МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ГУЛИСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ГАЙМНАЗАРОВ Г.

КОНСТРУКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ ЗАДАННЫХ НА ВСЕЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Монография

ТАШКЕНТ – 2020

УДК: 517.512
ББК
-

- **Гаймназаров Г. Конструктивные характеристики свойств функций заданных на всей вещественной оси. Монография. –Т.: «Инновацион ривожланиш нашриёт-матбаа уйи», 2020. 196 стр.**

ISBN 978–9943–

Монография посвящена исследованию по конструктивным характеристикам свойств функций, заданных на всей вещественной оси. Рассмотрены вопросы теоремы вложения, свойства модуль гладкости функций целого и нецелого порядка (производная функций дробного порядка) свойства аналитических функций в верхней полуплоскости в зависимости от наилучших приближений функций целыми функциями, а также отклонения решений некоторых дифференциальных уравнений от их граничных значений. Монография предназначена для студентов старших курсов, магистров, докторантов и научных работников в области теории функций и функционального анализа.

***

Monografiya haqiqiy o‘qda berilgan funksiyalarning konstruktiv xarakteristik xossalarini tekshirishga bag‘ishlangan. Bunda funksiyalarni joylashtirish, funksiyalarning butun va kasr tartibli silliqlik moduli (kasr tartibli hosila) xossalari, yuqori yarim tekislikda analitik funksiyalarning xossalari, funksiyaning butun funksiya bilan eng yaxshi yaqinlashishi bilan bog‘liq holda hamda ba’zi bir tenglamalar yechimini ularning chegaraviy funksiyasidan chetlanish masalalari ko‘rib chiqilgan. Monografiya funksiyalar nazariyasi va funksional analiz bo‘yicha yuqori kurs talabalari, magistrlar, doktorantlar va ilmiy tadqiqot olib boruvchilar uchun mo‘ljallangan.

Рецензенты:

Тухтасинов М. – доктор физико-математических наук, профессор (Национальный университет Узбекистана)
Муминов К. – доктор физико-математических наук, профессор (Национальный университет Узбекистана)
Наржигитов Х. – кандидат физико-математических наук, доцент (Гулистанский государственный университет)

Ответственный редактор:

Жамуратов К. – кандидат физико-математических наук, доцент (Гулистанский государственный университет)

Рекомендована к печати Ученым советом ГГУ протокол №9, от 13 мая 2020 года.

ISBN 978–9943–

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория приближения функций представляет собой одной из ветви теории функций и функционального анализа.

Предлагаемая монография посвящена изложению тех разделов, в которых исследуется зависимости между различными конструктивными свойствами (а также структурными свойствами) действительных функций и характером приближения либо многочленами (алгебраическими, тригонометрическими) либо другими функциями.

В основе этого исследования лежат классическая теорема Вейерштрасса о приближении функции многочленами, идеи П.Л.Чебышева о наилучшием приближении и обратная теорема С.Н.Бернштейна о приближении функций, т.е. о существовании функций с заданной последовательностью наилучших приближений.

Развитие и уточнение этих фундаментальных теорем, а также исследования примыкающих сюда других вопросов, связанные с понятием наилучшего приближения, со свойствами изучаемых классов функций и аппарат приближения, составляют содержание монографии.

Здесь, в основном, исследуется свойства функции действительного переменного, заданных на всей вещественной оси в зависимости от наилучших приближений функцией с целыми функциями конечной степени в пространствах $L_p(-\infty,\infty)$, $0<p\leq\infty$.

Автор выражает искренние благодарности рецензентам проф. М.Тухтасинову и проф. К.Муминову, а также доц. Х. Наржигитову за внимательно прочитавшие рукопись монографии и указавшие ряд замечаний по улучшению качеству данной монографии. Автор также особо выражает благодарность ответственному редактору, доц.К. Жамуратову за внимательно прочитавшему рукопись и следавшему ряд замечаний по описки в тексте и некоторых неточностей.

Я благодарен Турдихол Кадировне Гаймназаровой за оказанную помощь в техническом оформлении монографии.

И особо благодарен академику АН Р Уз. Ш.А.Алимову и участникам его семинара, которые неоднократно обсуждевшим результаты полученные в монографии, а также глубоко благодарен академику АН Тадж. Респ. Л.Г.Михайлову и участникам его семинара за полезные обсуждения полученных результатов.

В заключении выражаю искренную благодарность проф. М.Ф.Тиману, участникам его семинара (Республика Украина, г.Днепропетровск) которые долгие годы придержали связь при обсуждении полученных результатов в монографии.

ВВЕДЕНИЕ

Теория приближения функций, заданных на всей вещественной оси целыми функциями конечной степени, развивается, ориентуясь на теорию приближения функции посредством многочленов, начатую ещё П.Л.Чебышевым и К.Вейерштрассом.

В работах С.Н.Бернштейна [40] и Н.Н.Ахиезера [120] получено неравенство

$$A_\sigma(f)_{L_p} \le C\omega\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)_{L_p}, \quad 1 \le p \le \infty \qquad (1)$$

где

$$A_\sigma(f) = \inf_{Q_\sigma(x)} \| f(x) - Q_\sigma(x) \|_{L_p}$$

наилучшее приближение функции $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ целыми функциями $Q_\sigma(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ конечной степени $\le \sigma$.

$$\omega(\delta; f)_{L_p} = \sup_{h \le \delta} \| f(x+h) - f(x) \|_{L_p}$$

модуль непрерывности функции $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ в пространстве $L_p(-\infty, \infty)$,

$$\| f(x) \|_{L_p} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} | f(x) |^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty, \ 0 < p < \infty,$$

$$\| f(x) \|_{L_p} = vrai\sup_x | f(x) |, \quad p = \infty.$$

Неравенство (1) является центральной теоремой теории приближения функций, заданных на всей оси, которое называется аналогом неравенства Джексона, полученного для периодических функций .

Как показал Н.И.Ахиезер [120], в правой части неравенства (1) вместо модуля непрерывности $\omega(\delta; f)_{L_p}$ можно поставить модуль гладкости второго порядка:

$$\omega_2(\delta; f)_{L_p} = \sup_{|t| \le \delta} \| f(x+t) - 2f(x) + f(x-t) \|_{L_p}$$

Обобщение неравенства (1) на модули гладкости более высших порядков было дано и другими авторами (см. например, [1], [41]). Таким образом, обобщённое неравенство (1) имеет следующий вид:

$$A_\sigma(f)_{L_p} \le C_k \omega_k\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)_{L_p}, \quad 1 \le p \le \infty \tag{2}$$

где

$$\omega_k(\delta; f)_{L_p} = \sup_{|t|\le\delta}\left\| \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} f(x+\nu t) \right\|_{L_p}$$

модуль гладкости порядка k в пространстве $L_p(-\infty, \infty)$.

Более обобщённое неравенство типа (2) дано С.М.Никольским (см.[1], стр.220-236).

Ряд задач наилучшего приближения функций, заданных на всей вещественной оси посредством целых функций конечной степени, сформулирован С.Н.Бернштейном, и многие из них были решены самим С.Н.Бернштейном (см. [40] , стр. [121]).

М.Ф.Тиманом [4] установлено обратное неравенство к неравенству (2) т.е

$$\omega_k\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)_{L_p} \le \frac{M_k}{\sigma_k} \sum_{\nu=0}^{[\sigma]} (\nu+1)^{k-1} A_\nu(f)_{Lp} \tag{3}$$

В случае периодических функций важное значение для конструктивной теории функций имела открытая С.Н.Бернштейном (см.[121], том 2), теорема о существовании функций с произвольно заданной монотонно убывающей к нулю последовательностью наилучших приближений.

Для случая произвольных функций, заданных на всей вещественной оси, аналогичные утверждения приведены в [127] (см. [127] , стр. 358).

В связи с этим естественно возникло много задач об исследовании тех или иных свойств функций с заданными наилучшими приближениями. По этому вопросу прежде всего, следует отметить следующие: а) теорема С.М. Никольского (см. [13] , стр. 240, теор.5.4.2) о принадлежности функции классу H_p^r, для которых

$$A_\sigma(f)_{L_p} \le \frac{C}{\sigma^r}, \quad r>0, \ \ \sigma \ge 1$$

б) уклонения средней Валле-Пусана от функции $f(x) \in L_p(-\infty,\infty)$ $1 \le p \le \infty$ (результат С.М. Никольского [1] , стр. 360)

$$\left\|\sigma_N(x;f) - f(x)\right\|_p \le C \cdot A_N(f)_{L_p},$$

$$\sigma_N(x;f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V_N(x-u) f(u) du,$$

$$V_N = \frac{1}{N}\int_N^{2N} \frac{\sin \lambda t}{t} d\lambda$$

в) ряд результатов М.Ф.Тимана в [14], [4] о приближении функций, заданных на всей вещественной оси: г) результаты В.Г. Понаморенко [91], [92] о суммируемости интегралов Фурье функции с заданными наилучшими приближениями, целыми функциями с заданными наилучшими приближениями, целыми функциями конечной степени и некоторые другие результаты.

Отметим, что в плане исследования конструктивных характеристик свойств функций, заданных на всей вещественной оси, можно рассматривать:

а) связь между модулем гладкости функций и их наилучшими приближениями;

б) исследование свойств функции с заданными наилучшими приближениями;

в) исследования свойтсв наилучших приближений функций в зависимости от характера (поведения) заданной функции.

В работах [22], [49] (см. главу II) автором рассмотрен вопрос о справедливости аналога неравенства (2) при $0<p<1$ и неравенства типа (3) для $0<p<1$, а именно доказано, что

$$A_\sigma(f)_{L_p} \le C(k,p)\omega_k\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)_{L_p}, \quad 0<p<1,$$

где C(k,p) – константа, зависящая только от k, p.

$$\omega_k\left(\frac{1}{\sigma}, f\right)_{Lp} \le \frac{C(k)}{\sigma^k}\left\{\sum_{\nu=0}^{[\sigma]}(\nu+1)^{kp-1}A_\nu^P(f)_{Lp}\right\}^{\frac{1}{P}} \tag{5}$$

где C(k) – константа, зависящая только от k.

В пространствах $H_p(-\infty,\infty)$, p>0, неравенство типа (2), (3),(4),(5) получено автором [90], [123] (см. главу IV), т.е. в пространстве аналитических функций *f(z)=f(x+iy)* в верхней полуплоскости *y>0* удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^p\,dx \le M^p < \infty, \quad 0 < p < \infty,$$

где M – константа, не зависящая от *y*.

При $0<p\le\infty$ неравенство (2) и неравенство (3) при $1\le p\le\infty$ в терминах модуля гладкости дробного порядка получено автором [70] ,. [71] (см. глава III).

Отметим, что неравенства типа (3),(4),(5) эффективно используются при получении теоремы вложения, которые посвящены работы автора [14], [36], [54] (см. глава I).

Как было отмечено выше, основными теоремами конструктивной теории функции являются неравенства (2), (3) при $1\le p\le\infty$ и (4), (5) при 0<p<1.

Следует отметить, что в теории приближения функций и вообще в теории функций важную роль играют неравенство С.Н.Бернштейна (см.[12]) .

$$\left\|Q_\sigma^{(k)}(x)\right\|_{L_p} \le \sigma^k\left\|Q_\sigma(x)\right\|_{L_p}, \tag{6}$$

где$1\le p\le\infty$ и неравенство С.М.Никольского (см.[12])

$$\left\|Q_\sigma(x)\right\|_{L_q} \le C\sigma^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left\|Q_\sigma(x)\right\|_{L_p},\ 0<p<q\le\infty. \tag{7}$$

В связи с этим автором [125], [99], [90] (см. главу 4), получено неравенство (6) при 0<p<1 с константой, зависящей только от p и неравенство типа (7) в пространстве $H_p(-\infty,\infty)$, т.е.

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^q\,dx\right\}^{\frac{1}{q}} \le C(y-y_0)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy_0)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{8}$$

$0<p<q\le\infty$, $y>y_0\ge0$.

Отметим, что в теории функции (и вообще в математике) неравенство Гельдера в ространствах $L_p(a,b)$ и $L_p(-\infty,\infty)$, $p>1$ широко применяется. А при $0<p<1$ неравенство Гельдера для действительных функций (т.е. в $L_p(a,b)$, $o<p<1$) аналог не имеет.

Выше полученное неравенство (8) в пространстве $H_p(-\infty,\infty)$ $o<p<1$ (т.е. для функции комплексного переменного) можно считат, аналог неравенства Гельдера в пространстве $H_p(-\infty,\infty)$ $o<p<1$, $q=1$.

Следует отметить, что неравенство типа (6) имеет место и в пространстве $H_p(-\infty,\infty)$ (см. работы автора [125] или глава IV).

В зависимости от наилучших приближений функции или модуля гладкости можно рассматривать вопрос об уклонении функции от некоторых средних интеграла Фурье (а также можно судить о суммируемости интегралов Фурье) и отклонении решений некоторых дифференциальных уравнений от их граничных значений.

Теперь более подробно остановимся на основные содержаний результатов монографии по главам.

Вопросы вложения классов функций посвящено много работ. Например: работы С.М. Никольского, О.В.Бесова, Ш.А.Алимова, М.Ф.Тимана, М.Л.Ульянова, Э.А.Стороженко, В.И.Коляда, Н.Т.Темиргалиева и др . В этих работах рассмотрены периодические функции и функции заданные на конечном отрезке.

Вопросы вложения классов функций, заданных на всей вещественной оси сравнительно мало изучены. Этому вопросу посвящена первая глава монографии.

В отличие от функций, заданных на конечном отрезке и периодических функций для двух различных p и q классы $L_p(-\infty, \infty)$ и $L_q(-\infty, \infty)$ не содержатся один в другом.

Так как периодические функции неинтегрируемы на всей вещественной оси, то доказанные здесь теоремы вложения не могут считаться обобщением соответствующих известных теорем и функции, заданные на всей вещественной оси, имеют свою специфику.

В параграфах 1,2,3 главы I доказываются теоремы вложения, являющиеся развитием результатов М.Ф.Тимана и П.Л.Ульянова, Э.А.Стороженко, полученные для периодических функций и для функций, заданных на конечном отрезке.

При 1≤p≤ν<∞ теорема 1.2 является усилением одного результата из книги [12], (см. [12] стр. 378).

Теорема 1.3. Пусть $f(x)\in L_p(-\infty,\infty),\ \ 1\le p<\nu$ и $\varphi(u)$ - чётная, неотрицательная, неубывающая на $(0,\infty)$ функция, удовлетворяющая при некотором $\alpha\in(0,1)$ условию

$$\sum_{k=n}^{\infty}\varphi(k)k^{\alpha-2}=0\{\varphi(n)n^{\alpha-1}\}$$

Тогда, если

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{m\nu+\frac{\nu}{p}-2}\varphi(n)A_n^{\nu}(f)_{L_p}<\infty$$

то функция $f(x)$ почти всюду на $(-\infty,\infty)$ совпадает с функцией, имеющей абсолютно непрерывную производную порядка $m-1$ а производная $f^{(m)}(x)$ принадлежит пространству $L^{\nu}\varphi(L^{\nu})$ т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f^{(m)}(x)\right|^{\nu}\varphi\left(\left|f^{(m)}(x)\right|^{\nu}\right)dx<\infty$$

Из теоремы 1.2 получаем следующее утверждение.

Следствие 1.1. Если функция $f(x)\in L_p(-\infty,\infty),\ \ p>0$ при некотором m удовлетворяет условию

$$\omega_m(t;f)_{L_p}=0(t^3),\quad s\le m, \tag{9}$$

то функция $f(x)$ почти всюду на $(-\infty,\infty)$ совпадает с функцией, имеющей абсолютную непрерывную производную $f^{(k-1)}(x)$, $0\le k<-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\nu}\right)$ (k - натуралное) и производную $f^{(k)}(x)$ порядка k, принадлежащую пространству $L_{\nu}(-\infty,\infty)$ $(0<p\le\nu<\infty)$.

В параграфе 1 главы I доказывается, что условия (1.2) и (1.4) являются необходимыми и достаточными, чтобы $f(x)\in L_{\nu}(-\infty,\infty),\ \ 1<p<\nu$ и $f^{(m)}(x)\in L_{\nu}(-\infty,\infty)$ при $1\le p<\nu<\infty$.

В параграфе 2 главы I показано следующее соотношения между наилучшими приближениями в различных метриках .

В параграфе 3 главы I рассматривается вопрос вложения $L_p(-\infty,\infty)$ классов функций в пространстве Лоренца.

Для периодических функций и для функций заданных на конечном отрезке этому вопросу посвящены работы Брудного Ю.А. (1976), Гольдмана (1985,1987) Темиргалиева Н.(1983), Шерстневой Л.А (1986), Акишева Г.А, Наурызбаева К.Ж. и Смаилова Е.С (1987) и др.

Отметим, что при $1 \le p \le \infty$ в пространствах $L_p(-\infty,\infty)$ рассматриваемые здесь вопросы довольно хорошо изучены (см. [40], [44], [41], [20], [4], [14], [42], [51], [1] и др), а при 0<p<1 мало изучены.

Приведём некоторые утверждения из главы II. Установлено следующее свойство целых функций конечной степени при 0<p<1 (являющейся развитием результатов С.М.Никольского и М.Ф.Тимана).

Теорема 2.1. Если целая функция $Q_\sigma(x) \epsilon L_P(-\infty,\infty)$ $0 < p < 1$ степени ≤ε, то для любого $k = 1,2,\ldots$ имеет место неравенство:

$$\left\|Q_\sigma^{(k)}(x)\right\|_{L_P} \le C(p,k)\sigma^k \|Q_\sigma(x)\|_{L_P},$$

Здесь и в дальнейшем С($a_1, a_2, \ldots, a_к$) означает константу, зависящую только от $a_1, a_2, \ldots, a_к$.

Теорема 2.3. Пусть $f(x) \in Lp(-\infty,\infty), 0 < p < 1$. Тогда при к=1,2,….. имеет место неравенство:

$$A_6(f)_{Lp} \le C_k \omega_k\left(\frac{1}{6}; f\right)_{Lp}$$

где константа C_k зависит только от k.

Теорема 2.4. Пусть $f(x) \in Lp(-\infty,\infty), 0 < p < 1$. Тогда при натуральном k имеет место неравенство:

$$\omega_k\left(\frac{1}{6}, f\right)_{Lp} \le \frac{C(k,p)}{\sigma^k}\left\{\sum_{\nu=0}^{[\sigma]}(\nu+1)^{kp-1}A_\nu^p(f)_{Lp}\right\}^{\frac{1}{p}}$$

где константа C(k,p) не зависит от *f*.

Свойства модуля гладкости дробного порядка периодических функций впервые рассматривались Бутцером и Вестфалем [57], а затем были изучены в работах Таберского [44], Бугрова Я.С. [58], Дрианова Д.П. [66], Самко С.Г. , Якубова А.Я. [68], [69], Есмаганбетова М.Г. [62], Пономаренко В.Г. [65], и другие.

Для функций, заданных на всей вещественной оси, этому вопросу посвящена глава III монографии. Как известно, понятие модуля гладкости какого-либо порядка вводится на основе разности функций соответствующего порядка. Напомним, определение разности функций порядка $\alpha > 0$(целого и нецелого).

Определение. Выражения

$$\Delta_h^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x-kh),$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!}$$

называются разностью функции *f(x)* порядка $\alpha > 0$ (целого и нецелого) с шагом h.

В главе III доказаны прямая и обратная теоремы теории приближения в терминах модуля гладкости дробного порядка, а также установлено важное утверждение касающиеся к производной дробного порядка функций в пространствах $L_p(-\infty,\infty)$, $0<p\leq\infty$ (например, неравенства С.Н.Бернштейна и С.М.Никольского).

В параграфе 3 главы 3 рассматривается поведение преобразования Фурье в зависимости либо от скорости убывания модуля гладкости функции, либо от убывания к нулю наилучших приближений.

Исследования по аналитическим функциям изложены в главе IV, которая посвящена изучению свойств функций в пространствах $H_p(-\infty,\infty)$, $0<p\leq\infty$ т.е. множеству аналитических функций $f(z)=f(x+iy)$ в верхней полуплоскости $y>0$, для которых

$$\|f(x+iy)\|_{H_p}=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\le M<\infty,\quad 0<p<\infty$$

$$\|f(x+iy)\|_{H_p}=\underset{-\infty\le x\le\infty}{vrai\sup}|f(x+iy)|\le M<\infty,\quad p=\infty$$

где М не зависит от *y*.

Отметим, что при 0<p<1 величина $\|f(x+iy)\|_{H_p}$ не является нормой (не выполняется неравенство треугольника), но мы будем пользоваться этими обозначениями.

Класс $H_p(-\infty,\infty)$ при $1\le p<\infty$ впервые рассмотрен и изучен Хиллем и Тамаркиным [79]. После них при 0<p<1 рассмотрен Коватом [80].

В.И. Крылов [81], продолжая исследование, получил некоторые важные и интересные результаты.

В главе IV исследуются свойства функции *f(z)=f(x+iy)* в классе $H_p(-\infty,\infty)$ в зависимости либо от наилучших приближений целыми функциями, либо от модуля гладкости функций.

Здесь получены прямые и обратные теоремы теория приближени в пространстве $H_p(-\infty,\infty)$.

