} \Omega(\varepsilon_i); & Z &= \sum_i \sum_n e^{-(\varepsilon_i - \mu n)/\theta} \Omega(\varepsilon_i, n); \\ Z &= \int e^{-\varepsilon/\theta} \Omega(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{h^f} \int e^{-\varepsilon/\theta} (\partial \Gamma / \partial \varepsilon) d\varepsilon; & Z &= \frac{1}{h^f} \sum_n \int e^{-(\varepsilon - \mu n)/\theta} (\partial \Gamma_n / \partial \varepsilon) d\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Через функции состояний определяются термодинамические потенциалы и параметры, в частности, среднее число частиц в системе:

$$\bar{n} = \sum_n \sum_i n w(\varepsilon_i, n) = \theta \partial (\ln Z) / \partial \mu. \quad (3.16)$$

3.5. Примеры решения задач

Пример 1. Определить и начертить фазовую траекторию линейного гармонического осциллятора, движущегося под действием квазиупругой силы $F = -\chi \cdot x$ около начала координат. Проверить справедливость теоремы Лиувилля. Начальные значения координаты x_0 и импульса $-p_0$.

Решение. Функция Гамильтона состоит из кинетической и потенциальной энергии частицы массы m :

$$H(p, x) = p^2/2m + \chi x^2/2.$$

Отсюда следует $\dot{x} = p/m$, $\dot{p} = -\chi x$ и уравнение движения $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, где $\omega = \sqrt{\chi/m}$. После интегрирования имеем

$$x = A \sin(\omega t + \alpha), \quad p = m\omega A \cos(\omega t + \alpha),$$

где A и α – амплитуда и фаза, определяемые начальными условиями $x_0 = A \sin \alpha$, $p_0 = m\omega A \cos \alpha$. Зависимость $x(t)$ представляет уравнение реальной траектории. Исключая зависимость от времени, находим фазовую траекторию:

$$(x/A)^2 + (p/(m\omega A))^2 = 1.$$

Таким образом, при колебаниях осциллятора около точки $x=0$ с амплитудой A его фазовая траектория есть эллипс с полуосями $a=A$ и $b=m\omega A$, определяемыми из начальных условий.

Уравнение движения можно представить через начальные параметры

$$x = (p_0/m\omega) \sin \omega t + x_0 \cos \omega t, \quad p = p_0 \cos \omega t - m\omega x_0 \sin \omega t.$$

Для проверки теоремы Лиувилля вычисляется модуль якобиана преобразования:

$$dpdx = \left| \frac{D(p, x)}{D(p_0, x_0)} \right| dp_0 dx_0 = \begin{vmatrix} \cos \omega t & -m\omega \sin \omega t \\ (\sin \omega t)/m\omega & \cos \omega t \end{vmatrix} dp_0 dx_0 = dp_0 dx_0.$$

Как и следовало ожидать, для данной системы $\Gamma(t) = \Gamma(0)$.

Пример 2. Решить задачу предыдущего примера, если на осциллятор действует малая ($\gamma \ll \omega$) сила трения, пропорциональная скорости $F = -\gamma m \dot{x}$.

Решение. Уравнение движения в этом случае $\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x = 0$, после

замены переменных $x(t) = u(t)e^{-\gamma t/2}$ сводится к $\ddot{u} + (\omega^2 - \gamma^2/4)u = 0$. Его решение в приближении ($\gamma \ll \omega$) имеет вид

$$x = e^{-\gamma t/2}(a \cos \omega t + b \sin \omega t),$$

$$\dot{x} = e^{-\gamma t/2} \{ -(a \cos \omega t + b \sin \omega t) \cdot \gamma/2 - \omega \cdot (a \sin \omega t - b \cos \omega t) \} \approx$$

$$\approx \omega e^{-\gamma t/2} (b \cos \omega t - a \sin \omega t).$$

Учитывая начальные условия $x(0) = x_0 = a$; $p(0) = p_0 = m\dot{x}(0) = m\omega b$, находим зависимости координаты и импульса от времени

$$x = e^{-\gamma t/2} [x_0 \cos \omega t + (p_0/m\omega) \sin \omega t],$$

$$p = m\omega e^{-\gamma t/2} [(p_0/m\omega) \cos \omega t - x_0 \sin \omega t].$$

Как и в примере 1, после замены $x_0 = A \sin \alpha$, $p_0 = m\omega A \cos \alpha$ имеем

$$x = e^{-\gamma t/2} A \sin(\omega t + \alpha), \quad p = m\omega e^{-\gamma t/2} A \cos(\omega t + \alpha).$$

Откуда легко получить фазовую траекторию

$$\left(\frac{x}{A e^{-\gamma t/2}} \right)^2 + \left(\frac{p}{A m \omega e^{-\gamma t/2}} \right)^2 = 1.$$

Это – эллипс с полуосями, которые экспоненциально уменьшаются со временем. Вычисления якобиана преобразования дают

$$\frac{D(p, x)}{D(p_0, x_0)} = e^{-\gamma t} \begin{vmatrix} \cos \omega t & -m\omega \sin \omega t \\ (\sin \omega t)/m\omega & \cos \omega t \end{vmatrix} = e^{-\gamma t}.$$

Следовательно, объем зависит от времени:

$$\Gamma(t) = \iint_{(p; x)} dp dx = \iint_{(p_0; x_0)} \frac{D(p, x)}{D(p_0, x_0)} dp_0 dx_0 = e^{-\gamma t} \Gamma(0).$$

Пример 3. Для некоторой системы известны энергия E и ее функция состояний $Z(\beta) = A/\beta^N$, ($\beta \equiv 1/kT$). Определить плотность состояний.

Решение. Согласно определению, функция состояний равна

$$Z(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-\beta E} \Omega(E) dE.$$

Поскольку $E \geq 0$, то можно предположить, что $\Omega(E) = 0$ при $E < 0$. Поэтому

$Z(\beta)$ есть преобразование Лапласа (изображение) функции $\Omega(E)$ и

$$\Omega(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\beta E} Z(\beta) d\beta = \frac{A}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{\beta E} d\beta}{\beta^N}.$$

Используем теорему Коши для N -ой производной в точке $\beta = \beta_0$:

$$f^{(N)}(\beta_0) = \frac{N!}{2\pi i} \oint \frac{f(\beta) d\beta}{(\beta - \beta_0)^{N+1}}.$$

В нашем случае $\beta_0 = 0$, $f(\beta) = e^{\beta E}$, $f^{(N-1)}(0) = E^{N-1}$, поэтому

$$\Omega(E) = AE^{N-1}/(N-1)!.$$

Пример 4. Найти наиболее вероятную энергию ε_{\max} газа из N свободных атомов, помещенного в объем V , и определить степень размытости распределения Гиббса. Считать, что $N \gg 1$.

Решение. Объем части фазового пространства для свободных атомов равен

$$\Gamma = V^N \int_{(p \leq p_{\max})} dp_{11} dp_{21} dp_{31} \dots dp_{1N} dp_{2N} dp_{3N}.$$

Пределы интегрирования находятся из условия

$$\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N (p_{1i}^2 + p_{2i}^2 + p_{3i}^2) \leq \varepsilon(p_{\max}).$$

Эта формула с геометрической точки зрения описывает в пространстве $3N$ измерений шар с радиусом $R = \sqrt{2m\varepsilon}$, а интеграл – его объем Γ . Последний находится из соображений размерности: пропорционален радиусу в степени числа измерений $\Gamma = \text{const} \cdot V^N \cdot \varepsilon^{3N/2}$. Откуда следует $\partial\Gamma/\partial\varepsilon \sim V^N (3N/2) \cdot \varepsilon^{3N/2-1}$ и распределение Гиббса.

$$dw = (\text{const} \cdot V^N / (h^{3N} Z)) \cdot \varepsilon^{3N/2-1} \cdot \exp(-\varepsilon/\theta) d\varepsilon.$$

Значение постоянной не представляет интереса, поскольку она является множителем и в интеграле состояний Z . Наиболее вероятная энергия ε_{\max} находится из условия $d(e^{-\varepsilon/\theta} \varepsilon^{3N/2-1})/d\varepsilon = 0$: $\varepsilon_{\max} = (3N/2 - 1)\theta \cong 3N\theta/2$.

Средняя энергия атома газа

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^{\infty} \varepsilon e^{-\varepsilon/\theta} \varepsilon^{3N/2-1} d\varepsilon \bigg/ \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon/\theta} \varepsilon^{3N/2-1} d\varepsilon,$$

вычисляется заменой переменных $\varepsilon = x\theta$:

$$\bar{\varepsilon} = \theta \Gamma(3N/2 + 1) / \Gamma(3N/2) = 3N\theta/2.$$

Таким образом, наиболее вероятная энергия весьма близка к средней. Поэтому при $N \gg 1$ эти энергии отождествляют друг с другом.

Для определения степени размытости функцию распределения разложим в ряд по степеням $\varepsilon - \varepsilon_{\max}$ и ограничимся первыми членами. Предварительно введем новую функцию

$$f = e^{-\varepsilon/\theta} \varepsilon^{3N/2-1} \equiv e^{-\varepsilon/\theta + (3N/2-1) \ln \varepsilon} \equiv e^{\varphi(\varepsilon)}.$$

Поскольку в точке $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$ функция f , а стало быть, и функция φ имеет максимум $\partial\varphi(\varepsilon_{\max})/\partial\varepsilon = 0$, то

$$\varphi(\varepsilon) \approx \varphi(\varepsilon_{\max}) + \varphi''(\varepsilon_{\max})(\varepsilon - \varepsilon_{\max})^2/2 = \varphi(\varepsilon_{\max}) - (3N/2 - 1) \cdot (\varepsilon - \varepsilon_{\max})^2 / 2\varepsilon_{\max}^2.$$

$$f \approx e^{\varphi(\varepsilon_{\max})} \exp\left(-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_{\max})^2}{2\varepsilon_{\max}^2 / (3N/2 - 1)}\right) = A \exp\left(-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_{\max})^2}{2\varepsilon_{\max}^2 / (3N/2 - 1)}\right).$$

Таким образом, распределение вблизи максимума имеет вид

$$dw = \frac{\text{const} \cdot A}{h^{3N} Z} \exp\left(-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_{\max})^2}{2\varepsilon_{\max}^2 / (3N/2 - 1)}\right) d\varepsilon.$$

Из сравнения его с гауссовской функцией $\exp[-(\varepsilon - \varepsilon_{\max})^2 / 2\delta^2]$ находим степень размытости (ширину кривой вблизи максимума): $\delta = \varepsilon_{\max} / \sqrt{3N/2 - 1}$. При значении $\varepsilon = \varepsilon_{\max} \pm \delta\sqrt{2}$ функция распределения уменьшается в e раз. Относительная ширина $\delta/\varepsilon_{\max} \cong \delta/\bar{\varepsilon} \cong 1/\sqrt{3N/2 - 1} \cong \sqrt{2/3N}$ тем уже, чем большее число атомов содержит газ. Например, вероятность того, что 1 см^3 газа ($N = 10^{19}$) будет находиться в состоянии с энергией, равной $0.99\bar{\varepsilon}$, равна весьма малой величине $\approx \exp[-10^{19}(0.99 - 1)^2] \approx \exp(-10^{15})$.

3.6. Задачи и упражнения для самостоятельной работы

3.1. Проверить теорему Лиувилля для материальной точки, движущейся по инерции, и построить ее фазовую траекторию.

3.2. Определить фазовую траекторию тела массы m , которое движется в постоянном гравитационном поле из точки z_0 с начальной скоростью v_0 ,

направленной вертикально вверх. Начертить эту траекторию в пространстве (z, p) .

3.3. Найти фазовые траектории гармонического осциллятора для разных начальных значений обобщенных импульса (p_0) и координаты (q_0) .

3.4. Проверить теорему Лиувилля для системы из трех материальных частиц массы m , движущихся в поле тяжести, если заданы их начальные координаты в фазовом пространстве: $A_1(p_0, z_0)$, $A_2(p_0 + b, z_0)$, $A_3(p_0, z_0 + a)$.

3.5. Проверить теорему Лиувилля для абсолютно неупругого соударения двух шаров.

3.6. Определить фазовую траекторию частицы, которая движется с постоянной скоростью, перпендикулярной зеркально отражающим стенкам ящика. Размер ящика вдоль направления движения l . Начертить фазовую траекторию в пространстве (p, q) .

3.7. Вычислить фазовый объем, ограниченный фазовой траекторией задачи № 3.2 и осью p , если $z_0 = 0$.

3.8. Определить уравнение фазовой траектории для частицы массы m , заряда e , которая движется под влиянием кулоновской силы притяжения к заряду e_1 . Начальное расстояние между частицами r_0 , а скорость $v_0 = 0$.

3.9. Определить уравнение фазовой траектории для частицы массы m и заряда e , которая движется в постоянном электрическом поле E , направленном вдоль оси OX . Начальная координата частицы x_0 , начальная скорость v_0 , направленная параллельно оси OX .

3.10. Найти на фазовой плоскости (q, v) , где $v = \dot{q}$ – скорость, траектории и вычислить изменение фазового объема $dvdq$ для: а) свободной частицы, сила трения которой о среду пропорциональна скорости $f = -\gamma \dot{q}$; б) линейного гармонического осциллятора с малым трением.

3.11. Найти число состояний $\Omega(E)$ частиц газа, энергия которых связана с импульсом соотношением $\varepsilon = pc$, где c – константа.

3.12. Проверить теорему Лиувилля для трех гармонических осцилляторов:

$$x_1 = \sqrt{2\varepsilon/(m\omega^2)} \sin \omega t, \quad x_2 = \sqrt{2(\varepsilon + \Delta\varepsilon)/(m\omega^2)} \sin \omega t, \quad x_3 = \sqrt{2\varepsilon/(m\omega^2)} \sin(\omega t + \delta).$$

3.13. Проверить теорему Лиувилля для случая упругого соударения двух

частиц, движущихся по одной прямой.

3.14. Два одинаковых упругих шарика движутся вдоль желоба. Изобразить на плоскости скоростей (v_1, v_2) положение элементарного объема $dv_1 dv_2$ до и после столкновения и показать, что $dv_1 dv_2 = dv'_1 dv'_2$, где v'_1, v'_2 – скорости частиц после столкновения.

3.15. Вычислить объем, который находится внутри гиперповерхности постоянной энергии для пространственного ротатора. Обобщенные координаты φ и θ , обобщенные импульсы p_φ, p_θ . Указание: Энергия пространственного ротатора $H = (p_\theta^2 + p_\varphi^2 / \sin^2 \varphi) / 2mr^2$.

3.16. Определить наивероятнейшую энергию для пространственного ротатора, который подчиняется каноническому распределению.

3.17. Показать, что для систем с весьма большим числом частиц имеет место равенство $\overline{\varepsilon^m} = (\overline{\varepsilon})^m$, где ε – энергия, а m – любое число.

3.18. Показать, что для систем с весьма большим числом частиц имеет место равенство $\overline{e^x} = e^{\overline{x}}$.

3.19. Определить при температуре T функцию состояний линейного гармонического осциллятора, энергия которого равна $\varepsilon_n = h\nu (n + 1/2)$, где h – постоянная Планка, ν – частота, $n = 0, 1, 2, \dots$, а все уровни колебательной энергии невырожденные.

3.20. Определить при температуре T функцию состояний вращательного движения двухатомной молекулы, энергия которого определяется формулой $\varepsilon_j = h^2 j(j + 1) / 8\pi^2 I$, где I – момент инерции, $j = 0, 1, 2, \dots$, а ее уровни $(2j + 1)$ -кратно вырождены.

3.21. Найти функцию состояний одноатомной молекулы идеального газа массы m при температуре T .

3.22. Определить при температуре T функцию состояний частицы, движущейся со скоростью, близкой к скорости света c , а ее энергия и импульс связаны соотношением $\varepsilon = pc$.

4. КЛАССИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

4.1. Идеальный газ – простейшая статистическая система

В газообразном состоянии плотность вещества мала, средние расстояния между молекулами или атомами намного больше их геометрических размеров. Силы межмолекулярного взаимодействия быстро убывают с расстоянием и в обычном состоянии ничтожно малы. Газовые частицы движутся прямолинейно и равномерно до тех пор, пока не произойдет столкновения между данной молекулой и какой-либо другой или со стенкой сосуда. Столкновения считаются идеально упругими, молекулы недеформируемые. В процессе столкновения происходит обмен кинетической энергией и изменение направления полета. В самом акте столкновения взаимодействие между молекулами сильное. Однако длительность ($\sim 10^{-13}$ сек) и частота (10^8 сек $^{-1}$) процессов соударения таковы, что подавляющую часть времени газовые молекулы движутся, как свободные. Траектория их представляет собой совокупность прямолинейных путей, образующих неправильные ломаные линии. Длина прямолинейных участков ($\sim 10^{-5}$ см) в несколько сотен раз превосходит размеры молекул ($\sim 10^{-8}$ см). Реальный газ хорошо моделируется идеальным.

Статистическую систему, частицы которой взаимодействуют друг с другом только в процессе столкновений, а все остальное время движутся, как свободные, называют *идеальным газом*.

4.2. Распределение Максвелла-Больцмана

Из предположения о хаотическом характере молекулярного движения следует, что молекулы могут иметь любые скорости (импульсы, энергии), так что распределение молекул можно характеризовать некоторой непрерывной (для классических систем) функцией. Число молекул, двигающихся со скоростью, близкой к заданной (dn), связаны с вероятностью dW , что молекула имеет эту скорость, соотношением

$$dn(\vec{v}) = n dW, \quad (4.1)$$

где n – общая плотность молекул. Для определения вероятности состояния идеального газа с близким к заданному значению физического параметра (\vec{p} –

импульса, \vec{v} – скорости, ε – энергии) вводится μ -пространство, где в качестве системы рассматривается одна молекула. Тогда весь газ представляют как ансамбль систем, которые подчиняются каноническому распределению Гиббса. Элемент фазового объема в μ -пространстве $d\Gamma = d\vec{p} \cdot V$ в декартовой и сферической системах координат, соответственно, равен

$$d\Gamma(\vec{p}) = dp_x dp_y dp_z \cdot V, \quad d\Gamma(\vec{p}) = p^2 \sin\theta dp d\theta d\varphi \cdot V, \quad (4.2)$$

а энергия молекулы (кинетическая):

$$\varepsilon = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m = p^2/2m = m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/2 = mv^2/2. \quad (4.3)$$

Подстановка их в (3.13б) приводит к распределению Максвелла как по проекциям, абсолютному значению скоростей и импульсов молекул, так и их энергиям:

$$dW(v_x) = (m/2\pi kT)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT} dv_x; \quad dW(p_x) = (2\pi kT)^{-1/2} e^{-p_x^2/2mkT} dp_x; \quad (4.4)$$

$$dW(\vec{v}) = (m/2\pi kT)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} v^2 dv \sin\theta d\theta d\varphi; \quad (4.5)$$

$$dW(\vec{p}) = (2\pi mkT)^{-3/2} e^{-p^2/2mkT} p^2 dp \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$dW(v) = 4\pi (m/2\pi kT)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} v^2 dv; \quad (4.6)$$

$$dW(\varepsilon) = 2\pi(\pi kT)^{-3/2} e^{-\varepsilon/kT} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon. \quad (4.7)$$

Положение молекулы идеального газа в пространстве не зависит от того, какую энергию (импульс, скорость) она имеет. Это утверждение справедливо не только для свободных частиц, но и для газа, который находится в поле внешних сил. В последнем случае положение молекулы в пространстве описывается *распределением Больцмана*

$$dW(\vec{q}) = \exp(-U(\vec{q})/kT) d\vec{q} / \int \exp(-U(\vec{q})/kT) d\vec{q}, \quad (4.8)$$

где $U(\vec{q})$ – потенциальная энергия частицы в поле внешних сил, а $d\vec{q}$ – элемент фазового пространства в соответствующей системе координат. Когда газ находится в гравитационном поле, и сила его действует вдоль оси z , то $U(z) = mgz$ и

$$dW(z) = e^{-mgz/kT} dz / \int e^{-mgz/kT} dz. \quad (4.9)$$

Отсюда зависимость плотности молекул от расстояния до условного уровня с плотностью молекул $n_0 = n(z_0)$ имеет вид

$$dn(z) = n_0 e^{-mgz/kT} dz. \quad (4.10)$$

Потенциальная энергия вращающейся с частотой ω молекулы на расстоянии r от оси вращения (молекула в центрифуге) равна

$$U(r) = m\omega^2(r_0^2 - r^2)/2,$$

где r_0 – условный периферийный радиус. Распределение Больцмана в этом случае ($d\Gamma = 2\pi r dr$) представляется следующим образом

$$dn(r) = n_0 e^{-m\omega^2(r_0^2 - r^2)/2kT} 2\pi r dr, \quad (4.11)$$

где n_0 – плотность частиц вблизи периферии при $r = r_0$.

4.3. Уравнение состояния и характерные величины идеального газа

Число молекул, ударяющихся за единицу времени о единичную площадку стенки, зависит от ортогональной к стенке проекции скорости (v_x):

$$d\nu(v_x) = v_x dn(v_x) = n(m/2\pi kT)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT} v_x dv_x. \quad (4.12)$$

Каждая из $d\nu$ молекул отдает стенке импульс $\Delta p_x = 2mv_x$ (абсолютно упругий удар). Давление на стенку есть суммарный импульс, который получает стенка за единицу времени от молекул с проекциями скоростей $v_x \geq 0$:

$$p = 2m \int_0^{\infty} v_x d\nu(v_x) = NkT/V. \quad (4.13)$$

Полученную зависимость называют *уравнением состояния идеального газа*.

Из распределения Максвелла для идеального газа в отсутствие внешних сил следует:

а) средние и наиболее вероятные значения проекции, векторов скорости и импульса молекул равны нулю;

б) наиболее вероятное и среднее значения абсолютной скорости

$$v_{\max} = (2kT/m)^{1/2}, \quad \bar{v} = (2/\sqrt{\pi}) \cdot (2kT/m)^{1/2}; \quad (4.14)$$

в) средняя энергия молекулы газа и внутренняя энергия газа из N молекул

$$\bar{\varepsilon} = (3/2)kT; \quad E = N\bar{\varepsilon} = (3/2)NkT. \quad (4.15)$$

Вероятность, что две молекулы с массами m_1 и m_2 ($\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ – приведенная масса) имеют относительную скорость движения u , равна

$$dW(u) = 4\pi(\mu/2\pi kT)^{3/2} e^{-\mu u^2/2kT} u^2 du. \quad (4.16)$$

Сечение соударения (рассеяния) есть максимальная площадь сечения сферы, радиус которой d равен минимальному расстоянию между центрами “соударяющихся” молекул. При непосредственном контакте ($d = r_1 + r_2$, где r_1 и r_2 – радиусы молекул) сечение соударения называют геометрическим, равным $\sigma = \pi d^2$. Когда отталкивание происходит на больших расстояниях $d_{ef} > d$, вводят эффективное сечение соударения $\sigma_{ef}(u) = \pi d_{ef}^2$, которое зависит от относительной скорости движения.

Число столкновений молекул в единицу времени для эффективного и геометрического сечений соударения, соответственно, равно

$$v = \int_0^{\infty} n \sigma_{ef}(u) u dW(u), \quad v = n \sigma \bar{u}. \quad (4.18)$$

Средняя длина свободного пробега λ – это среднее расстояние, которое проходит молекула между двумя последовательными столкновениями. Для однородного газа ($\mu = m/2$, $\bar{u} = \sqrt{2} \bar{v}$) $\lambda = (\sqrt{2} n \sigma)^{-1}$.

4.4. Число и функция состояний молекулы идеального газа

Для подсчета числа состояний молекула идеального газа рассматривается как квазиклассическая система. Каждому состоянию в фазовом пространстве соответствует объем h^3 . Для свободных частиц в изотропном пространстве элементу фазового объема соответствует *число состояний*

$$\Omega(\varepsilon) d\varepsilon = d\Gamma/h^3 = 4\pi V p^2 dp/h^3 = 2\pi V (2m/h^2)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon. \quad (4.18)$$

Для свободных электронов ввиду спинового вырождения это число состояний удваивается. Учитывая общее число состояний микрочастицы в интервале энергий от 0 до $\varepsilon = 3kT/2$

$$G = \int_0^{\varepsilon} \Omega(x) dx \cong V \left(2\pi m k T / h^2 \right)^{3/2}, \quad (4.19)$$

находят *критерий невырожденности* – отношение числа частиц к числу состояний:

$$N/G \cong n \left(h^2 / 2\pi m k T \right)^{3/2}. \quad (4.20)$$

Для молекулярных газов в нормальных условиях $N/G \approx 10^{-6} \ll 1$, поэтому они описываются классической статистикой.

Функция состояний молекулы идеального газа:

$$z = \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon/kT} \Omega(\varepsilon) d\varepsilon = V \left(2\pi m k T / h^2 \right)^{3/2}. \quad (4.21)$$

4.5. Функция распределения и состояний идеального газа

Число частиц, имеющих энергию в интервале от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$, отражает полная функция распределения $F(\varepsilon)$, которая представляется в виде произведения числа состояний и функции распределения $f(\varepsilon)$ (среднего числа частиц в данном состоянии)

$$dn(\varepsilon) = F(\varepsilon) d\varepsilon = f(\varepsilon) \Omega(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (4.22)$$

Для идеального газа $\Omega(\varepsilon) d\varepsilon$ описывается формулой (4.18), а

$$f(\varepsilon) = e^{-(\varepsilon - \mu)/kT} \quad (4.23)$$

получила название функция распределения Максвелла-Больцмана. Здесь

$$\mu \equiv kT \ln \left[n \left(h^2 / 2\pi m k T \right)^{3/2} \right] - \quad (4.24)$$

химический (парциальный) потенциал.

Вычисления функции состояний идеального газа и его отдельной молекулы отличаются областью интегрирования. В первом случае это суть области фазового пространства, которые отвечают физически различным состояниям идеального газа. Все состояния газа, образованные взаимной заменой координат и импульсов молекул, являются физически тождественными. Число таких состояний в системе из N молекул равно числу перестановок $N!$. Поэтому с учетом аддитивности энергии *функция состояния идеального газа* из

N молекул определяется выражением:

$$Z = z^N / N! = \left[(2\pi mkT/h^2)^{3/2} \right]^N \cdot (V^N / N!). \quad (4.25)$$

4.6. Примеры решения задач

Пример 1. Сосуд содержит идеальный газ с известной плотностью n_0 . Через небольшое круглое отверстие S в стенке сосуда вылетают молекулы газа. На расстоянии l соосно с отверстием находится диск радиуса R (рис. 4.1). Найти число молекул, попадающих на диск за 1 сек.

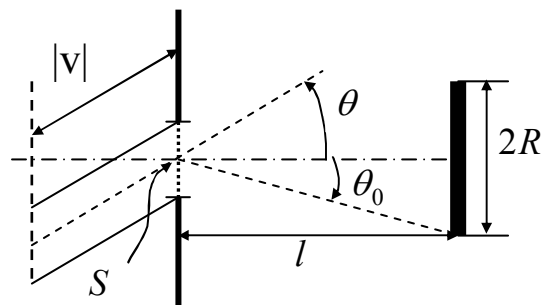


Рис.4.1

Решение. Построим цилиндр с основанием, равным площади отверстия S , и образующей, численно равной абсолютной величине скорости v молекулы (рис.4.1). Его объем равен $Sv \cos \theta$. Плотность молекул, скорость которых находится вблизи v и направлена под углами θ и φ , описывается распределением Максвелла

$$dn(v, \theta, \varphi) = n_0 dW(v, \theta, \varphi) = n_0 (m/2\pi kT)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} v^2 dv \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Все молекулы с указанной скоростью, находящиеся внутри объема $Sv \cos \theta dn(v, \theta, \varphi)$, вылетают за 1 сек через отверстие S . На диск попадают только те, у которых угол между направлением движения и нормалью к отверстию не превышает θ_0 ($\operatorname{tg} \theta_0 = R/l$). Общее число молекул, попадающее на диск:

$$n = n_0 S \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} v \cos \theta dW(v, \varphi, \theta) = n_0 S (2kT/\pi m)^{1/2} \cdot (R^2 / (R^2 + l^2)).$$

Пример 2. Показать, что число ударов молекул об 1 см^2 поверхности сосуда за одну секунду может быть записано в виде $\nu = n\bar{v}/4$, где \bar{v} – средняя скорость молекул, а n – их плотность.

Решение. Плотность молекул, имеющих проекцию скорости v_\perp , ортогональную стенке сосуда, равна $dn(v_\perp) = n dW(v_\perp)$. Число этих молекул, ударяющихся о единичную площадку за единицу времени (см. предыдущий пример), равно $dv(v_\perp) = v_\perp dn(v_\perp)$. С учетом (4.4) после интегрирования по

всем положительным значениям $v_{\perp} \geq 0$ имеем

$$v = n \int_0^{\infty} v_{\perp} dW(v_{\perp}) = n (m/2\pi kT)^{1/2} \int_0^{\infty} e^{-mv_{\perp}^2/2kT} v_{\perp} dv_{\perp}.$$

Поскольку $\bar{v} = (2/\sqrt{\pi}) \cdot (2kT/m)^{1/2}$, то $v = n\bar{v}/4$.

Пример 3. Определить функцию состояний линейного гармонического осциллятора с собственной частотой $\omega = \sqrt{\chi/m}$ в квазиклассическом приближении, χ – постоянная упругости, а m – масса.

Решение. Энергия осциллятора $\varepsilon(p, q) = p^2/2m + \chi q^2/2$, где p и q – импульс и координата, а число состояний $d\Omega = dpdq/h$ (квазиклассическая система). Из определения следует значение функции состояний

$$z = h^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2/2mkT} dp \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\chi q^2/2kT} dq = (2mkT/h^2)^{1/2} (2kT/\chi)^{1/2} \Gamma^2(1/2) = kT/\hbar\omega.$$

Пример 4. Каждый атом газа излучает монохроматический свет длиной волны λ_0 и интенсивностью I_0 . Найти интенсивность излучения газа, состоящего из N атомов, как функцию λ .

Решение. Поскольку атомы движутся с различными скоростями, то излучаемый ими монохроматический свет наблюдатель воспринимает как волны разной длины (эффект Доплера) $\lambda = \lambda_0(1 + v/c)$, где v – проекция скорости на направление от атома до наблюдателя. Интенсивность света, воспринимаемая наблюдателем в интервале длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$, равна $I(\lambda)d\lambda = \alpha dn(\lambda) = \alpha dn(v)$. Здесь $dn(\lambda) = dn(v)$ – число атомов, имеющих проекцию скорости v ; α – определяется условием нормировки $\int I(\lambda)d\lambda = NI_0$. Из распределения Максвелла по проекциям скорости после замены $v = c(\lambda - \lambda_0)/\lambda_0$ находим число атомов, излучение которых воспринимается наблюдателем вблизи длины волны λ , и интенсивность

$$dn(\lambda) = N (mc^2/2\pi kT \lambda_0^2)^{1/2} \exp(-mc^2(\lambda - \lambda_0)^2/2kT \lambda_0^2) d\lambda.$$

$$I(\lambda)d\lambda = \alpha N (2\pi\delta^2)^{-1/2} e^{-(\lambda - \lambda_0)^2/2\delta^2} d\lambda,$$

где $\delta = \sqrt{kT \lambda_0^2/mc^2} = \sqrt{(\Delta\lambda)^2}$ – флуктуация или доплеровская (естественная) ширина спектральной линий излучения (см. (1.7)). Найдем теперь α :

$$NI_0 = \left(\alpha N / \sqrt{2\pi\delta^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{- (\lambda - \lambda_0)^2 / 2\delta^2} d\lambda = \alpha N, \quad \alpha = I_0.$$

Значение нижнего предела интеграла следует из формулы Доплера, когда предполагается, что проекция скорости может меняться от $-\infty$ до ∞ . Если учесть принцип Эйнштейна $v \leq c$ ($\lambda \geq 0$), то результат слабо изменяется, поскольку подынтегральная функция при $\lambda < 0$ практически равна нулю.

Естественная ширина линии излучения, пропорциональная $\sqrt{T\lambda_0^2/m}$, является минимальной для активных излучающих систем, в частности, молекулярных генераторов.

Пример 5. Допуская, что потенциальная энергия электрона с зарядом q внутри металла меньше его энергии вне металла на величину $W = q\phi$, определить плотность тока термоэлектронной эмиссии. Концентрация электронов n_0 , а масса — m .

Решение. Плотность тока в направлении, ортогональном поверхности раздела металл-воздух, определяется распределением Максвелла для соответствующей проекции скорости электрона

$$d j(v_x) = q n_0 v_x dW(v_x).$$

Термоэлектронную эмиссию создают только те электроны, кинетическая энергия которых превышает работу выхода $mv_{0x}^2/2 \geq q\phi$. Поэтому

$$j_x = q n_0 \int_{v_{0x}}^{\infty} (m/2\pi kT)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT} v_x dv_x = (q n_0 \bar{v}/4) \cdot e^{-q\phi/kT}.$$

Пример 6. Определить диэлектрическую проницаемость идеального газа, состоящего из N молекул с постоянной величиной дипольного момента p , находящихся во внешнем однородном поле напряженностью \vec{E} при температуре T .

Решение. Энергия молекулы газа при наличии внешнего поля равна

$$\varepsilon = mv^2/2 - (\vec{p}, \vec{E}) = mv^2/2 - pE \cos \theta,$$

где θ — угол между направлением диполя и напряженностью электрического поля. Из распределения Больцмана находим вероятность ориентации диполя вблизи угла θ :

$$dW(\theta) = C(T)e^{\alpha \cos \theta} \sin \theta d\theta,$$

где $\alpha = pE/kT$. Среднее значение проекции диполя на направление напряженности электрического поля

$$\bar{p} = \overline{p \cos \theta} = p \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \int_0^\pi e^{\alpha \cos \theta} d(\cos \theta) = p \cdot L(pE/kT).$$

Здесь $L(\alpha) = \text{cth } \alpha - 1/\alpha$ – функция Ланжевена. Когда $\alpha \gg 1$, $L(\alpha) = 1$. В случае высоких температур или слабых полей ($pE/kT \ll 1$)

$L(pE/kT) \approx pE/3kT + O[(pE/kT)^2]$ получаем линейную зависимость вектора поляризации от E :

$$P = \bar{p}N/V = (N/3V) \cdot p \cdot (pE/kT).$$

Так как $P = \beta E$, то поляризуемость единицы объема β и диэлектрическая проницаемость газа равны

$$\beta = np^2/3kT, \quad \varepsilon = 1 + 4\pi\beta = 1 + 4\pi np^2/3kT.$$

Пример 7. Цилиндрическая центрифуга радиуса R и длиной l вращается с частотой ω . В ней находится эмульсия из белка и воды. Масса белка – M , его относительная молекулярная масса и плотность равны μ и ρ . Определить плотность распределения молекул белка вдоль радиуса центрифуги.

Решение. Потенциальная энергия молекулы белка во вращающейся центрифуге на расстоянии r от оси:

$$U(r) = m'\omega^2(R^2 - r^2)/2,$$

здесь $m' = \mu[1 - \rho_0/\rho]/N_A$ – эффективная масса молекулы белка, учитывающая выталкивающую силу воды плотности ρ_0 , N_A – число Авогадро. Число молекул, находящихся вблизи радиуса r , согласно распределению Больцмана, равно

$$dN(r, z, \varphi) = Ce^{-m'\omega^2(R^2 - r^2)/2kT} r dr dz d\varphi.$$

Из условия нормировки $N = \int_0^R dN(r)$ находим

$$C = n_0(R) = \frac{N_A M m' \omega^2}{2\pi l k T \mu \left[1 - \exp\left(-m' \omega^2 R^2 / 2kT\right) \right]},$$

где $C = dN/dV$ – имеет смысл плотности молекул белка вблизи периферии ($r \approx R$) центрифуги. Здесь использовано очевидное равенство $N = N_A M / \mu$.

Таким образом, плотность молекул белка, находящихся внутри пространства цилиндра высотой l между радиусами r и $r + dr$, равна

$$n(r) = n_0(R) \cdot \exp\left(-m' \omega^2 (R^2 - r^2) / 2kT\right).$$

4.7. Задачи и упражнения для самостоятельной работы

4.1. Определить долю молекул идеального газа, скорость которых не превышает $v_0 = 0.1 v_m$ в а) одном; б) двух и в) трех взаимно перпендикулярных направлениях. v_m – наиболее вероятное значение абсолютной скорости.

4.2. Как изменится распределение Максвелла, если система будет совершать движение как целое со скоростью \vec{u} ?

4.3. Найти относительную флуктуацию энергии как одной молекулы газа, так и всей системы, состоящей из N молекул.

4.4. В большом сосуде объемом V при температуре T находится N частиц идеального газа. Найти угловое распределение частиц, вылетающих в единицу времени в вакуум из небольшого отверстия площадью S в стенке сосуда.

4.5. Вычислить наиболее вероятную энергию $\varepsilon_{вер}$ молекул в газе. Показать, что $\varepsilon_{вер} \neq m v_{вер}^2 / 2$.

4.6. Газ объемом V из молекул с молекулярной массой M_r находится при температуре T и давлении p . Определить число молекул, вектор скорости которых составляет с осью z угол не более α , а абсолютная величина скорости заключена в интервале от v до $v + dv$. Чему равна масса M этих молекул?

4.7. Вычислить для молекул идеального газа дисперсию и флуктуацию абсолютной скорости и ее одной из проекций.

4.8. Разреженный идеальный газ находится в сосуде при давлении p . Определить скорость истечения газа в вакууме через небольшое отверстие S_0 .

4.9. Найти длину свободного пробега молекул примеси к идеальному газу, если масса основного газа равна m , их эффективное сечение σ , а те же величины для молекул примеси равны m' и σ' .

4.10. Определить зависимость сечения эффективного рассеяния частиц от температуры, если потенциал взаимодействия между частицами имеет следующий вид:

$$U = \begin{cases} \infty, & r \leq R_0 \\ -\alpha/r^n, & r > R_0 \quad (n > 2, \alpha > 0) \end{cases}$$

4.11. Система состоит из N частиц, кинетическая энергия которых связана с импульсом зависимостью $\varepsilon = \alpha p^l$, и характеризуется равновесной функцией распределения $dW = 4\pi V \cdot f(p) p^2 dp$, где $f(p)$ – любая функция, V – объем. Найти общее выражение, связывающее давление газа с энергией частиц, заключенных в единице объема. Считать, что давление возникает в результате ударов молекул о зеркально-отражающие стенки.

4.12. Найти распределение вероятностей для угловых скоростей вращения молекул.

4.13. Определить через функцию ошибок отношение чисел молекул идеального газа, имеющих энергию меньше и больше, чем $\varepsilon_1 = kT$.

4.14. Для измерения числа Авогадро Перрен исследовал распределение гуммигутовых зерен в воде при температуре T . Масса одной частицы объемом V равна m . Найти высоту H , где плотность зерен уменьшается в 2 раза. Какова необходимая точность измерений высоты, чтобы ошибка при определении числа Авогадро не превышала $\alpha\%$?

4.15. Найти среднюю высоту воздушного столба над поверхностью Земли при нормальной температуре $T = 300^0$ К. Считать воздух идеальным газом с молярной массой $\mu = 29$ г.

4.16. Найти вес бесконечного столба воздуха, определяющий давление у поверхности Земли, при $T = 300^0$ К. Считать воздух идеальным газом с молярной массой $\mu = 29$ г. Плотность воздуха у поверхности Земли $n_0 = 2.69 \cdot 10^{19}$ см⁻³.

4.17. Рассчитать среднюю потенциальную энергию молекул идеального газа, находящегося в вертикальном цилиндре высотой h .

4.18. Цилиндрическая центрифуга длиной l и радиуса R вращается с угловой частотой ω . В ней находится водный раствор белка. Масса белка – M , плотность ρ и молекулярная масса – μ . Плотность воды ρ_0 . Определить плотность белка на оси и краю центрифуги. Чему равна масса белкового вещества в слое толщины b , прилегающем к стенке цилиндра?

4.19. Определить количество атомов, теряемых атмосферой планеты радиуса R и массы M . Масса атома m , температуру T атмосферы считать постоянной по высоте.

4.20. Молекула идеального газа массы m находится в поле земного тяготения. Определить дисперсию и среднее значение высоты, на которой находится молекула по отношению к поверхности $z = z_0 = \text{const}$ при температуре T . Считать правоммерным применение одномерного распределения Больцмана.

4.21. Написать распределение Максвелла-Больцмана для идеального газа, окружающего тяготеющую массу M , имеющую радиус R . Исследовать законно ли применение этого распределения в данном случае.

4.22. Идеальный газ из N одинаковых молекул заключен в объеме V и находится во внешнем потенциальном поле $U(r)$. Найти вероятность, что внутри объема $v < V$ окажется n частиц. Рассмотреть случай, когда $N \gg n$, $n \gg 1$.

4.23. Определить диэлектрическую постоянную идеального газа, состоящего из молекул, которые имеют жесткие диполи и обладают поляризуемостью α , не зависящей от величины внешнего поля.

4.24. Смесь l идеальных газов, состоящих из одинакового количества частиц с разными массами m_1, m_2, \dots, m_l , находится в цилиндре радиуса R и высотой h . Определить центр тяжести данной системы в поле земного тяготения.

4.25. Найти среднюю потенциальную энергию молекулы идеального газа, находящегося в центрифуге радиуса R , вращающейся с постоянной угловой скоростью ω .

4.26. В газовой центрифуге радиуса R , вращающейся с постоянной угловой скоростью ω , производится разделение смеси газов, молекулы которых имеют массы m_1 и m_2 . Найти коэффициент разделения $q = (n_1/n_2)_{r=R} / (n_1/n_2)_{r=0}$, где n_1 и n_2 – концентрация молекул. Объяснить, почему q растет с понижением

температуры.

4.27. Атом массы m совершает колебательное движение под действием упругой силы $f = -\kappa q$ (линейный гармонический осциллятор). Найти в классическом приближении среднюю энергию колебательного движения.

4.28. Определить в классическом приближении среднюю энергию вращения двухатомной молекулы с массами атомов m_1 и m_2 и заданным расстоянием между ними a .

4.29. Одинаковый газ содержится в двух сосудах, соединенных короткой трубкой с малым сечением S . Давление (p) и температура (T) в одном сосуде вдвое меньше, чем в другом. Считая, что масса молекул газа равна m , а давление и температура не меняются, определить массу газа, протекающую из одного сосуда в другой.

4.30. Молекулярный пучок выходит через малое отверстие в откачанный сосуд. Найти среднюю и среднюю квадратичную скорости частиц в пучке.

4.31. Считая, что молекулы, при ударе о стенку передают ей p -ую часть своей энергии, найти энергию, которую получает 1 см^2 стенки за 1 с .

4.32. Найти средний размер l двухатомной молекулы, совершающей гармонические колебания около положения равновесия (a – равновесное расстояние между молекулами).

5. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ПАРАМЕТРЫ

5.1 Начала термодинамики

Первое начало термодинамики (закон сохранения и превращения энергии для тепловых процессов) устанавливает, что изменение внутренней энергии dE макроскопической системы складывается из работы, произведенной ею над внешними телами (или внешними телами над ней) dW , и количества тепла, полученного (или отданного) системой dQ :

$$dE = dQ + dW. \quad (5.1)$$

Внутренняя энергия – однозначная функция состояния тела, тождественна его средней энергией $\bar{\varepsilon}$, вычисленной по законам статистической физики

$$E \equiv \bar{\varepsilon} = kT^2 \partial(\ln Z(V, T))/\partial T, \quad (5.2)$$

где $Z(V, T)$ – функция состояний (см. разд. 3.4). К однозначным функциям состояния системы относится и энтропия S :

$$S = E/T + k \ln Z + S_0, \quad (5.3)$$

$$S = k \ln \Omega, \quad (5.4)$$

где S_0 – абсолютная постоянная, Ω – число состояний системы.

К в а з и с т а т и ч е с к и м (о б р а т и м ы м) называется процесс, при котором система последовательно проходит ряд равновесных состояний. Число состояний равновесной системы определяется её средней энергией – $\Omega(\bar{\varepsilon})$, а количество тепла – изменением энтропии $dQ = T dS$. Из (5.1) для обратимых процессов следует основное термодинамическое равенство

$$dE = dW + T dS = -p dV + T dS, \quad (5.5)$$

т.е. в частном случае внутренняя энергия есть потенциал по отношению к объему V и энтропии S , а сопряженные им давление p и температура T играют роль обобщенных сил.

Энтропия замкнутой связана с вероятностью ее состояния ф о р м у л о й Б о л ь ц м а н а :

$$S = k \ln W + \text{const}. \quad (5.6)$$

В т о р о е н а ч а л о т е р м о д и н а м и к и : наиболее вероятным в

замкнутых системах является процесс, при котором энтропия возрастает (необратимый процесс) или остается постоянной (обратимый процесс):

$$dS \geq 0. \quad (5.7a)$$

Для незамкнутых систем справедливо неравенство

$$dS \geq dQ/T. \quad (5.7b)$$

Максимальная полезная работа достигается только при обратимых процессах независимо от природы (типа) тепловой машины. Поскольку внутренняя энергия и энтропия однозначные функции состояния, то

$$\oint dE = 0, \quad \oint dS = \oint dQ/T = 0, \quad (5.8)$$

где температура T – играет роль интегрирующего делителя. Если определить энтропию в некотором начальном состоянии через параметры (X_0, Y_0) , то в состоянии, характеризуемом параметрами (X, Y) , ее значение с точностью до аддитивной постоянной S_0 равно

$$S(X, Y) = \int_{(X_0, Y_0)}^{(X, Y)} dQ/T + S_0. \quad (5.9)$$

Для квантовых систем, когда kT намного меньше разности энергий между нормальным и первым возбуждаемым уровнями $kT \ll \Delta\varepsilon$, справедливо третье начало термодинамики. Оно гласит: энтропия равновесной системы при весьма низких температурах стремится к абсолютной постоянной S_0 (или к нулю, если S_0 принять за начало отсчета):

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = S_0, \quad \lim_{T \rightarrow 0} S = 0. \quad (5.10)$$

5.2 Термодинамические потенциалы (характеристические функции).

В адиабатических процессах, когда получаемым (отдаваемым) теплом dQ можно пренебречь ($dQ \ll dW$), работа тела выполняется за счет изменения его внутренней энергии $dE = dW$. В частности, если единственным обобщенным параметром является объем, то $dE = -pdV$.

К термодинамическим потенциалам относятся свободная энергия $F \equiv E - TS$, тепловая функция (энтальпия) $H \equiv E + pV$, потенциал Гиббса (основной термодинамический

потенциал) $\Phi \equiv E - TS + pV$. Изменение свободной энергии и потенциала Гиббса при изотермических процессах имеет смысл работы, а энтальпии – количество полученной теплоты в изобарном процессе ($p = \text{const}$).

При действии на систему еще и других обобщенных сил (Λ_j или λ_j), определяемых через сопряженные им параметры (λ_j или Λ_j), дифференциалы термодинамических потенциалов принимают вид:

$$dE(V, S, \lambda_j) = -p dV + T dS + \sum_j \Lambda_j d\lambda_j, \quad (5.11a)$$

$$dF(V, T, \lambda_j) = -p dV - S dT + \sum_j \Lambda_j d\lambda_j, \quad (5.11б)$$

$$d\Phi(p, T, \Lambda_j) = V dp - S dT - \sum_j \lambda_j d\Lambda_j, \quad (5.11в)$$

$$dH(p, S, \Lambda_j) = V dp + T dS - \sum_j \lambda_j d\Lambda_j. \quad (5.11г)$$

Если тело помещено в электрическое или магнитное поле, то из суммы \sum остается только одно слагаемое, где в первом случае $\Lambda = \vec{E}$, $\lambda = \vec{P}$, во втором – $\Lambda = \vec{H}$, $\lambda = \vec{M}$, а \vec{E} , \vec{H} – напряженности электрического и магнитного полей, \vec{P} и \vec{M} – векторы электрической и магнитной поляризации. Так, для потенциала Гиббса

$$d\Phi(p, T, \vec{E}) = V dp - S dT - \vec{P} d\vec{E}, \quad (5.12a)$$

$$d\Phi(p, T, \vec{H}) = V dp - S dT - \vec{M} d\vec{H}. \quad (5.12б)$$

Базовыми соотношениями теории систем с переменным числом частиц есть дифференциалы (5.11) с добавлением слагаемого μdN , в частности:

$$dE(V, S, N) = -p dV + T dS + \mu dN = -p dV + T dS + (\Phi/N) dN.$$

Из (5.11) и (5.12) следует связь термодинамических параметров с частными производными характеристических функций

$$p = -(\partial E / \partial V)_S; \quad T = (\partial E / \partial S)_V; \quad p = -(\partial F / \partial V)_T; \quad S = -(\partial F / \partial T)_V; \quad (5.13a)$$

$$V = (\partial \Phi / \partial p)_T; \quad S = -(\partial \Phi / \partial T)_p; \quad V = (\partial H / \partial p)_S; \quad T = (\partial H / \partial S)_p; \quad (5.13б)$$

$$\vec{P} = -(\partial \Phi / \partial \vec{E})_{p, T}; \quad \vec{M} = -(\partial \Phi / \partial \vec{H})_{p, T}. \quad (5.14)$$

Учитывая (5.3), определение свободной энергии и потенциала Гиббса,

имеем

$$F = -kT \ln Z(V, T); \quad \Phi = -kT \ln Z(p, T). \quad (5.15)$$

5.3 Дифференциальные соотношения термодинамики. Уравнения Гиббса-Гельмгольца

Из свойств дифференциалов, формул (5.11)–(5.14) следуют дифференциальные соотношения термодинамики:

$$(\partial p / \partial S)_V = -(\partial T / \partial V)_S; \quad (\partial p / \partial T)_V = (\partial S / \partial V)_T; \quad (5.16a)$$

$$(\partial V / \partial T)_p = -(\partial S / \partial p)_T; \quad (\partial V / \partial S)_p = (\partial T / \partial p)_S; \quad (5.16b)$$

$$(\partial \bar{P} / \partial p)_{T, \bar{E}} = -(\partial V / \partial \bar{E})_{T, p}; \quad (\partial \bar{M} / \partial p)_{T, \bar{H}} = -(\partial V / \partial \bar{H})_{T, p}; \quad (5.16b)$$

Связь между термодинамическими потенциалами дают уравнения Гиббса – Гельмгольца в дифференциальном и интегральном представлениях:

$$E = F - T(\partial F / \partial T)_V; \quad H = \Phi - T(\partial \Phi / \partial T)_p; \quad (5.17)$$

$$F = -T \int E dT / T^2 + \text{const} \cdot T; \quad \Phi = -T \int H dT / T^2 + \text{const} \cdot T; \quad (5.18)$$

5.4 Тепловые и упругие коэффициенты. Критерии устойчивости

Теплоёмкость есть функция процесса и определяет количество теплоты, необходимое для изменения температуры системы на один градус:

$$C \equiv \delta Q / dT = (dE + p dV) / dT. \quad (5.19)$$

Если представить E как функцию температуры и объема $dE(T, V) = (\partial E / \partial T)_V dT + (\partial E / \partial V)_T dV$, то общее выражение теплоемкостей в процессах с произвольным фиксированным параметром λ ($= V, p, S, \bar{E}, \bar{H}, \dots$) имеет вид

$$C_\lambda = C_V + [(\partial E / \partial V)_T + p] \cdot (\partial V / \partial T)_\lambda, \quad (5.20)$$

где $C_V = (\partial E / \partial T)_V$ – теплоёмкость тела при изохорном ($\lambda \equiv V = \text{const}$) процессе.

В произвольных квазистатических процессах с $\lambda = \text{const}$

$$C_\lambda = C_V + T(\partial p / \partial T)_V (\partial V / \partial T)_\lambda, \quad C_\lambda = T(\partial S / \partial T)_\lambda, \quad (5.21)$$

$$C_p = C_V + T(\partial p/\partial T)_V (\partial V/\partial T)_p = C_V - T \left[(\partial V/\partial T)_p \right]^2 (\partial p/\partial V)_T, \quad (5.22)$$

$$C_p = (\partial H/\partial T)_p, \quad C_p = T(\partial S/\partial T)_p, \quad (5.23)$$

Максимальный коэффициент полезного действия периодических тепловых машин:

$$\eta = \Delta W/Q = (T_1 - T_2)/T_1, \quad (5.24)$$

где T_1 , T_2 – температуры нагревателя и холодильника, $dW = Q - Q'$ – работа за цикл Карно, Q , Q' – количество теплоты, полученной от нагревателя и отданной холодильнику, соответственно.

Коэффициент теплового расширения α и термический коэффициент давления β

$$\alpha = (\partial V/\partial T)_p/V_0; \quad \beta = (\partial p/\partial T)_V/p_0. \quad (5.25)$$

Изотермическая α_T и адиабатическая α_S сжимаемости

$$\alpha_T = -(\partial V/\partial p)_T/V_0; \quad \alpha_S = -(\partial V/\partial p)_S/V_0. \quad (5.26)$$

Эти параметры связаны между собой соотношениями

$$\alpha = p_0 \alpha_T \beta; \quad \gamma = \alpha_T/\alpha_S = C_p/C_V. \quad (5.27)$$

Энтропия идеального одноатомного газа (формула Сакура-Тетроде, O.Sackur, H.Tetrode)

$$S = Nk \ln(V(kT)^{3/2}/N) + Nk(5 + 3 \ln(2\pi m/h^2))/2. \quad (5.28)$$

Условия устойчивости равновесия однородной системы:

$$C_V > 0; \quad (\partial p/\partial V)_T < 0. \quad (5.29)$$

5.5 Примеры решения задач

Пример 1. Определить разность $C_p - C_V$ для газа Ван-дер-Ваальса и для идеального газа.