Теорема 4.6. Если $f(x+iy)\in H_p(-\infty;\infty)$, $0<p<\infty$, то при любом натуралъном К имеет место неравенство:

$$A_\sigma(y;f)_{H_p}\le C(p,k)\omega_K\left(\frac{1}{\sigma};y_0;f\right)_{H_P},\quad y_0\ge 0 \tag{10}$$

где константа C(p,k) при $1\le p\le\infty$ не зависит от *p*,

$$y-y_0\succ 0(1\le p\le\infty);\quad y-y_0>\frac{1}{\sigma};\quad 0<p<1$$

$$A_\sigma(y;f)_{H_p}\le C(p,k)\omega_K\left(\frac{1}{\sigma};f\right)_{L_p},\ y>0.$$

Здесь $A_\sigma(y;f)_{H_p}$ наилучшее приближение функции *f(z)* целыми функциями $Q_\sigma(z)$ степени $\le\sigma$ в пространстве $H_p(-\infty,\infty)$ и $\omega_K(\delta;y;f)_{H_p}$ модуль гладкости функции *f(z)* в $H_p(-\infty,\infty)$, т.е.

$$\omega(\delta;f;y)_{H_p}=\sup_{|h|\le\delta}\left\|\Delta_h^k f(x+iy)\right\|_{H_p},$$

$$\Delta_h^k f(x+iy)=\sum_{m=0}^{k}(-1)^{k-m}\binom{k}{m}f(x+mh+iy),$$

$$A_\sigma(y;f)_{H_p}=\inf_{Q_\sigma}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x+iy)-Q_\nu(x+iy)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

Теорема 4.8. Пустъ $f(x+iy)\in H_P(-\infty;\infty),0<p\le\infty$ и $f(x)\in L_P(-\infty;\infty)$ её граничная функция. Тогда:

$$\omega_k\left(\frac{1}{\sigma};f;y\right)_{H_P}\le\frac{C(k)}{\sigma^k}\sum_{\nu=0}^{[\sigma]}(\nu+1)^{k-1}A_\nu(f)_{L_P},1\le p\le\infty, \qquad (11)$$

$$y>0,k=1,2,,...;$$

$$\omega_k^P\left(\frac{1}{\sigma};f;y\right)_{H_P}\le\frac{C(k,p)}{\sigma^k}\left\{\sum_{\nu=0}^{[\sigma]}(\nu+1)^{kp-1}A_\nu^p(f)_{L_P}\right\}^{\frac{1}{p}}, \qquad (12)$$

$$0<p<1,y>0$$

где $A_\sigma(f)_{L_P}$ - наилучшее приближение граничной функции *f(x)* целыми функциями $Q_\sigma(x)$ степени $\le\sigma$ в $L_P(-\infty;\infty)$.

Как было выше отмечено, что если заданы наилучшие приближение функции, то можно рассматривать вопрос об уклонении функции от некоторых средних интегралов Фурье (а также можно судить о суммируемости интегралов Фурье) в зависимочти от них.

Этому вопросу посвящена глава V, §1. Следует отметить, касающийся этого вопроса результат С.М.Никольского (см. [1], стр.360) М.Ф.Тимана [14], Б.И Голубова [126], [139-142]. Пономаренко [91] и др.

Автором установлено следующее (см.[90], [138]).

Теорема 5.1. Если функция $f(x)\in L_p(-\infty;\infty)$, то для любого $\alpha>0$, при $y\to\infty$ имеет место неравенства:

1. $$\left\|\sigma_\alpha(f;y;x)-f(x)\right\|_{L_p}\le C_1y^{-1}\sum_{m=1}^{[y]}A_{m-1}(f)_{L_p}, \quad \alpha\ge1 \qquad (13)$$

2. $$\left\|\sigma_\alpha(f;y;x)-f(x)\right\|_{L_p}\le C_2y^{-2}\sum_{m=1}^{[y]}([y]-m+1)^{\alpha-1}A_{m-1}(f)_{L_p}, \quad \alpha<1 \qquad (14)$$

где

$$\sigma_\alpha(f;y;x)=\frac{1}{\pi}\int_0^y\left(1-\frac{u}{y}\right)^\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos u(x-t)dtdu,$$

среднее Чезаро порядка α>0. Здесъ и в дальнейшем C_k - абсолютная константа.

Теорема 5.2. Если функция $f(x)\in L_p(-\infty;\infty)$ $1\le p\le\infty$, то при $0<y<1$ имеет место неравенство.

$$\|R(f;y;x)-f(x)\|_{L_p}\le C_3\omega\left(\sqrt{y}\ ;f\right)_{L_p},$$

где

$$R(f;y;x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}t^{-yu^2}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{iu(x-t)}dtdu$$

среднее Гаусса-Вейеррштрасса, которое тесно связано с уравнениями математической физики (уравнением теплопроводности, диффузии и др.).

Методы теории приближений оказываются плодотворными для исследования решений дифференциальных и интегральных уравнений, а также при находжении их решений (см. монографию Дзядыка В.К. [100] и там библиографию).

В работах С.М.Никольского [100], [102] Дзядыкова В.К. [100], [103], М.Ф.Тимана [96], [14], [104], Горбайчука [105] и др. указаны методы нахождения решения и исследованы их свойства.

Оценки для решений некоторых дифференциальных уравнений в частных производных от их граничных значений получены в работах М.Ф.Тимана [14] [96] [104] , С.Каниева [106] , В.И. Горбайчука [105] и др.

В параграфе 2 главы V рассматриваются отклонения решений уравнения Лапласса, уравнения теплопроводности (диффузии) и уравнения Шредингера от их граничных значений в зависимости убывания к нулю либо от модуля гладкости функции, либо от наилучших приближений в пространствах $L_p(R_n)$, $1\le p\le\infty$, $R_n=\{-\infty\le x_k\le\infty,\ k=1,2,3,\dots,n\}$.

Рассматриваются следующие задачи:

1) Задача Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta U+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

$$\Delta U=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\ , \qquad (15)$$

$$U(x_1,\ldots,x_n;y)_{y=0}=f_1(x_1,\ldots,x_n)\ , \qquad (16)$$

в полупространстве $R_{n+1}=\{-\infty<x_i<\infty,\quad y>0\quad i=1,2,\cdots,n\}$

2) Задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\Delta V\ , \qquad (17)$$

$$V(x_1,\ldots,x_n;t)\,|_{t=0}=f_2(x_1,\ldots,x_n), \qquad (18)$$

в полупространстве $R_{n+1}=\{-\infty<x_i<\infty, i=1,\cdots,n\}$ где $f_1(x_1,\ldots,x_n)$ и $f_2(x_1,\ldots,x_n)$-заданные функции.

3) Задача Коши для уравнений Шредингера

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Delta W+hi\frac{\partial W}{\partial t}=0, \qquad \hbar=const,\quad m=cons \qquad (19),$$

с начальным условием:

$$W(x_1;\ldots;x_n;t)\big|_{t=0}=f_3(x_1,\ldots,x_n) \qquad (20)$$

в полупространстве $R_{n+1}=\{-\infty<x_k<\infty,\ t>0,\ k=1,2,\ldots,n\}$, где f_1, f_2, f_3 заданные функции. Обозначим через $R_y(u_1, f_1)$, и $R_t(u_i, f_i)$, $i=2,3$ отклонения решений уравнений (15) и (17), (19) соответственно от их заданных значений (16) и (18), (20) в $L_p(R_n)$, т.е.

$$R_s(u_i,f_i)=\|u_i-f_i\|_{L_p(R_n)}=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}|u_i-f_i|^p\,dx_1\ldots dx_n\right\}^{\frac{1}{p}},\ s=y,t;\quad i=1,2,3.$$

Известно, что (см.[109], стр.402 и [110] стр.179) при $p=\infty$, $y\to 0$, $R_y(u_1, f_1)\to 0$ и $t\to 0$, $R_t(u_i, f_i)\to 0$, $i=2,3$.

Естественно, возникает вопрос, каковы оценки для величин $R_y(u_1, f_1)$, и $R_t(u_i, f_i)$ в зависимости от свойств функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Следующие теоремы дают ответ на этот вопрос.

Теорема 5.7. Если функция $f_1(x_1,\ldots,x_n)\in L_p(R_n);\ \ 1\le p\le\infty$, то при $0<y<1$ имеет место неравенство

$$R_1(u;f;y)\le C(n)\left\{y\sum_{x=0}^{\left[\frac{1}{y}\right]}\ \sum_{i=1}^{n}A_{\nu}^{1}(f_1)_{Lp}+y^{\frac{1}{n}}A_{0,\infty}^{(i)}(f_1)_{Lp}\right\}\ , \qquad (21)$$

гже $A_{\delta}^{(i)}(f)_{Lp}$- частные наилучшие приближения функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ в $L_p(R_n)$ целыми функциями $Q(x_1,\ldots x_n)$ степени по переменной x_i.

Теорема 5.9. Если функция $f(x_1,\ldots,x_n)\in L_p(R_n)$; $1\le p\le\infty$, то имеет место неравенство:

$$R_2(V;\, f_2;t)\le C(n)t^{\frac{1}{2}}\sum_{V=0}^{\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right]}\sum_{i=1}^{n}A_V^{(i)}(f_2)_{L_p}\,. \tag{22}$$

Теорема 5.10. Если функция $f_3(x_1,\ldots,x_n)\in L_p(R_n)$; $1\le p\le\infty$ то при 0<t<1 имеет место неравенство:

$$R_3(W;\, f_3;t)=\left\|W(x_1;\ldots;x_n;t)-f_3(x_1,\ldots,x_n)\right\|_{L_p}\le C(h,m,n)\omega\left(\sqrt{t},\ldots,\sqrt{t};\, f\right)_{L_p} \tag{23}$$

Некоторые вопросы касающийся свойствам функций в пространствах L_p, $1\le p<\infty$, связанные уравнением типа (15), (17), (19) рассмотрены в работах Тухтасинова М. (см. [179], с. 22-25, 36-41, 126-130).

В § 2 главы V, кроме этих оценок, даются ещё оценки через польный модуль непрерывности функции в $L_p(R_n)$.

Отметим, что теорема 5.7 при *n*=1 доказан М.Ф.Тиманом [14], [104].

Из вышеприведённых теорем получим следующее следствие.

Следствие 5.5. Если функция $f_k(x_1,\ldots,x_n)$, $k=1,2$ удовлетворяет условия

$$A_\nu^{(i)}(f_k)=O\left(\frac{1}{\nu+1}\right),\quad k=1,2,\qquad i=1,2,\ldots,n\,,$$

то

$$R_1(u;\, f_1;y;)=O\left(y^{\frac{1}{n}}\ln\frac{1}{y}\right),\quad 0<y<1;$$

$$R_2(V,\, f_2,t)=O\left(t^{\frac{1}{2}}\ln\frac{1}{\sqrt{t}}\right),\quad 0<t<1$$

Некоторые вопросы связанный исследованием свойства функций, являющихся решением тех или иных дифференциальных уравнений, в определеных функциональных пространствах (например, в пространствах $C(0,T)$, $L_2(0,T)$) рассмотрен М. Тухтасиновым в [179], (см.[179], с.90-130).

ГЛАВА I
НАИЛУЧШЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ВСЕЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

§ 1. Вложения $L_p(-\infty,\infty),\quad 0<p<\infty$ классов функций

Пусть $L_p(-\infty,\infty)$ означает пространство всех измеримых на $(-\infty,\infty)$ функций, для которых

$$\|f(x)\|_{L_p}=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}<\infty,\ 0<p<\infty, \tag{1.1}$$

а при $p=\infty$

$$\|f(x)\|_{L_\infty}=vrai\sup_{-\infty<x<\infty}|f(x)|<\infty$$

Вопросом вложения различних классов функций посвящено много работ (см. [1], [2], [9], [10], [15], [16], [17], [130]). В этих работах в основном рассмотрены периодические функции и функции на конечном отрезке.

Функции, заданные на всей вещественной оси, сравнительно мало изучены. В отличие от функций, заданных на конечном отрезке для двух различных p и q классы $L_p(-\infty,\infty)$ и $L_q(-\infty,\infty)$ не содержатся один в другом.

Так как периодические функции, не являются не итегрируема на всей вещественной оси, то ниже полученные теоремы не являются обобщением соответствующих теорем.

В 1961 году М.Ф.Тиманом в работе [4] установлено следующее:

Если $f(x)\in L_p(-\infty,\infty),\quad 1\le p<\infty$ и для $q>p$

$$\int_0^\infty A_0^k(f)(\sigma+1)^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)k-1}d\sigma<\infty,\quad k<\min(2q)\ ,$$

то $f(x)\in L_q(-\infty,\infty)$ и справедливо неравенство

$$A_\sigma(f)_{L_q}\le C_{p,q}\left\{A_\sigma(f)_{L_p}(\sigma+1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}+\left(\int\limits_0^\infty A_t^k(f)_{L_p}(t+1)^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)k-1}dt\right)^{\frac{1}{k}}\right.,$$

где $A_\delta(f)$ - наилучшее приближение функции $f(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ целыми функциями $Q_\sigma(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ конечной степени $\le\sigma$ в пространствах $L_p(-\infty,\infty)$, т.е.

$$A_\sigma(f)=\inf_{Q_\sigma(x)}\|f(x)-Q_\sigma(x)\|_{L_p}$$

В этом параграфе рассмотрим вложения некоторых классов функций, заданных на всей вещественной оси.

Теорема 1.1. Если $f(x)\in L_p(-\infty,\infty),\ \ 0<p<\nu$ и выполнено условие

$$M=\sum_{n=1}^\infty n^{\frac{\nu}{p}-2}A_n^\nu(f)_{L_p}<\infty, \tag{1.2}$$

то $f(x)\in L_\nu(-\infty,\infty)$ и справедливо неравенство

$$\|f(x)\|_{L_\nu}\le C\left\{\|f(x)\|_{l_p}+M^{\frac{1}{\nu}}\right\}, \tag{1.3}$$

где C - абсолютная константа не зависит от f. В дальнейшем $C(a_1,...,a_k)$ означают константы, зависящие только от $a_1,...,a_k$.

Теорема 1.2. Если $f(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ и при $0<p\le\nu<\infty$ для некоторого натурального k выполненного условие

$$\sum_{n=1}^\infty n^{k\nu+\frac{\nu}{p}-2}A_n^\nu(f)_{L_p}<\infty, \tag{1.4}$$

то функция $f(x)$ почти всюду на $(-\infty,\infty)$ совпадает с функцией, имеющей абсолютно непрерывную производную порядке $k-1$, а производная $f^{(k)}(x)$ принадлежит пространству $L_\nu(-\infty,\infty)$ т.е. $f^{(k)}(x)\in L_\nu(-\infty,\infty)$.

Отметим, что при предположении $\nu=p,\ \ 1<p<2$ теорема 1.2 доказана в [4].

Приведённая выше теорема 1.1 при $1<p\le\nu$ была доказана автором в [11] в терминах модуля непрерывности, используя понятие равно измеримости функции. Здесь она доказывается

в терминах наилучших приближений, не используя равно измеримости функции.

Наряду с теоремой 1.1 доказывается теорема 1.2, являющаяся усилением одного результата из книги [12], с.378, доказанного в случае $1 \le p \le \nu \le \infty$.

Из теоремы 1.2 вытекает следующее:

Следствие 1.1. Если функция $f(x) \in L_p(-\infty, \infty), \quad p > 0$ при некотором m удовлетворяет условию

$$\omega_m(t;\, f)_{L_p} = 0(t^s), \quad s \le m \ , \tag{1.5}$$

то функция $f(x)$ почти всюду на $(-\infty, \infty)$ совпадает с функцией, имеющей абсолютную непрерывную производную $f^{(k-1)}(x)$, $0 \le k < -\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\nu}\right)$ (k - натуралное) и производную $f^{(k)}(x)$ порядка k, принадлежащую пространству $L_\nu(-\infty, \infty) \quad (0 < p \le \nu < \infty)$. В самом деле, так как

$$A_\sigma(f)_{L_p} \le C\omega_m\left(\frac{1}{\sigma}\right)_{L_p}, \quad 0 < p \le \infty,$$

то из условия (1.5) получим, что

$$A_\sigma(f)_{L_p} = 0\left(\frac{1}{\sigma^s}\right) . \tag{1.6}$$

Ясно, что ряд (1.4) в условии (1.6) сходится при $0 \le k < S - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\nu}\right)$. Теперь, применяя теорему 1.2, получим утверждение следствия 1.1. Если выполняется условие (1.6), то из теоремы 1.4. (см. ниже §2) следует оценка

$$A_n\left(f^{(k)}\right)_{L_q} = 0\left(n^{k+\frac{1}{p}-\frac{1}{\nu}-s}\right) \qquad 0 < p \le \nu < \infty, \quad k < s - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\nu}\right).$$

Приведём ещё одну теорему вложения из класса $L_p(-\infty, \infty)$ в класс $L^\nu\varphi(L^\nu) \quad (\nu > p)$ содержащую в себе теоремы 1.1, 1.2 при $1 \le p < \nu < \infty$Здесь класс $L^\nu\varphi\left(L^\nu\right)$ означает совокупность всех функций $f(x)$, заданных на $(-\infty, \infty)$ таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, f(x)|^\nu \varphi\left(f^{\,\nu}(x)\right) dx < \infty, \qquad 0 < \nu < \infty \ ,$$

где $\varphi(t)$ некоторая неубывающая функция.

Теорема 1.3. Пусть $f(x)\in L_p(-\infty,\infty),\ \ 1\le p<\nu$ и $\varphi(u)$ - чётная, неотрицательная, неубывающая на $(0,\infty)$ функция, удовлетворяющая при некотором $\alpha\in(0,1)$ условию

$$\sum_{k=n}^{\infty}\varphi(k)k^{\alpha-2}=0\left\{\varphi(n)n^{\alpha-1}\right\}\ . \tag{1.7}$$

Тогда, если

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{m\nu+\frac{\nu}{p}-2}\varphi(n)A_n^{\nu}(f)_{L_p}<\infty\ , \tag{1.8}$$

то функция $f(x)$ почти всюду на $(-\infty,\infty)$ совпадает с функцией, имеющей абсолютно непрерывную производную порядка $m-1$ а производная $f^{(m)}(x)$ принадлежит пространству $L^{\nu}\varphi\left(L^{\nu}\right)$ т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f^{(m)}(x)\right|^{\nu}\varphi\left(\left|f^{(m)}(x)\right|^{\nu}\right)dx<\infty$$

Теорема 1.3. доказывается с помощью следующих лемм.

Лемма 1.1. Пусть $\Phi(u)$ неотрицательная и не убывает на $[0,\infty)$. Тогда, если неотрицательная интегрируемая на $(-\infty,\infty)$ функция $\psi(u)$ не возрастает на $[0,\infty)$ и

$$\int_{0}^{\infty}\psi(u)\Phi\left(\frac{1}{u}\right)du<\infty, \tag{1.9}$$

то

$$\int_{0}^{\infty}\psi(u)\Phi(\psi(u))du<\infty \tag{1.10}$$

Лемма 1.2. Пусть $f(x)\in L_p(-\infty,\infty),\ \ 1\le p<\nu<\infty$ и функция $\varphi(t)$ из теоремы 1.3. Тогда, если

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{\nu}{p}-2}\varphi(n)\omega^{\nu}\left(\frac{1}{n};\,f\right)_{L_p}<\infty\ , \tag{1.11}$$

то

$$\int_{0}^{\infty}\left|f(x)\right|^{\nu}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)dx<\infty\ .$$

Лемма 1.3. Условие

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{\nu}{p}-2}\varphi(n)\omega^{\nu}\left(\frac{1}{n};\,f\right)_{L_p}<\infty, \tag{1.12}$$

где $\omega(\delta; f)_{L_p} = \sup\limits_{0<h\leq\delta}\left\| f(x+h) - f(x)\right\|_{L_p}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\nu}{p}-2}\varphi(n)A_n^{\nu}(f)_{L_p} < \infty \qquad (1.13)$$

эквиваленты.

Отметим, что лемма 1.1 для функции $\psi(u)$ заданных на $(0,1]$ установлена в [6], а лемма 1.3 для периодических функций установлена в [131].