Решение. За исходную рассмотрим формулу (5.22). Из уравнения состояния $(p + a/V^2) \cdot (V - b) = NkT$ находим $(\partial p/\partial T)_V = Nk/(V - b)$ и $(\partial V/\partial T)_p = Nk/\{p + a/V^2 - 2a(V - b)/V^3\}$. Тогда

$$C_p - C_v = Nk / \left(1 - 2a(V-b)^2 / V^3 NkT\right).$$

В пренебрежении слагаемыми второго порядка малости ($\sim ab/V^2$) имеем $C_p - C_v = Nk(1 + 2a/NkTV)$. Для идеального газа ($a = 0, b = 0$) $C_p - C_v = Nk$.

Пример 2. Записать связь между термодинамическими параметрами теплоизолированного идеального газа (уравнение Пуассона).

Решение. Из (5.1) при $dQ = 0$ следует $C_v dT + pdV = 0$, а с учетом уравнения состояния ($p = NkT/V$) и $Nk = C_p - C_v$ (пример. 1): $dT/T + (\gamma - 1)dV/V = 0$, где $\gamma = C_p/C_v$. После интегрирования получаем первую форму уравнения Пуассона

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}.$$

Замена T или V через p из уравнения состояния приводит ко второй и третьей формам уравнения Пуассона $pV^\gamma = \text{const}$, $T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const}$.

Пример 3. Вычислить энтропию газа Ван-дер-Ваальса и найти уравнение его адиабаты.

Решение. Считая, что $E = E(V, T)$, имеем $dE = C_v dT + (\partial E/\partial V)_T dV$. Из (5.5) находим $(\partial E/\partial V)_T = -p + T(\partial S/\partial V)_T = -p + T(\partial p/\partial T)_V$ и $S = \int (dE + pdV)/T$. Для газа Ван-дер-Ваальса $((\partial p/\partial T)_V = Nk/(V-b))$, Пример. 1) получаем

$$S = \int C_v dT/T + Nk \ln(V-b) + S_0.$$

Т.к. C_v слабо зависит от температуры, то $S = C_v \ln T + Nk \ln(V-b) + S_0$. Для адиабатического процесса ($S = \text{const}$) $T(V-b)^{Nk/C_v} = \text{const}$.

Пример 4. Показать, что при $T \rightarrow 0$ изотермическая α_T и адиабатическая α_S сжимаемости вырожденных систем равны, т. е. $(\partial V/\partial p)_T = (\partial V/\partial p)_S$.

Решение. Из перекрестных соотношений и теоремы Нернста имеем $(\partial V/\partial T)_p = -(\partial S/\partial p)_T = 0$, $(\partial p/\partial T)_V = (\partial S/\partial V)_T = 0$. После подстановки в (5.22) получаем $C_p = C_v$, а следовательно, $\alpha_T/\alpha_S = C_p/C_v = 1$.

Пример 5. Показать, что закон Кюри для парамагнетиков $\chi = C/T$ не выполняется при низких температурах.

Решение. Из (5.12б) следует $(\partial S/\partial \vec{H})_{T,p} = (\partial \vec{M}/\partial T)_{\vec{H},p}$. Согласно закону Кюри $(\vec{M} = C\vec{H}/T)$, $(\partial \vec{M}/\partial T)_{\vec{H},p} = -C\vec{H}/T^2$. Но при низких температурах справедлива теорема Нернста $\lim_{T \rightarrow 0} (\partial S/\partial \vec{H})_{T,p} = 0$, и поэтому закон Кюри не выполняется.

Пример 6. Установить связь между абсолютной T и эмпирической температурой t , измеряемой в условной произвольной шкале каким-либо термометрическим телом (термометром).

Решение. Считаем внутреннюю энергию E функцией T и V . Тогда, согласно (5.5), $dS = [(\partial E/\partial V)_T + p]dV/T + (\partial E/\partial T)_V dT/T$ – полный дифференциал, для которого справедливо $(\partial \{[(\partial E/\partial V)_T + p]/T\}/\partial T)_V = (\partial \{(\partial E/\partial T)_V/T\}/\partial V)_T$. Непосредственное вычисление левой и правой частей равенства приводит к уравнению $(\partial E/\partial V)_T + p = T(\partial p/\partial T)_V$, которое позволяет найти функцию $T = f(t)$ (или $t = \varphi(T)$). В силу существования такой зависимости $(\partial p/\partial T)_V = (\partial p/\partial t)_V \cdot (dt/dT)$ оно преобразуется к виду:

$$dT/T = (\partial p/\partial t)_V dt / [(\partial E/\partial V)_t + p].$$

Здесь правая часть – функция измеряемых параметров. После интегрирования

$$T = T_0 \exp \left\{ \int_{t_0}^t (\partial p/\partial t)_V dt / [(\partial E/\partial V)_t + p] \right\} = T_0 \exp I(t), \quad T_1 = T_0 \exp I(t_1).$$

Начальная температура T_0 и соответствующая ей эмпирическая t_0 задаются произвольно, что отвечает выбору единицы измерения температуры. Так, если взять температурную шкалу такой, чтобы разности между основными точками двух произвольных эмпирических температур $t_1 - t_0 = 100^\circ C$ и $\tau_1(t_1) - \tau_0(t_0) = 100^\circ X$ соответствовали разности абсолютных температур $T_1(t_1) - T_0(t_0) = 100^\circ K$ и $\theta_1(\tau_1) - \theta_0(\tau_0) = 100^\circ Y$, то из $T/(T_1 - T_0) = e^{I(t)}/(e^{I(t_1)} - 1)$ следует

$$T = 100 e^{I(t)} / [e^{I(t_1)} - 1], \quad \theta = 100 e^{I(\tau)} / [e^{I(\tau_1)} - 1].$$

Поскольку $(\partial \dots / \partial t) dt = (\partial \dots / \partial \tau) \cdot (\partial \tau / \partial t) dt$, то $I(\tau) = I(t)$ и $\theta = T$. Полученные

соотношения оказываются справедливыми, если вместо давления p и объема V выбрать любую другую обобщенную силу Λ и сопряженный ей параметр λ

$$I(t) = I(\tau) = \int_{t_0}^t (\partial p / \partial t)_V dt / [(\partial E / \partial V)_t + p] = \int_{t_0}^t (\partial \Lambda / \partial t)_\lambda dt / [(\partial E / \partial \lambda)_t + \Lambda] .$$

Поэтому формула шкалы абсолютной температуры не зависит от выбора термометрического тела и позволяет найти T по произвольной эмпирической температуре, измеряемой по каким-либо его свойствам, например, кроме тепловых, оптическим или магнитным..

Если в качестве термометрического тела выбрать идеальный газ ($\Lambda = p$, $\lambda = V$, $p = p_0(1 + \beta t)$ при $V = \text{const}$, $\beta = 1/273.15$, t – температура по шкале Цельсия, $(\partial E / \partial V)_t = 0$), то при $t_1 - t_0 = 100^\circ \text{C}$.

$$I(t) = \ln[(1 + \beta t)/(1 + \beta t_0)] , \quad I(t_1) = \ln[(1 + \beta t_1)/(1 + \beta t_0)] .$$

$$T(t) = 100[(1 + \beta t)/\beta(t_1 - t_0)] = t + 273.15 .$$

Абсолютный ноль $T = 0^\circ \text{K}$ по шкале Цельсия равен $t = -273.15^\circ \text{C}$.

5.6 Задачи и упражнения для самостоятельной работы

5.1. Вычислить работу идеального газа во время расширения при адиабатическом процессе. Указание: Воспользоваться уравнением состояния в форме Пуассона.

5.2. Определить свободную энергию и найти уравнение состояния системы, если ее энтропия равна $S = RV_0(T/T_0)^\alpha / V$, где V_0 , T_0 , α – константы.

5.3. В макроскопической системе средняя энергия связана с температурой соотношением $E = \alpha T^n$, ($n > 1$). Найти ее число состояний.

5.4. Энергия и импульс частиц связаны между собой соотношением $\varepsilon = pc$, где c – скорость света. Написать распределение Гиббса для частиц такого газа по энергиям, найти его термодинамические потенциалы.

5.5. Найти свободную и внутреннюю энергии, теплоемкость столба идеального газа высотой H и площадью S , находящегося в поле сил тяжести.

5.6. Идеальный газ состоит из N молекул с жесткими диполями \vec{d}_0 и находится в электрическом поле напряженности \vec{E} при температуре T .

Определить его вектор поляризации и функцию состояний, если в отсутствие поля она равна Z_0 .

5.7. Выразить непосредственно теплоемкость системы C_V через функцию состояний.

5.8. N частиц идеального газа заключены в объем V и подчиняются микроканоническому распределению с энергией E . Вычислить для них фазовый объем Γ , энтропию S и температуру T .

5.9. Найти изменение энтропии при смешивании двух различных газов, имеющих одинаковые температуру и давление, но разные объемы V_1 и V_2 .

5.10. В двух сосудах находятся два однотипных идеальных газа с одинаковыми температурами T и числом атомов N , но с разными давлениями p_1 и p_2 . Сосуды соединяются. Найти изменение энтропии.

5.11. Определить связь между параметрами идеального газа в политропном процессе (изменение количества тепла $dQ = C dT$, где C – теплоемкость при произвольных фиксированных параметрах).

5.12. Вычислить изменение энтропии идеального газа массы m и молекулярным весом атомов μ при его нагревании от температуры T_1 до T_2 . Рассмотреть изохорный и адиабатический процессы.

5.13. Получить свободную энергию смеси идеальных газов, состоящей из ν_1 молей одного и ν_2 молей другого компонента и занимавших до смешивания объемы V_1 и V_2 . Найти изменение свободной энергии при изотермической диффузии этих газов в объем $V_1 + V_2$.

5.14. Вывести закон Дальтона для давления смеси двух идеальных газов.

5.15. Показать, что $(\partial C_V / \partial V)_T = T (\partial^2 p / \partial T^2)_V$.

5.16. Показать, что $(\partial C_p / \partial p)_T = -T (\partial^2 V / \partial T^2)_p$.

5.17. Показать, что теплоемкость C_p системы не зависит от давления, если её объем пропорционален температуре.

5.18. Доказать, что на диаграммах $(p \leftrightarrow V)$ адиабата круче изотермы, $(\partial p / \partial V)_S > (\partial p / \partial V)_T$.

5.19. Найти энтальпию системы, если её теплоемкость $C_p = \alpha T^3 \ln p$ и

объем $V = \beta T^4 / p$, где α и β – постоянные величины.

5.20. Определить теплоемкость C_p , изотермическую сжимаемость α_T и коэффициент теплового расширения через потенциал Гиббса.

5.21. Получить термодинамический потенциал Гиббса смеси идеальных газов, состоящих из ν_1 молей одного и ν_2 молей другого компонента и занимавших до смешивания объемы V_1 и V_2 . Найти изменение потенциала Гиббса при изотермической диффузии этих газов в объем $V_1 + V_2$.

5.22. Потенциал Гиббса системы представлен функцией $\Phi(T, p) = AT + BTp + Cp^2/2 + T^2/2$, где A, B, C – абсолютные постоянные. Найти энтальпию системы.

5.23. Определить термоупругий эффект $(\partial T / \partial p)_S$ системы при адиабатическом процессе. Вычислить его для идеального газа, занимающего объем V и имеющего теплоемкость C_p .

5.24. Однотипные идеальные газы с одинаковыми температурой T_0 и числом N атомов находятся в сосудах разного объема V_1 и V_2 . Определить максимальную полезную работу при их смешивании (соединении). Указание: воспользоваться формулой энтропии $S = kN [\ln(V/N) + 1.5 \ln T] + N S_0(m)$.

5.25 Вычислить дополнительные энергию и теплоёмкость, приобретаемую газом из N молекул с жесткими диполями \vec{d}_0 в слабом ($\epsilon d_0 \ll kT$) электрическом поле с напряженностью $\vec{\epsilon}$.

6. СТАТИСТИКА КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

6.1. Общие положения и понятия

Физические свойства систем из одинаковых (одного сорта) микрочастиц определяются волновой функцией $\psi = \psi(q_1, q_2, \dots, q_N, t)$ – решением уравнения Шредингера. Здесь q_i – координаты i -ой частицы. Вероятность найти частицу в объеме $d\Gamma$ равна

$$dw = C^2 \psi \psi^* d\Gamma, \quad (6.1)$$

где C – нормировочная постоянная. Волновые функции одинаковых физических состояний отличаются только постоянным множителем.

Принцип тождественности: Частицы одного и того же сорта не могут иметь никаких различимых или характерных особенностей. Согласно этому принципу, в квантовой статистике различают симметричные и антисимметричные волновые функции. Первые из них сохраняют, а вторые меняют знак при перестановке двух частиц.

Частицы, которые имеют полуцелый спин $S = \hbar(2m+1)/2$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), называются фермионами (электроны, протоны, позитроны, нейтроны). Симметричными функциями описываются системы из бозонов – частиц с целочисленным спином $S = m\hbar$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) (фотоны, фононы, k - и π -мезоны, некоторые атомы, у которых результирующий спин составляющих их электронов, протонов, нейтронов оказывается целым).

Фермионы подчиняются принципу Паули: в состоянии с энергией, определяемой через квантовые числа, может находиться лишь одна частица. Количество бозонов в одном состоянии произвольно.

Средняя плотность частиц идеального газа в микросостоянии с энергией ε_i есть функция распределения Ферми-Дирака ($f_{\Phi D}$) для фермионов и Бозе-Эйнштейна ($f_{БЭ}$) для бозонов:

$$\overline{n_{i+}} \equiv f_{\Phi D} = \left\{ \exp[(\varepsilon_i - \mu)/kT] + 1 \right\}^{-1}, \quad (6.2)$$

$$\overline{n_{i-}} \equiv f_{БЭ} = \left\{ \exp[(\varepsilon_i - \mu)/kT] - 1 \right\}^{-1}. \quad (6.3)$$

Для близко расположенных энергетических уровней ($|\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i| \ll kT$) эти распределения принимают вид

$$dn_{\pm}(\varepsilon) = \left\{ \exp[(\varepsilon - \mu)/kT] \pm 1 \right\}^{-1} d\Gamma/h^{f/2}. \quad (6.4)$$

Химический (парциальный) потенциал μ находится из условия нормирования

$$\int dn = N, \quad (6.5)$$

где N – общее число частиц в объеме.

Число состояний частицы с энергией вблизи ε внутри объема V :

$$\Omega(\varepsilon) d(\varepsilon) \equiv d\Gamma/h^3 = 4\pi V (2m/h^2)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon. \quad (6.6)$$

Увеличение их в два раза по сравнению с классическими системами учитывает двукратное вырождение состояний: фермиона по ориентации спина, фотона – по поляризации света.

6.2 Идеальный газ двухатомных молекул

Особенность газа из многоатомных молекул – наличие у них, кроме поступательных, вращательных и колебательных степеней свободы. Для классических частиц на колебательную степень свободы приходится средняя энергия, равная $\bar{\varepsilon}_{\text{кол.}} = kT$, на все остальные $\bar{\varepsilon}_{\text{пост.}} = \bar{\varepsilon}_{\text{вр.}} = kT/2$. Так, средняя энергия движения двухатомной молекулы равна

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{\text{кол.}} + \bar{\varepsilon}_{\text{вр.}} + \bar{\varepsilon}_{\text{пост.}} = 3.5kT. \quad (6.7)$$

В квантовых системах энергия малых колебаний двух ядер с массами m_1 и m_2 относительно их равновесного расстояния r_0 принимает ряд дискретных значений (линейный гармонический осциллятор):

$$\varepsilon_{\text{кол.}} = h\nu(n + 1/2), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.8)$$

где $\nu = \sqrt{\varkappa/\mu}/2\pi$ – частота колебаний, \varkappa – коэффициент жесткости, $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ – приведенная масса. Уровни осциллятора не вырождены: каждому значению n – соответствует одно состояние.

Энергия вращательного движения двухатомной молекулы отождествляется с энергией твердого ротатора с моментом инерции $I = \mu r_0^2$:

$$\varepsilon_{\text{вр.}} = h^2 j(j+1)/8\pi^2 I, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (6.9)$$

Энергетические уровни вращательного движения $(2j+1)$ -кратно вырождены.

Функция состояний газа из N двухатомных молекул

$$Z = (z_{\text{пост.}} \cdot z_{\text{кол.}} \cdot z_{\text{вр.}})^N / N! \quad (6.10)$$

Здесь

$$z_{\text{пост.}} = (2\pi(m_1 + m_2)kT/h^2)^{3/2} \cdot V; \quad (6.11)$$

$$z_{\text{кол.}} = e^{-T_K/2T} / (1 - e^{-T_K/T}); \quad (6.12)$$

$$z_{\text{вр.}} = \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) e^{-T_e j(j+1)/T}; \quad (6.13)$$

где $T_K = h\nu/k$, $T_e = h^2/8\pi^2 kI$ – характеристические температуры колебательного и вращательного движений. Для высоких температур ($T \gg T_e$) $z_{\text{вр.}} \cong T/T_e$.

Из (6.10) следует, что термодинамические потенциалы и ряд параметров – аддитивные функции по отношению к видам движения, т.е.:

$$U = U_{\text{пост.}} + U_{\text{кол.}} + U_{\text{вр.}}, \quad (6.14)$$

где U представляет любую из функций: внутреннюю (E), свободную (F) энергии, потенциал Гиббса (Φ), энтальпию (H), теплоёмкость (C_V , C_p), энтропию (S) и т.п. В частности, внутренняя энергия:

$$E = N(\bar{\varepsilon}_{\text{пост.}} + \bar{\varepsilon}_{\text{кол.}} + \bar{\varepsilon}_{\text{вр.}}) = NkT^2 \partial(\ln z_{\text{пост.}} + \ln z_{\text{кол.}} + \ln z_{\text{вр.}}) / \partial T.$$

6.3 Функция состояний и энергия твердого тела

Кристаллы (истинно твердые тела) обладают определенной симметрией, состоят из элементарных разного порядка симметрии ячеек, в узлах которых находятся структурные единицы: атомы или молекулы. Расстояния между атомами в кристалле малы, сравнимы с расстояниями между атомами в молекулах ($\sim 10^{-8}$ см). Из-за сильного взаимодействия единственно возможное движение атомов – колебания их вблизи равновесного положения. При высоких температурах внутренняя энергия и теплоемкость кристалла равны:

$$E = 3NkT, \quad C_V = 3Nk = 6 \text{ кал/моль}. \quad (6.15)$$

Собственные коллективные движение N атомов (нормальные колебания) существуют в кристалле в виде упругих волн, у которых проекция волнового вектора зависит от соответствующего размера ячейки a :

$$q_n = \pi n / [a(N-1)], \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Дисперсионное уравнение и скорость распространения нормальных колебаний определяются постоянной упругости (α) и массой атомов кристалла

$$\omega_n = 2\sqrt{\alpha/m} \sin(q_n a/2), \quad (6.16a)$$

$$v = \omega_n / q_n = 2\sqrt{\alpha/m} [\sin(q_n a/2)] / q_n, \quad (6.16b)$$

Энергия кристалла из N атомов, совершающих связанные колебания, равна энергии N независимых гармонических осцилляторов с набором частот (6.16). Энергия каждого осциллятора с частотой $\nu_n = \omega_n / 2\pi$ в состоянии $s_n = 0, 1, 2, \dots$ и всего кристалла (совокупность $3N$ -осцилляторов в собственных состояниях s_n) равны

$$\varepsilon_n(s) = h\nu_n (s_n + 1/2), \quad E_{s_1, s_2, \dots, s_{3N}} = U_0 + \sum_{n=1}^{3N} h\nu_n (s_n + 1/2),$$

где U_0 – потенциальная энергия кристалла в равновесном состоянии. Если ввести энергию нулевых колебаний $E_0 = U_0 + \sum_{n=1}^{3N} h\nu_n / 2$, то функция состояний и внутренняя энергия имеют вид:

$$Z = e^{-E_0/kT} \prod_{n=1}^{3N} (1 - e^{-h\nu_n/kT})^{-1}, \quad (6.17)$$

$$E = E_0 + \sum_{n=1}^{3N} \bar{\varepsilon}_n. \quad (6.18)$$

Здесь $h\nu_n$ – минимальная порция поглощаемой (излучаемой) энергии (фонон), а средняя энергия $\bar{\varepsilon}_n$ и число нормальных колебаний с частотой ν_n задаются формулами.

$$\bar{\varepsilon}_n = h\nu_n / (e^{-h\nu_n/kT} - 1), \quad (6.19)$$

$$f(\varepsilon_n) = (e^{-h\nu_n/kT} - 1)^{-1}. \quad (6.20)$$

Согласно модели Дебая, распределение по частотам нормальных колебаний в кристалле объемом V совпадает с распределением упругих волн в сплошной среде такого же объема до частоты ν_{\max} :

$$g(v)dv = \begin{cases} 9Nv^2dv/v_{\max}^3, & v \leq v_{\max}; \\ 0, & v > v_{\max}. \end{cases} \quad (6.21)$$

Максимальная частота нормальных колебаний выражается через характеристическую температуру Дебая $v_{\max} = k\theta_D/h$. С ростом температуры при $T > \theta_D$ число нормальных колебаний не увеличивается. Температура Дебая зависит от плотности атомов (N/V), поперечной v_t и продольной v_l скоростей упругих волн:

$$\theta_D = h(9N/4\pi V)^{1/3} \left(v_t^3 v_l^3 / (v_t^3 + 2v_l^3) \right)^{1/3} / k. \quad (6.22)$$

В такой модели логарифм функции состояний кристалла выражается формулой

$$\ln Z = -9N\theta_D/8T - 9N(T/\theta_D)^3 \int_0^{\theta_D/T} x^2 \ln(1 - e^{-x}) dx. \quad (6.23)$$

Она упрощается в области высоких ($T > \theta_D$) и низких ($T \ll \theta_D$) температур. При низких температурах внутренняя энергия и теплоёмкость кристалла из одноатомных молекул равны

$$E = 3\pi^4 Nk\theta_D (T/\theta_D)^4 / 5 + 9Nk\theta_D / 8, \quad (6.24)$$

$$C_V = 12\pi^4 Nk (T/\theta_D)^3 / 5. \quad (6.25)$$

6.4 Электронный газ в металлах

Отличительная особенность металлов – наличие свободных электронов. Они образуются в результате сильного взаимодействия атомов за счет наиболее удаленных от ядер внешних (валентных) электронов. Потеряв связь со «своим» атомом, электроны свободно движутся внутри металла. Совокупность всех свободных электронов в металле называют электронным газом. Тепловое движение в металле сводится к колебаниям ионов решетки и хаотическому перемещению свободных электронов.

Электронный газ описывается статистикой Ферми-Дирака. Уровни энергии системы, состоящей из очень большого числа электронов ($N \gg 1$), образуют почти непрерывный спектр. Если полное число электронов равно N , то при абсолютном нуле температуры заполняются первые $N/2$ состояния с

энергиями $\varepsilon < \mu_0$. Здесь химический потенциал электронного газа совпадает с энергией Ферми $\mu_0 = \mu(0)$:

$$\mu_0 \equiv \varepsilon_F = h^2 (3N/8\pi V)^{2/3} / 2m. \quad (6.26)$$

Средняя энергия отдельного электрона и электронного газа при $T = 0^0$ К имеют простой вид

$$\bar{\varepsilon}_{T=0} = 3\varepsilon_F/5, \quad E_{T=0} = N\bar{\varepsilon} = 3N\varepsilon_F/5. \quad (6.27)$$

В области низких температур парциальный потенциал, внутренняя энергия и теплоемкость электронного газа равны

$$\begin{aligned} \mu &\cong \varepsilon_F \left[1 - (\pi kT/\varepsilon_F)^2 / 12 \right], & E &\approx 3N\varepsilon_F \left[1 + 5(\pi kT/\varepsilon_F)^2 / 12 \right] / 5, \\ C_V &= N k^2 \pi^2 T / 2\varepsilon_F. \end{aligned} \quad (6.28)$$

6.5 Законы и термодинамические параметры равновесного излучения

Нагретые тела – источник теплового излучения – электромагнитного поля волн, излучаемых их атомами (молекулами) в диапазоне частот от нуля до ∞ . В состоянии равновесия с окружающими телами (отсутствует отражение) тепловое излучение является равновесным. Равновесное излучение моделируется излучением абсолютно черного тела, поглощающего электромагнитную энергию во всем частотном диапазоне.

Физическим образом абсолютно черного тела служит малое отверстие в стенке протяженной полости. Излучение, попавшее через отверстие внутрь полости, в результате многократных переотражений практически полностью поглощается. Равновесным является излучение через малое отверстие в полости с зеркальными стенками: его спектральная плотность определяется только температурой стенок и не зависит от их природы.

Удельная (на единицу объема) энергия собственных колебаний (линейных осцилляторов) внутри полости в диапазоне частот от ν до $\nu + d\nu$ равна

$$du(\nu, T) = \rho(\nu, T) d\nu \equiv \overline{\varepsilon(\nu, T)} g(\nu) d\nu. \quad (6.29)$$

Здесь $\rho(\nu, T)$ – спектральная плотность излучения, а плотность $g(\nu)$ осцилляторов (фотонов) и их средняя энергия $\overline{\varepsilon(\nu, T)}$ имеют вид

$$g(\nu) d\nu = g(q) dq = q^2 dq / \pi^2 = 8\pi \left(\nu^2 / c^3 \right) n^2(\nu) d[\nu n(\nu)] / d\nu. \quad (6.30)$$

$$\overline{\varepsilon(\nu, T)} = h\nu / (e^{h\nu/kT} - 1), \quad (6.31)$$

где $n(\nu)$ – показатель преломления среды, q – волновое число, c – скорость света. Спектральная плотность излучения в вакууме ($n(\nu)=1$) описывается формулой Планка.

$$\rho(\nu, T) = 8\pi h\nu^3 / c^3 (e^{h\nu/kT} - 1). \quad (6.32)$$

С корпускулярной точки зрения равновесное излучение в замкнутой полости можно рассматривать как фотонный газ, заполняющий её объём V . Фотоны имеют нулевую массу, движутся со скоростью света, возникают при излучении и исчезают при поглощении света атомами окружающих тел. Их энергия и импульс связаны соотношением $p = \varepsilon/c = h\nu/c$. В отличие от газа обычных частиц (электронов, протонов, атомов) число фотонов является переменным и зависит от состояния газа. При данном значении V и T равновесный фотонный газ содержит такое число фотонов N_0 , которое обеспечивает минимум свободной энергии $F(V, T, N_0)$, т.е.

$$\partial F(V, T, N) / \partial N = \mu(V, T) = 0. \quad (6.33)$$

Отсюда следует равенство нулю потенциал Гиббса ($\Phi = \mu N$) равновесного фотонного газа и среднее число фотонов с частотой ν

$$\bar{n}_\phi = (e^{h\nu/kT} - 1)^{-1}. \quad (6.34)$$

Спектральная плотность высокочастотных фотонов ($h\nu \gg kT$) описывается законом Вина:

$$\rho(\nu, T) = 8\pi h(\nu/c)^3 e^{-h\nu/kT}. \quad (6.35)$$

В поле излучения низкочастотных ($h\nu \ll kT$, $\overline{\varepsilon(\nu, T)} = kT$) фотонов преобладают волновые свойства. Соответствующая асимптотика (6.32) приводит к закону Релея-Джинса

$$\rho(\nu, T) = 8\pi kT \nu^2 / c^3. \quad (6.36)$$

Внутренняя энергия (закон Стефана-Больцмана), свободная энергия, энтропия и давление равновесного излучения равны

$$E = V \int_0^\infty \rho(\nu, T) d\nu = 8\pi^5 k^4 V T^4 / 15 (hc)^3 \equiv \alpha V T^4, \quad (6.37)$$

$$F = -T \int E dT / T^2 = -\alpha VT^4/3, \quad (6.38)$$

$$S = 4\alpha VT^3/3, \quad p = \alpha T^4/3 = E/3V. \quad (6.39)$$

Применение (6.37) для расчета излучающей способности не черных тел приводит к хорошим результатам для всех твердых излучателей, кроме металлов. У последних излучаемая энергия растет, как более высокая степень температуры.