Доказательство теоремы 1.1. Не нарушая общности, предположим, что у функции $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ существует преобразование Фурье $F(x)$. В самом деле, что если функция $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p \leq 2$, то всегда существует преобразование Фурье (см.[19]), а при $p > 2$ вместо функции $f(x)$ рассматривается функция

$$f(x)\frac{\sin\delta x}{\delta x} \qquad \text{(см. [4], [14]).}$$

Пусть теперь

$$Q_{2^N-1}(x) = \int_{-2^N-1}^{2^N-1} F(u)e^{iux}du\ . \qquad (1.14)$$

Тогда

$$\left\|Q_{2^N-1}(x)\right\|_{L_p}^p = \left\|\sum_{\nu=1}^{N}\left\{\int_{-(2^\nu-1)}^{2^\nu-1} F(u)e^{inx}du\right\}\right\|_{L_p}^p = \left\|\sum_{\nu=1}^{N}\left\{\int_{-(2^\nu-1)}^{2^\nu-1} F(u)e^{inx}du - \int_{-(2^{\nu-1}-1)}^{2^{\nu-1}-1} F(u)e^{inx}du\right\}\right\|_{L_p}^p . \qquad (1.15)$$

Обозначим

$$\lambda_\nu(x) = \int_{-(2^\nu-1)}^{2^\nu-1} F(u)e^{inx}du - \int_{-(2^{\nu-1}-1)}^{2^{\nu-1}-1} F(u)e^{inx}du .$$

Возьмём $q = [p]+1$ тогда имеем

$$\left\|Q_{2^N-1}(x)\right\|_{L_p}^p = \left\|\sum_{\nu=1}^{N}\lambda_\nu(x)\right\|_{L_p}^p = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{\nu=1}^{N}\lambda_\nu(x)\right|^p dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\left|\sum_{\nu=1}^{N}\lambda_\nu(x)\right|^{\frac{p}{q}}\right]^q dx \leq \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{N}\left|\lambda_\nu(x)\right|^{\frac{p}{q}}\right)^q dx \qquad (1.16)$$

Обозначим

$$\left|\lambda_\nu(x)\right|^{\frac{p}{q}} = \mathrm{E}_\nu(x) \geq 0\ . \qquad (1.17)$$

Неравенство (1.16) представим в следующем виде

$$\left\| Q_{2^N-1}(x) \right\|_{L_p}^{p} \le \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{N} E_\nu(x)^q \, dx \right) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{\nu_1=1}^{N} E_{\nu_1}(x) \sum_{\nu_2=1}^{N} \ldots \sum_{\nu_q=1}^{N} E_{\nu_q}(x) \right\} dx \sum_{\nu_1=q}^{N} \ldots \sum_{\nu_q=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\nu_1}(x) E_{\nu_2}(x) \ldots E_{\nu_q}(x) dx \qquad (1.18)$$
.

Запишем равенство

$$E_{\nu_1}(x)E_{\nu_2}(x)\ldots E_{\nu_{\grave{a}}} =$$
$$= \left\{ \left(E_{\nu_1}(x)E_{\nu_2}(x)\right) \cdot \left(E_{\nu_1}(x)E_{\nu_3}(x)\right) \ldots \left(E_{\nu_1}(x)E_{\nu_i}(x)\right) \cdot \left(E_{\nu_2}(x)E_{\nu_3}(x)\right) \ldots \left(E_{\nu_2}(x)E_{\nu_i}(x)\right) \cdot \left(E_{\nu_{i-1}}(x)E_{\nu_i}(x)\right) \right\}^{\frac{1}{i-1}} =$$
$$= \prod_{i,\, j=1}^{q} \left[E_{\nu_2}(x) \cdot E_{\nu_j}(x) \right]^{\frac{1}{q-1}} \qquad (i < j) \;, \qquad (1.19)$$

где справа $s = \frac{1}{2} q(q-1)$ произведений.

Применяя обобщённые неравенства Гельдера с показателем $s = \frac{1}{2} q(q-1)$ получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_{\nu_1}(x)E_{\nu_2}(x)\ldots E_{\nu_2}(x) dx \le \prod_{i<j,\, i,\, j=1}^{q} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(E_{\nu_i}(x) E_{\nu_j}(x) \right)^{\frac{q}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{s}} . \qquad (1.20)$$

В силу обозначения (1.17) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(E_{\nu_i}(x) E_{\nu_j}(x) \right)^{\frac{q}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \lambda_{\nu_i}(x) \lambda_{\nu_j}(x) \right|^{\frac{p}{2}} dx \qquad (1.21)$$

Применяя неравенства Гельдера с показатели $\alpha = \frac{p+2}{2}$ находим, что

$$J_{i,j} = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \lambda_{\nu_i}(x) \lambda_{\nu_j}(x) \right|^{\frac{p}{2}} dx \le \left\| \lambda_{\nu_i}(x) \right\|_{L_{\frac{\alpha}{p}}}^{\frac{p}{2}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \lambda_{\nu_j}(x) \right|^{\frac{p\alpha^1}{\alpha}} dx \right\}^{\frac{1}{\alpha^1}} =$$
$$= \left\| \lambda_{\nu_i}(x) \right\|_{L_{\frac{\alpha}{p}}}^{\frac{p}{2}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \lambda_{\nu_j}(x) \right|^{\frac{p\alpha^1}{\alpha} - \beta} \left| \lambda_{\nu_j}(x)^{\beta} dx \right| \right\}^{\frac{1}{\alpha^1}} \qquad (1.22)$$
,

где $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^1} = 1, \quad \beta = \frac{r-1}{2}$.

Снова применяя неравенство Гельдера с показателем $j = \frac{2r}{r+1}$ и $j^1 = \frac{2r}{r-1} = \frac{r}{\beta}$, получим

$$J_{i,j} \le \left\| \lambda_{\nu_j}(x) \right\|_{L_{\frac{\nu p}{2}}}^{\frac{p}{2}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \lambda_{\nu_j}(x) \right|^{(p\alpha^1 - 2\beta)\frac{\alpha}{2}} dx \right\} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \lambda_{\nu_j}(x) \right|^{2} dx \right\}^{\frac{p}{r\alpha^1}} =$$

$$=\left\|\lambda_{v_i}(x)\right\|_{L\frac{\alpha p}{2}}^{\frac{p}{2}}\cdot\left\|\lambda_{v_j}(x)\right\|_{L(2p-2\beta}^{\frac{p}{2}-\frac{\beta}{\alpha^1}}\cdot\left\|\lambda_{v_j}(x)\right\|_{l_r}^{\frac{\beta}{\alpha^1}}\cdot\left\|\lambda_{v_j}(x)\right\|_{L(2p-2\beta)\frac{\alpha}{2}}^{\frac{p}{2}-\frac{\beta}{\alpha^1}}\cdot\left\|\lambda_{v_j}(x)\right\|_{L_r}^{\frac{\beta}{\alpha^1}}$$

В дальнейшем нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1.А. (см. [12], с.248). Если $0<p\le p^1\le\infty$, то для целой функции $Q_\delta(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ степени $\le\delta$ справедливо неравенство

$$\left\|Q_\delta(x)\right\|_{L_{p^1}}\le\left(\frac{q_0\delta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p^1}}\left\|Q_\delta(x)\right\|_{L_p}, \qquad (1.23)$$

которое называют неравенства С.М.Никольского.

Отметим, что для $1\le p\le\infty$ неравенства (1.23) впервые получена С.М.Никольским [129], а для $1\le p\le 2$ И.И.Ибрагимовым [128].

Лемма 1.В. (см. [4]) Если $f(x)\in L_p(-\infty,\infty),\ \ 1<p<\infty$ и имеет преобразования Фурье $F(x)$, то

$$\left\|f(x)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\delta}^{\delta}F(u)e^{inx}du\right\|_{L_p}\le M(p)A_\delta \qquad (1.24)$$

Так как функция, определенная равенством

$$Q_{2^N-1}(x)=\int_{-(2^N-1)}^{2^N-1}F(v)e^{iux}du$$

является целой функцией (см. [12], с.211-212 и [20], с.179-180. Это доказана для функции $F(u)\in L_2(-2^{N-1},2^{N-1})$, а для $F(u)\in L_p(-2^{N-1},2^{N-1})\ \ 1<p<\infty$, доказывается с помощью неравенства Гельдера степени (2^N-1)), то на основании леммы I.A. находим, что

$$J_{i,j}\le C2^{v_i\frac{p}{\alpha}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{rp}\right)}\left\|\lambda_{v_i}(x)\right\|_{L_r}^{\frac{p}{2}}\cdot\left\|\lambda_{v_j}(x)\right\|_{L_r}^{\frac{p}{\alpha^1}}2^{v_j\left(\frac{p}{\alpha}-\frac{p}{\alpha^1}\right)\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{\alpha}{(\alpha^1p-\alpha\beta)j}\right)}\cdot\left\|\lambda_{v_j}(x)\right\|_{L_r}^{\frac{p}{\alpha}-\frac{p}{\alpha^1}}=$$

$$=c\cdot 2^{v_i\frac{p}{2r}}\cdot 2^{-\frac{v_i}{\alpha}}\cdot\left\|\lambda_{v_i}(x)\right\|_{L_2}^{\frac{p}{\alpha}}\cdot 2^{\frac{v_jp}{2r}}\cdot 2^{-\frac{v_i}{2}}\left\|\lambda_{v_j}(x)\right\|_{L_2}^{\frac{p}{2}}\ . \qquad (1.25)$$

В силу леммы I.B и учитывая, что

$$C\cdot 2^{v\frac{p}{2r}}2^{-\frac{v}{2}}A_{2^{v-1}-1}^{\frac{p}{2}}(f)_{L_r}\le\left(\sum_{k=2^{v-1}}^{2^{v-1}-1}A_k^p(f)k^{\frac{p}{2}-2}\right)^{\frac{1}{2}}=\delta_v^{\frac{1}{2}}$$

будем иметь

$$J_{i,j} \le C\delta_{v_i}^{\frac{1}{\alpha}}\delta_{v_j}^{\frac{1}{\alpha}} 2^{v_i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)} 2^{v_j\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)} = C\delta_{v_i}^{\frac{1}{\alpha}}\delta_{v_j}^{\frac{1}{\alpha}} 2^{-(v_i-v_j)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)} \tag{1.26}$$

$$V_j = 1,2,\ldots;\quad v_i < v_j;\quad \delta_1 = A_0(f)_{L_2}.$$

Теперь из неравенств (1.20), (1.21), (1.22), (1.25), (1,26) вытекает, что (см. также (1.19))

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_{v_1}(x)E_{v_2}(x)\ldots E_{v_q}(x)dx \le C(p,r)\prod_{i,j=1\, i<j}^{q}\left\{\delta_{v_i}^{\frac{1}{\alpha}}\delta_{v_j}^{\frac{1}{\alpha}} 2^{-(v_i-v_j)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)}\right\}^{\frac{1}{S}} =$$

$$= C(p,r)\prod_{i=1}^{q}\delta_{v_i}^{\frac{1}{q}}\prod_{j=1}^{q} 2^{-\frac{|v_j-v_i|\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)}{S}}. \tag{1.27}$$

Из (1.18) и (1.27) имеем

$$\left\|Q_{2^N-1}(x)\right\|_{L_p}^{p} \le C(p,r)\sum_{v_1=1}^{N}\cdots\sum_{v_q=1}^{N}\prod_{i=1}^{q}G_{v_i}^{\frac{1}{q}}\prod_{j=1}^{q}2^{-\frac{1}{S}(v_j-v_i)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)}.$$

Применяя обобщённое неравенство Гельдера с показателем q к правой части последнего неравенства, будем иметь

$$\left\|Q_{2^N-1}(x)\right\|_{L_p}^{p} \le C(p,r)\prod_{i=1}^{q}\left\{\sum_{v_1=1}^{N}\cdots\sum_{v_q=1}^{N}\prod_{i=1}^{q}G_{v_i}^{\frac{1}{q}}\prod_{j=1}^{q}2^{-\frac{|v_j-v_i|(\alpha-\alpha_i)}{\alpha(q-1)}}\right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$= C(p,r)\prod_{i=1}^{q}\left\{\sum_{v_i=1}^{N}G_{v_i}\sum_{v_i=1}^{N}\cdots\sum_{v_i=1}^{N}\cdot\sum_{v_i+1}^{N}\cdots\sum_{v_q=1}^{N}\prod_{j=1}^{q}2^{-\frac{|v_j-v_i|}{\alpha(q-1)}}\right\}^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le C(p,r)\prod_{i=1}^{q}\left\{\sum_{v_i=1}^{N}G_{v_i}\sum_{v_1=\infty}^{\infty}\cdots\sum_{v_q=-\infty}^{\infty}\prod_{j=1}^{q}2^{-\frac{|v_j-v_i|(\alpha-1)}{\alpha(q-1)}}\right\}^{\frac{1}{q}} \le C(p,r)\prod_{i=1}^{q}\left\{\sum_{v_1=1}^{N}G_{v_j}\sum_{v=-\infty}^{\infty}2^{-\frac{v(\infty-1)}{\infty(q-1)}}\cdots\sum_{v=-\infty}^{\infty}2^{-\frac{v(\infty-1)}{\infty(q-1)}}\right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$= C(p,r)\prod_{i=1}^{q}\left\{\sum_{v_i=1}^{N}G_{v_i}\left(\sum_{v=-\infty}^{\infty}2^{-\frac{v(v-\alpha)}{\alpha(q-1)}}\right)^{q-1}\right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$= C(p,r)\prod_{i=1}^{q}\left\{A(\alpha,q)\sum_{v_i=1}^{N}G_{v_i}\right\}^{\frac{1}{\alpha}} \le C(p,r)\sum_{v=1}^{n}G_v. \tag{1.28}$$

Так как

$$G_v = \sum_{k=2^v-2}^{2^{v-1}-1}A_k^p(f)_{L_2}k^{\frac{p}{2}-\alpha},$$

то из последнего неравенства получим

$$\left\|Q_{2^N-1}(x)\right\|_{L_p}^p \le C(p,r)\left\{\sum_{\nu=2}^{N}\sum_{k=1^{\nu-2}}^{2^{\nu-1}-1} A_k^p(f)_{l_\alpha} k^{\frac{p}{}-} + \|f(x)\|_{L_2}^p \le C(p,r)\left\{\sum_{k=1}^{2^N} k^{\frac{p}{}-} A_k^p(f)_{L_2} + \|f\|_{L_2}^p\right.\right.$$

Отсюда при $N \to \infty$ получим утверждение теоремы при $1 < p < \infty$ $(1 < 2 < p < \infty$.

Теперь рассмотрим случай $0 < p \le 1$. Отметим один известный факт.

Лемма 1.3. (см. [21]). Для любой функции $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ $0 < p \le 1$ существует целая функция $Q_\delta(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ степени $\le \delta$ наилучших приближений, т.е.

$$\|f(x) - Q_\delta(x)\|_{L_p} = A_\delta(f)_{L_p}.$$

(По поводу этой леммы см. [12], с.61).

Пусть $Q_\delta(x) \in L_p(-\infty, \infty),\ \ 0 < p \le 1$ целая функция степени $\le \delta$, осуществляющая наилучшие приближения функции $f(x)$ $L_p(-\infty, \infty)$, т.е.

$$\|f(x) - Q_\delta(x)\|_{L_p} = A_\delta(f)_{L_p} . \tag{1.29}$$

Тогда имеем следующее представление (см. условие [1.2])

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_{2^k}(x) = Q_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[Q_{2^k}(x) - Q_{2^{k-1}}(x)\right] , \tag{1.30}$$

где сходимость понимается в смысле $L_p(-\infty, \infty),\ \ 0 < p < 1$. Отметим, что

$$\left\|Q_{2^n}(x) - Q_{2^{n-1}}(x)\right\|_{L_p}^p \le 2A_{2^{k-1}}^p(f)_{L_p}, \quad 0 < p \le 1 . \tag{1.31}$$

На основании леммы I.A. при $0 < p < \nu \le 1$ получим, что (см. (1.31) и (1.29)).

$$\|f(x)\|_{L_\nu}^\nu \le \|Q_1(x)\|_{L_\nu}^\nu + \sum_{k=1}^{\infty}\left\|Q_{2^k}(x) - Q_{2^{k-1}}(x)\right\|_{L_\nu}^\nu \le \|Q(x)\|_{L_p}^\nu + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k\left(\frac{}{p}-1\right)}\left\|Q_{2^n}(x) - Q_{2^{n-1}}(x)\right\|_{L_p}^\nu \le$$

$$\le C(\nu, p)\left\{\|f(x)\|_{L_p}^\nu + A_1^\nu(f)_{L_p} + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k\left(\frac{\nu}{p}-1\right)} A_{2^{k-1}}^\nu(f)_{L_p}\right\} \le C(\nu, p)\left\{\|f(x)\|_{L_p}^\nu + \sum_{h=1}^{\infty} h^{\frac{\nu}{p}-2} A_h^\nu(f)_{L_p}\right\},$$

т.е. утверждение теоремы при $0 < p < \nu \le 1$. При $0 < p \le 1 < \nu$ доказывается также как в случае $0 < p < \nu \le 1$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.2. В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1.Д. Если $Q_\delta(x)$ - целая функция степени $\le\delta$, то для производной $Q_\delta^{(k)}(x)$ порядка $k=1,2,3,\ldots$ имеет место неравенство

$$\left\|Q_\delta^{(k)}(x)\right\|_{L_p}\le C_p\cdot\delta^k\left\|Q_\delta(x)\right\|_{L_p},\quad 0<p\le\infty\ , \tag{1.32}$$

где $C_p=1$ при $1\le p\le\infty$ и $C_p=C(p)$ при $0<p<1$. Отметим, что для случая, когда $Q_\delta(x)\in B_\delta$ (B_δ - класс целых функций степени $\le\delta$ ограниченных на всей вещественной оси) неравенство (1.32) в первые установлена С.Н.Бернштейном для p=∞ (см. [40], стр. 442-445), для случая $1\le p<\infty$ С.М.Никольским (см. [12], стр. 232), а для $0<p<1$ автором [22] (и для k нецелая).

Для доказательства теоремы сначала рассмотрим случай $1<p<\infty$. Рассмотрим ряд

$$Q_0^{(k)}(x)+\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{Q_{2^{\nu+1}}^{(k)}(x)-Q_{2^\nu}^{(k)}(x)\right\} \tag{1.33}$$

где

$$Q_\delta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\delta}^{\delta}F(u)e^{iux}du \tag{1.34}$$

и $F(x)$ преобразование Фурье функции $f(x)$. Относительно функции $F(x)$ проведем такие же рассуждения, как в доказательстве теоремы 1.1.

Так как $Q_\delta(x)$ является целой функцией степени δ, то в силу лемм 1.Д, 1.А и 1.В находим, что

$$\left\|Q_{2^{\nu+1}}^{(k)}(x)-Q_{2^\nu}^{(k)}(x)\right\|_{L_p}^p\le\left(2^{\nu+1}\right)^{kp}\left\|Q_{2^{\nu+1}}(x)-Q_{2^\nu}(x)\right\|_{L_p}^p\le C(p,r)2^{\nu\left(\frac{p}{r}-1\right)}A_{2^{\nu-1}}^p(f)_{L_2}2^{\nu kp}\le$$

$$\le C(p,r)\sum_{m=2^{\nu-2}}^{2^{\nu-1}}m^{kp+\frac{p}{2}-2}A_m^p(t)_{L_2},\qquad r<p\ . \tag{1.35}$$

Из неравенства (1.35) и из условий теоремы вытекает, что ряд (14) сходится в метрике $L_p(-\infty,\infty)$.

Далее, рассуждая также как в (см. [12], с. 347-348, 379), получим утверждение теоремы при $1<r<p<\infty$.

Рассмотрим случай $0<p<\nu\le1$. Покажем, что для $k=1,2,3\ldots$ существуют функции $\varphi_k(x)\in L_\nu(-\infty,\infty)$, такие, что $\varphi_k(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}Q_{2^\nu}^{(k)}(x)$ и

$\varphi_k(x) = f^{(k)}(x)$, где $\|f(x) - Q_0(x)\|_{L_p} = A_0(f)_{L_p}$. На основании лемм 1.Д и 1.А при $k = 1$ имеем

$$\left\|\frac{\Delta_h f(x)}{h} - \varphi_1(x)\right\|_{L_p}^{\nu} \le \left\|\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Delta h Q_{2^i}(x)}{h} - \sum_{i=0}^{\infty} Q_{2^i}(x)\right\|_{L_\nu}^{\nu} \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{\infty} 2^{\left(\frac{\nu}{p}-1\right)i} \left\|\frac{\Delta h Q_{2^i}(x)}{h} - Q_{2^i}(x)\right\|_{L_p}^{\nu} + C_p \sum_{i=N+1}^{\infty} 2^{i\nu} \cdot 2^{\left(\frac{\nu}{p}-1\right)i} \left\|A^{\nu}(f)\right\|_{L_p} \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{N} 2\left(\frac{\nu}{p} - 1\right) i \left\|\frac{\Delta h Q_{2^i}(x)}{h} - Q_{2^i}^1(x)\right\|_{L_p} + C(\nu, p) \sum_{m=N+1}^{\infty} m^{\frac{\nu}{p}-2+\nu} A_m^{\nu}(f)_{L_p} .$$

(1.36)

Так как по условию теоремы правая часть в (1.36) стремится к нулю при $N \ge N_0$ и при $h \to 0$, то

$$\varphi_1(x) = f^{(1)}(x).$$

Теорема доказана при $k = 1$. Для $k = 2,3\ldots$ доказывается методом индукции. При $k = 2,3\ldots$ доказательство проводится индуктивно.

Доказательство леммы 1.1.

Зафиксируем точку $u_0 \in (0, \infty)$, в которой $\psi(u_0) = C$ поскольку $\psi(u) \in L(0, \infty)$, то имеем

$$\infty > \int_0^{\infty} \psi(u) du > \int_0^{u_0} \psi(u) du = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{u_0}{k+1}}^{\frac{u_0}{k}} \psi(u) du \ge \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_0}{k(k+1)} \psi\left(\frac{u_0}{k}\right)$$

Отсюда вытекает, что

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{u_0}{k(k+1)} \psi\left(\frac{u_0}{k}\right) = 0(1), \qquad n \to \infty$$

$$\frac{u_0}{2n(2n+1)} \psi\left(\frac{u_0}{n}\right) n = 0(1),$$

$$\psi\left(\frac{u_0}{n}\right) = 0\left(\frac{n}{u_0}\right), \qquad n \to \infty ,$$

тогда $\psi(t) = O\left(\frac{1}{t}\right), \qquad t \to \infty$

или

$$\psi(t) < \frac{1}{t}, \qquad 0 < t \le t_0 < u_0 . \tag{1.37}$$

Теперь в силу (1.37) и из условия леммы находим, что

$$\int_0^{\infty}\psi(u)\Phi(\psi(u))du=\int_0^{t_0}\psi(u)\Phi(\psi(u))du+\int_{t_0}^{u_0}\psi(u)\Phi(\psi(u))du+\int_{u_0}^{\infty}\psi(u)\Phi(\psi(u))du\le$$
$$\le\int_0^{t_0}\psi(u)\Phi\left(\frac{1}{u}\right)du+\psi(t_0)\Phi(\psi(t_0))(u_0-t_0)+\Phi(\psi(u_0))\int_{u_0}^{\infty}\psi(u)du\le$$
$$\le\int_0^{\infty}\psi(u)\Phi\left(\frac{1}{u}\right)du+\psi(t_0)\Phi(\psi(t_0))(u_0-t_0)+\Phi(\psi(u_0))\int_0^{\infty}\psi(u)du<\infty$$

Лемма доказана.