6.6 Примеры решения задач

Пример 1. Найти число состояний твердого тела при низких температурах $T \ll \theta_D$.

Решение. Число состояний зависит от энтропии $\Omega(E) = \exp(S/k)$, которая связана с функцией состояний соотношением

$$S/k = E/kT + \ln Z = T \partial(\ln Z)/\partial T + \ln Z = \partial(T \ln Z)/\partial T.$$

Входящий в (6.23) интеграл при $T \ll \theta_D$ после замены θ_D/T на ∞ равен (см. задачу 1.18)

$$\int_0^{\infty} x^2 \ln(1 - e^{-x}) dx = \left[x^3 \ln(1 - e^{-x}) \right] / 3 \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{3} \int_0^{\infty} x^3 (1 - e^{-x})^{-1} dx = -\pi^4/45.$$

Подстановка его в (6.23) дает $\ln Z = -9N\theta_D/8T + \pi^4 N(T/\theta_D)^3/5$; $\partial(T \ln Z)/\partial T = 4\pi^4 N(T/\theta_D)^3/5$. Отсюда следует $\Omega(E) = \exp\left[4\pi^4 N(T/\theta_D)^3/5\right]$.

Пример 2. Система обладает эквидистантными невырожденными уровнями внутреннего движения частиц $\varepsilon_p = p\varepsilon$, $p = 1, 2, 3, \dots, n$. Энергия высшего уровня намного меньше тепловой энергии $\varepsilon_n \ll kT$. Найти внутреннюю, свободную энергии и теплоёмкость системы.

Решение. Функция состояния системы $Z = \sum_{p=1}^n e^{-px} = (1 - e^{-nx}) / (e^x - 1)$,

где $x = \varepsilon/kT$. После представления экспоненты рядом до членов второго порядка малости ($nx \ll 1$): $Z = n \left\{ 1 - \left[(n+1)\varepsilon/2kT - (n+1)(2n+1)(\varepsilon/kT)^2/12 \right] \right\}$.

Учитывая асимптотику $\ln(1 - \alpha) \approx -(\alpha + \alpha^2/2)$ при $\alpha \ll 1$, имеем

$\ln Z \cong \ln n - (n+1)\varepsilon/2kT + (n+1)(2n+1)(\varepsilon/kT)^2/12 - (n+1)^2(\varepsilon/kT)^2/8$. Свободная, внутренняя энергии и теплоёмкость, соответственно, равны $F = -kT \ln Z = -kT \ln n + (n+1)\varepsilon/2 - (n^2-1)\varepsilon^2/24kT$; $E = kT^2 \partial(\ln Z)/\partial T = (n+1)\varepsilon/2 - (n^2-1)\varepsilon^2/12kT$; $C_V = (\partial E/\partial T)_V = (n^2-1)\varepsilon^2/12kT^2$.

Пример 3. Определить температурную зависимость давления электронного газа вблизи абсолютного нуля температуры.

Решение. Поскольку внутренняя энергия электронного газа $E = \left[1 + (5/12)(\pi kT/\varepsilon_F)^2\right] 3N\varepsilon_F/5$, то, согласно (5.18), свободная энергия равна

$$F = -T \int_0^T (E/T^2) dT = 3N\varepsilon_F/5 - N(\pi kT)^2/4\varepsilon_F, \text{ где } \varepsilon_F = (h^2/2m)(3N/8\pi)^{2/3} V^{-2/3} -$$

энергия Ферми. Из уравнения состояния $p = -(\partial F/\partial V)_T$ находим давление

$$p(T) = -\left[3N/5 + (N/4)(\pi kT/\varepsilon_F)^2\right] (\partial \varepsilon_F/\partial V) = \left[1 + (5/12)(\pi kT/\varepsilon_F)^2\right] 2N\varepsilon_F/5V.$$

Поскольку электроны сохраняют движение при $T = 0^0 K$, то $p(0) \equiv p_0 = 2N\varepsilon_F/5V$, а давление электронного газа $p(T) = p_0 \left[1 + (5/12)(\pi kT/\varepsilon_F)^2\right]$.

Пример 4. Экспериментально найдены частоты перехода между соседними вращательными уровнями энергии молекулы HCl : $1/\lambda_1 = 145.37 \text{ см}^{-1}$; $1/\lambda_2 = 165.87 \text{ см}^{-1}$. а) Оценить приближенно момент инерции I молекулы HCl и её характеристическую температуру вращения T_g ; б) Определить функцию состояний вращательного движения $Z(\alpha)$ для $\alpha = T_g/T$: $\alpha = 1$; 0.5 ; 0.01 .

Решение. а) Энергия вращательного движения двухатомной молекулы $\varepsilon_{e,j} = h^2 j(j+1)/8\pi^2 I = kT_g j(j+1)$, $j = 0, 1, 2, \dots, \infty$. Частоты перехода (волновые числа) равны разности между соседними уровнями энергии вращения $1/\lambda_j = \nu_j/c = h\nu_j/hc = (\varepsilon_{e,j+1} - \varepsilon_{e,j})/hc = 2kT_g(j+1)/hc$. От порядкового номера уровня энергии j не зависит разность между соседними частотами перехода. $\Delta\nu = (1/\lambda_{j+1} - 1/\lambda_j) = 2kT_g/hc$. Из экспериментальных данных $\Delta\nu = 20.5 \text{ см}^{-1}$ и $hc/k = 1.44 \text{ см} \cdot \text{град}$. имеем $T_g = hc \Delta\nu/2k = 1.44 \cdot 20.5/2 = 14.8^0 K$. Момент инерции ($h^2/8\pi^2 k = 40.3 \cdot 10^{-40} \text{ э} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{град}$) $I = \mu r_0^2 = h^2/8\pi^2 k T_g = 2.7 \cdot 10^{-40} \text{ э} \cdot \text{см}^2$.

б) Функция состояний $Z = \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1)e^{-T_e j(j+1)/T}$ в первых двух случаях находится непосредственным суммированием $Z(1) = 1 + 3e^{-2\alpha} + 5e^{-3\alpha} \cong 1.42$, $Z(0.5) = 1 + 3e^{-1} + 5e^{-3} + 7e^{-6} \cong 2.37$. Для высоких температур $Z(0.01) \cong \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = 1/\alpha = 100$.

Пример 5. Лучеиспускательной способностью тела при данной температуре $\mathcal{E}(\nu, T)$ – называется энергия волн вблизи частоты ν , излучаемая единицей поверхности тела за единицу времени. Установить связь между $\mathcal{E}(\nu, T)$ черного тела и спектральной плотностью энергии его равновесного излучения $\rho(\nu, T)$.

Решение. По интенсивности и спектральному составу излучение абсолютно черного тела – идентично излучению из отверстия полости. В направлении нормали к отверстию из общей энергии поля внутри полости излучается только её часть. Она определяется долей телесного угла отверстия dS , т.е. $\sin\theta d\theta d\phi/4\pi$. В единицу времени из отверстия выходит энергия, заключенная в наклонном цилиндре с основанием dS и высотой $c \cdot \cos\theta$, где c – скорость света (фотона). Поскольку плотность энергии вблизи частоты ν равна $\rho(\nu, T)d\nu$, то под углом θ к нормали поверхности dS выходит энергия $dI(\theta, \phi) = \rho(\nu, T)d\nu dS \cdot c \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta d\theta d\phi/4\pi$. Общая энергия излучения за единицу времени через отверстие dS равна

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} dI(\theta, \phi) = c\rho(\nu, T)d\nu dS/4.$$

Но поскольку отверстие имеет ту же излучательную способность, что и поверхность тела той же величины, то из равенства $c\rho(\nu, T)d\nu dS/4 = \mathcal{E}(\nu, T)d\nu dS$ следует $\mathcal{E}(\nu, T) = c\rho(\nu, T)/4$.

Пример 6. Собственный магнитный момент электрона равен μ_e . Определить магнитный момент M_e и поляризуемость χ_{eH} электронного газа с плотностью n при температуре T .

Решение. Приобретать энергию от внешнего магнитного поля H могут только те электроны, которые занимают энергетические уровни вблизи энергии Ферми ε_F в полосе kT . Плотность таких электронов $\Delta n = nkT/\varepsilon_F$.

Магнитный момент единицы объема электронного газа пропорционален разности между числом электронов, имеющих параллельную («+») и антипараллельную («-») ориентацию магнитного момента по отношению к направлению напряженности магнитного поля $M_e = \mu_e (\Delta n^+ - \Delta n^-) = \mu_e C (e^{\mu_e H/kT} - e^{-\mu_e H/kT})$. Здесь использованы выражение для энергии магнитного момента в магнитном поле $U^\pm = \pm \mu_e H$ и формула Больцмана $\Delta n^\pm = C e^{-U^\pm/kT}$. Коэффициент пропорциональности C находим из очевидного равенства $\Delta n^+ + \Delta n^- = nkT/\varepsilon_F$. Подстановка его в исходную формулу дает $M_e = (\mu_e nkT/\varepsilon_F) \text{th}(\mu_e H/kT)$. Поскольку $\mu_e H \ll kT$, то $M_e = \chi_{eH} H = (\mu_e^2 n/\varepsilon_F) H$, $\chi_{eH} = \mu_e^2 n/\varepsilon_F$.

6.7 Задачи и упражнения для самостоятельной работы

6.1. Вычислить энтропию газа Ферми при низкой температуре.

6.2. Найти температурную зависимость $C_p - C_v$ при $T \rightarrow 0$ для вырожденного электронного газа, энтропия которого обращается в нуль по закону $\sim T$.

6.3. В квантовой механике показывается, что двумерный гармонический осциллятор обладает уровнями энергии $\varepsilon_n = hv(n+1)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. В отличие от линейного состояния плоского осциллятора оказываются $(n+1)$ -кратно вырожденными. Вычислить энергию системы, состоящей из N независимых двумерных гармонических осцилляторов.

6.4. Показать, что при низкой температуре разность $C_p - C_v$ у кристаллов становится весьма малой.

6.5. Получить формулу Планка для теплового излучения в среде, у которой показатель преломления $n(\nu)$ зависит от частоты.

6.6. Получить уравнение состояния электронного газа при абсолютном нуле температуры.

6.7. Найти функцию состояний, энтропию и свободную энергию системы из N независимых линейных осцилляторов с энергией $\varepsilon_n = hv n$, где $n = 0, 1, \dots, \infty$.

6.8. Вычислить характеристическую температуру для колебательного движения молекулы HCl , если собственная частота колебаний молекулы

$\nu = 0.875 \cdot 10^{14}$ Гц ($k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/град., $h = 6.62 \cdot 10^{-34}$ Дж.сек.).

6.9. Оценить скорость звука в алмазе, зная, что его дебаевская температура $\theta_D = 1860^\circ$ К, а постоянная решетки $d = 1.54 \text{ \AA}$.

6.10. Определить число столкновений за единицу времени электронов со стенкой сосуда, в котором находится электронный газ при абсолютном нуле температуры.

6.11. Найти распределение интенсивности $I(j, T)$ спектральных линий во вращательном спектре газа из двухатомных молекул и ее максимум. Считать, что $I(j, T)$ пропорциональна относительному числу молекул с $\varepsilon_j = kT_e j(j+1)$, а температура T намного выше характеристической температуры T_e вращательного движения $T \gg T_e$.

6.12. Площадь антенны радиолокатора $S = 10 \text{ м}^2$. Его приемное устройство регистрирует сигналы в полосе частот $d\nu = 1$ МГц на частоте $\nu_1 = 10$ ГГц. Температура Солнца $T_c = 6000^\circ$ К, квадрат отношения радиуса Солнца к радиусу орбиты Земли $\xi = 2.17 \cdot 10^{-5}$. Оценить мощность шумового сигнала, когда антенна направлена на Солнце.

6.13. Вычислить полное число фотонов N в объеме V и найти уравнение адиабаты фотонного газа.

6.14. Найти теплоемкости C_V и C_p равновесного излучения.

6.15. Найти относительную заселенность колебательных уровней энергии молекулы газа $\varepsilon_n = h\nu(n + 1/2)$ с $n = 0; 1; 4$ при температуре $T = T_k/2$ и $T = T_k$, где T_k – характеристическая температура колебательного движения.

6.16. Определить молекулярную энтропию вращательного и колебательного движений газообразной окиси углерода CO при $T = 600^\circ$ К. Равновесное расстояние между ядрами $r = 1.128 \text{ \AA}$, их частота колебаний $\nu = 6.5 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$. Масса молекул $m_C = 12$, $m_O = 16$ в а.е.м. (а.е.м. = $1.66 \cdot 10^{-24}$ г).

7. ТЕОРИЯ МАЛЫХ ФЛУКТУАЦИЙ

7.1. Общие положения

Ф л у к т у а ц и и – самопроизвольные отклонения термодинамических параметров от их значений в равновесном состоянии макроскопической системы. Флуктуация означает переход системы из наиболее вероятного состояния в менее вероятное. В изолированной системе такой процесс (например, изменение локальной плотности молекул) связан с уменьшением энтропии. Для изучения отклонений выделяют внутри тела какую-либо его малую часть или подсистему и определяют флуктуации термодинамических величин, относящихся к этой подсистеме. Система в целом предполагается столь большой, что ее параметры (например, объем V_0 , температура T_0 , давление p_0 и др.) можно считать постоянными, отвечающими их средним значениям. В подавляющем большинстве конкретных задач (малые флуктуации в больших системах) флуктуационные процессы описываются вероятностью неравновесных состояний $dw(L)$, средней квадратичной флуктуацией (дисперсией) $\overline{(\Delta L)^2} \equiv \overline{(L - \bar{L})^2} = \bar{L}^2 - (\bar{L})^2$, и относительной флуктуацией $\delta_L = \sqrt{\overline{(\Delta L)^2}} / \bar{L}$. Величину $\sqrt{\overline{(\Delta L)^2}}$ называют масштабом флуктуации.

7.2. Вероятность неравновесных состояний.

Пусть энтропия и какой-либо внутренний параметр равновесной замкнутой системы равны S_0 и x_0 . В неравновесном состоянии они принимают значения S и x . Вероятность, что данная замкнутая система попадает в это состояние, определяется формулой Больцмана (5.6):

$$dw(x) = \text{const} \cdot e^{[S(x) - S_0(x_0)]/k} dx = \text{const} \cdot e^{\Delta S/k} dx, \quad (7.1)$$

где постоянная находится из условия нормирования.

Для вычисления вероятности неравновесного состояния квазизамкнутой системы ее рассматривают как малую часть замкнутой системы. Состояние такой подсистемы характеризуется некоторым внешним (по отношению подсистема + термостат) параметром λ . При переходе из равновесного в неравновесное состояние наряду с λ ($\lambda_0 \rightarrow \lambda$) изменяются и

термодинамические параметры подсистемы. Предполагается, что такие переходы квазистатические, т.е. термодинамические величины в подсистеме связаны обычными равновесными соотношениями. Причиной нарушения равновесного состояния принято считать действие внешнего источника, который совершает работу над подсистемой $\Delta W(\lambda)$, связанную с величиной отклонения $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$. Поскольку термостат и подсистема вместе составляют замкнутую систему, к ним применима формула (7.1). Суммарное изменение их энтропии при вышеуказанных допущениях определяет вероятность (плотность вероятности) неравновесного состояния квазизамкнутой системы

$$dw(\lambda) = w(\lambda)d\lambda, \quad (7.2)$$

$$w(\lambda) = \text{const} \cdot e^{-\Delta W(\lambda)/kT_0}. \quad (7.3)$$

Отсюда следует, что мера вероятности малых флуктуаций в макроскопической системе есть работа, которую нужно над нею совершить для изменения параметра λ , характеризующего ее состояние, на величину $\Delta\lambda$. Для термодинамических величин однородной системы в термостате с равновесными значениями давления p_0 , температуры T_0 она равна

$$\Delta W(\lambda) = \Delta E + p_0 \Delta V - T_0 \Delta S, \quad (7.4)$$

где ΔE , ΔV , ΔS – флуктуации внутренней энергии, объема и энтропии системы. Флуктуации отдельных термодинамических величин в общем случае зависят друг от друга. Считая причиной изменения внутренней энергии флуктуации ΔS и ΔV , представляют ΔE рядом до величин второго порядка малости. С учетом (5.5) в равновесном состоянии слагаемые в $\Delta W(\lambda)$, пропорциональные первому порядку малости, равны нулю, а плотность вероятности

$$w(\lambda) = w(\lambda_0) \exp\left\{-\frac{(\Delta S \Delta T - \Delta p \Delta V)}{2kT}\right\}. \quad (7.5)$$

Обобщенные термодинамические параметры λ_0 соответствуют равновесным значениям. В (7.5) флуктуации двух из четырех термодинамических параметров можно рассматривать как независимые. Выбирая в качестве таковых Δp и ΔS , выражения для двух других имеют вид

$$\Delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S \Delta p + \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p \Delta S, \quad (7.6a)$$

$$\Delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S \Delta p + \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p \Delta S. \quad (7.6b)$$

Для независимых ΔV и ΔT

$$\Delta p = (\partial p / \partial V)_T \Delta V + (\partial p / \partial T)_V \Delta T, \quad (7.7a)$$

$$\Delta S = (\partial S / \partial V)_T \Delta V + (\partial S / \partial T)_V \Delta T. \quad (7.7b)$$

Подставляя (7.6) или (7.7) в (7.5), получаем для плотностей $w(\Delta p, \Delta S)$ или $w(\Delta V, \Delta T)$ двумерные гауссовы (нормальные) распределения. Поскольку пары $\Delta p, \Delta S$ и $\Delta V, \Delta T$ независимы, то корреляционные моменты $\overline{\Delta p \Delta S}$ и $\overline{\Delta V \Delta T}$ обращаются в нуль. Если флуктуации каких-либо параметров $\Delta \Lambda_j, \Delta \Lambda_k$ взаимно зависимы, то степень этой зависимости отражает коэффициент (радиус) корреляции

$$r_{\Delta \Lambda_j, \Delta \Lambda_k} = \frac{|\overline{\Delta \Lambda_j \cdot \Delta \Lambda_k}|}{\sqrt{(\overline{\Delta \Lambda_j})^2 \cdot (\overline{\Delta \Lambda_k})^2}}. \quad (7.8)$$

Устойчивым является такое состояние системы, когда она находится в равновесии с окружающей средой. При этом его вероятность $w(\lambda)$ имеет максимум, когда $\lambda = \lambda_*$, где λ_* – наиболее вероятное значение (для макросистем $\lambda_* \cong \bar{\lambda} = \lambda_0$). Поэтому при любых отклонениях от равновесия обязано выполняться неравенство

$$\Delta T \Delta S - \Delta p \Delta V > 0. \quad (7.9)$$

При постоянном значении одного из параметров в первом слагаемом (T или S), либо – во втором (p или V), имеют место неравенства $\Delta p \Delta V < 0$ и $\Delta T \Delta S > 0$. Следствием их есть частные условия (критерии) устойчивости равновесия (см. разд. 6)

$$C_p > 0; \quad C_V > 0; \quad (7.10)$$

$$(\partial p / \partial V)_S < 0; \quad (\partial p / \partial V)_T < 0. \quad (7.11)$$

7.3. Флуктуации термодинамических величин в однородной среде

Выбрав в качестве независимых переменных объем V , температуру T и используя (7.7), находим из (7.5) плотность вероятности их флуктуаций

$$w(\Delta V, \Delta T) = w(V_*, T_*) \exp \left\{ \frac{(\partial p / \partial V)_{T_*} \Delta V^2 - (C_V / T_*) \Delta T^2}{2kT_*} \right\}. \quad (7.12)$$

Она определяется через произведение двух независимых сомножителей, поэтому корреляция между величинами T и V отсутствует $\overline{\Delta V \Delta T} = 0$. Из

сравнения (7.12) с функцией Гаусса следуют значения среднеквадратичной флуктуации

$$\overline{(\Delta T)^2} = kT_*^2 / C_V ; \quad \overline{(\Delta V)^2} = -kT_*(\partial V / \partial p)_{T_*} . \quad (7.13)$$

Поскольку плотность среды из N частиц массы m зависит от её объема $\rho_* = mN_*/V_*$, то из (7.13) находится дисперсия плотности при $N = \text{const}$:

$$\overline{(\Delta \rho)^2} = m^2 \overline{(\Delta(N/V))^2} = -\rho_*^2 kT_*(\partial V / \partial p)_{T_*} / V_*^2 . \quad (7.14)$$

Если считать, что флуктуации плотности среды обусловлены изменением числа частиц в постоянном объеме, то, согласно (7.14), дисперсия числа частиц равна

$$\overline{(\Delta N)^2} = \left[-N^2 kT_*(\partial V / \partial p)_{T_*} \right] / V^2 . \quad (7.15)$$

7.4. Флуктуации в токовых приборах

Электрические флуктуации в токовой аппаратуре приводят к шумовому «фону». Этот «фон» кладет предел чувствительности измерительной (приемной) аппаратуры: при одиночном измерении интенсивность принимаемого сигнала должна быть выше, чем интенсивность фона в приемнике. Шумовые токи обусловлены наложением двух независимых флуктуационных эффектов: флуктуация числа электронов в токопроводящих элементах аппаратуры (проводниках, электронных лампах, транзисторах) – д р о б о в о й э ф ф е к т или шум Ш о т т к и ; хаотическое изменение скорости электронов вдоль проводников – т е п л о в о й или д ж о н с о н о в с к и й шум.

Дисперсия дробового тока зависит от среднего значения тока \bar{I} , определяемого через дисперсию числа электронов, которые проходят проводник за время t_0 :

$$\overline{(\Delta I_D)^2} = e^2 \overline{(\Delta n)^2} / t_0^2 = e^2 \bar{n} / t_0^2 = e\bar{I} / t_0 . \quad (7.16)$$

Каждый электрон, перемещаясь со средней скоростью вдоль проводника, создает импульс тока длительностью, равной времени пролета (или средним временем его существования). Импульсы тока отдельных электронов случайны в том понимании, что случаен момент их возникновения.

Для определения реакции цепей и приборов, подключенных к проводнику, на дробовой шум переходят к спектральному представлению импульса тока

(разложение Фурье). Считая импульс тока длительностью t_0 прямоугольным, находится полоса частот, в которой дробовой шум отличен от нуля $\Delta f_D = 1/2t_0$. Если максимумы спектральной чувствительности устройства $f \ll 1/t_0$, то шум определяется мощностью его пропущенных спектральных составляющих в частотной полосе устройства. В общем случае от частотной полосы пропускания устройства Δf зависит дисперсия тока дробового шума

$$\overline{(\Delta I_D)^2} = 2eI \Delta f. \quad (7.17)$$

Прохождение случайного тока по проводнику с сопротивлением R вызывает на нем случайное напряжение и потери мощности

$$\overline{(\Delta U_D)^2} = R^2 \overline{(\Delta I_D)^2} = 2eIR^2 \Delta f, \quad (7.18a)$$

$$P = \overline{(\Delta I_D)^2} R = 2eIR \Delta f. \quad (7.18b)$$

Полоса частот Δf_T тепловых шумов зависит от промежутка времени τ между столкновениями $\Delta f_T = 1/2\tau$. Это время очень мало ($\sim 10^{-12}$ с), и спектр теплового шума практически равномерен от нулевой до весьма высоких частот $\sim 1/\tau$ (диапазон ММ длин волн). Дисперсия теплового тока равна

$$\overline{(\Delta I_T)^2} = 4kT \Delta f_T / R.$$

Учет полосы пропускания прибора Δf приводит к формулам Найквиста для дисперсии тока, напряжения и мощности потерь.

$$\overline{(\Delta I_T)^2} = 4kT \Delta f / R; \quad \overline{(\Delta U_T)^2} = 4kTR \Delta f; \quad P = 4kT \Delta f. \quad (7.19)$$

7.5. Примеры решения задач

Пример 1. Найти вероятность и средний квадрат флуктуации (дисперсию) давления p и энтропии S в однородной системе.

Решение. Для однородной системы вероятность флуктуации описывается формулой (7.5). Поскольку в качестве независимых переменных выбраны p и S , то изменение объема ΔV и температуры ΔT находим через изменения ΔS и Δp по формуле (7.6). Тогда работу, связанную с изменением ΔS и Δp , можно представить в виде

$$\Delta W(\Delta S, \Delta p) = (\Delta S \Delta T - \Delta p \Delta V)/2 = \left\{ \Delta S \left[(T/C_p) \Delta S + (\partial T/\partial p)_s \Delta p \right] - \right. \\ \left. - \Delta p \left[(\partial V/\partial p)_s \Delta p + (\partial T/\partial p)_s \Delta S \right] \right\} / 2 = \left\{ (T/C_p) (\Delta S)^2 - (\partial V/\partial p)_s (\Delta p)^2 \right\} / 2.$$

Здесь использовано перекрестное соотношение $(\partial V/\partial S)_p = (\partial T/\partial p)_s$.

Подставляя $\Delta W(\Delta S, \Delta p)$ в (7.5), находим плотность вероятности ΔS и Δp :

$$w(\Delta S, \Delta p) = w(S_0, p_0) e^{-\Delta W/kT_0} \sim \exp\left(\left((\partial V/\partial p)_s \Delta p^2 - (T/C_p) \Delta S^2\right)/2kT_0\right).$$

Это выражение распадается на множители, зависящие либо от Δp , либо от ΔS . Поэтому флуктуации энтропии и давления статистически независимы, $\overline{\Delta p \Delta S} = 0$. Сравнение каждого из множителей с распределением Гаусса определяет средние квадраты флуктуаций $\overline{(\Delta p)^2} = -kT_0 (\partial p/\partial V)_s$, $\overline{(\Delta S)^2} = kC_p$.

Пример 2. Определить коэффициент (радиус) корреляции флуктуаций объема и давления в однородной среде, в которой независимо меняются температура и объем.

Решение. Так как T и V независимы, то $\overline{\Delta V \Delta T} = 0$, а из (7.7а) следует

$$\overline{\Delta p \Delta V} = \overline{\left[(\partial p/\partial V)_T \Delta V + (\partial p/\partial T)_V \Delta T \right] \Delta V} = (\partial p/\partial V)_T \overline{(\Delta V)^2}.$$

Поскольку, согласно (7.13), $\overline{(\Delta V)^2} = -kT (\partial V/\partial p)_T$, то $\overline{\Delta p \Delta V} = -kT$. Это означает, что флуктуации давления и объема являются зависимыми. Поскольку $\overline{(\Delta p)^2} = -kT (\partial p/\partial V)_s$ (пример 1), то степень зависимости рассматриваемых флуктуаций описывается радиусом корреляции

$$r_{\Delta p, \Delta V} = \left| \overline{\Delta p \Delta V} \right| / \sqrt{\overline{(\Delta p)^2} \overline{(\Delta V)^2}} = \sqrt{C_V/C_p}.$$

Пример 3. В однородной системе происходят случайные взаимно независимые небольшие отклонения объема и температуры от их равновесных значений. Найти дисперсию ее внутренней энергии.

Решение. Т.к. независимые переменные – V и T , то $\Delta E(V, T) = (\partial E/\partial V)_T \Delta V + (\partial E/\partial T)_V \Delta T$. Из основного термодинамического равенства $(\partial E/\partial V)_T = -p + T(\partial S/\partial V)_T = -p + T(\partial p/\partial T)_V$. После возведения исходного соотношения в квадрат и его усреднения имеем

$$\overline{(\Delta E)^2} = \left[T(\partial p/\partial T)_V - p \right]^2 \overline{(\Delta V)^2} + C_V^2 \overline{(\Delta T)^2}.$$

Подставляя вместо $\overline{(\Delta V)^2}$ и $\overline{(\Delta T)^2}$ их значения (7.13), получаем $\overline{(\Delta E)^2} = -kT \left\{ \left[T(\partial p/\partial T)_V - p \right]^2 (\partial V/\partial p)_T - C_V T \right\}$.

Пример 4. Каждый электрон, проходя внутри проводника путь l за время t_0 , создает импульс тока постоянной амплитуды A и длительности t_0 . Число импульсов в единицу времени есть случайная величина (дробовой эффект). Оценить полосу частот, в которой дробовой шум отличен от нуля.

Решение. Выбирая начало отсчета времени посередине импульса тока, его временную зависимость представим в виде

$$P(t) = \begin{cases} A, & -t_0/2 \leq t \leq t_0/2, \\ 0, & |t| > t_0/2. \end{cases}$$

Отсюда следует его спектральная плотность

$$S(\omega) = (1/2\pi) \int_{-t_0/2}^{t_0/2} A e^{-i\omega t} dt = At_0 [\sin(\omega t_0/2)] / (\pi\omega t_0).$$

Энергия спектральной составляющей частоты ω пропорциональна квадрату модуля спектральной плотности, т.е.

$$|S(\omega)|^2 = (At_0/2\pi)^2 [\sin^2(\omega t_0/2)] / (\omega t_0/2)^2.$$

Она достигает максимума при нулевой частоте и, убывая с ростом абсолютного значения частоты, равна нулю на частотах $\omega_n = 2\pi n/t_0$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Практически вся энергия сосредоточена в интервале частот $\omega_{-1} \leq \omega \leq \omega_1$.

Заменим реальную функцию $|S(\omega)|^2$ прямоугольником, высота которого равна $|S(0)|^2$, а ширина выбирается такой, чтобы площадь его равнялась площади под кривой $|S(\omega)|^2$. Учитывая, что физический смысл имеют только положительные значения частоты, обозначим ширину прямоугольника через $2\Delta\omega_D$. Тогда

$$2\Delta\omega_D |S(0)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \left(2|S(0)|^2 / t_0 \right) \int_{-\infty}^{\infty} ((\sin^2 y) / y^2) dy = 2\pi |S(0)|^2 / t_0.$$

Здесь использовано равенство $\int_{-\infty}^{\infty} ((\sin 2y) / y) dy = \pi$. Поэтому полоса частот, где дробовой шум отличен от нуля, равна $\Delta\omega_D = \pi/t_0$ или $\Delta f_D = 1/2t_0$.

Устройство, подключенное к шумящему проводнику, реагирует не на все частоты, содержащиеся в спектре дробового шума. Пусть частотная полоса устройства вблизи частоты f_0 , отвечающая максимуму спектральной чувствительности, равна $\Delta f = (f_+ - f_-)/2$, где $f_{\pm} = f_0 \pm \Delta f$. Если она намного меньше $1/2t_0$ и $1/2t_0 > f_+$, то полоса частот дробового шума перекрывает всю полосу частот устройства. И для расчета предельной чувствительности устройства справедливы формулы (7.17)-(7.18). В противном случае, $f_- > 1/2t_0$, дробовой шум приемное устройство не воспринимает.

Пример 5. Среднее число частиц в системе, имеющей диффузионный контакт с термостатом, дается формулой $\bar{n} = kT \partial(\ln Z)/\partial \mu$, где функция состояния (большого канонического ансамбля Гиббса) имеет вид $Z = \sum_i \sum_n e^{-(\varepsilon_{in} - \mu n)/kT} \Omega(\varepsilon_{in})$, μ — химический потенциал. Доказать, что $\overline{(\Delta n)^2} = kT \partial \bar{n} / \partial \mu$.

Решение. Исходя из определения \bar{n} , вычисляется

$$\begin{aligned} kT \partial \bar{n} / \partial \mu &= kT \cdot kT \partial [\partial(\ln Z) / \partial \mu] / \partial \mu = (kT)^2 \partial [\partial(\ln Z) / \partial \mu] / \partial \mu = \\ &= (kT)^2 \left[Z (\partial^2 Z / \partial \mu^2) - (\partial Z / \partial \mu)^2 \right] / Z^2 = \\ &= (kT)^2 \left\{ \left((kT)^{-2} / Z \right) \sum_i \sum_n n^2 e^{-(\varepsilon_{in} - \mu n)/kT} \Omega(\varepsilon_{in}) - (kT)^{-2} [kT \partial(\ln Z) / \partial \mu]^2 \right\} = \overline{n^2} - \bar{n}^2. \end{aligned}$$

Поскольку $\overline{(\Delta n)^2} = \overline{n^2} - \bar{n}^2$, то справедливо $\overline{(\Delta n)^2} = kT (\partial \bar{n} / \partial \mu)$.

7.6. Задачи и упражнения для самостоятельной работы.

7.1. Найти масштаб флуктуации скорости макроскопического тела в произвольном направлении относительно среды. Масса тела равна M , а температура T .

7.2. Определить дисперсию тепловой функции $\overline{(\Delta H)^2}$ при независимых изменениях давления p и энтропии S .

7.3. Найти радиус корреляции флуктуации температуры и давления в однородной среде, где независимо изменяются объем и температура.

7.4. Найти радиус корреляции флуктуаций объема и энтропии идеального газа при переменных значениях температуры и объема.

7.5. Определить $\overline{\Delta S \Delta T}$ в однородной среде при переменных значениях объема и температуры.

7.6. Найти дисперсию угла отклонения вертикально висящего математического маятника длиной l и массы m .

7.7. Вычислить дисперсию числа частиц n_j с заданным значением энергии для идеального газа а) Ферми-Дирака; б) Бозе-Эйнштейна.

7.8. Определить дисперсию полного числа фотонов черного излучения в объеме V при температуре T .

7.9. Оценить дисперсию полного числа электронов в объеме V при температуре T , если $\mu/kT \gg 1$, где μ – химический потенциал.

7.10. Найти радиус корреляции флуктуаций температуры и давления для классического идеального газа.

7.11. Определить масштаб флуктуаций заряда конденсатора емкостью C , замкнутого на сопротивление, при температуре T .

7.12. Определить дисперсию тока в цепи с самоиндукцией L при температуре T .

7.13. Проводник длиной l и сечением $S = 10^{-2} \text{ см}^2$ изготовлен из кремния n-типа с плотностью электронов n . По нему идет ток силой $I = 10 \text{ мА}$. Определить полосу частот дробового шума, когда а) $l = 10^{-1} \text{ см}$, $n = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ ($\rho = 10 \text{ } \Omega \cdot \text{см}$); б) $l = 1 \text{ см}$, $n = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ ($\rho = 1 \text{ } \Omega \cdot \text{см}$).

7.14. Определить величину напряжения дробового шума проводника, описанного в задаче 7.13, если приемник пропускает полосу частот от 400 до 10000 Гц.

7.15. Параметры проводника такие же, как и в задаче 7.13. Оценить его напряжение теплового шума при температуре $T = 300^0 \text{ К}$ в приемнике с полосой частот от 400 до 1000 Гц.

8. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

8.1. Явления релаксации и переноса

Р е л а к с а ц и я – необратимый процесс возвращения в состояние термодинамического равновесия макроскопической системы, выведенной из такого состояния. Он сопровождается переходом части внутренней энергии системы в тепло. Промежуток времени перехода неравновесной замкнутой макроскопической системы в состояние равновесия называется в р е м е н е м р е л а к с а ц и и . Если состояние системы характеризуется функцией f , то в простейшем случае изменение f связано с временем релаксации τ законом:

$$df/dt = (f_0 - f)/\tau, \quad (8.1)$$

где f_0 – равновесное значение f . Отсюда следует, что время релаксации численно равно времени, в течение которого $(f - f_0)$ уменьшается до e^{-1} своей исходной величины.

Релаксация зависит не только от термодинамических (давление, температура и т.д.), но и от микроскопических характеристик, в частности от длины λ и времени t_0 свободного пробега частиц.

На первом этапе равновесие устанавливается в малых макроскопических частях системы в результате очень небольшого числа столкновений (квазиравновесное состояние). Время этой «микроскопической» релаксации очень мало $\tau \sim t_0$ (быстрые процессы). На втором этапе (медленные процессы) выравниваются температуры, давления, средние скорости, плотности и т.д. всех частей системы за счет большого числа последовательных соударений частиц между собой. Их время релаксации пропорционально размерам системы L и велико по сравнению с t_0 : $\tau \sim t_0 (L/\lambda)^2 \gg t_0$.

Условием разделения релаксации на быстрые и медленные процессы является неравенство $\lambda \ll L$. Оно нарушается либо при очень низких температурах (пробеги электронов и фононов в твердых телах большие), либо для сильно разреженных газов.

К медленным процессам релаксации относятся вязкость, диффузия, теплопроводность, электропроводность и т.д. При их описании для каждой макроскопической малой части системы наряду с локальными равновесными значениями температуры, давления, скорости, напряженностей полей вводят

кинетические коэффициенты (коэффициенты вязкости, диффузии, электро-, теплопроводности и т.д.). Течение медленных процессов релаксации определяется после этого соответствующими уравнениями движения.

При отклонении системы от равновесного состояния в ней возникают градиенты физических параметров, а именно: градиенты температуры – ∇T , химического потенциала – $\nabla \mu$, концентрации – ∇n (если система содержит примеси), плотности – $\nabla \rho$, электростатического потенциала $\nabla \phi$ (для заряженных частиц) и т.д. При наличии этих градиентов возникает обусловленный движением частиц поток физической величины в направлении, противоположном градиенту. Такие необратимые процессы переноса массы, энергии, импульса, количества движения, заряда, происходящие в пространственно неоднородных системах называются явлениями переноса. К ним относятся диффузия, термодиффузия, электро-, теплопроводность, термоэлектрические явления и др. Для малых отклонений от равновесия потоки физических величин пропорциональны их градиентам, а коэффициентами пропорциональности являются кинетические коэффициенты.

Неравновесное состояние макроскопической системы описывается одночастичной функцией распределения ее частиц в момент времени t по скоростям \vec{v} и в пространстве – $f(\vec{v}, \vec{r}, t)$. Выражение $f(\vec{v}, \vec{r}, t) d\vec{v} d\vec{r}$ имеет смысл плотности частиц (атомов, электронов, фононов), находящихся в момент времени t в элементе фазового объема $d\vec{v} d\vec{r} = dv_x dv_y dv_z dx dy dz$. Функция распределения удовлетворяет условию нормировки

$$\int f(\vec{v}, \vec{r}, t) d\vec{v} d\vec{r} = N, \quad (8.2)$$

где N – полное число частиц. Если она известна, то по алгоритму, развитому для равновесных систем, находятся ее термодинамические параметры, в частности, плотность частиц в точке \vec{r}

$$n(\vec{r}, t) = \int f(\vec{v}, \vec{r}, t) d\vec{v}.$$

В состоянии статистического равновесия функция $f(\vec{v}, \vec{r}, t) = f_0(\vec{v}, \vec{r})$ не зависит от времени и совпадает с распределением Максвелла для молекул однородного газа, Ферми-Дирака для электронов, Бозе-Эйнштейна для фононов.

Процессы переноса физического качества (тепла, массы, заряда, энергии и т.д.) осуществляются не только при движении частиц, но и за счет их взаимодействия. Так передача энергии и импульсов в газе происходит в результате столкновений молекул. Число столкновений за единицу времени молекул разреженного газа, находящихся в объеме $d\vec{r}$ и имеющих скорости в интервалах $(\vec{v}_1, \vec{v}_1 + d\vec{v}_1)$ и $(\vec{v}_2, \vec{v}_2 + d\vec{v}_2)$, равно

$$d\nu = f(\vec{v}_1, \vec{r}, t) \cdot f(\vec{v}_2, \vec{r}, t) |\vec{u}| \sigma(u, \theta) d\Omega d\vec{v}_1 d\vec{v}_2, \quad (8.3)$$

где $\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ – относительная скорость, $\sigma(u, \theta)$ – дифференциальное эффективное сечение сталкивающихся частиц (для одинаковых упругих сфер $\sigma = d^2 \cdot \cos\theta$, где d – диаметр молекулы, θ – угол между относительной скоростью и линией центров молекул), $d\Omega$ – элемент телесного угла. В элементарной кинетической теории газов в качестве функций распределения берутся их равновесные значения.

8.2. Кинетическое уравнение Больцмана

Кинетическое уравнение Больцмана (К.у.Б.) представляет собой уравнение баланса частиц в элементе фазового объема $d\vec{v} d\vec{r}$ и выражает тот факт, что изменение одночастичной функции распределения $f(\vec{v}, \vec{r}, t)$ со временем обусловлено движением частиц под действием сил внешнего поля (дрейфовая производная $-(\partial f / \partial t)_d$) и их взаимными столкновениями ($(\partial f / \partial t)_c \equiv \text{St} f$ – интеграл столкновений (stoss integral)):

$$\partial f / \partial t = (\partial f / \partial t)_d + (\partial f / \partial t)_c.$$

Существуют различные обобщения К.у.Б. Для классических и квантовых газов (атомов, зарядов в плазме, электронов в металле, фононов в кристалле и т.д.) используют его газокинетическое представление. Когда разреженный газ состоит из частиц одного сорта, К.у.Б. имеет вид

$$\partial f / \partial t + (\vec{v}(\partial f / \partial \vec{r})) + ((\vec{F}/m)(\partial f / \partial \vec{v})) = \text{St} f, \quad (8.4)$$

где $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ – сила действующая на частицу, $\text{St} f$ – столкновительная производная (интеграл столкновений) представляет собой разность между количеством частиц, покидающих данный элемент объема $d\vec{v} d\vec{r}$ (прямые столкновения), и поступающих в него в результате обратных столкновений. В

отсутствие корреляции между динамическими состояниями сталкивающихся молекул из законов классической механики следует

$$\text{St } f = \int (f' \cdot f'_1 - f \cdot f_1) |\vec{u}| \sigma(u, \theta) d\Omega d\vec{v}_1; \quad (8.5)$$

здесь $f = f(\vec{v}, \vec{r}, t)$, $f_1 = f(\vec{v}_1, \vec{r}, t)$, $f' = f(\vec{v}', \vec{r}, t)$, $f'_1 = f(\vec{v}'_1, \vec{r}, t)$; \vec{v} , \vec{v}_1 – скорости частиц до столкновения, \vec{v}' , \vec{v}'_1 – скорости тех же частиц после столкновения.

8.3. Определение потоков

Разработаны различные приближенные методы решения кинетического уравнения. Одно из направлений основано на исследовании стационарных систем, у которых градиенты и поля постоянны во времени, а неравновесная функция распределения $f(\vec{v}, \vec{r}, t)$ слабо отличается от ее равновесного значения $f_0(\vec{v}, \vec{r})$ и

$$\partial[f - f_0]/\partial\vec{r} \ll \partial f_0/\partial\vec{r}; \quad \partial[f - f_0]/\partial\vec{v} \ll \partial f_0/\partial\vec{v}.$$

Интеграл столкновений определяется через характерное время релаксации $\tau(v)$ для частиц с абсолютной скоростью v :

$$\text{St } f = -[f(\vec{v}, \vec{r}, t) - f_0(\vec{v}, \vec{r})]/\tau(v). \quad (8.6)$$

В таком приближении формальное решение К.у.Б. имеет вид

$$f = f_0 - \tau(v) \left\{ \vec{v} (\partial f / \partial \vec{r}) + (\vec{F}/m) (\partial f / \partial \vec{v}) \right\}. \quad (8.7)$$

Использование этого решения для электронного газа в металлах ($f_0 = (2m^3/h^3) [e^{(\epsilon-\mu)/kT} + 1]^{-1}$ – четная функция скорости) позволяет найти поток электронов (плотность тока \vec{j}) и поток тепла

$$\vec{j} = e \int \vec{v} \tau(v) \left\{ (\vec{v} \cdot \nabla_r T) (\partial f / \partial T) - \frac{e}{m} [\vec{E} + [\vec{v} \vec{H}]/c] (\partial f / \partial \vec{v}) \right\} d\vec{v}. \quad (8.8)$$

$$\vec{I} = -\frac{m}{2} \int v^2 \vec{v} \tau(v) \left\{ (\vec{v} \cdot \nabla_r T) (\partial f / \partial T) - \frac{e}{m} [\vec{E} + [\vec{v} \vec{H}]/c] (\partial f / \partial \vec{v}) \right\} d\vec{v}. \quad (8.9)$$

Здесь предполагалось, что пространственная производная обусловлена только градиентом температуры $\partial f / \partial \vec{r} = \nabla_r T \cdot (\partial f / \partial T)$; напряженности электрического \vec{E} и магнитного полей \vec{H} не зависят от координат, а сила,

действующая на электрон, есть сила Лоренца $\vec{F} = -(e/m) \left[\vec{E} + [\vec{v} \vec{H}] / c \right]$. В выражениях (8.8) и (8.9) содержится полная теория теплопроводности и электропроводности.

При малых отклонениях функции распределения от равновесного значения их производные в подынтегральных функциях заменяются на их значения для равновесных функций, т.е. $\partial f / \partial(\dots) = \partial f_0 / \partial(\dots)$.

8.4. Примеры решения задач

Пример 1. Воспользовавшись кинетическим уравнением Больцмана, показать, что энтропия S однородного идеального газа в отсутствие внешних сил монотонно возрастает во времени (H-теорема Больцмана).

Решение. Учтем, что распределение Гиббса имеет резкий максимум при $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$. Из условия нормировки имеем приближенно:

$$\int f(\varepsilon) d\Omega \cong f(\bar{\varepsilon}) \Omega(\bar{\varepsilon}) = e^{-\bar{\varepsilon}/\theta} \Omega(\bar{\varepsilon}) / Z = 1.$$

Поэтому, согласно определению энтропии, $\sigma = \ln \Omega(\bar{\varepsilon}) = -\ln f(\bar{\varepsilon}) = \ln Z + \bar{\varepsilon}/\theta$.

С другой стороны,

$$-\overline{\ln f(\varepsilon)} = -\int f(\varepsilon) [\ln f(\varepsilon)] d\Omega = \int f(\varepsilon) [\ln Z + \varepsilon/\theta] d\Omega = \ln Z + \bar{\varepsilon}/\theta,$$

т.е. $\sigma = \overline{[-\ln f(\varepsilon)]}$ или $S = k\sigma = k\overline{[-\ln f(\varepsilon)]}$.

Считаем, что эти соотношения справедливы и для идеального газа, находящегося в неравновесном макроскопическом состоянии. Вычислим изменение энтропии его единицы объема:

$$\partial S / \partial t = -k \frac{\partial}{\partial t} \int f \cdot \ln f \cdot d\vec{v} = -k \int (1 + \ln f) \frac{\partial f}{\partial t} d\vec{v}.$$

Значение $\partial f / \partial t$ следует взять из кинетического уравнения, которое с учетом условия задачи ($\partial f / \partial \vec{r} = 0$, $\vec{F} = 0$) совпадает с интегралом столкновений (8.5):

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -k \iiint |\vec{u}| \sigma(|\vec{u}|, \theta) (1 + \ln f) [f' \cdot f'_1 - f \cdot f_1] d\vec{v} d\vec{v}_1 d\Omega,$$

где $|\vec{u}| = |\vec{v} - \vec{v}_1|$. Полученное выражение не меняется при замене $\vec{v} \rightarrow \vec{v}_1$ и $\vec{v}_1 \rightarrow \vec{v}$. Поэтому

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{k}{2} \iiint |\vec{u}| \sigma \cdot (2 + \ln f + \ln f_1) [f' \cdot f'_1 - f \cdot f_1] dv dv_1 d\Omega.$$

Из закона сохранения импульса и энергии при попарных упругих столкновениях одинаковых частиц следует (см. задачу 3.13): относительные скорости до и после столкновения равны $|\vec{v} - \vec{v}_1| = |\vec{v}'_1 - \vec{v}'|$, а $d\vec{v} d\vec{v}_1 = d\vec{v}' d\vec{v}'_1$. Поэтому при замене $\vec{v}', \vec{v}'_1 \rightarrow \vec{v}, \vec{v}_1$ выражение в квадратных скобках изменит знак, и вместо последнего равенства можно записать

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{k}{2} \iiint |\vec{u}| \sigma \cdot (2 + \ln f' + \ln f'_1) [f' \cdot f'_1 - f \cdot f_1] d\vec{v} d\vec{v}_1 d\Omega.$$

Беря полусумму предыдущих равенств, находим

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{k}{4} \iiint |\vec{u}| \sigma \cdot \ln \frac{f'_1 f'}{f_1 f} [f' \cdot f'_1 - f \cdot f_1] d\vec{v} d\vec{v}_1 d\Omega.$$

Отсюда следует, что при любом соотношении $f' f'_1 > f \cdot f_1$, $f' f'_1 < f \cdot f_1$ логарифм и квадратная скобка имеют одинаковый знак. Поскольку интеграл от существенно положительной функции также положителен, то энтропия идеального газа монотонно возрастает во времени: $\partial S / \partial t > 0$. В равновесном состоянии $St f = 0$ и $\partial S / \partial t = 0$.

Пример 2. Определить электропроводность σ однородного электронного газа в электрическом поле ($j = \sigma E$) в приближении времени релаксации $St f = -(f - f_0) / \tau(v)$, где v – абсолютная величина скорости. Его равновесная функция распределения $f_0 = (2m^3/h^3) \cdot f_\phi = (2m^3/h^3) [e^{(\varepsilon - \mu)/kT} + 1]^{-1}$, а энергия Ферми $\mu = (h^2/2m)(3n/8\pi)^{2/3} = mv_F^2/2$.

Решение. Поскольку система однородна ($\partial f / \partial \vec{r} = 0$), магнитное поле отсутствует ($\vec{H} = 0$), пределы интеграла симметричны относительно проекций скоростей электронов, то в формуле для плотности тока (8.8) остается только слагаемое с четной подынтегральной функцией

$$\vec{j} = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \tau(v) \cdot v_x^2 \cdot (\partial f_0 / \partial \varepsilon) d\vec{v} \cdot (\vec{x}_0 E).$$

Здесь выбрана ориентация вектора $\vec{E} \parallel \vec{x}_0$ и заменена производная от неравновесной функции ее значением для равновесной функции:

$\partial f / \partial v_x \approx (\partial f_0 / \partial \varepsilon) \cdot (\partial \varepsilon / \partial v_x) = m v_x (\partial f_0 / \partial \varepsilon)$. Значение интеграла сохраняется, если v_x заменить на v_y или v_z . Поскольку $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, то для подынтегральной функции можно считать $v_x^2 = v^2/3$ и $dv = 4\pi v^2 dv \equiv (4\pi v/m) d\varepsilon$:

$$\sigma = - \frac{8\pi m^2 e^2}{3h^3} \cdot \int_0^\infty \tau(v) \cdot v^3 (\partial f_\phi / \partial \varepsilon) d\varepsilon.$$

Теперь проводимость выражена через фермиевский интеграл (см. разд. 1). Удерживая только первый член его представления в ряд $\partial f_\phi / \partial \varepsilon \approx -\delta(\varepsilon - \mu)$, находим

$$- \int_0^\infty \tau(v) v^3 \delta(\varepsilon - \mu) d\varepsilon \cong \tau(v_F) \cdot v_F^3 = \tau(v_F) (2\mu/m)^{3/2}; \quad \sigma = ne^2 \tau(\mu)/m.$$

Для большинства металлов при комнатной температуре ($n \approx 10^{22} \text{ см}^{-3}$, $\sigma \approx 10^5 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$) время релаксации $\tau \approx 10^{-14} \text{ с}$. Оно равно времени между столкновениями, поэтому при известной энергии Ферми можно найти среднюю длину свободного пробега $\lambda = v_F \cdot \tau(\mu)$.

Пример 3. Проводник находится во взаимно ортогональных электрических $\vec{E} = \vec{x}_0 E_x$ и магнитном $\vec{H} = \vec{z}_0 H_z$ полях. По нему течет ток с плотностью $\vec{j} = \vec{x}_0 j_x$, и под действием магнитного поля возникает Э.Д.С. Холла $\vec{y}_0 E_y$. Определить в приближении времени релаксации плотность тока, коэффициент и угол Холла: $R = E_y / j_x \cdot H_z$, $\varphi = \text{arctg} E_y / E_x$.