Доказательство леммы 1.2. Пусть $f(x)$ равноизмеримая с функцией $g(x)$. Тогда для любой не отрицательной неубывающей функции $H(U)$ имеет место $(cm.\ [23],\ c.\ 333)$ неравенство
$$\int_{-\infty}^{\infty}H(f(t))dt\le\int_{-\infty}^{\infty}H(g(t))dt\,. \tag{1.38}$$

Пусты теперь функция $|f(x)|$ равноизмерима с функцией $F(z)=F(z,|f|)$. Тогда, применяя (1.38), получим
$$J_1=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^{\gamma}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)dx=2\int_0^{\infty}F^{\gamma}(z)\varphi\left(\frac{1}{z}\right)dz \tag{1.39}$$

Известно (см. [11]), что функция $F(z)$ не возрастает на $(0,\infty)$. Тогда
$$J_1=\int_0^1F^{\nu}(z)\varphi\left(\frac{1}{z}\right)dz+\int_1^{\infty}F^{\nu}(z)\varphi\left(\frac{1}{z}\right)dz\le\int_0^1F^{\nu}(z)\varphi\left(\frac{1}{z}\right)dz+F^{\nu-p}(z)\varphi(1)\varphi(1)\int_0^{\infty}F^{p}(z)dz\le$$
$$\le\int_0^1F(z)\varphi\left(\frac{1}{z}\right)dz+M(F,\varphi,p\nu)\|f\|L_p^p\le\sum_{n=1}^{\infty}F^{\nu}(z)\varphi\left(\frac{1}{z}\right)dz+M\|f\|L_p^p\le \tag{1.40}$$
$$\le C\sum_{n=1}^{\infty}F^{\nu}\left(\frac{1}{2h^n}\right)\varphi(2^n)\cdot2^{-n}M\|f\|L_p^p$$
Нам необходим следующий известный факт.

Лемма 1.E. (см. [11]). Для любого $n=1,2,\ldots$ имеет места неравенство
$$F\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\le18\sum_{k=0}^{n}2^{\frac{k}{p}}\omega\left(\frac{1}{2^k};f\right)L_p+F(1),\ \text{p>1}. \tag{1.41}$$
Рассмотрим случай $p>1$. Учитывая, что
$$2^{\frac{k}{p}}=2^{k\left(\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{\nu}\right)}2^{k\frac{\alpha}{\nu}},\quad 0<\alpha<1,\ \ 1<p<\nu$$
применяя неравенство Гельдера, получим

$$\left(F(1)+\sum_{k=0}^{n} 2^{\frac{k}{p}}\omega\left(\frac{1}{2^k};f\right)L_p+[F(x)]^{\upsilon}\right).\tag{1.42}$$

Теперь из неравенства (I.40), (I.41), (I.42) и на основании условия леммы (см I.19), получим

$$J_1 \le C\left\{[F(1)]^{\upsilon}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega^{\upsilon}\left(\frac{1}{2^k};f\right)L_p}{2^{k\left(\alpha-\frac{\upsilon}{p}\right)}}\sum_{n=k}^{\infty}2^{n(\alpha-1)}\varphi(2^n)+\right.$$

$$\left.+M\|f(x)\|_{L_p}^p \le C\left\{[F(1)]^{\upsilon}+\sum_{k=1}^{\infty}2^{k\left(\frac{\upsilon}{p}-1\right)}\varphi(2^k)\omega^{\upsilon}\left(\frac{1}{2^k;f}\right)L_p\right\}+M\|f(x)\|_{Lp}^p \le\right.$$

$$\le C\left\{[F(1)]^{\upsilon}+\sum_{m=1}^{\infty}m^{\frac{\upsilon}{p}-2}\varphi(m)\omega^{\upsilon}\left(\frac{1}{m};f\right)L_p\right\}+M\|f(x)\|_{Lp}^p<\infty$$

,

т. е. лемма доказана для $1<p<\upsilon<\infty$.

При $p=1$ вместо неравенства (1.41) используется неравенство

$$F\left(\frac{1}{2^n}\right)\le 7\cdot 2^k\omega\left(\frac{1}{2^k};f\right)_L.\tag{1.43}$$

Неравенство (1.43) установлено автором в [11]. Лемма 1.2 доказана полностью.

Доказательство леммы 1.3. Хорошо известное неравенство (см.[12], с.274)

$$A_{\sigma}(f)_{L_p}\le C\omega\left(\frac{1}{\sigma};f\right)L_p,\quad 1\le p\le\infty\tag{1.44}$$

влечёт, что из (1.12) вытекает (1.13). Для того, чтобы показать, что из (1.13) следует (1.12) будем ползоваться следующими неравенствами (см.[11] с. 375 и [23], с.308).

$$\omega\left(\frac{1}{n}:f\right)_{Lp}\le\frac{c}{n}\sum_{k=0}^{n}A_k(f)_{Lp},\qquad 1\le p\le\infty\ ,\tag{1.45}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}\left(\sum_{\upsilon=1}^{n}\alpha\upsilon\right)^b\le M(a,b)\sum_{n=1}^{\infty}n^{-a}(na_n)^b\quad a>1,\ b>1,\ a_n\ge 0.\tag{1.46}$$

На основании неравенства (1.45), (1,46) и, учитывая условия для функции $\varphi(t)$, получим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\upsilon}{p}} \varphi(n) \omega^{\upsilon}\left(\frac{1}{n} : f\right)_{Lp} \le M(p,\upsilon) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\left(2+\upsilon-\frac{\upsilon}{p}-E\right)} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi^{\frac{1}{\upsilon}}(k)}{k^{\xi/\upsilon}} A_{k-1}(f)_{Lp} \right)^{\upsilon} \le$$

$$\le M(p,v) \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{v}{p}-2} \varphi(n) A_{n-1}^{v}(f)_{Lp} < \infty.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.3.

Очевидно, что из условия (1.8) вытекает

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{mv+\frac{v}{p}-2} A_n^{v}(f)_{Lp} < \infty \ . \tag{1.47}$$

Тогда на основании теоремы 1.2. утверждаем, что функция *f(x)* почти всюду на (-∞,∞) совпадает с функцией, имеющей абсолютно непрерывную производна порядка m-1, а производная $f^{(m)}(x)$ принадлежит к пространству $L_v(-\infty,\infty)$, т.е.

$$f^{(m)}(x) \in L_v(-\infty,\infty), v > p \ . \tag{1.48}$$

Покажем теперь, что из условия (1.8) вытекает

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{v}{p}} \varphi(n) A_n^{v}\left(f^{(m)}\right)_{L_p} < \infty \ . \tag{1.49}$$

Неравенство М. Ф. Тимана (см. [4], теорема 3) вместе с неравенством (1.44) даёт:

$$A_p\left(f^{(m)}\right)Lp \le c\left(p^m Ap(f)\right)_{Lp} + \left\{ \sum_{K=[N]+1}^{\infty} K^{\gamma m-1} A_k^{\gamma}(f)_{Lp} \right\}^{\frac{1}{\gamma}} , \tag{1.50}$$

$$\gamma = \min(2,p), \qquad m = 1,2,..., \qquad 1 \le p < \infty .$$

С помощью неравенства (1.50) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{v}{p}-2} \varphi(n) A_n^{v}\left(f^{(m)}\right)_{Lp} \le C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{v}{p}-p} \varphi(n) \left[n^m A_n(f)_{Lp} + \left(\sum_{K=n+1}^{\infty} K^{\gamma m-1} A_K^{\gamma}(f)_{Lp} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right] \le$$

$$\le C \sum_{n=1}^{\infty} n^{mv+\frac{v}{p}-2} \varphi(n) A_n^{\gamma}(f)_{Lp} + C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{v}{p}-2} \varphi(n) \left\{ \sum_{K=n+1}^{\infty} K^{\gamma m-1} A_K^{\gamma}(f)_{Lp} \right\}^{\frac{v}{\gamma}} . \tag{1.51}$$

Рассмотрим последнюю сумму в (1.51). С помощью неравенства (см. [23], с. 308)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-c}\left(\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu\right)^d \le M(c,d)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-c}(na_n)^d, \qquad c<1, \qquad d>1, \qquad a_n \ge 0 \;, \tag{1.52}$$

из условия (1.8) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\nu}{p}-2}\varphi(n)\left\{\sum_{K=n+1}^{\infty} K^{m\gamma-1}A_k^\gamma(f)_{Lp}\right\}^{\frac{\nu}{\gamma}} \le \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\left(2-\frac{\nu}{p}\right)}\left\{\sum_{K=n+1}^{\infty}\varphi^{\frac{\gamma}{\nu}}(k)k^{m\gamma-1}A_k^\gamma(f)_{Lp}\right\}^{\frac{\nu}{\gamma}} \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\left(2-\frac{\nu}{p}\right)}\left(\varphi^{\frac{\gamma}{\nu}}(n)n^{m\gamma-1}nA_n^\gamma(f)_{Lp}\right)^{\frac{\nu}{\gamma}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{m\nu+\frac{\nu}{p}-2}\varphi(n)A_n^\nu(f)_{Lp} < \infty . \tag{1.53}$$

Из (1.51) и (1.53) вытекает (1.49)

Теперь, применяя лемму 1.3, получим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\nu}{p}-2}\varphi(n)\omega^\nu\left(\frac{1}{n}; f^{(m)}\right)_{L_p} < \infty \;. \tag{1.54}$$

Учитывая (1.54), на основании леммы 1.2 находим:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f^{(m)}(x)\right|^\nu \varphi\left(\frac{1}{x}\right)dx < \infty \quad . \tag{1.55}$$

Соотношение (1.48) означает, что

$$\left|f^{(m)}(x)\right|^\nu \in L(-\infty,\infty) \quad . \tag{1.56}$$

Тогда на основании (1.55), (1.56), применяя лемму 1.1, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f^{(m)}(x)\right|^\nu \varphi\left(\left|f^{(m)}(x)\right|^\nu\right)dx < \infty$$

Теорема 1.3 доказана полностью.

§ 2. Соотношения между наилучшими приближениями в разных метриках

С помощью теоремы 1.1 и 1.2 устанавливаются следующие утверждения, показывающие связь между наилучшими приближениями при различных p и q, а также связь между наилучшими приближениями k-призводной $f^{(k)}(x) \in L_\nu(-\infty,\infty)$ и самой функцией $f(x) \in L_p(-\infty,\infty)$ при $p<\nu$.

Теорема 1.4. Если функция $f(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ и сходится ряд (1.2) при $0<p\le v<\infty$, то имеет место неравенство:

$$A_a(f)_{Lp}\le C\left\{(\delta+1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{v}}A_\delta(f)_{Lp}+\left(\sum_{n=}^{\infty}n^{\frac{v}{p}-2}A_n^v(f)_{Lp}\right)^{\frac{1}{v}}\right\}, \qquad (1.57)$$

где константа c не зависит от f

Теорема: 1.5. Если функция $f(x)\in L_p(-\infty,\infty), 0<p<v<\infty$ и сходится ряд (1.4), то для $x=1,2,...$ имеет место неравенство:

$$A_n\left(f^{(k)}\right)_{Lv}\le C\left\{n^{k+\frac{1}{p}-\frac{1}{v}}A_n(f)_{Lp}+\left(\sum_{m=n+1}^{\infty}m^{kv+\frac{v}{p}-2}A_m^v(f)_{Lp}\right)^{1}v\right\},$$

где константа c не зависит от f.

Теорема 1.6. Пусть $f(x)\in L_p(-\infty,\infty), 0<p<1$ и при натуральном k выполнятся условие

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{kp-1}A_n^p(f)_{Lp}<\infty\ . \qquad (1.58\text{ а})$$

Тогда:

1) $f(x)$ имеет $k-$ производную $f^{(k)}(x)$, принадлежащую пространству $L_p(-\infty,\infty)$

2) для любого натурального r и $n\ge 1$ имеет место неравенство:

$$\omega_r\left(\frac{1}{m};f^{(k)}\right)_{Lp}\le C(p,r,k)\left\{\frac{1}{n^r}\left(\sum_{v=0}^{n}(v+1)^{p(k+r)-1}A_v^p(f)_{Lp}\right)\right\}^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\left(\sum_{v=n+1}^{\infty}v^{kp-1}A_v^p(f)_{Lp}\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (1.58\text{ в})$$

Теорема 1.4 при $1\le p\le v<\infty$ автором доказана в [13], теорема 1.6 при $1\le p\le\infty$ в [12]. Теоремы 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 позволяют получить порядок убывания к нулю наилучших приближений, являющихся в некотором смысле обратным к утверждению теоремы 1.2.

Следствие 1.2. Пусть функция $f(x)\in L_p(-\infty,\infty), 1<p<\infty$ имеет r-1 абсолютная непрерывная производная, а $f^{(r)}(x)\in Lp(-\infty,\infty),\quad w_k\left(f^{(r)};t\right)_{Lp}=0\left(t^k\right)$. Тогда $A_\sigma(f)_{L_p}=O\left(\sigma^{-(r+k)}\right)$.

Доказательство вытекает из неравенств М.Ф. Тимана [4], [14], т.е.

1) $\omega_k\left(f^r;\frac{1}{\tau}\right)_{Lp}\geq C_k\frac{1}{\tau^k}\left\{\sum_{\nu=}(\nu+1)^{\beta(k+r)-1}A_\nu^\beta(f)_{Lp}\right\}^{\frac{1}{p}}$, (1.59)

2) Если $\omega_k(h;f)\leq Ch^k(k\geq1), 1<p<\infty$, то $A_\sigma(f)_{Lp}=O\left(\frac{1}{\sigma^k}\right)$.

Отметим, что если для $1<p<\infty, A_\sigma(f)_{L_p}=O\left(\frac{1}{\sigma^{k+r}}\right)$, k=1,2,…; r≥0, то, как показал М.Ф. Тиман [14]

$$\omega_k\left(h;f^{(r)}\right)_{Lp}\geq C_{k,r}h^k\left(\ln\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}},\quad \beta=\max(r,p)$$

и

$$\omega_k\left(n;f^{(r)}\right)_{Lp}\leq C_{k,r}h^k\left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{\gamma}},\quad r\geq0,\ \gamma=\max(r,p)$$

Следствие 1.3. Если $A_\tau(f)_{Lp}=0\left(\frac{1}{\delta^s}\right), 0<p<\infty$ то при $k<s+\frac{1}{p}-\frac{1}{\nu}$

$$A_\delta\left(f^{(k)}\right)_{L\nu}=0\left(\delta^{k-s-\frac{1}{p}+\frac{1}{\nu}}\right), p<\nu.$$

Это вытекает из теоремы 1.5.

Доказательство теоремы 1.4. Пусть функция $Q_{2^N-1}(x)$ определена равенством (1.14). Имеем:

$$\left\|Q_{2^N-1}(x)-Q_n(x)\right\|_{Lp}^p=\left\|\int_{-(2^N-1)}^{2^N-1}F(u)e^{inx}dx-\int_{-n}^{n}F(u)e^{inx}du\right\|_{Lp}.$$

Положим $^{-(2^N-1)}2^{m-1}\leq n<2^N$. Тогда

$$\left\|Q_{2^N-1}(x)-Q_n\right\|_{L_p}^p=\left\|\int_{-(2^N-1)-(2^m-1)}^{-(2^m-1)}+\int_{-n}^{-n}+\int_{-n}^{n}+\int_{n}^{2^m-1}+\int_{2^m-1}^{2^{N?}-1}-\int_{-n}^{n}\right\|_{L_p}^p=$$

$$=\left\|\int_{-(2^N-1)}^{-(2^m-1)}+\int_{-(2^m-1)}^{-n}+\int_{n}^{2^m-1}+\int_{2^m-1}^{2^N-1}\right\|_{L_p}^p=\left\|\left(\int_{-2^N-1}^{-2^m-1}+\int_{2^m-1}^{2^N-1}\right)+\left(\int_{-(2^m-1)}^{-n}+\int_{n}^{2^m-1}\right)\right\|_{L_p}^p=$$

$$=\left\|\sum_{v=m}^{N-1}\left(\int_{2^v-1}^{2^{v+1}-1}+\int_{-(2^{v+1}-1)}^{-(2^v-1)}\right)+\left(\int_{-(2^m-1)}^{2^m-1}-\int_{-n}^{n}\right)\right\|_{L_p}^{p}\le M_{(p)}\left\|\int_{-(2^m-1)}^{2^m-1}-\int_{-n}^{n}\right\|_{L_p}^{p}+$$
$$+\left\|\sum_{v=m}^{N-1}\left(\int_{-(2^v-1)}^{2^{v+1}-1}-\int_{-(2^v-1)}^{2^v-1}\right)\right\|_{L_p}^{p} \tag{1.60}$$

Рассмотрим в отдельности каждые слагаемые в правой части неравенства (1.60). Так как функция $Q_n(x)$ является целой функцией степени $\le n,$ то применяя неравенство (1.23) при $1<\tau<p$и неравенство (1.24), а также, учитывая монотонность убывания $A_n(f)_{Lp}$ получим:

$$\left\|\int_{-(2^m-1)}^{2^m-1}F(u)e^{inx}du-\int_{-n}^{n}F(u)e^{inx}du\right\|_{Lp}^{p}=\left\|Q_{2^m-1}(x)-Q_n(x)\right\|_{Lp}^{p}\le$$
$$\le C\left(2^{m\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)}\left\|Q_{2^m-1}(x)-Q_n(x)\right\|_{Lr}\right)^{p}\le \tag{1.61}$$
$$\le M(r,p)\left(n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}A_n(f)_{Lr}\right)^{p}=M(r,p)n^{\frac{p}{r}-1}A_n^p(f)_{Lr}.$$

Далее, поступая также, как и при получении неравенства (1.28), находим, что

$$\left\|\sum_{v=m}^{N-1}\left(\int_{-(2^{v+1}-1)}^{2^{v+1}}F(u)e^{inx}du-\int_{-(2^v-1)}^{2^v-1}F(u)e^{inx}du\right)\right\|_{L_p}^{P}=\left\|\sum_{v=m}^{N-1}\lambda_{v+1}(x)\right\|_{L_p}^{P}\le M(p.r)\sum_{v=m}^{N-1}\left(2^{v+1}-1\right)^{\frac{p}{r}-1}A_{2^v-1}^{P}(f)_{L_r}\le$$
$$\le M(p,r)\sum_{v=m}^{n}\sum_{k=2^{v-1}}^{2^v-1}k^{\frac{p}{r}-2}A_k^p(f)_{L_r}\le\ M(p,r)\sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m-1}k^{\frac{p}{r}-2}A_k^p(f)L_r\le\quad . \tag{1.62}$$
$$\le M(p,r)\sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m-1}k^{\frac{p}{r}-2}A_k^p(f)L_r\le M(p,r)\sum_{k=n+1}^{2^n-1}k^{\frac{p}{r}-2}A(f)L_r\ .$$

В силу неравенства (1.60), (1.61) и (1.62) получим:

$$\left\|Q_{2^n-1}(x)-Q_n(x)\right\|_{L_p}^{P}\le M(p,r)\left\{n^{\frac{p}{r}-1}A_n^p(f)_{L_r}+\sum_{k=n+1}^{2^n-1}k^{\frac{p}{r}-2}A_k^p(f)L_r\right\}.$$

Отсюда при $N\to\infty$ находим, что

$$\|f(x)-Q_n(x)\|_{L_p}^{P}\le C(p,r)\left\{n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}A_n^p(f)_{L_r}+\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{\frac{p}{r}-2}A_k^p(f)L_r\right)^{\frac{1}{p}}\right\},$$

то есть утверждённые теоремы для 1<r<p<∞.