Решение. Считая малым отклонение функции распределения от ее равновесного значения, определим его как $f - f_0 = \vec{\eta}(v) \cdot \vec{v}$, где неизвестный вектор $\vec{\eta}(v)$ зависит только от величины скорости. Тогда для изотермического эффекта Холла ((8.7) при $\nabla_r T = 0$):

$$\vec{\eta} \vec{v} = (e\tau/m) (\vec{E} \cdot [\partial f_0 / \partial \vec{v} + \partial(\vec{\eta} \vec{v}) / \partial \vec{v}]) + (e\tau/mc) ([\vec{v} \times \vec{H}] \cdot [\partial f_0 / \partial \vec{v} + \partial(\vec{\eta} \vec{v}) / \partial \vec{v}]).$$

Если в первом слагаемом можно пренебречь производной $\partial(\vec{\eta} \vec{v}) / \partial \vec{v}$, то во втором ее необходимо сохранить, поскольку энергия электрона $\varepsilon = mv^2/2$ и $\partial f_0 / \partial \vec{v} = m\vec{v} (\partial f_0 / \partial \varepsilon)$, а $[\vec{v} \times \vec{H}] \cdot \partial f_0 / \partial \vec{v} = [\vec{v} \times \vec{H}] \cdot \vec{v} = 0$. По этой причине

$$\vec{\eta} \vec{v} = e\tau (\partial f_0 / \partial \varepsilon) (\vec{E} \vec{v}) + (e\tau/mc) ([\vec{v} \times \vec{H}] \cdot (\partial(\vec{\eta} \vec{v}) / \partial \vec{v})),$$

и формула (8.8) для потока электрического заряда принимает вид

$$\vec{j} = -\left(e^2/m\right) \int \tau \cdot \vec{v} \left((\partial f_0 / \partial \vec{v}) \cdot \vec{E} \right) d\vec{v} - \left(e^2/mc\right) \int \tau \cdot \vec{v} \left([\vec{v} \times \vec{H}] \cdot (\partial(\vec{\eta}\vec{v}) / \partial \vec{v}) \right) d\vec{v} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2.$$

Первое слагаемое соответствует обычной электропроводности (см. пример 2) и равно $\vec{j}_1 = \sigma \vec{E}$. Чтобы вычислить интеграл во втором слагаемом следует решить предыдущее дифференциальное уравнение относительно вектора $\vec{\eta}$. Решаем его методом последовательных приближений, считая второе слагаемое (пропорциональное магнитному полю) малым по отношению к первому. Тогда в первом приближении

$$(\vec{v}\vec{\eta})_1 \approx e\tau(\partial f_0 / \partial \varepsilon)(\vec{E}\vec{v}),$$

$$(\partial(\vec{\eta}\vec{v}) / \partial \vec{v})_1 \approx e\tau(\partial f_0 / \partial \varepsilon) \cdot \vec{E}.$$

Подставляя последнее равенство в исходное уравнение, получаем второе приближение для

$$(\vec{v}\vec{\eta})_2 = e\tau(\partial f_0 / \partial \varepsilon)(\vec{E}\vec{v}) + \left(e^2\tau^2/mc\right)(\partial f_0 / \partial \varepsilon)\vec{E}[\vec{v} \times \vec{H}],$$

$$(\partial(\vec{\eta}\vec{v}) / \partial \vec{v})_2 = e\tau(\partial f_0 / \partial \varepsilon) \cdot \vec{E} + \left(e^2\tau^2/mc\right)(\partial f_0 / \partial \varepsilon)[\vec{E} \times \vec{H}].$$

Хотя эту процедуру можно продолжать и дальше, ограничимся полученным приближением:

$$\vec{j}_2 = -\left(e^2/mc\right) \left\{ e \int \tau^2 \vec{v} (\partial f_0 / \partial \varepsilon) ([\vec{v} \times \vec{H}] \cdot \vec{E}) d\vec{v} + \vec{a}(H^2) \right\},$$

где $\vec{a}(H^2)$ есть интеграл, возникающий за счет второго слагаемого ($\sim [\vec{v} \times \vec{H}] \cdot [\vec{E} \times \vec{H}]$). Так как $\vec{H} = \vec{z}_0 H_z$ и $\vec{E} = \vec{x}_0 E_x + \vec{y}_0 E_y$, то, раскрывая произведение $\sim [\vec{v} \times \vec{H}] \cdot \vec{E}$, с учетом симметричных пределов интеграла имеем

$$\begin{aligned} \vec{j}_2 &= -\left(e^2/mc\right) \left\{ e H_z \int \tau^2 \vec{v} (\partial f_0 / \partial \varepsilon) [v_y E_x - v_x E_y] d\vec{v} + \vec{a}(H^2) \right\} = \\ &= -\left(e^2/mc\right) \left\{ (e H_z / 3) (\vec{y}_0 E_x - \vec{x}_0 E_y) \int \tau^2 v^2 (\partial f_0 / \partial \varepsilon) d\vec{v} + \vec{a}(H^2) \right\}. \end{aligned}$$

Воспользуемся первым приближением фермиевского интеграла (см. пример 2) $\partial f_0 / \partial \varepsilon = -(2m^3/h^3) \delta(\varepsilon - \mu)$; $d\vec{v} = (4\pi v/m) d\varepsilon$, $\sigma = ne^2 \tau(\mu)/m$:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} - (e H_z \tau(\mu) \sigma / mc) (\vec{x}_0 E_y - \vec{y}_0 E_x) + \vec{a}(H^2).$$

Поскольку ток в направлении осей Y и Z отсутствует ($j_z = j_y = 0$), то для составляющих тока и поля получаем следующие выражения

$$j_x = \sigma E_x - (eH_z \tau(\mu) \sigma / mc) E_y + a_x (H^2),$$

$$E_y = - (eH_z \tau(\mu) / mc) E_x + a_y (H^2) / \sigma.$$

Э.Д.С. Холла содержит член, линейный по H_z . Если подставить E_y в первое равенство, то наименьшая степень магнитного поля, которая определяет ток, равна 2. Поскольку предполагалось, что магнитное поле мало, то такими слагаемыми можно пренебречь и окончательно имеем

$$j_x = \sigma E_x; \quad E_y = - (eH_z \tau(\mu) / mc) E_x;$$

$$R = -e \tau(\mu) / mc \sigma = -(nec)^{-1}; \quad \text{tg } \varphi = -eH_z \tau(\mu) / mc.$$

Коэффициент Холла R зависит от заряда; плотности электронов. Если ток переносится положительными зарядами (дырками), то в R следует заменить знак, т.е. коэффициент Холла становится положительным для дырочной проводимости.

9. УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ. ОТВЕТЫ.

1.1. Интегралы сводятся к Γ -функциям. **1.2.** Воспользоваться формулами для интеграла Пуассона. **1.3.** Сделать замену $y = x + a$. **1.4.** Разложить экспоненциальную функцию в ряд и провести почленное интегрирование. **1.6.** Воспользоваться свойствами якобиана преобразования **1.8.** $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $|D(x, y)/D(r, \varphi)| = r$. **1.9.** $r^2 \sin \varphi$. **1.11.** а) да; б) нет, кроме $y = 1$; в) нет. **1.12.** а) $abe^y |x(1-y)|$; б) $2|x^2 - y^2|/\sqrt{x^2 + y^2}$. **1.13.** а) Необходимым условиям экстремума ($f'_x = 0$, $f'_y = 0$) соответствуют точки $M_1(0, 0)$ и $M_2(1, 1)$. Достаточное условие $f''_{xx} \cdot f''_{yy} - [f''_{xy}]^2 > 0$ выполняется только для $M_2(1, 1)$. Поскольку $f''_{xx}(1, 1) > 0$, то в $M_2(1, 1)$ функция минимальна. **1.14.** а) да; б) нет; в) нет; г) нет. **1.15.** а) $F(x, y) \approx (x + y)[1 + (x - y)/2]$. **1.16.** Представить функцию x^2 рядом Фурье (1.18) на интервале $[-\pi; \pi]$. После вычисления $a_n = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx$ подставить в полученное представление значения $x = 0$ и $x = \pi$. **1.17.** Представить функцию x^4 рядом Фурье на интервале $[-\pi; \pi]$ и следовать указаниям к 1.16. **1.18.** Функцию $(e^x - 1)^{-1}$ представить суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем e^{-x} для $x > 0$: $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \, dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^3 e^{-jx} \, dx$. Замена $jx = y$ и использование соотношения предыдущей задачи дает требуемое доказательство.

2.1. 1.-0,29; 0,064. 2.-0,784. 3.-0,216. **2.2.** 1,2; 0,72; 0,707. **2.3.** После представления интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \dots e^{-|y|} dy$ в виде суммы $\int_{-\infty}^0 \dots e^y dy + \int_0^{\infty} \dots e^{-y} dy$ вычисления дают \bar{x} , $(\Delta x)^2 = 2$, $\delta_x = 1,41$. **2.4.** -0,11; 2/3; 4/3; 8/9. **2.5.** $m \geq \lg(1-P)/\lg(1-p)$. **2.6.** $A = 1/\left[\int_{-\infty}^{\infty} dx/(1+x^2)\right]^2 = 1/\pi^2$; $\bar{x} = \bar{y} = 0$;

$$w(x \in [x_1, x_2]) = (1/\pi) \operatorname{arctg}[(x_1 - x_2)/(1 + x_1 x_2)] ; \quad w(x \in [-1, 1]) = 0,5 ;$$

$$w(x, y \in [-1, 1]) = 0.25. \quad \mathbf{2.7.} \quad \overline{x^4} = (2\pi\delta^2)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2/2\delta^2} dx = 3\delta^2 ; \quad \delta^2 \equiv \overline{x^2}.$$

2.8. $1 - (1 - 1/36)^{24} \approx 0,4914$. **2.9.** а) Вероятность выпадения шестерки в любом из

m бросаний равна $W_m(1) = C_m^1 (1 - 1/6)/6 = \frac{m!}{(m-1)! 6} (1 - 1/6)^{m-1}$. $W_6(1) = 0,402$.

б) $1 - (1 - 1/6)^6 \approx 0,665$. **2.10.** а) $1/16$; б) $7/16$. **2.11.** Наибольший отрезок принимается за единицу, два других можно изобразить в виде x -ой и y -ой координаты точки в плоскости XY . Условие положительной реализации $x + y > 1$, т.е. половина квадрата, разделенного диагональю $x + y = 1$. Отв. $0,5$.

2.12. Вероятность работы лампы за время $t + \Delta t$ определяется произведением вероятностей независимых событий $P(t + \Delta t) = P(t) \cdot P(\Delta t) = P(t)(1 - \alpha \Delta t)$.

Учитывая малость Δt , имеем $P(t + \Delta t) \approx P(t) + (\partial P / \partial t) \cdot \Delta t$. Из уравнения

$P'/P = -\alpha$ следует $P(t) = Ce^{-\alpha t}$. В момент $t = t_0$ лампа работала, т.е.

$P(t_0) = 1 = Ce^{-\alpha t_0}$, а $P(t) = e^{-\alpha(t-t_0)}$. **2.13.** Вероятность выхода из строя лампы за

гарантированный срок равна $w(\tau) = q\tau = 1$, а за время t — $w(t) = t/\tau$.

Вероятность работы системы из n ламп — $P_n(t) = (1 - t/\tau)^n$. Если считать невозможным эксплуатацию системы, когда $P_n(t_0)$ меньше заданной

вероятности P , то $P = [1 - t_0/\tau]^n$. Отсюда следует $t_0 \leq (1 - P^{1/n}) \cdot \tau$.

2.14. Поскольку $1 - P \ll 1$, то, согласно 2.13, $P = 0,9 \approx 1 - nt_0/\tau$ и

$t_0 = (1 - P)\tau/n = 16,6$ час. **2.15.** $\tau = nt/(1 - P) = 60000$ час. **2.16.** Надежность

работы одного комплекта $H_1 = 1 - P_1$, где $P_1 = n/100$, а аппаратуры с m

комплектами равна $H_m = 1 - P_1^m$. Увеличение надежности есть

$H_m/H_1 = (1 - P_1^m)/(1 - P_1)$. **2.17.** $k = 1,05$. **2.18.** Вероятность нахождения

молекулы на высоте z равна отношению объемов $dV(z)/V_k$, где $V_k = \pi R^2 H/3$,

$dV(z) = \pi r^2 dz = \pi[(H - z)R/H]^2 dz$. Отсюда $f(z) = 3(H - z)^2/H^3$. **2.19.** $0,328$.

2.20. $(b + a)/2$; $(a^2 + ab + b^2)/3$; $(a - b)^2/12$. **2.21.** Для гармонических

колебаний $x = A \sin(2\pi t/T)$, где T — период. Вероятность нахождения точки в интервале dx равна отношению времени прохождения ею этого интервала dx/\dot{x}

к $T/2$, т.е. $dw(dt) = dx/[A \cos(2\pi t/T)]$; $dw(x) = dx/(\pi \sqrt{A^2 - x^2})$. **2.22.** $1/2\pi$.

2.23. $(\sin \alpha)/2$. **2.24.** $\bar{x} = a\sqrt{\pi/2}$. **2.25.** Чтобы ближайший сосед молекулы находился на расстоянии между r и $r + dr$, необходимо: 1) наличие соседа (эта вероятность равна $\alpha \cdot dV = 4\pi r^2 \alpha dr$); и 2) расстояние между ними должно быть не меньше r . Вероятность того, что ближайший сосед находится на расстоянии, меньшем r , равна $P = \int_0^r f(\xi) d\xi$, а большем $r - (1 - P)$. Эти

события независимы, поэтому: $f(r) dr = \left[1 - \int_0^r f(\xi) d\xi \right] \alpha \cdot 4\pi r^2 dr$, $f'(r)/f(r) =$
 $= -4\pi\alpha r^2 + 2/r$; $f(r) = Cr^2 e^{-4\pi\alpha r^3/3}$. Определив $C = 4\pi\alpha$ из условия

нормировки, получим $f(r) = 4\pi\alpha r^2 \exp(-4\pi\alpha r^3/3)$. Существует экстремальное значение $r = r_0$ ($f'(r_0) = 0$), отвечающее наиболее вероятному расстоянию между ближайшими соседями. **2.26.** $f(h) = r^2 (r^2 + h^2)^{-3/2}$, (см. 2.23). **2.27.** Углы

падения φ и преломления ψ связаны равенством $\sin \varphi = \varkappa \sin \psi$. После дифференцирования $\cos \varphi d\varphi = \varkappa \cos \psi d\psi$ имеем $d\varphi = \varkappa \cos \psi d\psi / \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi}$.

Поскольку $f(\psi) d\psi = C \sin \varphi d\varphi$, то $f(\psi) = C \varkappa^2 \sin \psi \cos \psi / \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi}$.

I. Для $\varkappa < 1$ – существует полное внутреннее отражение. Преломление имеет место только для углов $0 \leq \varphi \leq \arcsin \varkappa$, $0 \leq \psi \leq \pi/2$. Отсюда следует

условие нормировки $\int_0^{\pi/2} C \frac{\varkappa^2 \sin \psi \cos \psi d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi}} = 1$; $C = 1 / \left(1 - \sqrt{1 - \varkappa^2} \right)$ и функция

распределения для углов преломления $f(\psi) d\psi = \frac{\varkappa^2 \sin 2\psi d\psi}{2 \left(1 - \sqrt{1 - \varkappa^2} \right) \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi}}$.

II. Для $\varkappa > 1$: $0 < \varphi < \pi/2$; $0 < \psi < \arcsin \varkappa^{-1}$, $C \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = 1$,

$f(\psi) d\psi = \varkappa^2 \sin 2\psi d\psi / \left(2\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi} \right)$. **2.28.** Вероятность прохождения

молекулой пути $x + dx$ без столкновения равна $W(x + dx) = W(x) dW(dx) =$
 $= W(x)(1 - adx)$. Представив левую часть линейной функцией малого параметра

$W(x) + (\partial W / \partial x) dx + \dots = W(x) - aW(x) dx$, получаем $\partial W / \partial x = -aW(x)$,

$W(x) = Ae^{-ax}$. Считая $W(0) = 1 = A$, находим $W(x) = e^{-ax}$. Средняя длина пробега

равна $\lambda \equiv \bar{x} = \int_0^{\infty} x dp$, где $dp = W(x) a dx$ – есть вероятность свободного

прохождения молекулой пути x с последующим столкновением: $\lambda \equiv \bar{x} = 1/a$. Поскольку функция $W(x) = e^{-x/\lambda}$ не связана с точкой отсчета в пространстве, то возможно экспериментальное определение λ путем измерения отношения количества молекул пучка, «осевших» на двух разнесенных в вакууме полупрозрачных сетках. **2.29.** Вероятность угадать произвольное число из N есть $w = 1/N$, а n «счастливых» чисел определяется распределением Бернулли $W_N(n) = C_N^n w^n (1-w)^{N-n}$. $W_{49}(3) \approx 0,06$; $W_{49}(6) \approx 0.00042$. **2.30.** Данные задачи позволяют считать, что $N \gg 1$, $w \ll 1$ и использовать распределение Пуассона, в котором среднее число потерянных целей $\bar{n} = Nw = 1$.

а) Вероятность потери s целей равна $W_N(s) = \binom{\bar{n}}{s} e^{-\bar{n}} / s!$; $W_0(1) = e^{-1}$;

$W_0(2) = e^{-1}/2$. б) Вероятность потери хотя бы m целей –

$$P_N(m) = \sum_{k=m}^N \binom{\bar{n}}{k} e^{-\bar{n}} / k! = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{\bar{n}}{k} e^{-\bar{n}} / k!; \quad P_N(1) = 1 - e^{-1}; \quad P_N(2) = 1 - 2e^{-1}.$$

3.1. Фазовая траектория – прямая, параллельная оси q . **3.2.** Из закона сохранения энергии следует уравнение параболы $z = z_0 + p_0^2 / 2m^2 g - p^2 / 2m^2 g$.

3.4. За время t вершины $\Delta A_1 A_2 A_3$ переместятся в точки фазового пространства $A'_1(p_1, z_1)$, $A'_2(p_2, z_2)$, $A'_3(p_3, z_3)$, где $p_1 = p_0 - mgt$, $z_1 = z_0 + p_0 t / m - gt^2 / 2$, $p_2 = p_1$, $z_2 = z_1 + a$, $p_3 = p_1 + b$, $z_3 = z_1 + bt / m$. Из равенства площадей $\Delta A_1 A_2 A_3$ и $\Delta A'_1 A'_2 A'_3$ следует справедливость теоремы Лиувилля. **3.5.** После соударения размерность фазового пространства сокращается вдвое, так как шары начинают двигаться как единое целое. Поэтому якобиан преобразования имеет две одинаковые строки и равен нулю. **3.6.** Поскольку скорость постоянна, то начальный импульс $p_0 = \text{const}$, а при отражении меняет знак вблизи стенок $q = \pm l$. Это изменение происходит не мгновенно, а непрерывно под действием упругой силы со стороны стенки $-kq$: кинетическая энергия частицы $p^2 / 2m$ переходит в потенциальную $kq^2 / 2$, и в фазовом пространстве соответствующие

части траектории – дуги эллипса. **3.7.** $\Gamma = \int_{-p_0}^{p_0} z dp = 2p_0^3 / 3m^2 g$. **3.8.** Из закона

сохранения энергии $\int_{r_0}^r (ee_1 / r^2) dr = (p_0^2 - p^2) / 2m$ и $p_0 = mv_0 = 0$ следует

$p = \sqrt{2m\epsilon_1[1/r - 1/r_0]}$. **3.9.** $x = x_0 + (p^2 - p_0^2)/2eEm$. **3.10.** а) Решая уравнение движения $m\ddot{q} = -\gamma\dot{q}$ с начальными условиями $[\dot{q}(t=0) = v_0, q(t=0) = q_0]$, найдем $q = q_0 + mv_0/\gamma - mv_0 e^{-\gamma t/m}/\gamma$, $v = v_0 e^{-\gamma t/m}$ и фазовую траекторию $q = q_0 + m(v_0 - v)/\gamma$. При движении системы по фазовой траектории из точки (q_0, v_0) в точку (q, v) ее элементарный фазовый объем становится равным $dvdq = |D(v, q)/D(v_0, q_0)| dv_0 dq_0 = e^{-\gamma t/m} dv_0 dq_0$. Т.е. фазовый объем с течением времени экспоненциально уменьшается. Теорема Лиувилля выполняется при отсутствии трения ($\gamma = 0$).

б) Уравнение движения $m\ddot{q} + m\omega_0^2 q = -\gamma\dot{q}$ (см. Пример 2). Решение его с учетом малости γ ($4\omega_0^2 m^2 \gg \gamma^2$) и начальных условий $[v(t=0) = -q_0\omega_0]$ $q = q_0 e^{-\gamma t/m} \cos \omega_0 t$, $\dot{q} = v = q_0 e^{-\gamma t/m} \omega_0 \sin \omega_0 t$ описывает фазовую траекторию в виде эллипса с убывающими со временем по закону $e^{-\gamma t/m}$ полуосями:

$$\frac{q^2}{q_0^2 e^{-2\gamma t/m}} + \frac{v^2}{q_0^2 \omega_0^2 e^{-2\gamma t/m}} = 1.$$

Изменение фазового объема равно $e^{-\gamma t/m}$. **3.11.** $\Omega(\epsilon)d\epsilon = (1/h^3)(\partial\Gamma/\partial\epsilon)d\epsilon$, $\Gamma = 4\pi\epsilon^3 V/3c^3$, $\Omega(\epsilon)d\epsilon = (4\pi V\epsilon^2/c^3 h^3) d\epsilon$. **3.12.** Координаты x_1, x_2, x_3 можно принять за обобщенные, тогда им соответствуют обобщенные импульсы $p_1 = \sqrt{2m\epsilon} \cos \omega t$, $p_2 = \sqrt{2m(\epsilon + \Delta\epsilon)} \cos \omega t$, $p_3 = \sqrt{2m\epsilon} \cos(\omega t + \delta)$. Площадь треугольника выразим через координаты его вершин

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_3 & p_3 & 1 \\ x_2 & p_2 & 1 \\ x_1 & p_1 & 1 \end{vmatrix} = m\sqrt{\epsilon\Delta\epsilon} \sin \delta.$$

Независимость площади треугольника от времени и доказывает справедливость теоремы Лиувилля для трех гармонических осцилляторов. **3.13.** Координаты и импульсы до и после соударения соответственно равны q_i, p_i и q'_i, p'_i . Из закона сохранения импульса и энергии $p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2$, $p_1^2/2m_1 + p_2^2/2m_2 = p_1'^2/2m_1 + p_2'^2/2m_2$ следует

$$\begin{aligned} p'_1 &= (m_1 - m_2)p_1/(m_1 + m_2) + 2m_1 p_2/(m_1 + m_2), & q'_1 &= q_1; \\ p'_2 &= (m_1 - m_2)p_2/(m_1 + m_2) + 2m_2 p_1/(m_1 + m_2), & q'_2 &= q_2. \end{aligned}$$

Якобиан преобразования равен $\frac{D(p'_1, p'_2, q'_1, q'_2)}{D(p_1, p_2, q_1, q_2)} = \frac{D(p'_1, p'_2)}{D(p_1, p_2)} = -1$, т.е. объем

фазового пространства сохраняется. **3.14.** Фазовое пространство для данной системы четырехмерное. Условие сохранения фазового объема: $dv_1 dv_2 dx_1 dx_2 = dv'_1 dv'_2 dx'_1 dx'_2$. Т.к. координаты шаров до и после столкновения одинаковы, то $dx_1 dx_2 = dx'_1 dx'_2$, а $dv_1 dv_2 = dv'_1 dv'_2$. С течением времени все точки фазового объема $d\vec{v} d\vec{x}$ перемещаются параллельно оси x

(горизонтальный желоб!), однако эти смещения за одинаковый промежуток времени будут тем больше, чем больше скорость v . Поэтому прямоугольный элемент фазового объема со временем примет вид параллелограмма, а величина объема не изменится. **3.15.** Задача сводится к вычислению интеграла

$\Gamma = \int_{(\varphi)} \int_{(\theta)} \int_{(p_\varphi)} \int_{(p_\theta)} d\varphi d\theta dp_\varphi dp_\theta$ по области, ограниченной поверхностью

$H = \text{const}$. Пределы интегрирования $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$,

$p_\varphi \in \left[-\sin\theta \sqrt{2mr^2 H - p_\theta^2}; \sin\theta \sqrt{2mr^2 H - p_\theta^2} \right]$. После замены переменной

$p_\theta = \sin u \sqrt{2mr^2 H}$ имеем $\Gamma = 4\pi mr^2 H$. **3.16.** Из распределения Гиббса

$dW(H) = C e^{-H/kT} (\partial\Gamma/\partial H) dH$. Из задачи 3.15 $\partial\Gamma/\partial H = 4\pi mr^2$, и

$\partial[e^{-H/kT} (\partial\Gamma/\partial H)]/\partial H \neq 0$, т.е. данное распределение не имеет максимума, и

поэтому не существует наивероятнейшей энергии, а, следовательно, устойчивого состояния системы. **3.17.** Поскольку для весьма большого числа

частиц множитель распределения Гиббса $e^{-\varepsilon/\theta} \partial\Gamma/\partial\varepsilon \approx \delta(\varepsilon - \bar{\varepsilon})$, то

$\overline{F(\varepsilon)} = F(\bar{\varepsilon})$, где $F(\varepsilon)$ – произвольная функция энергии. Отсюда следует

требуемое доказательство. **3.18.** См. указания к 3.17. **3.19.** $z = 1/ [2 \text{sh}(h\nu/2kT)]$.

3.20. $z = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-j(j+1)T_\varepsilon/T} (2j+1)$, где $T_\varepsilon = h^2/8\pi^2 I k$. При высоких температурах

$T_\varepsilon \ll T$ $z \approx \int_0^{\infty} e^{-x(x+1)T_\varepsilon/T} (2x+1) dx = T_\varepsilon/T$. При низких температурах

$z \approx 1 + 3 \exp[-2T_\varepsilon/T]$. **3.21.** $z = (2\pi mkT/h^2)^{3/2} V$. **3.22.** Элемент фазового объема

$d\Gamma = 4\pi V \varepsilon^2 d\varepsilon/c^3$, а $z = 8\pi V (kT/hc)^3$.

4.1. а) $W(v_x \leq v_0) = W_1 = (m/2\pi kT)^{1/2} \int_{-\infty}^{v_0} e^{-mv_x^2/2kT} dv_x$. После замены

переменных $v_x = (2kT/m)^{1/2} \cdot x$ ($v_0 = 0,1 \cdot (2kT/m)^{1/2}$, $x_0 = 0,1$) имеем

$$W_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx + \int_0^{0,1} e^{-x^2} dx \right\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0,1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} dx \approx 0,56;$$

б) $W(v_x, v_y \leq v_0) = W_1^2$; в) $W(v_x, v_y, v_z \leq v_0) = W_1^3$. **4.2.** Элемент фазового объема и характер распределения Максвелла не изменится. Сместятся его максимумы. **4.3.** Из (4.7), (4.15) находим $\overline{(\Delta\varepsilon)^2} = \overline{\varepsilon^2} - \overline{\varepsilon}^2$, $\delta_\varepsilon = \sqrt{2/3}$, $\delta_E = \sqrt{2/3N}$.

4.4. $dN = 2(SN/V)(2kT/\pi m)^{1/2} \sin\theta \cos\theta d\theta$. **4.5.** $\varepsilon_{\text{сеп}} = kT/2$, $mv_{\text{сеп}}^2/2 = kT$.

4.6 $dN = 2\pi(pV/kT)(1 - \cos\alpha)(m/2\pi kT)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} v^2 dv$, $M = m dN = (M_r/N_A) dN$.

4.7. Воспользоваться формулами $\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 dW(v)$, $\overline{v_x^2} = 2 \int_0^\infty v_x^2 dW(v_x)$,

$\overline{(\Delta v)^2} = \overline{v^2} - \overline{v}^2$. **4.8.** В единицу времени через отверстие S пройдет $Sv_\perp dn(v_\perp)$ молекул с проекцией скорости v_\perp , нормальной к отверстию. Общее их число

($0 \leq v_\perp \leq \infty$): $dN/dt = S_0 n (m/2\pi kT)^{1/2} \int_0^\infty v_\perp e^{-mv_\perp^2/2kT} dv_\perp = pS_0 (2\pi mkT)^{-1/2}$. **4.9** Из

(4.16) находим среднюю относительную скорость молекул основного газа и примеси $\bar{u} = (2/\sqrt{\pi})(2kT/\mu)^{1/2}$, где $\mu = mm'/(m+m')$. Их число столкновений за

единицу времени равно $\nu = n\sigma_{ef}\bar{u}$ (4.17), где $\sigma_{ef} = \pi \left[(\sqrt{\sigma} + \sqrt{\sigma'}) / \sqrt{4\pi} \right] \approx$

$\approx (\sigma + \sigma')/2$. Так как средняя скорость движения молекул основного газа

$\bar{v} = (2/\sqrt{\pi})(2kT/m)^{1/2}$, то длина свободного пробега равна $\lambda = \bar{v}/\nu =$

$= (1/\sigma_{ef}n)(m'/(m+m'))^{1/2}$. **4.10.** Пусть v_0 – относительная скорость бесконечно

разделенных молекул, r_0 – прицельное расстояние ($\vec{r}_0 \perp \vec{v}_0$) (Рис. 9.1). Законы

сохранения энергии и момента импульса ($m\vec{v}_0 \times \vec{r}_0 = m[(\dot{\vec{r}} + r\dot{\phi}) \times \vec{r}]$) в полярных

координатах: $m(\dot{r} + r^2\dot{\phi}^2) - 2\alpha/r^n = mv_0^2$; $mr^2\dot{\phi} = mr_0 v_0$. Исключая угловую ско-

рость, находим $\dot{r}^2 + r_0^2 v_0^2/r^2 - 2\alpha/mr^n = v_0^2$. В точке наибольшего сближения мо-

лекул радиальная скорость \dot{r} обращается в нуль. При этом минимальное рас-

стояние между молекулами r_{\min} находится из условия $v_0^2(r_0^2/r_{\min}^2 - 1) = 2\alpha/mr_{\min}^n$.

Если $r_{\min} \leq 2R$, где R – радиус твердой сферы ($v = \infty$), то молекулы сталкиваются, если $r_{\min} > 2R$, они пролетают, не соприкасаясь друг с другом. Условие соприкосновения $r_{\min} = 2R = D$ будет выполнено для прицельного расстояния $r_0^2 = D^2(1 + 2\alpha/mv_0^2D^n)$. Соответствующее эффективное сечение

$$\sigma = \pi r_0^2 = \pi D^2 \left[1 + 2\alpha/mv_0^2D^n \right]$$

зависит от относительной скорости. Притяжение между молекулами увеличивает эффективное сечение. Возрастание сечения пропорционально

$$\left[1 + 2\alpha/mv_0^2D^n \right],$$

т.е. зависит от отношения потенциальной энергии притяжения и кинетической энергии движения ($mv_0^2/2$).

При большой относительной скорости искривление пути, вызванное притяжением, оказывается небольшим и мало сказывается на значении сечения.

Среднее значение эффективного сечения (формула Сюзереленда) зависит от температуры: $\bar{\sigma} = \pi D^2 \left[1 + (2\alpha/mD^n) \overline{(1/v_0^2)} \right] = \pi D^2 (1 + \text{const}/T)$. С ее увеличением $\bar{\sigma}$ стремится к величине геометрического сечения. От конкретного вида взаимодействия (α, n) зависит значение const. **4.11.** $P = (n/6) \int v \cdot 2p dW$. Так как $v = (\partial \varepsilon / \partial p)$, то давление

$$p = (Nl/3V) \int_0^\infty \alpha p^l (4\pi V) f(p) p^2 dp = (Nl/3V) \int_0^\infty \varepsilon dW = lN\bar{\varepsilon}/3V = lE/3V.$$

4.12. Считая молекулу твердым телом с главными моментами инерции I_j и проекциями угловых скоростей ω_j на оси инерции, находим вероятность

$$dW = \prod_{j=1}^3 \left\{ e^{-\varepsilon_j/kT} d\omega_j / \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon_j/kT} d\omega_j \right\}, \quad \text{где} \quad \varepsilon_j = I_j \omega_j^2 / 2. \quad \mathbf{4.13.} \quad n_1/n_2 =$$

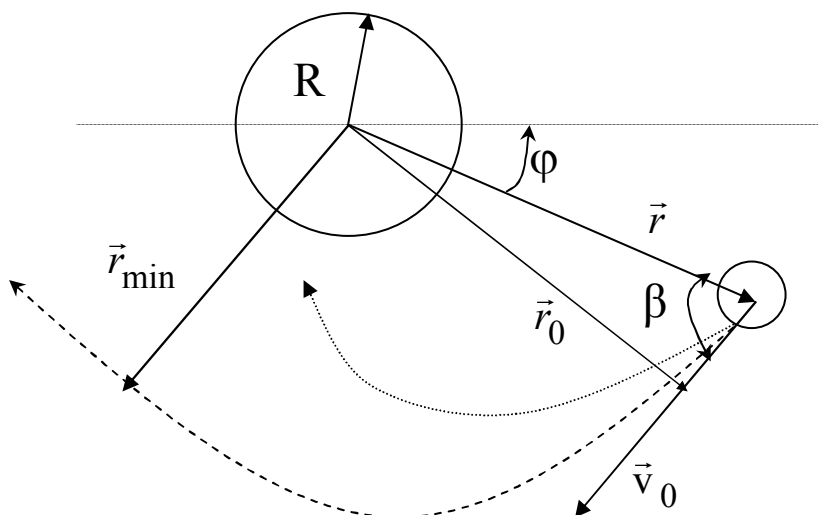


Рис. 9.1

$= \left[\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(1) - 2e^{-1} \right] / \left[\sqrt{\pi}(1 - \operatorname{erf}(1)) + 2e^{-1} \right]$, где $\operatorname{erf}(1) = 0,84$. **4.14** Если плотность воды $\rho_{\text{ж}}$, то эффективная масса m_{ef} одной частицы равна $m_{\text{ef}} = m - \rho_{\text{ж}} V$. Из

барометрической формулы находится плотность распределения зерен $\rho(z) = \rho_0 e^{-m_{\text{ef}} g z N_A / RT}$. Т.к. $\rho(H) / \rho_0 = 0,5$, то $H = (RT \ln 2) / m_{\text{ef}} N_A g$,

$N_A = RT \ln 2 / m_{\text{ef}} g H$, $dN_A / N_A = \alpha = dH / H$. **4.15.** $m = \mu / N_A$, $\bar{z} = kT / mg = 7,5$ км.

4.16. Число молекул в бесконечном столбе воздуха с основанием 1 см^2 равно

$$n_{\infty} = \int_0^{\infty} n(z) dz = \int_0^{\infty} n_0 e^{-mgz/kT} dz = n_0 (kT/mg) = n_0 \cdot 7,5 \cdot 10^5, \text{ где } n_0 = 2,69 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3} -$$

плотность молекул у поверхности Земли (число Лошмидта). $n_{\infty} = 2,11 \cdot 10^{25} =$

$= 2,11 \cdot 10^{25} / N_A = 35$ моль. Масса бесконечного столба воздуха $M = \mu n_{\infty} =$

$= 29 \cdot 35 \text{ г} \cong 1 \text{ кг}$, а вес $P = Mg = 9,8 \text{ Н}$. **4.17.** $\bar{u} = kT \left\{ 1 - mgh / (kT [\exp(mgh/kT) - 1]) \right\}$.

4.18. См. пример 7. Учитывая зависимость $\rho(r) = m'n(r)$, плотность белка вблизи оси $\rho(0) = m'n(0) = n_0(R) \exp(-m'\omega^2 R^2 / 2kT)$, $\rho(R) = m'n_0(R)$. Масса белка

$$M(R - b \leq r \leq R) = 2\pi l m' \int_{R-b}^R n(r) r dr = M \frac{1 - \exp(-m'\omega^2 [R^2 - (R-b)^2] / 2kT)}{1 - \exp(-m'\omega^2 R^2 / 2kT)}.$$

4.19. Выделим на поверхности сферы площадку $\Delta S = \vec{l} R^2 d\psi$, где $d\psi$ – элемент

телесного угла с нормалью \vec{l} , направленной во внешнюю область. На ней построим цилиндр, образующие которого численно равны абсолютной скорости атома, а ось составляет угол θ с нормалью к поверхности. Через эту поверхность за единицу времени вылетят все находящиеся внутри цилиндра

атомы, для которых $v \cos \theta \geq 0$: $dv(v) = \Delta S \cdot v n \cdot 2\pi (m/2\pi kT)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv \times$

$\times \int_0^{\pi/2} \sin \theta d(\sin \theta)$. Для преодоления силы притяжения атомы должны обладать

кинетической энергией, удовлетворяющей условию $mv_0^2/2 \geq \gamma Mm/R$. Число

атомов, покидающих поверхность планеты $4\pi R^2$ за единицу времени равно

$$v = 4\pi R^2 n \pi (m/2\pi kT)^{3/2} \int_{v_0}^{\infty} e^{-mv^2/2kT} v^3 dv = 4\pi R^2 n (kT/2\pi m)^{1/2} e^{-\gamma m M / kTR} (1 + \gamma m M / kTR).$$

4.20. $h = \bar{z} = \int_{z_0}^{\infty} z dW(z)$, $\overline{(\Delta h)^2} = \bar{z}^2 - \bar{z}^2$. **4.21.** Потенциальная энергия отдельной

молекулы массы m , находящейся на расстоянии r от центра массы,

$U(r) = -\gamma mM/r$. Из формулы Больцмана следует $n(r) = Ae^{\gamma mM/rkT}$. Т.к.

$\int_R^\infty n(r)4\pi r^2 dr = \infty$, то система неравновесная, и применение распределения

Больцмана неправомерно. **4.22.** Распределение N невзаимодействующих

молекул $W(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \prod_{j=1}^N W(\vec{r}_j)$, где $W(\vec{r}_j) = A \exp(-U(\vec{r}_j)/kT)$, \vec{r}_j –

координата j -ой молекулы. Вероятность, что n произвольных молекул из N находятся в объеме v , а остальные в объеме $V - v$, равна

$W_N(n) = C_N^n P^n(v) [1 - P(v)]^{N-n}$, где $P(v) = \int_v dW(\vec{r}) dv$ – вероятность, что молекула

имеет координаты внутри объема v . Рассмотрим частные случаи: а) Для $N \gg n$, асимптотика $W_N(n) \approx (NP)^n (1-P)^N / n!$ при $N \rightarrow \infty$ и $P \rightarrow 0$, если

$\lambda = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ P \rightarrow 0}} NP$, приводит к распределению Пуассона: $W(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} W_N(n) =$

$= \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda^n (1 - \lambda/N)^N / n! = \lambda^n e^{-\lambda} / n!$. Среднее число частиц, находящихся в объеме

v , $\bar{n} = \sum_{n=1}^{\infty} nW(n) = \lambda$. б) Для $N \gg 1$ и $n \gg 1$ с учетом формулы Стирлинга

$\ln W_N(n) = n \ln \lambda - \lambda - \ln n! = n \ln \lambda - \lambda - n \ln n + n$. Поскольку при $n \gg 1$ отклонение

от среднего $n - \lambda \ll \lambda$, то $\ln n \equiv \ln \lambda [1 + (n - \lambda)/\lambda] \approx \ln \lambda + (n - \lambda)/\lambda -$

$-(n - \lambda)^2 / 2\lambda^2 + \dots$ и $\ln W(n) \approx (n - \lambda)^2 (2\lambda - n) / 2\lambda^2 \approx -(n - \bar{n})^2 / 2\bar{n}$. Рассматривая

полученную гауссовскую функцию $W(n) = Ce^{-(n - \bar{n})^2 / 2\bar{n}}$ как непрерывную,

при нахождении C воспользуемся интегральной формулой нормировки.

Пределы интегрирования ввиду резкого спада функции при отклонении от

среднего значения выберем от $-\infty$ до ∞ $C = 1 / \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(n - \bar{n})^2}{2\bar{n}}\right) dn =$

$= 1 / \sqrt{2\pi\bar{n}}$. **4.23.** $\varepsilon = 1 + 4\pi n(\alpha + p^2/3kT)$. **4.24.** Центр тяжести газа одного сорта

частиц $z_i = kT/m_i g - h / (\exp(m_i g/kT) - 1)$; центр тяжести системы:

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^l Nm_i z_i}{\sum_{i=1}^l Nm_i} = \left[lkT/g - h \sum_{i=1}^l m_i / (\exp(m_i g/kT) - 1) \right] / \sum_{i=1}^l m_i$$

4.25. Вероятность нахождения молекулы на расстоянии r от центра центрифуги (см. задачу 4.18) равна $dW(r) = Ce^{m\omega^2 r^2 / 2kT} r dr$. Средняя

потенциальная энергия $\bar{u} = m\omega^2 \bar{r}^2/2$, где $\bar{r}^2 = \int_0^R r^2 dW(r) / \int_0^R dW(r)$.

После вычисления $\bar{u} = kT \left\{ 1 + \left[m\omega^2 R^2 / 2kT - 1 \right] e^{m\omega^2 R^2 / 2kT} \right\} / \left[e^{m\omega^2 R^2 / 2kT} - 1 \right]$.

4.26. $q = e^{(m_1 - m_2)\omega^2 R^2 / 2kT}$. **4.27** Средняя энергия колебательного движения $\bar{\varepsilon} = \bar{p}^2 / 2m + \bar{x}q^2 / 2$. Поскольку $dW(p)dW(q) = C e^{-p^2/2mkT} dp \cdot e^{-\alpha q^2/2kT} dq$, то $\bar{p}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} p^2 dW(p) / \int_{-\infty}^{\infty} dW(p)$, $\bar{q}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} q^2 dW(q) / \int_{-\infty}^{\infty} dW(q)$ и $\bar{\varepsilon} = kT$.

4.28. Вероятность, что двухатомная молекула имеет компоненты угловой скорости вблизи ω_1 и ω_2 дается выражением (см. 4.12):

$$dW(\omega_1, \omega_2) = (I/2\pi kT) \exp\left(-I(\omega_1^2 + \omega_2^2)/2kT\right) d\omega_1 d\omega_2, \text{ где } I = m_1 m_2 a / (m_1 + m_2).$$

Отсюда находим $\overline{\omega_j^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_j^2 dW(\omega_j)$ и среднюю энергию вращения

$\bar{\varepsilon}_e = I(\overline{\omega_1^2} + \overline{\omega_2^2})/2 = kT$. **4.29.** Число молекул газа, пополняющих один из

сосудов за единицу времени, равно $\Delta N = N_1 - N_2$. Число молекул N_j , уходящих из j -го сосуда, определяется распределением Максвелла по проекциям

скорости, ортогональным сечению S : $N_j = S n_j (m/2\pi kT_j)^{1/2} \int_0^{\infty} e^{-mv^2/2kT_j} v dv$. Здесь

плотность молекул учитывает состояние газа $n_j = p_j / kT_j$. Поэтому

$M = m\Delta N = Sp(m/2\pi kT)^{1/2} (\sqrt{2} - 1)$. **4.30.** Число частиц, вылетающих со

скоростью v через единицу площади за 1 с: $dn(v, \theta \leq \pi/2) =$

$= 2\pi n v dW(v) \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta$. Если n_0 — плотность молекул в пучке, то вероятность, что они имеют скорость v , есть $dW_1(v) = dn(v)/n_0$. Отсюда

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v dW_1(v) = \int_0^{\infty} e^{-mv^2/2kT} v^4 dv / \int_0^{\infty} e^{-mv^2/2kT} v^3 dv = (3/2)(\pi kT/2m)^{1/2}.$$

Аналогично, $\sqrt{\overline{v^2}} = 2(kT/m)^{1/2}$. **4.31.** Каждая молекула, имеющая ортогона-

льную к стенке v_{\perp} — проекцию скорости, при ударе передает ей энергию

$\varepsilon(v_{\perp}) = p m v_{\perp}^2 / 2$. Число молекул, ударяющихся за 1 с о стенку, находится из

распределения Максвелла $d\nu(v_{\perp}) = n v_{\perp} dW(v_{\perp})$. Получаемая при этом энергия 1 см^2 стенки от молекул с проекциями скоростей $v_{\perp} \in [0, \infty]$ равна

$$E = \int_0^{\infty} \varepsilon(v_{\perp}) d\nu(v_{\perp}) = \left(pnm/4\sqrt{\pi} \right) (2kT/m)^{3/2}. \quad \mathbf{4.32.}$$

Если a – равновесное расстояние, а q – смещение атомов от положения равновесия, то $\bar{l} = a + \bar{q}$. Поскольку на атомы действуют силы упругости, то их потенциальная энергия равна

$$U(q) = \alpha q^2/2 \text{ и } \bar{q} = \int_{-\infty}^{\infty} q \exp(-\alpha q^2/2kT) dq = 0, \quad \bar{l} = a.$$

5.1. Динамика параметров газа при адиабатическом процессе описывается уравнением Пуассона (см. пример 2): $p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma} = NkT_1 V_1^{\gamma-1}$. $p = NkT_1 V_1^{\gamma-1} / V^{\gamma}$,

$$W = \int_{V_1}^{V_2} NkT_1 V_1^{\gamma-1} dV / V^{\gamma} = NkT_1 \left[1 - (V_1/V_2)^{\gamma-1} \right] / (\gamma-1). \quad \mathbf{5.2.} \quad F = - \int_{T_0}^T S dT = RV_0 T_0 \times$$

$$\times \left[1 - (T/T_0)^{\alpha+1} \right] / V(\alpha+1), \quad p = RV_0 T_0 \left[1 - (T/T_0)^{\alpha+1} \right] / V^2(\alpha+1). \quad \mathbf{5.3.}$$

Поскольку $\Omega(E) = \exp(S/k)$, $C_V = (\partial E / \partial T)_V$, $S = \int_0^T (C_V dT / T) = n\alpha T^{n-1} / (n-1)$, то $\Omega(E) =$

$$= \exp(nE / (n-1)kT). \quad \mathbf{5.4.} \quad dw(\varepsilon) = 4\pi V e^{-\varepsilon/kT} \varepsilon^2 d\varepsilon / z (hc)^3; \quad z = 8\pi V (kT)^3 / (hc)^3.$$

Для идеального газа $Z = z^N / N!$; $F = -NkT \ln \left(8\pi V (kT)^3 e / (hc)^3 N \right)$, $p = nkT$,

$$E = N\bar{\varepsilon} = 3NkT; \quad C_V = 3Nk. \quad \mathbf{5.5.} \quad Z = z_{\text{ном}}^N z_{\text{ном}}^N / N!, \quad z_{\text{ном}} = \left(2\pi mkT / h^2 \right)^{3/2};$$

$$z_{\text{ном}} = kTS \left(1 - e^{-mgH/kT} \right) / mg. \quad F = -NkT \ln \left\{ e \left(2\pi mkT / h^2 \right)^{3/2} SkT \left(1 - e^{-mgH/kT} \right) / Nmg \right\},$$

$$E = 5NkT/2 - NmgH / \left(e^{mgH/kT} - 1 \right),$$

$$C_V = 5Nk/2 - N(mgH)^2 e^{mgH/kT} / kT^2 \left(e^{mgH/kT} - 1 \right)^2; \quad \text{при } mgH/kT \ll 1 \quad C_V \approx 3Nk/2,$$

при $mgH/kT \gg 1 \quad C_V \approx 5Nk/2$. **5.6** Дипольная молекула в электрическом поле

приобретает дополнительную потенциальную энергию $U = -(\vec{d}\vec{E}) = -d_0 E \cos \theta$.

$$\text{Функция состояний } Z = Z_0 \left\{ \int_0^{\pi} e^{d_0 E \cos \theta / kT} \sin \theta d\theta \right\}^N = Z_0 (2kT/d_0 E)^N \text{sh}^N (d_0 E / kT).$$

Вектор поляризации $\vec{P} = -(\partial\Phi/\partial\vec{E})_T = kT \partial(\ln Z)/\partial\vec{E} = Nd_0 \{cth(d_0E/kT) - kT/d_0E\} \cdot \vec{E}/|\vec{E}|$. В слабом электрическом поле ($d_0E/kT \ll 1$): $\vec{P} \cong Nd_0^2\vec{E}/3kT$,

$$Z(E) \cong 2^N \left[1 + (d_0E/kT)^2/6 \right]^N. \quad \mathbf{5.7.} \quad C_V = 2kT(\partial(\ln Z)/\partial T) + kT^2(\partial^2(\ln Z)/\partial T^2).$$

5.8. Фазовый объем $\Gamma(E, V) = \int d\vec{p} d\vec{q} = V^N \int d\vec{p}$. Область интегрирования в пространстве импульсов определяется условием $(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{3N}^2)/2m \leq E$ и является с геометрической точки зрения шаром в $3N$ -мерном пространстве с радиусом $R = \sqrt{2mE}$. Интеграл есть объем, пропорциональный

$$R^{3N} = (2mE)^{3N/2}, \quad \text{т.е.} \quad \Gamma(E, V) = \text{const } V^N E^{3N/2}. \quad \text{Энтропия} \quad S = k \ln(\Gamma/h^{3N}) =$$

$$= kN \ln V + (3kN \ln E)/2 + \text{const}. \quad \text{Температура} \quad T = \partial E/\partial S = 2E/3kN. \quad \mathbf{5.9.}$$

Начальная энтропия $S^0 = S_1^0 + S_2^0 = N_1 k \ln(V_1/N_1) + N_1 f(T_1, m_1) + N_2 k \ln(V_2/N_2) + N_2 f(T_1, m_2)$, после смешивания $S = N_1 k \ln((V_1 + V_2)/N_1) + N_1 f(T_1, m_1) + N_2 k \ln((V_1 + V_2)/N_2) + N_2 f(T_1, m_2)$. Ее изменение $S - S^0 = N_1 k \ln((V_1 + V_2)/V_1) + N_2 k \ln((V_1 + V_2)/V_2) > 0$. **5.10.** Начальная энтропия системы

$$S^0 = -Nk \ln p_1 p_2 - 2Nf(T), \quad \text{а после смешивания} \quad S = -2Nk \ln p - 2Nf(T), \quad \text{где}$$

$$p = 2NkT/(V_1 + V_2). \quad \text{Изменение энтропии} \quad \Delta S = Nk \ln\left(\frac{(p_1 + p_2)^2}{4p_1 p_2}\right). \quad \mathbf{5.11.}$$

Из закона сохранения энергии $dE = dQ - pdV$ и уравнения состояния $p = NkT/V$ с учетом $dE = C_V dT$ и равенства $C_p - C_V = Nk$ (см. пример 2) имеем $C dT = C_V dT + (C_p - C_V)T dV/V$. После интегрирования получаем уравнение политропы для идеальных газов: $TV^{n-1} = \text{const}$, где $n = (C_p - C)/(C_V - C)$.

Другие формы уравнения политропы следуют из соответствующих замен через уравнения состояния: $T^n p^{n-1} = \text{const}$, $pV^n = \text{const}$. Адиабатический ($dQ = 0$, $C = C_Q = 0$, $n = \gamma$) и изотермический ($dT = 0$, $C = C_T \rightarrow \infty$) процессы являются

граничными случаями политропного процесса. Т. е. для реальных процессов $1 < n < \gamma$. Частные случаи политропного процесса: изобарный ($C = C_p$, $n = 0$)

$p = \text{const}$ и изохорный ($C = C_V$). В последнем случае вместо уравнения $pV^n = \text{const}$ можно воспользоваться равносильным ему ($Vp^{1/n} = \text{const}$, $1/n = 0$)

$$V = \text{const}. \quad \mathbf{5.12}$$
 Энтропия идеального газа $S = (m/\mu)Nk \left[\ln(VT^{3/2}) + f(m, N) \right]$, а

$$\Delta S = S_2 - S_1 = (m/\mu)Nk \ln(V_2 T_2^{3/2} / V_1 T_1^{3/2}). \quad \text{При изохорном процессе}$$

$$\Delta S_V = (m/\mu)C_V \ln(T_2/T_1). \quad \text{В адиабатическом процессе} \quad (V_2/V_1 = (T_1/T_2)^{1/\gamma-1},$$

см. пример 2) $\Delta S_Q = 0$. **5.13.** Свободная энергия до смешивания $F_j^0 = -\nu_j NkT \left[\ln(V_j/\nu_j N) + f(m_j, T) \right]$, а после $F_j = -\nu_j NkT \left[\ln((V_1 + V_2)/\nu_j N) + f(m_j, T) \right]$. Её изменение при изотермической диффузии $\Delta F = \sum_{j=1}^2 (F_j - F_j^0) = -NkT \left[\nu_1 \ln((V_1 + V_2)/V_1) + \nu_2 \ln((V_1 + V_2)/V_2) \right] < 0$. Если $V_1 = V_2$, $\nu_1 = \nu_2 = 1$, то $\Delta F = -2NkT \ln 2$. **5.14.** $F = -kT \ln(z_1^{N_1} z_2^{N_2} / N_1! N_2!) = F_1 + F_2$; $p = -(\partial F / \partial V)_T = p_1 + p_2$. **5.15.** При переменных V и T $(\partial C_V / \partial V)_T = T(\partial^2 S / \partial T \partial V)_V$. Т.к. $(\partial S / \partial V)_T = (\partial p / \partial T)_V$, то $(\partial C_V / \partial V)_T = T(\partial^2 p / \partial T^2)_V$. **5.16.** Воспользоваться определением $C_p(p, T)$ и $(\partial S / \partial p)_T = -(\partial V / \partial T)_p$. **5.17.** См. № 5.16. **5.18.** $(\partial p / \partial V)_S / (\partial p / \partial V)_T = (\partial S / \partial T)_p / (\partial S / \partial T)_V = C_p / C_V > 1$. **5.19.** $H = \int C_p dT = (\alpha T^4 \ln p) / 4 + A(p)$; $V = (\partial H / \partial p)_S = \alpha T^4 / 4 p + (\partial A / \partial p)_S \equiv \beta T^4 / p$, $(\partial A / \partial p)_S = 0$, $A(p) = H_0$. **5.20** $C_p = -T(\partial^2 \Phi / \partial T^2)_p$, $\gamma_T = -T(\partial^2 \Phi / \partial p^2) / V$; $\alpha = (\partial^2 \Phi / \partial T \partial p)_p / V_0$. **5.21.** С учетом $pV = \nu NkT$ выразить интеграл состояний как функцию давления $Z(p, T)$ и воспользоваться (5.15). Решение аналогично задаче 5.13. **5.22.** Воспользоваться уравнением Гиббса-Гемгольца, $H = (Cp^2 - T^2) / 2$. **5.23.** Из дифференциальных соотношений $(\partial T / \partial p)_S = (\partial V / \partial S)_p = (\partial V / \partial T)_p / (\partial S / \partial T)_p = \alpha VT / C_p$. Для идеального газа $(\partial V / \partial T)_p = Nk / p$, $(\partial T / \partial p)_S = V / C_p$. **5.24.** Изменение энтропии при смешивании $\Delta S = -Nk \left\{ \ln \left[4V_1 V_2 / (V_1 + V_2)^2 \right] + 3 \ln(T_0 / T) \right\}$. Максимальная полезная работа возможна в обратимом процессе $\Delta S = 0$, т.е. при $T = T_0 \left\{ 4V_1 V_2 / (V_1 + V_2)^2 \right\}^{1/3}$. Отсюда $\Delta W = -\Delta E = 3Nk(T_0 - T) = 3NkT_0 \left\{ 1 - \left[4V_1 V_2 / (V_1 + V_2)^2 \right]^{1/3} \right\}$. **5.25.** Из № 5.6, имеем $\Delta E(\varepsilon) = kT^2 \left[\partial \ln Z(\varepsilon, T) / \partial T \right] = -N(\varepsilon d_0)^2 / 3kT$ $C_V(\varepsilon) = \partial(\Delta E) / \partial T = (Nk/3)(\varepsilon d_0 / kT)^2$. Поскольку $C_V^{nocm} = 3Nk/2$, то $C_V(\varepsilon) \ll C_V^{nocm}$.