Теперь рассмотрим случай 0<r<p≤1. В этом случае поступаем также, как и при доказательстве теоремы имеем (см (1.30))

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}g_2k(x)=Q_1(x)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[Q_2\nu(x)-Q_{2^{\nu-1}}(x)\right],$$

где сходимость понимается в смысле $L_p(-\infty,\infty)$, а целая функция $Q_\tau(x)$ такова, что

$$\|f(x)-Q_\tau(x)\|_{L_p}=A_\gamma(f)_{L_p}.$$

Применяя неравенство (1.23) и, учитывая монотонность $A_\delta(\phi)$ при $2^{m-1}\le\delta<2^m$ получим с учетом (1.30)

$$\|Q_\sigma(x)-f(x)\|_{L_p}^P=\left\|Q_\sigma(x)-\left[Q_{2^m}(x)+\sum_{k=m+1}^{\infty}\left(Q_{2^k}(x)-Q_{2^{k-1}}(x)\right)\right]\right\|_{L_p}^P\le$$

$$\le\|Q_\sigma(x)-Q_{2^m}(x)\|_{L_p}^P+\sum_{k=m+1}^{\infty}\|Q_{2^k}(x)-Q_{2^{k-1}}(x)\|_{L^p}^P\le$$

$$\le C(p,r)\left\{\left[\delta^{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)}\|Q_\sigma(x)-Q_{2^m}(x)\|_{L_r}\right]^P+\sum_{k=m+1}^{\infty}\left[2^{k\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)}\left\|Q_{2^k}-Q_{2^{k-1}}(x)_{L_r}\right\|\right]\right\}\le$$

$$\le C(p,r)\left\{\sigma^{\frac{p}{r}-1}A_\sigma^p(f)_{L_r}+\sum_{k=m+1}^{\infty}2^{k\left(\frac{p}{r}-1\right)}A_{2^k}^p(f)_{L_r}\right\}\le C(p,r)\left\{\sigma^{\frac{p}{r}-1}A_\delta^p(f)_{L_r}+\sum_{\nu=[\sigma]+1}^{\infty}V^{\frac{p}{r}-2}A_\nu^p(f)_{L_r}\right\},$$

то есть утверждение теоремы для 0<r<p≤1 и для случая 0<r<1≤p<∞.

Доказательство теоремы завершено.

Доказательство теоремы 1.5.

Рассмотрим ряд (1.33). Положим, $2^{m-1}\le n<2^m<2^n$. В силу неравенства (1.32),(1.23), (1.24) из неравенства (1.60) получим:

$$\left\|Q_{2^{n-1}}^{(k)}(x)-Q_n^{(k)}(x)\right\|_{L_p}^P\le C(P)\left\{\left\|Q_{2^{m-1}}^{(k)}(x)-Q_n^{(k)}(x)\right\|_{L_p}^P+\left\|\sum_{\nu=m}^{n-1}\left[Q_{2^{\nu+1}}^{(k)}(x)-Q_{2^\nu}^{(k)}(x)\right]\right\|_{L_p}^P\right\}\le$$

$$\le C(P)\left\{\left(2^m-1\right)^k\left\|Q_{2^m-1}(x)-Q_n(x)\right\|_{L_p}^P+\left\|\sum_{\nu=m}^{n-1}\left[Q_{2^{\nu+1}+1}(x)-Q_{2^\nu-1}^{(k)}(x)\right]\right\|_{L_p}^P\right\}\le$$

$$\le C(p,r)\left\{\left(2^m-1\right)^{kp}\left[\left(2^m-1\right)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}A_n(f)_{L_r}\right]^P+\left\|\sum_{\nu=m}^{n-1}\lambda_{\nu+1}^{(k)}(x)\right\|_{L_p}^P\right\}\quad. \qquad (1.63)$$

Оценим

$$\left\| \sum_{\nu=m}^{n-1} \lambda_{\nu+1}^{(k)}(x) \right\|_{L_p}^{P} . \qquad (1.64)$$

Отметим, что $\lambda_{\nu+1}^{(k)}(x)$ есть целая функция степени $2^{\nu+1}$ Тогда в силу неравенства (1.32) получим:

$$\left\| \lambda_{\nu+1}^{(k)} \right\|_{L_p} \le \left(2^{\nu+1}\right)^k \left\| \lambda_{\nu+1}(x) \right\|_{L_p}.$$

Отсюда в силу (1.23), (1,24) получим:

$$\left\| \lambda_{\nu+1}^{(k)}(x) \right\|_{L_p}^{P} \le C(P)\left(2^{\nu+1}\right)^{kp}\left(2^{\nu+1}-1\right)^{\frac{p}{r}-1} A_{2^\nu-1}^{p}(f)_{L_r} \le C(p,r)2^{\nu\left(kp+\frac{p}{r}-1\right)} A_{2^\nu-1}^{p}(f)_{L_r} \text{, } 1<r<p . \qquad (1.65)$$

С помощью неравенства (1.65) величина (1.64) оценивается как величина (см. (1.62)

$$\left\| \sum_{\nu=m}^{N} \lambda_\nu(x) \right\|_{L_p}^{P} .$$

И наконец, получим

$$\left\| \sum_{\nu=m}^{N-1} \lambda_{\nu+1}^{(k)}(x) \right\|_{L_p}^{P} \le C(p,r,k) \sum_{\nu=n+1}^{2^N-1} V^{kp+\frac{p}{r}-2} A_m^P(f)_{L_r} .$$

Теперь из неравенства (1.63) и (1.66) находим, что

$$\left\| Q_{2^n-1}^{(k)}(x) - Q_n^{(k)}(x) \right\|_{L_p}^{P} \le C(p,r,k)\left\{ \left[\left(2^m\right)^{k+\frac{1}{r}-\frac{1}{p}} A_n(f)_{L_r} \right]^P + \sum_{\nu=n+1}^{2^n-1} V^{kp+\frac{p}{r}-2} A_\nu^p(f)_{L_r} \right\} \le$$

$$\le C(p,r,k)\left\{ n^{k+\frac{p}{r}-1} A_n^P(f)_{L_r} + \sum_{\nu n+1}^{2^N} V^{kp+\frac{p}{r}-2} A_\nu^P(f)_{L_r} \right\} .$$

Отсюда при $N \to \infty$ следует утверждение теоремы для $1<r<p<\infty$

Рассмотрим случай $0<r<p\le 1$. Поступаем также, как и при доказательстве теоремы 1.4 (случай $p\le 1$). Рассмотрим ряд

$$f^{(k)}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{2^\nu}^{(k)}(x) = Q_1^{(k)}(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[Q_{2^\nu}^{(k)}(x) - Q_{2^{\nu-1}}^{(k)}(x) \right]$$

полученный дифференцированием ряда (1.30). Отметим, что функция $Q_\sigma(x)$, $Q_\sigma^k(x)$ есть целая функция степени $\le\sigma$. На основании (1.67), применяя неравенства (1.32) и (1.23) и учитывая равенство (1.29), а также монотонность $A_\sigma(f)$ при $2^{m-1}\le\sigma<2^m$ получим:

$$\left\|Q_\sigma^{(k)}(x)-f^{(k)}(x)\right\|_{L_p}^P \le \left\|Q_\sigma^{(k)}(x)-\left\{Q_{2^m}^{(k)}(x)+\sum_{\nu=m+1}^{\infty}\left[Q_{2^\nu}^{(k)}(x)-Q_{2^{\nu-1}}^{(k)}(x)\right]\right\}\right\|_{L_p}^P \le$$

$$\le\left\|Q_\sigma^{(k)}(x)-Q^{(k)}{}_{2^m}\right\|_{L_p}^P+\sum_{V=m+1}^{\infty}\left\|Q_{2^\nu}^{(k)}(x)-Q_{2^{\nu-1}}^{(k)}(x)\right\|_{L_p}^p \le$$

$$\le C(p,k)\left\{\sigma^{kp}\left\|Q_\sigma(x)-Q_{2^m}(x)\right\|_{L_p}^p+\sum_{\nu=m+1}^{\infty}(2^\nu)^{kp}\left\|Q_{2^\nu}(x)-Q_{2^{\nu-1}}(x)\right\|_{L_p}^p\right\}\le$$

$$\le C(p,k)\left\{\sigma^{kp}\sigma^{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)p}\left\|Q_\sigma(x)-Q_{2^m}(x)\right\|_{L_r}^p+\sum_{\nu=m+1}^{\infty}(2^\nu)^{kp}(2^\nu)^{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)p}\left\|Q_{2^\nu}(x)-Q_{2^{\nu-1}}(x)\right\|_{L_r}^p\right\}\le$$

$$\le C(p,k,r)\left\{\sigma^{\frac{p}{r}+kp-1}A_\sigma^P(f)_{L_r}+\sum_{\nu=m+1}^{\infty}2^{k\left(\frac{p}{2}+kp-1\right)}A_{2^\nu}^p(f)_{L_r}\right\}\le$$

$$\le C(p,k,r)\left\{\sigma^{\frac{p}{r}+kp}A_\sigma^p(f)_{L_r}+\sum_{\nu=[\sigma]}^{\infty}\nu^{\frac{p}{r}+kp-2}A_\nu^p(f)_{L_r}\right\},$$

то есть утверждение теоремы для $0<r<p\le1$. Для $0<r\le1<p$ доказывается как в случае $0<r<p\le1$. Теорема доказана полностью.

Доказательство теоремы 1.6. Утверждение части I доказано в теореме 1.2 (случай $P=\nu$). Докажем вторую часть утверждения. Из условия (1. 58 а) следует, что

$$n^{kp-1}A_n^p(f)_{L_p}\to0\quad,\quad \mathrm{n}\to\infty. \tag{1.68}$$

Автором доказано (см.[49]), что

$$\omega_r^p\left(\frac{1}{n+1}:f\right)_{l_p}\le\frac{C(p,r)}{(1+n)^{rp}}\sum_{m=0}^{n}(-m+1)^{rp-1}\ \mathrm{A}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{p}}(f)_{L_p}. \tag{1.69}$$

На основании неравенств (1.69) и (1.68) (случай p=ν) , а также, учитывая (1.68), получим:

$$\omega_r^p\left(\frac{1}{n+1}:f^{(k)}\right)_{l_p}\le\frac{C(p,r,k)}{(1+n)^{rp}}\sum_{m=0}^{n}(m+1)^{rp-1}\ \mathrm{A}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{p}}\left(f^{(k)}\right)_{L_p}\le$$

$$\le\frac{C(p,r,k)}{(1+n)^{rp}}\left[\sum_{m=0}^{n}(m+1)^{(k+r)p-1}\ \mathrm{A}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{p}}(f)_{L_r}+\sum_{m=0}^{n}(1+m)^{2p-1}\sum_{\nu=m+1}^{\infty}\nu^{kp-1}A_\nu^p(f)_{L_p}\right]=$$

$$=\frac{C(p,r,k)}{(1+n)^{rp}}\left\{\sum_{m=0}^{n}(m+1)^{(k+r)p-1}\ \mathrm{A}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{p}}(f)_{L_p}+\sum_{m=0}^{n}(m+1)^{rp-1}\left(\sum_{\nu=m+1}^{n}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\right)\right\}\le$$

$$\le\frac{C(p,r,k)}{(1+n)^{rp}}\left\{\sum_{m=0}^{n}(m+1)^{(k+r)p-1}\ \mathrm{A}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{p}}(f)_{L_p}+E+\sum_{m=0}^{n}(m+1)^{rp-1}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{kp-1}\ \mathrm{A}_\nu^{\mathrm{p}}(f)_{L_p}\right\}\le$$

$$=C(p,r,k)\left\{\frac{1}{(n+1)^{rp}}\sum_{m=0}^{n}(m+1)^{(k+r)p-1}\,\mathrm{A}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{p}}(f)_{L_p}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{kp-1}\mathrm{A}_{\nu}^{\mathrm{p}}(f)_{L_p}\right\},$$

$$E=\sum_{m=0}^{n}(m+1)^{rp-1}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{kp-1}\,\mathrm{A}_{\nu}^{\mathrm{p}}(f)_{L_p}\le\sum_{m=0}^{n}(m+1)^{rp-1}(m+1)^{kp-1}\,\mathrm{A}_{\mathrm{m+1}}^{\mathrm{p}}(f)\sum_{\nu=m+1}^{n}1\le$$

$$\le\sum_{\mathrm{m}=0}^{n}(m+1)^{(k+r)p-1}\,\mathrm{A}_{\mathrm{m+1}}^{p}(f)_{L_p}$$

Теорема доказана.

§3. Необходимые условия для вложения $l_p(-\infty,\infty)$ классов функций

Ниже покажем, что для вложения $L_p(-\infty,\infty)$ классов функций в $L_\nu(-\infty,\infty)$, $1\le p<\nu<\infty$ условие (1.2), т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{\nu}{p}-2}\,\mathrm{A}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{v}}(f)_{L_p}<\infty$$

является в некотором смысле не толко достаточным, но и необходимым. Достаточностъ установлена в §1 (см. Теор. 1.1).

Пуст $M_l(\alpha_n)-$ класс функций $f(x)\in L_p(-\infty,\infty)$, $\quad 1\le p<\infty$, для которых $A_n(f)_{L_p}=0(\alpha_n)$, $\quad \alpha_n\downarrow 0$, $\quad n\to\infty$.

Теорема 1.7. Пусть последовательностъ чисел $\{\alpha_n\}$ такова, что

$$\frac{\alpha_{n_{k+1}}}{\alpha_{n_k}}\le C<1,\quad \frac{n_{k+1}}{n_k}=0(1), k=1,2,\dots\ , \tag{1.70}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n n^{\frac{\nu}{p}-2}=\infty\ . \tag{1.70.A}$$

Тогда в классе $M_p(\alpha_n)$ найдется функция $f_0(x)$, не принадлежащая к пространству $L_\nu(-\infty,\infty)$, $1\le p<\infty$. Отметим, что теорема 1.7 для периодических функций установлена в [8].

Доказательство теоремы 1.7. Для последовательности с номерами

$$n_k,\ \mathrm{n}_0=1,\ \mathrm{n}_{\mathrm{k}+1}>n_k,\ 1<m\le\frac{n_{k+1}}{n_k}\le M,\ \ \mathrm{k}=1,2,...,$$

рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right)n_k^{\frac{1}{p}-1}\frac{\sin n_k x}{x}\ . \tag{1.71}$$

Сначала убедимся, что ряд (1.71) сходится в смысле $L_p(-\infty,\infty)$ $1<p<\infty$. В самом деле, так как

$$\left\|\frac{\sin ax}{x}\right\|_{L_p}=C(p)a^{1-\frac{1}{p}},\qquad 1<p<\infty,\quad \mathrm{a}>0,$$

то

$$\left\|\sum_{k=m}^{S}\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right)n_k^{\frac{1}{p}-1}\frac{\sin \mathrm{n_k} x}{\mathrm{x}}\right\|_{L_p}\le\sum_{k=m}^{S}\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right)n_k^{\frac{1}{p}-1}\left\|\frac{\sin \mathrm{n_k} x}{\mathrm{x}}\right\|_{L_p}\le$$

$$\le C(p)\sum_{k=m}^{S}\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right)=C(p)\left(\alpha_{n_m}-\alpha_{n_{S+1}}\right)\to 0\ . \tag{1.71.A}$$

Таким образом, ряд (1.71) сходится в $L_p(-\infty,\infty)$. Обозначим его сумму через $f_0(x)\in L_p(-\infty,\infty)$,

Так как $\frac{\sin n_k x}{x}$ целая функция степени n_k , то

$$\sum_{k=m}^{N}\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right)\left(\frac{\sin n_k x}{x}\right)n^{\frac{1}{p}-1}$$

естъ целая функция степени n_N .

Теперь аналогично неравенству (1.71.A) для функций $f_0(x)$ при $1<p<\infty,$ и $n_m\le n<n_{m+1}$ получим, что

$$A_n(f_0)_{L_p}\le C(p)\alpha_{n_{m+1}}\le C(p)\alpha_n \text{ т.е. } f_0(x)\in M_p(\alpha_n),\qquad 1<p<\infty.$$

Покажем, теперь, что $f_0(x)$ не принадлежит пространству $L_v(-\infty,\infty)$ $\quad v>p,$ (1.70.A).

Отметим, что преобразование Фурье функций $f_0(x)$ является (см. [1], стр. 359) :

$$F_0(u)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right)n_k^{\frac{1}{p}-1}\varphi_{\mathrm{n_k}}(\mathrm{u}), \tag{1.72}$$

где

$$\varphi_{\mathrm{n_k}}(\mathrm{u})=\begin{cases}1, & |\mathrm{u}|<\mathrm{n_k};\\ 0, & |\mathrm{u}|>\mathrm{n_k};\\ \frac{1}{2}, & \mathrm{u}=\pm n_k.\end{cases}$$

Известно, что ([24], теорема 89)

$$\| f(x)\|_{L_p}^p \ge C\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{p-2}|F(x)|^p\,dx, \qquad 1<\mathrm{p}<2 \qquad (1.73).$$

где $F(x)$ преобразование Фурье функций $f(x)$. Согласно (1.73) при $1<p<\nu<2$

$$\| f_0(x)\|_{L_\nu}^\nu \ge C\int_0^\infty u^{\nu-2}(F_0(u))^\nu du = C\int_0^\infty u^{\nu-2}\left[\sum_{k=1}^\infty\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right)n_k^{\frac{1}{p}-1}\varphi_{n_k}(u)\right]^\nu du \ge$$

$$\ge C\int_0^\infty u^{\nu-2}\sum_{k=1}^\infty\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right)^\nu n_k^{\frac{\nu}{p}-\nu}\left[\varphi_{n_k}(u)\right]^\nu du = C\sum_{k=1}^\infty\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right)^\nu n_k^{\frac{\nu}{p}-\nu}\int_0^n\left[\varphi_{n_k}(u)\right]^{\nu-2}du =$$

$$C(\nu)\sum_{k=1}^\infty\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right)^\nu n_k^{\frac{\nu}{p}-1} \quad . \qquad (\mathrm{I}.74)$$

Учитывая свойства последовательности $\{\alpha_n\}$ и из (I.74), (I.72) и (I.70), получим:

$$\| f_0(x)\|_{L_\nu}^\nu \ge C\sum_{k=1}^\infty \alpha_{n_k}^{\nu} n_k^{\frac{\nu}{p}-1} \ge \sum_{k=1}^\infty n_k^{\frac{\nu}{p}-2}\alpha_n^\nu = \infty$$

т.е. теорема доказана для $1<p<\nu<2$.

Пусть теперь $\nu=2$ тогда в силу равенства Парсеваля и (1.72), (1.70) получим:

$$\| f_0(x)\|_{L_2}^2 = \int_{-\infty}^\infty|F_0(u)|^2du \ge \int_0^\infty|F_0(u)|^2du = \int_0^\infty\left[\sum_{k=1}^\infty\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right)n^{\frac{1}{p}-1}\varphi(u)\right]^2du \ge$$

$$\ge \sum_{k=1}^\infty\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right)^2 n_k^{\frac{2}{p}-2}\int_0^{n_k}du \ge \sum_{k=1}^\infty n_k^{\frac{2}{p}-1}\alpha_{n_k}^2 = \sum_{n=1}^\infty n^{\frac{2}{p}-2}\alpha_n^2 = \infty$$

т.е. теорема доказана для $1<\mathrm{p}<\nu=2$

Для случая p=1 рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^\infty\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right)\frac{\cos n_k x-\cos 2n_k x}{n_k x^2} \quad , \qquad (1.75)$$

в который сходится в смысле $L_p(-\infty,\infty)$. В самом деле, применяя неравенство Гельдера $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, получим:

$$\sum_{k=M}^N\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right)\left\|\frac{\cos n_k x-\cos 2n_k x}{n_k x^2}\right\|_L = \sum_{k=M}^N\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right)\int_{-\infty}^\infty\left|\frac{\sin\frac{t}{2}\sin\frac{3t}{2}}{t^2}\right|dt \le \sum_{k=M}^N\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right)\left\|\frac{\sin t}{t}\right\|_{L_p}\left\|\frac{\sin t}{t}\right\|_{L_q} \le$$

$$\le C(p)\sum_{k=M}^N\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right) \le C(p)\left(\alpha_M-\alpha_N\right)\to 0 \qquad (1.76)$$

Следовательно, ряд (1.75) сходится в $L_p(-\infty,\infty)$ и его сумму обозначим через $g_0(x)$.

Отметим, что $\frac{1}{nx^2}(\cos nx-\cos 2nx)$ есть целая функция степени 2n. Тогда $\sum_{k=M}^{N}\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right)\frac{\cos n_k x-\cos 2n_k x}{n_k x^2}$

является целой функцией степени $2n_N$. На основании (1.75), применяя неравенство Гельдера (1.76), получим

$A_{2n_N}(g_0)_L \le C(p)\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right)\le C(p)\alpha_{n_{k+1}}$ Учитывая свойства последовательности $\{\alpha_{n_k}\}$, получим:

$$A_n(g_0)_L \le C(p)\alpha_n, \quad \text{т.е.} \quad g_0(x)\in M_1(\alpha_n). \qquad (1.77).$$

Теперь осталось доказать, что функций $g_0(x)$ не принадлежит пространству $L_v(-\infty,\infty)$, $v>1$.

Преобразованием Фурье функций $g_0(x)$ является функция (см.[1], 359-360)

$$G_0(u)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right)\psi_{n_k}(u),$$

где

$$\psi_{n_k}(u)=\begin{cases}1, & |u|\le n_k\\ \frac{1}{n_k}(2n_k-u), & n_k<|u|\le 2n_k\\ 0, & |u|\le 2n_k.\end{cases}$$

Применяя неравенство (1.73) при $1<v<2$ и в силу (1.77), (1.70), получим

$$\|g_0(x)\|_{L_v}^{v} \ge \int_0^{\infty}u^{v-2}|G_0(u)|^v du=\int_0^{\infty}u^{v-2}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right)\psi_{n_k}(u)\right]^v du\ge\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right)^v\int_0^{\infty}u^{v-2}du=$$

$$=\frac{1}{v-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right)^v n_k^{v-1}\ge\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{n_k}^{v}n_k^{v-1}\ge\sum_{k=1}^{\infty}n_n^{v}\alpha_n^{v}=\infty$$

т.е. теорема доказана для случая $1=p<v<2$.

Наконец, рассмотрим случай $v>2$. Известно (см.[25])

$$\|f(x)\|_{L_p}\ge B(p)\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\left|\int_{n_k}^{n_{k+1}}F(u)e^{iux}du\right|^2\right\|, \quad 1<v<\infty \quad . \qquad (1.78)$$

С помощью (1.78) при $\nu > 2$ для функции $f_0(x)$ (см. (1.71)) и (1.72а) получим:

$$\|f_0(x)\|_{L_\nu}^{\nu} \ge B(\nu)\left\|\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left|\int_{n_i}^{n_{i+1}}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right)n_k^{\frac{1}{p}-1}\varphi_{n_k}(u)\right]e^{inx}du\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_\nu}^{\nu} \ge$$

$$\ge B(\nu)\left\|\left(\sum_{i=k-1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right)n_k^{\frac{1}{p}-1}\cdot\int_{n_i}^{n_{i+1}}\varphi_{n_k}(u)e^{inx}du\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_\nu}^{\nu} \ge$$

$$\ge B(\nu)\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right)n_k^{\frac{1}{p}-2}\int_{n_{k-1}}^{n_k}\varphi_{n_k}(u)e^{iux}du\right\|_{L_\nu}^{\nu}. \tag{1.79}$$

Обозначим

$$\beta_k=\left(\alpha_{n_k}-\alpha_{n_{k+1}}\right)n_k^{\frac{1}{p}-1}$$

Так как $\varphi_{n_k}(u)=1$ при $n_{k-1}<u\le n_k$ (см. (1.72а)), то из (1.79) получим:

$$\|f_0(x)\|_{L_\nu}^{\nu} \ge \beta(\nu)\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\frac{1}{ix}\left(e^{in_kx}-e^{in_{k-1}x}\right)\right\|_{L_\nu}^{\nu}=B(\nu)\left\|\frac{1}{|x|}\left\{\left|\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\left(\cos n_kx-\cos n_{k-1}x\right)+i\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\left(\sin n_kx-\sin n_{k-1}x\right)\right|\right\}\right\|_{L_\nu}^{\nu}$$

$$B(\nu)\left\|\frac{1}{|x|}\left\{\left(\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\left(\cos n_kx-\cos n_{k-1}x\right)\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\left(\sin n_kx+\sin n_{k-1}x\right)\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_\nu}^{\nu} \ge$$

$$\ge B(\nu)\left\|\frac{1}{|x|}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\left(\cos n_kx-\cos n_{k-1}x\right)\right\|_{L_\nu}^{\nu}=B(\nu)\left\|\frac{1}{|x|}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\sin\frac{\left(n_k+n_{k-1}\right)}{2}\sin\frac{\left(n_k-n_{k-1}\right)}{2}\right\|_{L_\nu}^{\nu}$$

Отсюда, учитывая, что $\sin x \ge \frac{2}{\pi}x$ при $0<x\le\frac{\pi}{2}$ и на основании (1.72), (1.70), получим, с учётом свойства $\{\alpha_n\}$

$$\|f_0(x)\|_{L_\nu}^{\nu} \ge B(\nu)\int_0^{\infty}\left|\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\sin\frac{\left(n_k+n_{k-1}\right)x}{2}\sin\frac{\left(n_k+n_{k-1}\right)x}{2}\right|^{\nu}du \ge$$

$$\ge B(\nu)\int_0^{\frac{\pi}{n_k-n_{k-1}}}\left[\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\left(n_k+n_{k+1}\right)\left(n_k-n_{k-1}\right)\frac{x^2}{2}\right]^{\nu}du \ge$$

$$\ge C(\nu)\int_0^{\frac{\pi}{n_k-n_{k-1}}}\frac{1}{x^{\nu}}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^{\nu}x^{2\nu}\left(n_k^2-n_{k-1}^2\right)^{\nu}dx=C(\nu)\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^{\nu}\left(n_k^2-n_{k-1}^2\right)\left(\frac{\pi}{n_k-n_{k-1}}\right)^{\nu+1}=$$

$$=C(\nu)\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^{\nu}(n_k+n_{k+1})^{\nu}\frac{1}{n_k-n_{k-1}}\ge C(\nu)\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^{\nu}n_k^{\nu-1}=$$

$$=C(\nu)\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{n_k}^{\nu}n_k^{\frac{\nu}{p}-1}\ge C(\nu)\sum_{k=1}^{\infty}n^{\frac{\nu}{p}-2}\alpha_n^{\nu}=\infty,$$

т.е. теорема доказана для случая ν>2, 1<p<∞, ν>p. Доказательство завершено.

Теорема 1.8. условия (1.2), (1.4) в теоремах 1.1 и 1.2 эквиваленты соответственно условиям

$$P=\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{\nu}{p}-2}\omega^{\nu}\left(\frac{1}{n};f\right)_{L_p}<\infty\ , \tag{1.81}$$

$$Q=\sum_{n=1}^{\infty}n^{k\nu+\frac{\nu}{p}-2}\omega^{\nu}\left(\frac{1}{n};f\right)_{L_p}<\infty\ . \tag{1.81A.}$$

Доказательство. На основании неравенство (см. [1] для 1≤p≤∞ и автор [22] для 0<p<1)

$$A_n(f)_{L_p}\le C(p)\omega\left(\frac{1}{n}:f\right)_{L_p},\ \ 0<p\le\infty,$$

получим, что из (1.81) вытекает (1.2).

Используя неравенства (1.45) и (1.46) при выборе $\varepsilon>0$ так, чтобы

$2+\nu-\frac{\nu}{p}-\varepsilon>1$, получим

$$P\le C(p,\nu)\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\left(2+\nu-\frac{\nu}{p}-\varepsilon\right)}\left(\sum_{n=1}^{\infty}k^{-\frac{\varepsilon}{\nu}}A_{k-1}(f)_{L_p}\right)^{\nu}\le C(p,\nu)\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{\nu}{p}-2}A_n^{\nu}(f)_{L_p}\qquad p\ge1,$$

т.е. (1.2) влечет (1.81) при p≥1.

При 0<p<1 используя неравенство (см. автор [49])

$$\omega_k\left(\frac{1}{n};f\right)_{L_p}\le\frac{C(k)}{n^k}\left\{\sum_{m=0}^{n}(m+1)^{kp-1}A_m^p(f)_{L_p}\right\}^{\frac{1}{p}},\ \ 0<p<1,$$

и неравенство (1.46) при выборе $\delta>0$ $\left(2+\nu-\frac{\nu}{p}-\delta\right)$ получим

$$P\le C(p,\nu)\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{\nu}{p}-2-\nu-\delta}\left(\sum_{m=1}^{N+1}(m+1)^{p-1}m^{-\frac{\delta p}{\nu}}A_{m-1}^p(f)_{L_p}\right)^{\frac{1}{p}}\le C(p,\nu)\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{\nu}{p}-2}A_n^{\nu}(f)_{L_p}\qquad 0<p<1$$

т.е. (1.2) влечет (1.81) при $0<p<1$. Таким образом, установлено, что условия (1.2) и (1.81) эквивалентно.

Аналогично устанавливается эквивалентность условий (1.4) и (1.81. A). Теорема 1.8 доказана.

§ 4. Вложения $L_p(-\infty,\infty)$ классов функций в пространстве Лоренца

Пуст $f^*(t)$ является перестановкой функции $|f(t)|$ на $(-\infty;\infty)$ в убывающем порядке (см. [2] , с. 27-28, [23], с.332-334). Обозначим через $L(r,\nu)$ множество всех функций $f(x)$ измеримых на $(-\infty;\infty)$, для которых

$$\int_0^\infty t^{\frac{\nu}{2}-1}\left[f^*(t)\right]^\nu dt<\infty,\ r>0, 0<\nu<\infty.$$

Множество $L(r,\nu)$ называется пространством Лоренца (см.[26], [27] с.216). При $\nu=r$ оно сводится к пространству $L_r(-\infty,\infty)$ (см. и [27].с.216).

Вопрос вложения L_p классов в пространством Лоренца для функций, заданных на конечном отрезке, и для периодических функций рассмотрены в работах [28]-[36] и др.

В этом параграфе рассмотрим вложения L_p классов в пространстве Лоренца для функций, заданных на всей вещественной оси. Здесь рассматриваются функции заданные на $(-\infty,\infty)$, а периодических функции неинтегрируемые на всей вещественной оси, поэтому ниже полученные результаты не являются обобщением известных результатов по данным вопросам, и способ получения вложения в пространство Лоренца совершенно отличается.

Теорема 1.9. Пусть числа $0<\nu<\infty$, функция $f(x)\in L_p(-\infty;\infty)$ $0<p<\infty$ и ряд

$$M=\sum_{n=2}^\infty n^{\frac{\nu}{r}-\frac{\nu}{p}-1}\omega^\nu\left(\frac{1}{n};e\right)_{L_p}<\infty,\qquad \frac{p}{p+1}<r<p.$$

Тогда функций $f(x)$ принадлежит пространству Лоренца $L(r,\nu)$ и имеет место неравенство:

$$\int_0^\infty t^{\frac{v}{r}-1}\left[f^*(t)\right]^v dt \le C\left\{M + \left|f(x)\right|_{L_p}^v\right\}$$

где константа С не зависит от f.

Теорема 1.10. Пусть $f(x)\in L_p(-\infty;\infty)$ $0<p<\infty$. Тогда:

1) если $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{v}{r}-\frac{v}{p}-1} A_n^v(f)_{L_p}<\infty$, $1\le p<\infty$, $\frac{p}{p+1}<r<p$, $1<v<\infty$, то функция $f(x)\in L_p(r;v)$;

2) если $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{v}{r}-\frac{v}{p}-v} A_n^v(f)_{L_p}<\infty$, $1\le p<\infty$, $\frac{p}{p+1}<r<p$, $0<v<1$, то функция $f(x)\in L_p(r;v)$;

3) если $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{v}{r}-\frac{v}{p}-1} A_n^v(f)_{L_p}<\infty$, $0<p\le 1$, $\frac{p}{p+1}<r<p$, $p<v$, то функция $f(x)\in L_p(r;v)$;

4) если $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{v}{r}-\frac{2v}{p}} A_n^v(f)_{L_p}<\infty$, $0<p\le 1$, $\frac{p}{p+1}<r<p$, $p\le v$, то функция $f(x)\in L_p(r;v)$.

Неулучшаемость условий теоремы 1.10 показывает следующая теорема.

Теорема 1.11. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{v}{r}-\frac{v}{p}-1}\alpha_n<\infty,\quad \alpha_n\downarrow 0,\quad n\to\infty$$

в случаях:

1) $1\le p,\quad r<p,\quad v>1,\quad 2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)\le\frac{1}{v},\quad \frac{p}{p+1}<r<p,$

2) $0<p<1$, $1<v$, $r<p$,

то в классе $M_p(\alpha_n)$ существует такая функция $\varphi(x)$, не принадлежащая пространству $L(r,v)$.

Здесь $M_p(\alpha_n)$-класс функции означает совокупность таких функций $f(x)\in_{Lp}(-\infty,\infty)$, для которых

$$A_n(f)_{Lp}=O(\alpha_n),\qquad 0<p\le\infty,$$

где последовательность $\{\alpha_n\}$ мотонно убывает к нулю и обладает свойством

$$\alpha_{n_{K+1}} < C\alpha_{n_{\kappa}}, \qquad n_K < n_{K+1}$$

Отметим, что типа теоремы 1.9 для функций заданных на отрезка $[0,1]$доказана Н. Темиргалиевным [32], а типа теоремы 1.10. для периодических функций доказана в [34].

Из теоремы 1.9 вытекает ещё одно утверждение.

Следствие 1.4. Если функция $f(x)\in Lip(\alpha,p)$, 0<α<1, 0<p<∞ на$(-\infty,\infty)$, то при $\frac{1}{r}<\alpha+\frac{1}{p}$; $f(x)\in L(r,\nu)$ $0<p<\infty$, $r<p$. В самом деле, если $f(x)\in Lip(\alpha,p)$, то $\omega(\delta;f)_{Lp}=0(\delta^{\alpha})$. Это обеспечивает выполнимость условия теоремы 1.9.

Доказательство теоремы 1.9.

Пусть *f*(x)* функция, являющаяся перестановкой функции $f(x)$ в убывающем порядке. Отметим, что если $|E|$-мера множества Е, то

$$\int_E f(t)dt \le \int_0^{|E|} f^*(t)dt. \tag{1.82}$$

Непосредственно получаем:

$$J=\int_0^{\infty} t^{\frac{\nu}{r}-1}\left[f^*(t)\right]^{\nu}dt=\sum_{K=0}^{\infty}\int_{2^K-14}^{2^{K+1}-1} t^{\frac{\nu}{r}}\left[f^*(t)\right]^{\nu}dt \le \frac{r}{2}\sum_{K=0}^{\infty}\left[f^*(2^K-1)\right]^{\nu}\left[\left(2^{K+1}-1\right)^{\frac{\nu}{r}}-\left(2^K-1\right)^{\frac{\nu}{r}}\right]\le$$

$$\le C(\nu,r)\sum_{K=0}^{\infty}2^K\left[f^*\left(2^K-1\right)\right]^{\nu},$$

где $C(\nu,r)$ константа, зависящая только от ν,r и в дальнейшем она означает различные константы в различных формулах.

На основании неравенства:

$$|a|^{\alpha}-|b|^{\alpha}\le|a-b|^{\alpha}, \qquad 0<\alpha\le 1$$

при $n=1,2,......$ получим

$$\omega^P\left(\frac{1}{2^n};f^*\right)_{Lp}\ge\int_{-\infty}^{\infty}\left|f^*\left(x+\frac{1}{2^n}\right)-f^*(x)\right|^P dx\ge\int_0^{\infty}\left|f^*\left(x+\frac{1}{2^n}\right)-f^*(x)\right|^P dx=$$

$$=\sum_{K=0}^{\infty}\int_{2^K-1}^{2^{K+1}-1}\left|f^*(x)-f^*\left(x+\frac{1}{2^n}\right)\right|^P dx\ge\sum_{K=n}^{\infty}\int_{2^K-1}^{2^{K+1}-1}\left|f^*(x)-f^*\left(x+\frac{1}{2^n}\right)\right|^P dx\ge \tag{1.83}$$

$$\ge 2^n\sum_{K=n}^{\infty}\left\{\left[f^*\left(2^K-1\right)\right]^P-\left[f^*\left(2^{K+1}-1\right)\right]P\right\}=2^n\left[f^*\left(2^n-1\right)\right]^P$$

.

Отсюда

$$f^*(2^n-1)\le 2^{-\frac{n}{P}}\omega\left(\frac{1}{2^n};f^*\right)_{Lp},\ 0<p\le 1\ . \tag{1.84}$$

Отметим, что

$$\omega(\delta;f^*)_{Lp}\le C\omega(\delta;f)_{Lp}\quad 0<p\le\infty\qquad . \tag{1.85}$$

Неравенство (1.85) доказывается также как в [37], где оно доказано при $p\ge 1$ для функции заданных на $[0,1]$. Из (1,83), (1,84) и (1.85) получим:

$$J\le C(\nu,r)\sum_{K=1}^{\infty}2^{K\frac{\nu}{r}}2^{-K\frac{\nu}{P}}\omega^{\nu}\left(\frac{1}{2^K};f^*\right)_{Lp}+\left[f^*(0)\right]^{\nu}\le C(\nu,r)\sum_{K=1}^{\infty}2^{K\left(\frac{\nu}{r}-\frac{\nu}{p}\right)}\omega^{\nu}\left(\frac{1}{2^K};f\right)_{Lp}+\left[f^*(0)\right]^{\nu}\le$$

$$\le C(\nu,r)\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{\nu}{r}-\frac{\nu}{p}-1}\omega^{\nu}\left(\frac{1}{n};f\right)_{Lp}+\left[f^*(0)\right]^{\nu}<\infty,$$

т.е. теорема 1.9 доказана для $0<p\le 1$. Рассмотрим случай $1<p<\infty$. Учитывая убывание функции $f^*(\alpha)$, при $n=1,2,...$ получим:

$$\omega^P\left(\frac{1}{2^n};f^*\right)_{Lp}\ge\int_0^{\infty}\left|f^*\left(x+\frac{1}{2^n}\right)-f^*(x)\right|^P dx\ge\sum_{K=n}^{\infty}\int\left|f^*\left(x+\frac{1}{2^n}\right)-f^*(x)\right|^P d\alpha\ge$$

$$\ge\left|f^*(2^n-1)-f^*(2^{n+1}-1)\right|^P\cdot 2^n.$$

Отсюда

$$\left|f^*(2^n-1)-f^*(2^{n+1}-1)\right|^P\le 2^{-n}\omega^P\left(\frac{1}{2^n};f^*\right)_{Lp}$$

$$\left[f^*(2^n-1)-f^*(2^{n+1}-1)\right]^P\le 2^{-\frac{n}{p}}\omega\left(\frac{1}{2^n};f^*\right)_{Lp}.$$

Учитывая это из неравенств (1.85), (1.86) и из условия теоремы (1.9), получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{n\frac{\nu}{r}}\left[f^*(2^n-1)-f^*(2^{n+1}-1)\right]^{\nu}\le\sum_{n=1}^{\infty}2^{n\left(\frac{\nu}{r}-\frac{\nu}{p}\right)}\omega^{\nu}\left(\frac{1}{2^n};f\right)_{Lp}\le$$
$$\le\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=2^n-1}^{2^{n+1}}m^{\frac{\nu}{r}-\frac{\nu}{p}-1}\omega^{\nu}\left(\frac{1}{m};f\right)_{Lp}=\sum_{m=1}^{\infty}m^{\frac{\nu}{r}-\frac{\nu}{p}-1}\omega^{\nu}\left(\frac{1}{m};f\right)_{Lp}<\infty. \tag{1.86}$$

Теперь нам нужна следующая лемма (см, [38]).

Лемма 1. Е. Пусть последовательность $\{b_k\}$ не возрастает, а последовательность $\{\mu_k\}$ такова, что

$$\sum_{K=0}^{n}\mu_K\le C\mu_n,\ \sum_{K=n}^{n}\mu_K^{-1}\le C\mu_n,\ n=0,1,2,...$$

Тогда ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n в_n^r, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\mu_n\left(в_n-в_{n+1}\right)^r$$

сходятся или расходятся одновременно. В силу леммы I. Е. при $\mu_n=2^{K\frac{\nu}{r}}\ в_n=f^*(2^n-1)$, и на основании (I. 86) находим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{n\frac{\nu}{r}}\left[f^*\left(2^n-1\right)\right]^{\nu}\langle\infty \qquad (1.86\ а)$$

Неравенства (1.83) и (1.86 а) дают утверждение теоремы при 1<p<∞. Доказательство теоремы завершено.

Доказательство теоремы 1.10. Рассмотрим случай 1<ν<∞. Известны следующие неравенства (см.[23], с.308 и [4])

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-K}\left(\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\right)^s\le C(k,s)\sum_{n=1}^{\infty}n^{-K}(n,a_n),\ \ k<1,\ s>1, \qquad (1.87)$$

$$\omega\left(\frac{1}{n+1};f\right)_{Lp}\le\frac{C}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n+1}A_{\nu-1}(f)_{Lp},\quad p\ge1\ . \qquad (1.88)$$

Так как $\frac{P}{p+1}<r<p$, то $0<\frac{\nu}{r}-\frac{\nu}{p}<\nu$, $\frac{\nu}{r}+\frac{\nu}{p}+\nu+1>1$.

(1.89)

Учитывая (1.89) и применяя неравенства (1.88), (1.87), а также не основании условия теоремы получим:

$$M=\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{\nu}{r}-\frac{\nu}{p}-1}\omega^{\nu}\left(\frac{1}{n};f\right)_{Lp}\le C(\nu)\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{\nu}{r}-\frac{\nu}{p}-1-\nu}\left(\sum_{\nu=1}^{n}A_{\nu-1}(f)_{Lp}\right)^{\nu}\le$$

$$\le C(\nu,p,r,)\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{\nu}{r}-\frac{\nu}{p}-\nu-1}\left(nA_{n-1}(f)_{Lp}\right)^{\nu}\le C(\nu,p,r,)\sum_{n-1}^{\infty}n^{\frac{\nu}{r}-\frac{\nu}{p}-1}A_{n-1}^{\nu}(f)_{Lp}<\infty$$

.

Теперь на основании теоремы 1.9. получим утверждение теоремы для случая $p\ge1,\ \nu>1$, т.е. случая 1). В случае $0<\nu\le1$, $p\ge1$, т.е. в случае 2) с помощью неравенства (1.88) и неравенства

$$\left(\sum_{K=1}^{n}a_K\right)^{\nu}\le\sum_{K=1}^{h}a_K^{\nu}\ , \qquad (1.90)$$

а также, меняя порядок суммирования, получим:

$$M\le\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{\nu}{n}-\frac{\nu}{p}-1}\left[\frac{C}{n}\sum_{K=1}^{n}A_{K-1}(f)_{Lp}\right]^{\nu}\le C(\nu)\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{\nu}{n}-\frac{\nu}{p}-1-\nu}\sum_{K=1}^{n}A_{K-1}^{\nu}(f)_{Lp}\le$$

$$\le C(\nu)\sum_{K=1}^{\infty}A_{K-1}^{\nu}(f)_{Lp}\sum_{n=K}^{\infty}n^{\frac{\nu}{r}-\frac{\nu}{p}-\nu-1}\le C(\nu)\sum_{K=1}^{\infty}n^{\frac{\nu}{r}-\frac{\nu}{p}-\nu}A_{K=1}^{\nu}(f)_{Lp}<\infty$$

.

Теперь, применяя теорему 1.9, получим утверждение теоремы для случая 0<ν≤1, p≥1, т.е. для случая 2). Рассмотрим случай 0<p≤1, p< ν, т.е. случай 3).

Автором доказано, что (см. [22])

$$\omega\left(\frac{1}{n+1}; f\right)_{Lp} \le \frac{C}{n+1}\left\{\sum_{K=1}^{n+1} K^{P-1} A_{K-1}^{P}(f)_{Lp}\right\}^{\frac{1}{p}} \quad, 0<\nu\le 1 \,. \tag{1.91}$$

Учитывая (1,89) и применяя неравенства (1.91), (1,87), а также на основании условия теоремы получим:

$$M \le C(\nu)\sum_{n=2}^{\infty} n^{\frac{\nu}{r}-\frac{\nu}{p}-1-\nu}\left\{\sum_{K=1}^{n+1} K^{P-1} A_{K-1}^{P}(f)_{Lp}\right\}^{\frac{\nu}{p}} \le C(\nu)\sum_{n=2}^{\infty} n^{\frac{\nu}{r}-\frac{\nu}{p}-1-\nu}\left\{n\cdot n^{P-1}A_{n-1}^{P}(f)Lp\right\}^{\frac{\nu}{p}} \le$$

$$\le C(\nu)\sum_{n=2}^{\infty} n^{\frac{\nu}{r}-\frac{\nu}{p}-1} A_{n-1}^{\nu}(f)_{Lp} < \infty$$

Применяя теорему 1.9, получим утверждение теоремы для случая 3). Наконец, рассмотрим случай $0 < p \le 1, \quad \nu \le p$, т.е. случай 4). В силу неравенств (1.91), (1.90) и, учитывая условие теоремы, получим:

$$M \le C(\nu)\sum_{n=r}^{\infty} n^{\frac{\nu}{r}-\frac{\nu}{p}-1} n^{-\nu}\sum_{k=1}^{n+1} k^{\nu-\frac{\nu}{p}} A_{k-1}^{\nu}(f)_{L_p} \le C(\nu)\left\{\|f(x)\|_{L_p}^{\nu} + \sum_{k=2}^{\infty} k^{\nu-\frac{\nu}{p}} A_{k-1}^{\nu}(f)_{L_p}\sum_{n=k}^{\infty} n^{\frac{\nu}{r}-\frac{\nu}{p}-\nu-1}\right\} \le$$

$$\le C(\nu)\left\{\|f(x)\|_{L_p}^{\nu} + \sum_{k=2}^{\infty} k^{\frac{\nu}{r}-\frac{2\nu}{p}} A_{k-1}^{\nu}(f)_{L_p}\right\} < \infty.$$

Применяя теорему 1.9, получим утверждение теоремы для случая 4). Доказательство теоремы 1.10 завершено.

Доказательство теоремы 1.11. Сначала рассмотрим случай 1<p<∞. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\alpha_n - \alpha_{n+1})\frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{x^2}, \qquad a_n = n^{\frac{2}{r}-\frac{1}{p}-\frac{1}{\nu}-2}, \quad 2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right) \le \frac{1}{\nu}, \quad r < p,$$

который сходится в $Lp(-\infty,\infty)$ $(1 \le p\langle\infty)$ и обозначим его сумму через $f_0(x)$ (см. доказательство соотношения (1.71.А)).

Убедимся, что при любом $1 \le p\langle\infty$ функция $f_0(x) \in M_P(\alpha_n)$. Отметим, что

$$\left\| \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{x^2} \right\|_{Lp} = C(P) n^{2-\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty .$$

Так как функция $\frac{1}{x^2}\sin^2\frac{nx}{2}$ есть целая функция степени *n*, то

$$Q_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n(\alpha_n - \alpha_{n+1}) \frac{1}{x^2} \sin^2 \frac{nx}{2}$$

является целой функцией степени N. В силу (1.92) и, учитывая, что $2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right) \le \frac{1}{\nu}, \quad r < p$ получим

$$\| f_0(x) \|_{Lp} \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\alpha_n - \alpha_{n+1}) \left\| \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{x^2} \right\|_{Lp} \le C(P) \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{\nu}} (\alpha_n - \alpha_{n+1}) \le C(P) \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \alpha_{n+1}) \le C(P)\alpha_1 < \infty$$

Аналогично получим, что

$$A_N(f_0)_{Lp} \le \| f_0(x) - Q_N(x) \|_{Lp} \le \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(\alpha_n - \alpha_{n+1}) \cdot \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{x^2} \right\|_{Lp} \le \tag{1.93}$$

$$\le C(P) \sum_{n=N+1}^{\infty} (\alpha_n - \alpha_{n+1}) \le C(P)\alpha_{N+1}$$

Следовательно, $f_0(x) \in M_p(\alpha_n)$.

Покажем теперь, что в условии теоремы функция $f_0(x)$ не принадлежит пространству Лоренца L(r, ν). Будем пользоваться следующим известным неравенством (см.[23], с. 296).

$$\int_0^\infty x^{-S} \left(\int_0^x \varphi(t) dt \right)^q_{dx} \le C(q) \int_0^\infty x^{-S} (x\varphi(x))^q dx, \text{ s>1, q>1, } \varphi(t) \ne 0 \tag{1.94}$$

Обозначим $f_0^*(t)$ перестановку функции $|f_0(x)|$ в убывающем порядке (см. доказательство теоремы 1.9). Применяя неравенство (1.94) для функции $f_0^*(t)$ при $\nu > 1, \nu + 1 - \nu > 1, \quad r > 1$, в силу неравенства (1.82) получим:

$$J = \int_0^\infty t^{\frac{\nu}{r} - 1} \left[f_0^*(t) \right]^\nu dt = \int_0^\infty \left[t f_0^*(t) \right]^\nu t^{\frac{\nu}{r} - \nu - 1} dt \ge C(\nu) \int_0^\infty x^{\frac{\nu}{r} - \nu - 1} \left(\int_0^x f_0^*(t) dt \right)^\nu dx = C(\nu) \int_0^\infty x^{\frac{\nu}{r} - \nu - 1} \left(\int_0^x | f_0(t) | dt \right)^\nu dx . \tag{1.95}$$

Так как $\nu > 1$, то:

$$\left(\int_0^x |f_0(x)|dt\right)^{\nu} \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\nu}(\alpha_n - \alpha_{n+1})^{\nu} \left(\int_0^x \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{t^2} dx\right)^{\nu} . \tag{1.96}$$

Так как $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то:

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{\nu}{r}-\nu-1} \left(\int_0^x \frac{1}{t^2} \sin^2 \frac{nt}{2} dt\right)^{\nu} dx \geq C(\nu) \int_0^{\pi/n} x^{\frac{\nu}{r}-\nu-1} n^{-\nu} x^{\nu} dx = C(\nu) n^{2\nu - \frac{\nu}{r}} . \tag{1.97}$$

Теперь из (1.95), (1.96), (1.97) вытекает, что

$$J \geq C(\nu) \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\nu} (\alpha_n - \alpha_{n+1})^{\nu} n^{r\nu - \frac{\nu}{r}} = C(\nu) \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\nu}{r} - \frac{\nu}{p} - 1} (\alpha_n - \alpha_{n+1})^{\nu} . \tag{1.98}$$

Так как последовательность $\{\alpha_n\}$ удовлетворяет условиям

$$\alpha_{n_{k+1}} \leq c\alpha_{n_k} , \quad n_k < n < n_{k+1} ,$$

то

$$\sum_{m=n_k}^{n_{k+1}} m^{\frac{\nu}{r} - \frac{\nu}{p} - 1} (\alpha_n - \alpha_{n+1})^{\nu} \geq c n_{k_k}^{\frac{\nu}{r} - \frac{\nu}{p}} \alpha_{n_k}^{\nu} . \tag{1.99}$$

Наконец, из (1.98) и (1.99) и из условия теоремы получим:

$$J \geq C(\nu) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}} n^{\frac{\nu}{r} - \frac{\nu}{p} - 1} (\alpha_n - \alpha_{n+1})^{\nu} \geq c(\nu) \sum_{k=1}^{\infty} n_k^{\frac{\nu}{r} - \frac{\nu}{p}} \alpha_{n_k}^{\nu} \geq c(\nu) \sum_{k=1}^{\infty} n^{\frac{\nu}{r} - \frac{\nu}{p}} \alpha_n^{\nu} = \infty ,$$

т.е. утверждение теоремы для случая 1).

Рассмотрим случай 2). Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=r}^{\infty} b_n (\alpha_n - \alpha_{n+1}) \left(\frac{\sin \frac{nx}{2q}}{x} \right)^{2q} , \quad q = \frac{1}{p} \ (0<p<1), \quad b_n = n^{\frac{2}{r} - \frac{1}{\nu} - \frac{3}{p}}, \ 0<r<p, \ \nu>1 ,$$

b(1.100)

где числа r, p, ν выбрана так, чтобы

$$\frac{2}{r} - \frac{1}{\nu} < \frac{1}{p} + 1. \tag{1.101}$$

Ряд (1.100) сходится в метрике $L_p(-\infty, \infty)$, $0 < p < 1$.
(см. способ получение (1.71.А)) и обозначим его сумму через *$f_1(x)$*.

Отметим, что при условии (1.101)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n^p)^{q'}<\infty, \qquad \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1. \tag{1.102}$$

Убедимся, что $f_1(x)\in L_p(-\infty,\infty), \quad 0<p<1.$

В самом деле, в силу равенства (1.92), применяя неравенство Гельдера и учитывая (1.102), получаем:

$$\|f_1(x)\|_{L_p}^p \le \sum_{n=2}^{\infty} b_n^p(\alpha_n-\alpha_{n+1})^p \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2q}}{x}\right)^2 dx =$$

$$= c(p)\sum_{n=2.}^{\infty} b_n^p n(\alpha_n-\alpha_{n+1})^p \le c(p)\left\{\sum_{n=2}^{\infty}\left(nb_n^p\right)^{q'}\right\}\left\{\sum\left(2_n-2_{n+1}\right)\right\}^p \le$$

$$\le C(p)\left\{\sum_{n=2}^{\infty}(\alpha_n-\alpha_{n+1})\right\}^p = C(p)\alpha_2^p<\infty.$$

Отметим, что

$$g_N(x)=\sum_{n=1}^{N} b_n(\alpha_n-\alpha_{n+1})\left(\frac{\sin\frac{nx}{2q}}{x}\right)^{2q}$$

есть целая функция степени *N*. Тогда в силу равенства (1.92), применяя неравенство Гельдера и учитывая (1.102), получим:

$$A_N^p(f_1)_{L_p} \le \|f_1(x)-g_N(x)\|_{L_p}^p \le C(p)\sum_{n=N+1}^{\infty} b_n^p n(\alpha_n-\alpha_{n+1})^p \le$$

$$\le C(p)\left\{\sum_{n=N+1}^{\infty}(\alpha_n-\alpha_{n+1})\right\}^p\left\{\sum_{n=N+1}^{\infty}(b_n^p n)^{q'}\right\}^{\frac{1}{q'}} \le C(p)\left[\sum_{n=N+1}^{\infty}(\alpha_n-\alpha_{n+1})^p\right] \le C(p)\alpha_{N+1}^p. \tag{1.103}$$

Следовательно, $f_1(x)\in M_p(\alpha_n), \quad 0<p<1.$

Теперь докажем, что функция $f_1(x)$ не принадлежит пространству $L(r,v)$ при $v>1, \ 0<r<p<1$.

Известно следующее (см. [23], с.296)

$$\int_o^{\infty} x^{-p}(xf(x))^v dx > \left(\frac{|p-1|}{v}\right)^v \int_o^{\infty} x^{-p}\left(\int_x^{\infty} f(t)dt\right)^v, \quad p<1,\ v>1,\ f(x)\neq 0 \tag{1.104}$$

Так как $r<1, \quad v>1,$ то $-\frac{v}{r}+v+1<1.$ Тогда, применяя неравенство (1.104), получим:

$$J=\int_0^{\infty} t^{-\left(-\frac{v}{r}-1\right)}\left[tf_1^*(t)\right]^v dt = \int_0^{\infty} t^{-\left(-\frac{v}{r}+v+1\right)}\left[tf_1^*(t)\right]^v dt \ge$$

$$\geq c(\nu,r)\int_0^\infty x^{\frac{\nu}{r}-\nu-1}\left(\int_x^{2x} f_1^*(t)dt\right)^\nu \geq c(\nu,r)\int_0^\infty x^{\frac{\nu}{r}-\nu-1}\left(\int_x^{2x} f_1^*(t)dt\right)^\nu \quad . \qquad (1.105)$$

Рассмотрим внутренний интеграл

$$\int_x^{2x} f_1^*(t)dt = \int_0^{2x} f_1^*(t)dt - \int_0^x f_1^*(t)dt = \left[1 - M\left(f_1^*\right)\right]\int_0^{2x} f_1^*(t)dt \ , \qquad (1.106)$$

где

$$M(f^*) = \frac{\int_0^x f_1^*(t)dt}{\int_0^{2x} f_1^*(t)dt} < 1.$$

Из (1.105) и (1.106) получим:

$$J \geq N\left(f^*\right)C(\nu,r)\int_0^\infty x^{\frac{\nu}{r}-\nu-1}\left(\int_0^{2x} f_1^*(t)dt\right)^\nu dx, \qquad (1.107)$$

где

$$N\left(f^*\right) = \inf \quad \left[1 - M\left(f^*\right)\right]^\nu .$$

В силу неравенства (1.82) получаем:

$$\left(\int_0^{2x} f_1^*(t)dt\right)^\nu \geq \left(\int_0^{2x}\left|f_1(t)\right|dt\right)^\nu \geq \sum_{n=2}^\infty b_n^\nu(\alpha_n - \alpha_{n+1})^\nu \left(\int_0^{2x}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2q}}{t}\right)^{2q} dt\right)^\nu . \qquad (1.108)$$

Так как $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ при $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$, то

$$U = \int_0^\infty x^{\frac{\nu}{r}-\nu-1}\sum_{n=2}^\infty b_2^\nu(\alpha_n - \alpha_{n+1})^\nu\left[\int_0^{2x}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2q}}{t}\right)^{2q} dt\right]^\nu dx \geq c(q,\nu)\sum_{n=2}^\infty b_n^\nu\left((\alpha_n - \alpha_{n+1})^\nu\right)\int_0^{\frac{q\pi}{2n}}\left(n^{2q\nu}x^\nu\right)x^{\frac{\nu}{r}-\nu-1}dx \geq$$

$$\geq C(p,\nu)\sum_{n=2}^\infty b_n^\nu(\alpha_n - \alpha_{n+1})^\nu n^{\frac{2\nu}{p}}\int_0^{\frac{q\pi}{2n}} x^{\frac{\nu}{r}-1}dx \geq C(p,\nu,r)\sum_{n=2}^\infty b_n^\nu(\alpha_n - \alpha_{n+1})^\nu n^{\frac{2\nu}{p}}\cdot n^{-\frac{\nu}{r}} =$$

$$= C(p,\nu,r)\sum_{n=2}^\infty n^{\frac{2\nu}{r}-1-\frac{3\nu}{p}}(\alpha_n - \alpha_{n+1})^\nu n^{\frac{2\nu}{p}-\frac{\nu}{r}} = C(p,\nu,r)\sum_{n=2}^\infty n^{\frac{\nu}{r}-\frac{\nu}{p}-1}(\alpha_n - \alpha_{n+1})^\nu . \qquad (1.109)$$

Теперь, учитывая (1.99) и свойства последовательности $\{\alpha_n\}$, из (1.109), а также из условия теоремы, получим:

$$U \ge C(p,v,r)\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}} n^{\frac{v}{r}-\frac{v}{p}-1}\left(\alpha_n-\alpha_{n+1}\right)^v \ge C(p,v,r)\sum_{n=1}^{\infty} n_k^{\frac{v}{r}-\frac{v}{p}^{v}}\alpha_{n_k}^v \ge C(p,v,r)\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{v}{r}-\frac{v}{p}-1^{v}}\alpha_n^v=\infty$$

(1.110)

Из (1.107), (1.108), (1.109) и (1.110) вытекает утверждение теоремы для случая 2). Доказательство теоремы I.II завершено.

Замечание. На основании неравенства (1.93) и неравенства (1.103), теоремы 1.10, 1.11 утверждаем, что условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{v}{r}-\frac{1}{p}-1} A_n^v(f)_{L_p}<\infty$$

является необходимым и достаточным для вложения $L_P(-\infty,\infty)$ классов в пространство Лоренца $L(r,v)$ в случаях: 1) $p\ge 1$, $\frac{p}{p+1}<r<p, \quad v>1;$

2) $0<p<1, \quad 0<r<p, \quad v>1$

В вышедоказанных теоремах предполагалось, что $1\le r<p$ и функции из класса $L_p(-\infty,\infty).$ В отличие от функций, заданных на конечном отрезке для двух p и r классы $L_p(-\infty,\infty)$ и $L_r(-\infty,\infty)$ не содержатся один в другом.

В связи с этим в ниже доказываемых теоремах предполагается, что функция $f(x)$ из класса $L_r(-\infty,\infty), \quad r<p$

Теорема 1.12. Пусть $f(x)x\in L_r(-\infty,\infty), \quad r\ge 1$ и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{p}{r}-2}\omega^p\left(\frac{1}{n};f\right)L_r<\infty, \qquad r<p \tag{1.111}$$

Тогда для включения $L_r(-\infty,\infty)$, в пространство $L(r,v), v>0$ достаточно условие:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{2v}{r}-\frac{3v}{p}}\omega^v\left(\frac{1}{k};f\right)L_r<\infty$ при $0<v<1$ или $1\le r<v<p;$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\left(\frac{v}{r}-\frac{v}{p}\right)-1}\omega^v\left(\frac{1}{n};f\right)L_r<\infty$ при $1\le r<p<v;$

Доказательство теоремы 1.12. Из условия (1.111) (см.[13]), вытекает, что $f(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ и имеет место неравенство:

$$\omega\left(\frac{1}{n}; f\right)L_p \le C\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\frac{p}{r}-2}\omega^p\left(\frac{1}{k}; f\right)L_r\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{1.112}$$

Известно неравенства (см. [23] , с. 308)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-a}\left(\sum_{v=n}^{\infty} a_v\right)^b \le M(a,b)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-a}(na_n)^b, \tag{1.113}$$

$a>1$, $b>1$.

Для доказательства теоремы достаточно показать выполнимость условия теоремы 1.9. Так как $\frac{v}{r}-\frac{v}{p}-1>-1$ при $1\le r\le p,\quad v<1$, то на основании неравенства (1.112) получим:

$$M=\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{v}{r}-\frac{v}{p}-1}\omega^v\left(\frac{1}{n}; f\right)L_p \le \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{v}{r}-\frac{v}{p}-1}\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\frac{p}{2}-2}\omega^p\left(\frac{1}{k}; f\right)L_p\right\}^{\frac{v}{p}} \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{v}{r}-\frac{v}{p}-1}\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\frac{v}{r}-\frac{2v}{p}}\omega^v\left(\frac{1}{k}; f\right)L_r \le \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{v}{r}-\frac{2v}{p}-1}\omega^v\left(\frac{1}{k}; f\right)L_r\sum_{n=1}^{k} n^{\frac{v}{r}-\frac{v}{p}-1} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{v}{r}-\frac{2v}{p}-1}\cdot k^{\frac{v}{r}-\frac{v}{p}}\omega^v\left(\frac{1}{k}; f\right)L_r = \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{2v}{r}-\frac{3v}{p}}\cdot\omega^v\left(\frac{1}{k}; f\right)L_r = \infty.$$

Если $1<v<p$, то аналогично получаем:

$$M=\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{2v}{r}-\frac{3v}{p}-1}\omega^v\left(\frac{1}{k}; f\right)L_r<\infty.$$

Так как $-\frac{v}{r}+\frac{v}{p}+1<1$ при r<p , то из неравенств (1.112), (1.113) при $1<p<v$ получим:

$$M=\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{v}{r}-\frac{v}{p}-1}\left[n\cdot n^{\frac{p}{r}-2}\omega^p\left(\frac{1}{n}; f\right)L_r\right]^{\frac{v}{p}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{v}{r}-\frac{v}{p}-1+\frac{v}{p}+\frac{v}{r}-\frac{2v}{p}}\omega^v\left(\frac{1}{n}; f\right)L_r = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{2v}{r}-\frac{3v}{p}-1}\cdot\omega^v\left(\frac{1}{n}; f\right)L_r<\infty.$$

Теорема доказана.

Теорема 1.13. Пусть $f(x)\in L_r(-\infty,\infty),\quad r\ge 1$ и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{p}{r}-2}A_n^p(f)L_r<\infty, \qquad r<p. \tag{1.114}$$

Тогда для включения $L_r(-\infty,\infty)$ в пространство $L(r,v)\quad v>p$ достаточно условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\left(\frac{v}{r}-\frac{v}{p}\right)-1}A_n^v(f)L_r<\infty. \tag{1.115}$$

Доказательство теоремы 1.13. Условия (1.114) вытекает, что (см.[13]) $f(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ и неравенство

$$A_n(f)_{L_p} \le (n+1)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}} A_n(f)_{L_r} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} k^{\frac{p}{2}-2} A_k^p(f)_{L_r} \right)^{\frac{1}{r}}, \quad 1 \le r < p.$$

(1.116)

Для доказательства теоремы достаточно показать выполнимость условия теоремы 1.10. В силу неравенств (1.116) и (1.113) при $1 \le r < p < v$ получим: (см. (115))

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{v}{r}-\frac{v}{p}-1} A_n^v(f) L_p \le \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{v}{r}-\frac{v}{p}-1} (n+1)^{\frac{v}{r}-\frac{v}{p}} A_n^v(f) L_r +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{v}{r}-\frac{v}{p}-1} \left[(n+1)(n+1)^{\frac{p}{r}-2} A_{n+1}^p(f) L_r \right]^{\frac{v}{p}} \le \sum_{n=1}^{\infty} n^{2v\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)-1} A_n^v(f) L_r < \infty,$$

т.е. теорема доказана.

ГЛАВА II
НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ И МОДУЛЬ ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_p(-\infty, \infty)$ ДЛЯ $0<p<1$

§ 1. Введение

В теории приближения функций важную роль играет так называемые прямые и обратные теоремы.

В пространствах L_p для $1\leq p\leq\infty$ эти теоремы хорошо известны. Отметим, что прямая теорема теории приближения, т.е. первая теорема Джексона

$$A_G(f)_{L_P} \leq C(k)\omega_k\left(\frac{1}{\sigma};f\right)_{L_P}, k=1,2,\ldots \tag{2.1}$$

При $p=\infty$ и $k=1$ доказано С.Н.Бернштейном ([40], с. 373), для $k=2$, $1\leq p\leq\infty$ А.С.Джафаровым [41].

Неравенство (2.1) улучшено по порядку М.Ф. Тиманом [14] при $1<p<\infty$. Обратная теорема теории приближения в $L_p(-\infty, \infty)$, т.е.

$$\omega_k\left(\frac{1}{\sigma};f\right)_{L_P} \leq \frac{C(k)}{\sigma^k}\sum_{V=0}^{[G]}(V+1)^{k-1}A_\nu(f)_{L_P} \tag{2.2}$$

доказана М. Ф. Тиманом [4], при $1<p<\infty$ в [42] для любого $1\leq p\leq\infty$ и для любого $k\geq1$. При $1<p<\infty$ неравенство (2.2) улучшено в смысле порядка [4], [42]. Для $0<p<1$неравенство (2.1) и аналог неравенства (2.2) получен автором в [49], [39].

В этой главе доказываются неравенство (2.1) и аналог неравенства (2.2) для функций, заданных на всей вещественной оси в случае $0<p<1$. Как известно, доказательство обратной теоремы при $1\leq p\leq\infty$ (неравенство (2.2)) опирается на неравенство С.Н. Бернштейна. Для случая $0<p<1$ оно устанавливается нами ниже.

§2. Неравенство С. Н. Бернштейна в пространстве $L_p(-\infty, \infty)$ для 0<p<1

В этом параграфе установим свойство целых функций, которое играет важную роль в теории приближений.

Теорема 2.1. Если целая функция $Q_\sigma(x)\epsilon L_P(-\infty,\infty)$, $0 < p < 1$, $1 \le p \le \infty$ степени $\le\sigma$, то для любого $k = 1,2,\ldots$ имеет место неравенство:

$$\left\| Q_\sigma^{(k)}(x) \right\|_{L_P} \le C_{P,k}\sigma^k \|Q_\sigma(x)\|_{L_P}, \qquad (2.3)$$

где $C_{P,k}$ – константа зависит только от P, k. Отметим, что теорема 2.1 $C_P = 1$ $p = \infty$ получена С.Н.Никольском (см. [1],с 137), Н.И. Ахиезером [20].

Неравенство (2.3) для тригонометрического полинома с константой $C_P = 1$ $(0 < p < 1)$ получено В.В. Арестовым [47]

Теорема 2.2. В условиях теоремы 2.1 для производной дробного порядка $\alpha > 0$ в смысле Вейля –Моршо имеет место неравенство:

$$\left\| Q_\sigma^{(\alpha)}(x) \right\|_{L_P} \le (P,\alpha)\sigma^\alpha \|Q_\sigma(x)\|_{L_P}, \frac{1}{1+\alpha} < p < 1.$$

Замечание. Для производной дробного порядка $\alpha > 0$ от тригонометрического полинома имеет место неравенство:

$$\left\{ \int_0^{2\pi} \left| T_n^{(\alpha)}(x) \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \le C(p,\alpha) n^\alpha \left\{ \int_0^{2\pi} \left| T_n^{(\alpha)}(x) \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$\frac{1}{1+\alpha} < p < 1. \qquad (2.5)$$

В случае $1 \le p \le \infty$ неравенство (2.5) при $1 < \alpha < 1$ с константой зависящий от α, а при $\alpha \ge 1$ с константой, равным 1 доказано в [53] (см. [53], стр.277-278).

Отметим также, что неравенства типа (2.5) получено И. П. Лизоркиным в [51] для $1 \le p \le \infty$ и $\alpha \ge 1$.

Отметим, что вопрос оценки производных алгебраического полинома начатое С. Н. Бернштейном [40] была развита в работах В.С. Виденского [133]- [137].

Доказательство теоремы 2.1.

Достаточно даказать при к=1. Известно, что (см. [50]) производная первого порядка от целой функции $Q_\sigma(t)$ степени ≤ σ представляется следующим образом:

$$Q'_\sigma(x) = \frac{(2\tau+1)^2}{\pi}\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} Q_\sigma(x+t) g_{\tau,\sigma}(t) \left(\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)^{2\tau}, \qquad (2.6)$$

$$\left|g_{r,\sigma}(t)\right| \le 1, \qquad r = 1,2, \dots.$$

Так как функция

$$Q_\sigma(x+y)\left(\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)^{2\tau} = H_\sigma^\tau(x,t)$$

является целой функцией степени не больше, чем

$\sigma(2\tau+1)$ относительно переменной t, то, применяя неравенство С.Н.Никольского (см. [12], с.248)

$$\|Q_\sigma(x)\|_{Lq} \le \left(\frac{q_0 6}{2\pi}\right)^{\frac{1}{P}\frac{1}{q}} \|Q_\sigma(x)\|_{L_P},\ \ q \ge p > 0 \qquad (2.7)$$

(q_0-наименьшее чётное число ($q_0 \ge q$))

при 0<p<q=1 получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H_\sigma^\tau(x,t)| dt \le \left(\frac{\varrho_0}{2\pi}\delta(2\tau+1)\right)^{\frac{1}{P}-1} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |H_\sigma^\tau(x,t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}. \qquad (2.8)$$

В силу (2.8) из неравенства (2.6) получим:

$$\|Q_6^1(x)\|_{L_P}^P \le \frac{1}{\pi^P}(2\tau+1)^{2\rho}\sigma^{2\rho}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |H_\sigma^\tau(x,t)| g_{\tau,\sigma}(t) dt\right)^P dx \le$$

$$\le \frac{1}{\pi^\rho}(2\tau+1)^\rho \sigma^{2\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sigma(2\tau+1)}{\pi}\right]^{1-\rho} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |H_\sigma^\tau(x,t)|_{dt}^\rho\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi^\rho}(2\tau+1)^{\rho+1}\sigma^{\rho+1}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right|_{dt}^{2\rho}. \qquad (2.9)$$

Отметим, что (см.[1], с.151)

$$\left\|\frac{sin^2 \nu x}{x^2}\right\|_{L_\varrho} = C_\varrho \nu^{2-\frac{1}{\varrho}}, \varrho \geq 1 \ . \qquad (2.10)$$

Теперь выберем τ так, чтобы $\tau\rho \geq 1$. Тогда в силу (2.10) имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{sin\sigma t}{\sigma t}\right|^{2\tau\rho} = C_\rho \sigma^{-1}. \qquad (2.11)$$

Из (2.9) и (2.11) получим:

$$\|Q_6^1(x)\|_{L_P}^\rho \leq \frac{(2\tau+1)^{\rho+1}}{\pi} \sigma^{\rho+1} C\sigma^{-1} \|Q_\sigma(x)\|_{L_P}^\rho$$

$$= \frac{C_\rho (2\tau+1)^{\rho+1}}{\pi} \sigma^\rho \|Q_\sigma(x)\|_{L_P}^\rho$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.2. Сначала рассмотрим случай 0$\leq \alpha < 1$. Производная Вейля-Моршо для функции, заданной на всей вещественной оси, представляется (см. [52]) в следующим виду:

$$f^{(\alpha)}(x) = \frac{\alpha}{\gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)-f(x+t)}{t^{1+\alpha}} dt, \quad 0 < \alpha < 1, \qquad (2.12)$$

где $\gamma(x)$гамма функция Эйлера. На основании (2.12), применяя неравенство (2.7) получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|Q_\sigma^{(\alpha)}(x)\right|_{dx}^\rho \leq \left(\frac{\alpha}{\gamma(1-\alpha)}\right)^\rho \int_{-\infty}^{\infty} \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_\sigma(x)+Q_\sigma(x\pm t)}{t^{1+\alpha}} dt\right|^\rho dx \leq$$

$$\leq C(\alpha,\rho)\sigma^{1-\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\|Q_\sigma(x)-Q_\sigma(x+t)\|_{L_P}}{t^{(1+\alpha)\rho}} dt = C(\alpha,\rho)\sigma^{1-\rho} \left(\int_0^{\frac{1}{\sigma}} + \int_{\frac{1}{\sigma}}^{\infty}\right) \qquad (2.13)$$

Теперь оценим интегралы в правой части неравенства (2.13). Применяя теорему Лагранжа, и в силу неравенства (2.3) получим:

$$\gamma_1 = \int_0^{\frac{1}{\sigma}} \frac{\|Q_\sigma(x) - Q_\sigma(x\pm t)\|_{L_P}^\rho}{t^{(1+\alpha)\rho}} \leq \int_0^{\frac{1}{\sigma}} \frac{t^p \|Q_6^1(x)\|_{L_P}^\rho}{t^{(1+\alpha)\rho}} dt$$

$$= \|Q_6^1(x)\|_{L_P}^\rho \int_0^{\frac{1}{\sigma}} t^{-\alpha\rho}\, dt_{\leq}$$

$$\leq \frac{1}{1-\alpha\rho}\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{1-\alpha\rho} \|Q_6^1(x)\|_{L_P}^{\rho} \leq C(\alpha,\rho)\sigma^{\alpha 1-\rho}\|Q_6(x)\|_{L_P}^{\rho}\cdot\sigma^{\rho} =$$
$$= C(\alpha,\rho)\sigma^{(\alpha+1)\rho-1}\|Q_6(x)\|_{L_P}^{\rho}. \qquad (2.14)$$

Далее, учитывая, что

$$\|Q_\sigma(x) - Q_\sigma(x\pm t)\|_{L_P}^{\rho} \leq 2\|Q_6(x)\|_{L_P}^{\rho},$$

при $\frac{1}{1+\alpha} < \rho < 1$ получим:

$$\gamma_2 = \int_{\frac{1}{\sigma}}^{\infty} \frac{\|Q_\sigma(x) - Q_\sigma(x\pm t)\|_{L_P}^{\rho}}{t^{(1+\alpha)\rho}} dt \leq \|Q_6(x)\|_{L_P}^{\rho}\ \frac{2}{(1+\alpha)\rho-1}\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{1-(1+\alpha)\rho} \leq$$
$$C(\alpha,\rho)\cdot\sigma^{(\alpha+1)\rho-1}\|Q_6(x)\|_{L_P}^{\rho}. \qquad (2.15)$$

Теперь из (2.13), (2.14), (2.15) получим:

$$\left\|Q_6^{(\alpha)}(x)\right\|_{L_P}^{\rho} \leq C(\alpha,\rho)\sigma^{\alpha\rho}\|Q_6(x)\|_{L_P}^{\rho},$$

т.е. утверждение теоремы для $0 \leq \alpha < 1$.

Рассмотрим случай $\alpha \geq 1$. Будем пользоваться следующим представлением (см.[53], с. 100-102).

$$f^{(\alpha)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f^{(\beta)}(x) = \frac{\gamma(\beta)}{\gamma(\beta-1)}\int_0^\infty \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x-t)}{t^{1+\beta}} dt, \qquad (2.16)$$
$$\beta = \{\alpha\}, \qquad n = [\alpha], \qquad \alpha = n+\beta.$$

На основании (2.16) применяя неравенства (2.7) при $0 < \rho < q = 1$ и (2.3), получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f^{(\alpha)}(x)\right|^{\rho} dx \leq C(\beta,\rho)\cdot\sigma^{1-\rho}\int_0^\infty \frac{\left\|Q_\sigma^{(n)}(x) - Q_\sigma^{(n)}(x-t)\right\|_{L_P}^{\rho}}{t^{(1+\beta)\rho}} dt \leq$$
$$\leq C(\beta,n,\rho)\cdot\sigma^{1-\rho}\sigma^{n\rho}\int_0^\infty \frac{\|Q_\sigma(x) - Q_\sigma(x-t)\|_{L_P}^{\rho}}{t^{(1+\beta)\rho}} dt =$$
$$= C(\beta,n,\rho)\cdot\sigma^{1-\rho+n\rho}\left(\int_0^{\frac{1}{\sigma}} + \int_{\frac{1}{\sigma}}^{\infty}\right). \qquad (2.17)$$

Теперь в силу неравенства (2.14) и (2.15) имеем:

$$\int_0^{\frac{1}{\sigma}} \frac{\|Q_\sigma(x)-Q_\sigma(x-t)\|_{L_P}^\rho}{t^{(1+\beta)\rho}} \leq C(\beta,\rho)\cdot\sigma^{(\beta+1)\rho-1}\,\|Q_6(x)\|_{L_P}^\rho\,, \qquad (2.18)$$

$$\int_{\frac{1}{\sigma}}^{\infty} \frac{\|Q_\sigma(x)-Q_\sigma(x-t)\|_{L_P}^\rho}{t^{(1+\beta)\rho}}\,dt \leq\; C(\beta,n,\rho)\cdot\sigma^{(\beta+1)\rho-1}\|Q_\sigma(x)\|_{L_P}^\rho = C(d,P)\cdot\sigma^{dP}\,\|Q_\sigma(x)\|_{L_P}^P \qquad (2.19)$$

т.е.утверждение теоремы для $\alpha \geq 1$.

Доказательство теоремы завершено.

Неравенство (2.5) доказывается таким же способом с помощью следующих неравенств:

$$\left\|T_n^{(k)}(x)\right\|_{L_P} \leq C(P,k)n^k\|T_n(x)\|_{L_P}\,, \qquad (2.20)$$

$$0 < P < 1, \quad k = 1,2,3,\dots,$$

$$\|T_n(x)\|_{L_q} \leq C\cdot n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|T_n(x)\|_{L_P} \quad 0 < p < q\,. \qquad (2.21)$$

Неравенство (2.20) доказано в [46] и в [47] , а неравенство (2.21) в [12] на стр.243.

§3. Прямая и обратная теорема теории приближений в пространстве $L_P(\infty,-\infty)$, 0<p<1

Пусть $L_P(\infty,-\infty)$ множество тех измерных на $(-\infty,\infty)$ функций $f(x)$, для которых

$$\|f(x)\|_{L_p} = \left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty, \qquad 0 < p < \infty\;.$$

При 1$\leq p < \infty$ множество $L_P(\infty,-\infty)$ есть банахово пространство относительно нормы $\|f(x)\|_{L_P}$. При $0 \leq p < 1$ величина $\|f(x)\|_{L_P}$не является нормой (не имеет место неравенство треугольника), однако мы пользуемся этими обозначениями и в этом случае класс $L_P(\infty,-\infty)$ при $0 \leq p < 1$ является польным линейным метричиским пространством (см.[45], с.45), а метрика задается равенством:

$$\rho(f,\varphi) = \|f(x)-\varphi(x)\|_{L_P}^P\,.$$

Величины

$$A_\sigma(f)_{L_p} = \inf_{Q_\sigma} \|f(x) - Q_\sigma(x)\|_{L_p}$$

и

$$\omega_k(\delta, f)_{L_P} = \sup_{|h|\le\delta} \left\|\Delta_h^k f(x+kh)\right\|_{L_P},$$

$$\Delta_h^k f(x+kh) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x+ih)$$

соответственно называется наилучшими приближениями в пространстве $L_p(-\infty,\infty)$ функции $f(x)$ целыми функциями $Q_\sigma(x) \in L_p(-\infty,\infty)$ степени $\le\sigma$ и модулями гладкости порядка к функции $f(x)$ в пространстве $L_p(-\infty,\infty)$. При k=1 $\omega_1(\upsilon, f)_{L_p}$ называют модулем непрерывности функции $f(x)$.

Величина $\omega_k(\upsilon, f)_{L_p}$ является характеристикой разностных свойств функции, т.е. характеризует структурные свойства функции, а величина $A_б(f)_{L_p}$ указывает конструктивную характеристику функции $f(x)$.

Как было отмечено в § 1, при $1 \le p \le \infty$ в пространстве $L_p(-\infty,\infty)$ связь между модулями гладкости и наилучшими приближениями функций довольно хорошо исследована.

В этом параграфе мы посмотрим случай $0 < p < 1$

Прежде всего, отметим ряд свойств $\omega_k(\vartheta, f)_{L_p}$ при $0 < p < 1$. Доказательство проводится аналогично в случае $p \ge 1$ (см. [I2], с.115-117)

1. $\omega^p(0, f)_{Lp} = 0$.

2. Функция $\omega_k^p(t, f)_{Lp} = 0$ не убывает вместе с t.

3. Если $h \ge 0$ целое число, $\omega_k^p(nt; f)_{Lp} \le n^k \omega_k^p(t; f)_{Lp}$

4. $\omega_k^p(\lambda t; f)_{Lp} \le (1+\lambda)^k \omega_k^p(t; f)_{Lp}, \lambda > 0$

5. $\omega_m^p(t; f)_{Lp} \le 2^{(m-k)} \omega_k^p(t; f)_{Lp}, m > k$

6. $\omega_{k+r}^p(t; f)_{Lp} \le t^{rp} \omega_k^p(t; f^{(r)})_{Lp}, t \ge 0$

Отметим ещё один известный факт.

Лемма 2А. (см. [12], с.61 и [21]) для любой функции $f(x)\in L_p(-\infty,\infty), 0<p<1$ существует целая функция $Q_\sigma(x)\in L_p(-\infty,\infty), 0<p<1$ степени $\le\sigma$ наилучшего приближения, т.е

$$A_\sigma(f)_{Lp}=\|f(x)-Q_\sigma(x)\|_{Lp}, 0<p<1.$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.3. Пусть $f(x)\in L_p(-\infty,\infty), 0<p<1$. Тогда при к=1,2,….. имеет место неравенство:

$$A_\sigma(f)_{Lp}\le C_k\omega_k\left(\frac{1}{\sigma};f\right)_{Lp},$$

где константа C_k зависит только от k

Теорема 2.4. Пусть $f(x)\in L_p(-\infty,\infty), 0<p<1$. Тогда при натуральном k имеет место неравенство:

$$\omega_k\left(\frac{1}{\sigma},f\right)_{Lp}\le\frac{C_{k,p}}{\sigma^k}\left\{\sum_{\nu=0}^{[\sigma]}(\nu+1)^{kp-1}A_\nu^P(f)_{Lp}\right\}^{\frac{1}{P}}, \tag{2.23}$$

где константа $C_{k,p}$ не зависит от f.

Из этих теорем вытекает следующее утверждение, указывающее связь между модулями непрерывности и наилучшими приближениями.

Следствие 2.1. Если $f(x)\in L_p(-\infty,\infty), 0<p<1$,

$$\omega_1\left(\frac{1}{\sigma},f\right)_{Lp}=O\left(\frac{1}{\sigma^{1/P}}\right)=O\left(\sigma^{-\frac{1}{P}}\right),$$

то

$$A_\sigma(f)_{Lp}=O\left(\frac{1}{\sigma}\right)=O\left(\sigma^{-\frac{1}{p}}\right).$$

Следствие 2.2. Если $f(x)\in L_p(-\infty,\infty),\quad 0<p<1$ и

$$A_n(f)_{Lp}=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),\quad 0<\alpha<1,$$

то

$$\omega_1(\delta,f)=\begin{cases}O(\delta^\alpha), & 0<\alpha<1,\\ O(\delta), & \alpha>1,\\ O\left(\delta(\ln\delta)^{\frac{1}{p}}\right), & \alpha=1.\end{cases}$$

Это вытекает из теоремы 2.4 при k=1

Замечание. Максимальный порядок убывания $\omega(\delta, f)_{Lp}$ при $\delta \to 0$ есть $O\left(\delta^{1/p}\right)$.

Следствие 2.3. Если $\omega(\delta, f)_{Lp}$ убывает максимального по порядку, т.е.

$$\omega(\delta, f)_{Lp} = O\left(\delta^{\frac{1}{p}}\right),$$

то функция f(x) имеет производную $f^{(r)}(x)$ $(r < \frac{1}{p})$ в смысле $Lp(-\infty, \infty)$.

Это вытекает из теоремы 2.6 (см. ниже §4).

Следствие 2.4. При $0 < \alpha < 1$ условия

$