6.1. $Nk^2 \pi^2 T / 2\varepsilon_F$. **6.2.** Из (5.22) и перекрестных соотношений $(\partial V / \partial T)_p = -(\partial S / \partial p)_T$; $(\partial p / \partial T)_V = (\partial S / \partial V)_T$: $C_p - C_V \sim T^3$. **6.3.** $z =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \exp[-hv(n+1)/kT] = -\partial \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-hv(n+1)/kT] \right\} / \partial (hv/kT),$$

$$E = kT^2 \partial(\ln z^N) / \partial T = NkT^2 \partial \left(\ln e^{hv/kT} (e^{hv/kT} - 1)^{-2} \right) / \partial T = Nhv \left[1 + 2 / (e^{hv/kT} - 1) \right].$$

6.4. Учитывая (6.25), после вычисления $S = \int C_V dT/T$ воспользоваться (5.22):

$$C_p - C_V \sim T^7. \quad \mathbf{6.5.} \quad \rho(v, n(v), T) = 8\pi n^3(v) hv^3 \left[1 + (v/n)(\partial n / \partial v) \right] / \left[c^3 (e^{hv/kT} - 1) \right].$$

6.6. Поскольку при $T = 0^0 K$ $E_0 = 3N\varepsilon_F/5$, то свободная энергия $F = -T \int (E_0/T^2) dT = E_0 = (3Nh^2/10m)(3N/8\pi V)^{2/3}$. Из $p = -(\partial F / \partial V)_T = 2E_0/3V$ следует $pV^{5/3} = \text{const}$, что совпадает с уравнением адиабаты классического идеального газа.

6.7. $F = NkT \ln(1 - e^{-hv/kT})$. **6.8.** $4200^0 K$. **6.9.** $v = 2k\theta_D d/h =$

$= 12 \text{ км/с}$. **6.10.** Число ударов электронов с импульсом p , ориентированным под углом θ к нормали стенки, равно их плотности $dn(p) = f \cdot 4\pi p^2 dp \sin \theta d\theta / h^3$, умноженной на объем $(p \cos \theta) / m$. Т.к. $f = 1$

при $T = 0^0 K$ и $f = 0$ при $T > 0^0 K$, то $v = \int_0^{\pi/2} \int_0^{p_F} (p \cos \theta / m) dn(p) = 2\pi m \varepsilon_F^2 / h^3 =$

$= (h\pi/2m)(3n/8\pi)^{4/3}$. **6.11.** При $T \gg T_g$ функция состояний $z_g = T/T_g$. Считая

интенсивность $I(j, T) = An(\varepsilon_j) / N = A(T_g/T)(2j+1)e^{-j(j+1)T_g/T}$ непрерывной

функцией j , из условия $\partial I / \partial j = 0$ находим $j_{(\max)} = \left(\sqrt{2T/T_g} - 1 \right) / 2$. Максимум

излучения $I(j_{\max}, T) = A\sqrt{2T_g/T} \exp\left\{ -(2 - T_g/T)/4 \right\} \approx A\sqrt{2T_g/T} (1 + T_g/2T)$

приходится на частоту (см. пример 4) $v = \left(\varepsilon_{j_{(\max)}+1} - \varepsilon_{j_{(\max)}} \right) / h =$

$= 2kT_g(j_{(\max)} + 1) / h = kT_g \left(1 + \sqrt{2T/T_g} \right) / h$. **6.12.** Излучение Солнца считается

равновесным, а при данных задачи $hv_1/kT_c \cong 10^{-4}$ его спектральная

плотность описывается приближением (6.36). С учетом уменьшения мощности

излучения по мере удаления от Солнца в ξ раз и ее связи со спектральной

плотностью (см. пример 5) имеем $\xi \varepsilon(v, T) dv = \xi c \rho(v, T) dv / 4$. Полная

мощность шумового сигнала, принимаемая антенной площадью S , равна

$2\pi S \xi kT_c v^2 / c^2 \cong 2 \cdot 10^{-14} \text{ Вт}$. **6.13.** Т.к. плотность фотонов вблизи частоты v

равна $dn(v) = f_\phi \cdot g(v) dv$, то из (6.30) при $n(v) = 1$ и (6.34) следует

$$N = 8\pi V (kT/hc)^3 \cdot J, \quad \text{где} \quad J = \int_0^{\infty} x^2 \left[e^{-x} / (1 - e^{-x}) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^2 e^{-nx} dx = \Gamma(3) \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3 \approx$$

≈ 2.6 . Уравнение адиабаты $pV^{4/3} = \text{const}$ находим из (6.39). **6.14.** $C_V = 4\alpha VT^3$. Т.к. $p = \alpha T^4/3$ не зависит от объема V , а $C_p = C_V - T[(\partial p/\partial T)_V]^2/(\partial p/\partial V)_T$, то $C_p \rightarrow \infty$. **6.15.** Относительная заселенность n -го уровня энергии $dN(n)/N = dw(n, (T_k/T)) = [\exp(-nT_k/T)] / \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nT_k/T) = \exp(-nT_k/T)(1 - e^{-T_k/T})$, $dW(0, 0.5) = 0.864$, $dW(1, 1) = 0.117$. **6.16.** Энтропия колебательного ($p = k$) и вращательного ($p = e$) движений N молекул — $S_p = Nk [\ln z_p + T \partial(\ln z_p)/\partial T]$. Характеристическая температура вращения — $T_e = h^2(m_c + m_0)/8\pi^2 r^2 m_c m_0 k \cong \cong 2.7^0 K$. Поскольку $T/T_e = 222 \gg 1$, то функция состояний вращательного движения $z_e \approx T/T_e$, а энтропия $S_e = Nk(\ln(T/T_e) + 1) \cong 12.7 \text{ кал/град.моль}$. Характеристическая температура колебательного движения $T_k = hv/k = 3100^0 K$, а энтропия $S_k = Nk \{ T_k e^{-T_k/T} / T (1 - e^{-T_k/T}) - \ln(1 - e^{-T_k/T}) \} \approx \approx Nk e^{-T_k/T} (1 + T_k/T) \approx 0.07 \text{ кал/град.моль}$.

7.1. В состоянии равновесия тело не движется. Работа при движении его за счет флуктуации $\Delta W = Mv^2/2$, где v — скорость макроскопического движения. Вероятность флуктуации скорости $w(v) \sim \exp(-\Delta W/kT) \sim \exp(-Mv^2/2kT)$.

Отсюда $\overline{v_{0x}^2} = kT/M$ и $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{kT/M}$. **7.2.** После возведения в квадрат и усреднения дифференциала тепловой функции $\Delta H = V \Delta p + T \Delta S$ имеем (см.

пример 1) $\overline{(\Delta H)^2} = kT [C_p T - V^2 (\partial p/\partial V)_S]$. **7.3.** См. пример 1, (7.7а) и (7.13)

$$\overline{\Delta T \Delta p} = (kT^2/C_V) (\partial p/\partial T)_V, \quad r_{\Delta T, \Delta p} = \overline{\Delta T \Delta p} / \sqrt{(kT^2/C_V) [-kT (\partial p/\partial V)_S]}.$$

7.4. $r_{\Delta V, \Delta S} = kT (\partial V/\partial T)_p / \sqrt{[-kT (\partial V/\partial p)_T] kC_p}$. Для идеального газа $r_{\Delta V, \Delta S} = = 1/\sqrt{5Nk/2}$. **7.5.** $\overline{\Delta S \Delta T} = kT$. **7.6.** $\overline{\varphi^2} = kT/mgl$. **7.7.** Среднее число фермионов

«+» и бозонов «-» с энергией ε_j описывается распределением

$$\overline{n_{j\pm}} = \left[\exp((\varepsilon_j - \mu)/kT) \pm 1 \right]^{-1}. \text{ Так как } \overline{(\Delta n_j)^2} = kT (\partial \overline{n_j} / \partial \mu) \text{ (пример 5), то}$$

$$\overline{(\Delta n_{j+})^2} = \overline{n_{j+}} (1 - \overline{n_{j+}}), \quad \overline{(\Delta n_{j-})^2} = \overline{n_{j-}} (1 + \overline{n_{j-}}). \text{ Дисперсия числа фермионов}$$

обращается в нуль при $\bar{n}_{j+} = 0$ и $\bar{n}_{j+} = 1$, хотя в случае $\bar{n}_{j+} = 0$ относительная флуктуация равна ∞ . Для бозонов относительная флуктуация остается конечной, равной единице и при очень больших \bar{n}_{j-} .

7.8. Дисперсия полного числа бозонов (см. 7.7) $\overline{(\Delta N)^2} = \sum_j \bar{n}_{j-} (\bar{n}_{j-} + 1) = \sum_j e^{(\varepsilon_j - \mu)/kT} / [e^{(\varepsilon_j - \mu)/kT} - 1]^2$.

После перехода от суммы к интегралу, учитывая значения плотности состояний $g(v)dv = 8\pi v^2 dv / c^3$ (раздел 6.), энергии фотонов $\varepsilon = hv$ и равенство нулю химического потенциала $\mu = 0$, имеем

$$\overline{(\Delta N)^2} = \int_0^\infty \frac{e^{hv/kT}}{(e^{hv/kT} - 1)^2} \cdot \frac{8\pi V \cdot v^2 dv}{c^3} = \frac{8\pi V (kT)^3}{(ch)^3} \int_0^\infty \frac{e^x x^2 dx}{(e^x - 1)^2}.$$

Т.к. $\int_0^\infty \frac{e^x x^2 dx}{(e^x - 1)^2} = \int_0^\infty \frac{e^{-x} x^2 dx}{(1 - e^{-x})^2} = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty n x^2 e^{-nx} dx = \frac{\pi^2}{3}$, то окончательно получаем

$\overline{(\Delta N)^2} = (2\pi kT/hc)^3 \cdot V/3$. **7.9.** Используя алгоритм решения предыдущей задачи и значения $g(\varepsilon)d\varepsilon = 4\pi V (2m/h^2)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon = A\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon$, $\overline{(\Delta n_j)^2} = \bar{n}_j (1 - \bar{n}_j)$, находим

$\overline{(\Delta N)^2} = -AkT \int_0^\infty \sqrt{\varepsilon} (\partial \bar{n} / \partial \varepsilon) d\varepsilon$, где $\bar{n} = [e^{(\varepsilon - \mu)/kT} + 1]^{-1}$. Вводится новая переменная $x = (\varepsilon - \mu)/kT$. Поскольку подынтегральная функция заметно отлична от нуля вблизи $\varepsilon \approx \mu$ ($x = 0$), а в силу неравенства $\mu/kT \gg 1$, то нижний предел интеграла считаем равным $-\infty$, а $\sqrt{\mu + kTx} \cong \sqrt{\mu} + (kT/2\sqrt{\mu}) x -$

$-\left[(kT)^2 / 8\sqrt{\mu^3} \right] x^2 + \dots$. Так как функция $\partial \bar{n} / \partial x$ четная, $\bar{n}(\infty) = 0$, $\bar{n}(-\infty) = 1$, то $\overline{(\Delta N)^2} = AkT \left\{ \sqrt{\mu} + 2 \left[(kT)^2 / 8\sqrt{\mu^3} \right] \cdot \int_0^\infty x^2 (\partial \bar{n} / \partial x) dx \right\}$. Интегрирование по частям дает $\int_0^\infty x^2 (\partial \bar{n} / \partial x) dx = -2 \int_0^\infty x (e^x + 1)^{-1} dx = -\pi^2/6$. Дисперсия полного числа электронов $\overline{(\Delta N)^2} = 4\pi V (2m/h^2)^{3/2} kT \sqrt{\mu} \left[1 - (\pi kT/\mu)^2 / 24 \right]$.

7.10. Из № 7.3 для идеального газа ($pV = NkT$) $\overline{\Delta T \Delta p} = N(kT)^2 / C_V V$. С учетом уравнения адиабаты ($pV^\gamma = const$) $(\partial p / \partial V)_S = -\gamma p/V$ и

$\overline{\Delta p^2} = \gamma p^2 / N = \gamma kpT / V$, где $\gamma = C_p / C_V$. Отсюда $r_{\Delta p, \Delta T} = \sqrt{Nk / C_p} = \sqrt{2/5}$.

7.11. С ростом заряда конденсатора на величину Δq его энергия увеличивается на $\Delta W = (\Delta q)^2 / 2C$. Вероятность заряда конденсатора – $w(\Delta q) \sim e^{-(\Delta q)^2 / 2kTC}$.

Сравнение ее с распределением Гаусса определяет масштаб флуктуаций $\sqrt{(\Delta q)^2} = \sqrt{kTC}$. **7.12.** $(\Delta I)^2 = kT/L$. **7.13.** Скорость дрейфа электронов

$\bar{v} = I/enS$, а время пролета проводника длиной l равно $t_0 = l/\bar{v} = Slen/I$.

Полоса частот дробового шума заключена между нулем и $1/2t_0$, т.е.

$\Delta f_D = I/2Slen = 10 \cdot 10^{-3} / (2 \cdot 10^{-2} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot l \cdot n)$; а) $\Delta f_D = 30$ кГц; б) $\Delta f_D = 300$ Гц.

7.14. Для проводника с $l = 1$ см, $n = 10^{16}$ см⁻³, $\rho = 1$ Ω·см частоты дробового шума лежат в интервале от 0 до 300 Гц (задача 7.13) усилителем не воспринимаются. Для проводника с $l = 10^{-1}$ см, $n = 10^{15}$ см⁻³, $\rho = 10$ Ω·см,

$R = 100$ Ω. $\sqrt{(\Delta U_{op})^2} = \sqrt{2eIR^2\Delta f} = \sqrt{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-2} \cdot 10^4 \cdot 9600} = 0,44$ мкВ.

7.15. $\sqrt{(\Delta U_T)^2} = \sqrt{4kTR\Delta f} = \sqrt{4 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 100 \cdot 9600} = 0,12$ мкВ.

ПРИЛОЖЕНИЯ

П.1. Значения некоторых физических величин

Число Авогадро	N_A	$6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Число Лошмидта *	N_L	$2,69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$
Объем 1 моля идеального газа при нормальных условиях	V_0	$2,24 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3$
Атомная единица массы	<i>a. e. m.</i>	$1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Постоянная Больцмана	k	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}^{**} / \text{град}$
Ускорение свободного падения	g	$9,81 \text{ м/с}^2$
Универсальная газовая постоянная	$N_A k = R$	$8,31 \text{ Дж/моль} \cdot \text{град}$
Скорость света	c	$3,00 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Масса электрона	m_e	$9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Масса протона	m_p	$1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Постоянная Планка	h	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
	$h/2\pi = \hbar$	$1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Заряд электрона	e	$1,6 \cdot 10^{-19} \text{ А} \cdot \text{с}$
	$h^2/8\pi^2 k$	$40,27 \cdot 10^{-47} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{град}$
	$h^2/8\pi^2 c$	$27,99 \cdot 10^{-45} \text{ кг} \cdot \text{м}$
	hc/k	$1,44 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{град}$
Ангстрем	\AA	10^{-10} м

*) Число молекул в 1 м^3 вещества, находящегося в состоянии идеального газа при нормальных условиях: температура – $T_0 = 293^0 \text{ К}$, давление – $p_0 = 10,13 \cdot 10^4 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2} = 1 \text{ атм}$.

**) $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$

П.2. Типовые индивидуальные задания контрольных работ

Первые вопросы:

1. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} (p^3 - 2p + 1) \exp(-p^2/2m\theta) dp$.
2. Оценить с точностью до 0.01 интеграл $\int_0^{0.1} x^\alpha \exp(-4x^2) dx$, для $\alpha = 1, \alpha = 2$.
3. Как изменится элемент площади $dx dy$ при переходе от переменных (x, y) к (u, v) , если преобразование осуществляется по формулам $u = axe^y, v = bxy$.
4. Любое из общего числа N однотипных событий реализуется с вероятностью w . Вероятность одновременной реализации k таких событий описывается биномиальным распределением $W_N(k) = N! w^k p^{N-k} / [k!(N-k)!]$, $p = 1 - w$. Найти среднее значение \bar{k} и дисперсию $(\Delta k)^2$. Указание: Воспользоваться тождеством $(yw + p)^N = \sum_{k=0}^N W_N(k) y^k$.
5. Распределение случайной величины x задано функцией $f(x) = Ae^{-(x-2)^2}$. Найти вероятность того, что значение случайной величины не превышает $\bar{x} + 0.1$.
6. Показать, что распределение Пуассона $a^k e^{-a} / k!$ удовлетворяет условию нормировки.
7. Через какой промежуток времени следует менять все n транзисторов в приемнике, чтобы обеспечить его работу с вероятностью 0.90. Гарантийный срок службы транзисторов τ часов, вероятность выхода из строя за время t любого из них $p = t/\tau$.
8. Показать, что для газа с весьма большим числом атомов справедливо соотношение $\overline{\exp(-\varepsilon)} = \exp(-\bar{\varepsilon})$, где ε – энергия атома.
9. Найти относительную флуктуацию абсолютной величины импульса и энергии молекулы идеального газа.
10. Определить среднюю $\bar{\varepsilon}$ и наиболее вероятную $\bar{\varepsilon}_{max}$ энергию газа из N свободных атомов, помещенного в объем V , при температуре T . Объем фазового пространства описывается формулой $\Gamma = \text{const } V^N \varepsilon^{3N/2}$.
11. Найти при температуре T функцию состояний линейного гармонического осциллятора, энергия которого равна $\varepsilon = hv(n + 1/2)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и все уровни колебательной энергии невырожденные.
12. Определить при температуре T функцию состояний частицы, движущейся со скоростью c , если ее энергия и импульс связаны соотношением $\varepsilon = pc$.
13. Энергия линейного осциллятора $\varepsilon = p^2/2m + \alpha q^2/2$, где p и q – обобщенные импульс и

координата, m – масса, κ – постоянная упругости. Найти его функцию состояний в квазиклассическом приближении.

14. Оценить отношение числа молекул идеального газа, имеющих энергию меньше и больше $\varepsilon = 0,5 kT$.

15. Молекула, ударяющаяся о стенки сосуда, передает ей S -ую часть своей энергии. Найти энергию, передаваемую 1 см^2 стенки за 1 с молекулами газа.

16. Оценить отношение числа молекул идеального газа, имеющих относительную скорость движения в интервале $0 \leq u \leq 0,1(2kT/\mu)^{1/2}$ к их общему числу.

17. Молекулярный пучок выходит через малое отверстие в вакуум. Найти среднюю и среднюю квадратичную скорости частиц в пучке.

18. В n независимых опытах событие A появляется с вероятностью p . Сколько требуется опытов, чтобы с вероятностью P гарантировать хотя бы одно появление события A ?

19. Показать, что для системы с весьма большим числом частиц имеет место равенство $\overline{\varepsilon^m} = (\overline{\varepsilon})^m$, где m – любое число, ε – энергия.

20. Найти коэффициент объемного расширения и изотермическую сжимаемость идеального газа.

Вторые вопросы:

1. Одинаковый газ содержится в двух сосудах, соединенных через малое отверстие площадью S в общей стенке. Давление (p) и температура (T) в одном сосуде вдвое больше, чем в другом, и сохраняются постоянными. Масса молекул m . Определить массу газа, протекающего из одного сосуда в другой.

2. Идеальный газ с массой молекул m находится в поле земного тяготения. Определить дисперсию и среднее значение высоты, на которой находятся молекулы газа по отношению к поверхности $z = z_0$ при температуре T .

3. Найти средний размер двухатомной молекулы, если атомы совершают гармонические колебания вдоль оси около положения равновесия, когда расстояние между атомами равно a .

4. Внутренняя энергия системы равна $E = aT^n V$. Найти свободную энергию, уравнение состояния и теплоемкость C_V .

5. Определить теплоемкость C_p , изотермическую сжимаемость γ_T и коэффициент теплового расширения α через потенциал Гиббса.

6. Определить долю молекул идеального газа, скорость которых в двух взаимно ортогональных направлениях не превышает $0,1v_m$, где v_m – наиболее вероятное значение абсолютной скорости.

7. Найти среднюю потенциальную энергию молекул идеального газа, находящихся в

центрифуге радиуса R , вращающейся с угловой скоростью ω . Масса молекулы m , температура газа T .

8. Показать, что у веществ, объем которых линейно зависит от температуры T , теплоёмкость C_p не зависит от давления. Воспользоваться равенством $(\partial S/\partial p)_T = -(\partial V/\partial T)_p$.

9. Доказать, что в системах, где давление – линейная функция температуры T , теплоемкость C_V не зависит от объема.

10. Найти разность $C_p - C_V$ для газа Ван-дер-Ваальса $(P + a/V^2)(V - b) = NkT$.

11. Воспользовавшись свойствами якобиана преобразования, доказать, что $(\partial T/\partial V)_S = -[(\partial S/\partial V)_T/(\partial S/\partial T)_V]$.

12. Записать распределение легких зерен в воде в поле земного тяготения и определить при заданной температуре T высоту h , на которой их плотность уменьшается в два раза. Масса зерна объемом V равна m .

13. Найти свободную энергию F и энтропию газа Ван-дер-Ваальса $(P + a/V^2)(V - b) = NkT$.

14. Найти теплоемкость C_V , свободную энергию и энтропию электронного газа в объеме V , если его энергия равна $E = (3N\mu/5) [1 + (5\pi^2/12)(kT/\mu)^2]$, где $\mu = (h^2/2m)(3n/8\pi)^{2/3}$.

15. Доказать, что при низких температурах $T \rightarrow 0^0 K$ свободная энергия колебательного движения газа из двухатомных молекул равна энергии нулевых колебаний $\lim_{T \rightarrow 0} F = NkT_k/2$, где T_k – характеристическая температура колебательного движения. Воспользоваться функцией состояний $z_{кол} = [e^{T_k/2T} - e^{-T_k/2T}]^{-1}$.

16. Получить формулу Планка для теплового излучения в среде с дисперсией, где показатель преломления $n = n(\nu)$, ν – частота. Указание: Воспользоваться дисперсионным уравнением $q\nu = \omega$, где ν – фазовая скорость распространения волны.

17. Найти потенциал Гиббса Φ идеального газа как функцию температуры и давления. Воспользоваться функцией состояний.

18. Вычислить работу идеального газа во время расширения при адиабатическом процессе ($PV^\gamma = \text{const}$, $\gamma = C_p/C_V$).

19. Используя теорему Нернста и дифференциальные соотношения термодинамики, доказать, что при $T \rightarrow 0$ $C_p = C_V$. Указание $C_p - C_V = T(\partial p/\partial T)_V(\partial V/\partial T)_p$.

20. Получить свободную энергию смеси двух разных идеальных газов, состоящих из одного моля и занимавших до смешивания объемы V_1 и V_2 . Найти изменение свободной энергии при изотермической диффузии этих газов в объеме $V_1 + V_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика, М.: Наука, 1964, – 568 с.
2. Левич В.Г. Курс теоретической физики, т. 1. М.: ФМ., 1962.
3. Васильев А.М. Введение в статистическую физику. М.: Высш. шк., 1980. – 272 с.
4. Киттель Ч. Статистическая термодинамика. М.: Наука, 1977. – 336 с.
5. Смирнова Н.А. Методы статистической термодинамики в физической химии. Учеб. пособие. М.: Высш. шк., 1969. – 480 с.
6. Терлецкий Я.П. Статистическая физика. М.: Высш. шк., 1973. – 280 с.
7. Базаров И.П. Термодинамика. М.: Высш. шк., 1976. – 447 с.
8. Жирифалько Л. Статистическая физика твердого тела. М.: Мир, 1975 – 382 с.
9. Федорченко А.М. Вступ до курсу статистичної фізики та термодинаміки, Київ: Вища шк., 1973. — 188 с.
10. Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука, 1972. – 400 с.
11. Головки Д.Б., Ментовський Ю. Л. Загальні основи фізики. Термодинаміка. Молекулярна фізика. Навч. посібн. – К.: Либідь, 1993. – 112 с.
12. Степухович А.Д., Улицкий В.А. Лекции по статистической физике: Учеб. пособ. М.: Высш. шк., 1978. – 149 с.
13. Ансельм А. И. Основы статистической физики и термодинамики. М.: Наука, 1973. – 424с.
14. Ноздрев В.Ф., Сенкевич А.А. Курс статистической физики. М.: Высш. шк., 1969. – 288 с.
15. Шиллинг Г. Статистическая физика в примерах. М.: Мир, 1976. – 432 с.
16. Сборник задач по теоретической физике // Л.Г. Гречко, В.И. Сучаков, О.Ф. Томасевич, А.М. Федорченко. –М.: Высш. шк., 1972. – 336 с.
17. Задачи по термодинамике и статистической физике, под ред. П. Ландсберга, М.: Мир, 1974. – 640 с.
18. Казанский В.Б. Методические указания к решению задач по курсу “Термодинамика и статистическая физика”. Харьков, ХГУ, 1984. – 50 с.
19. Варикаш В.М., Болсун А.И., Аксенов В.В. Сборник задач по статистической физике. Минск: Вышэйшая шк., 1979. – 223 с.
20. Путилов К.А. Термодинамика. – М.: Наука, 1971. – 376 с.
21. Вентцель Л.Г. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. – 576 с.
22. Серова Ф.Г., Янкина А.А. Сборник задач по теоретической физике. М.: Просвещение, 1979. – 192 с.
23. Бронштейн И.Н., Семендяев Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1981. – 270 с.
24. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров // пер. с франц. Под ред. К.С. Шифрина. – М.: Наука, 1967. – 780 с.

Навчальне видання

Вадим Борисович Казанский

**СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА.
ЗАДАЧИ, ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПОЛОЖЕНИЯ**

Методичний посібник

Комп'ютерна верстка Хардікова В.В.

Тираж 3 прим.

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна,
Україна, 61077, Харків, пл. Свободи, 4
кафедра теоретичної радіофізики
Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна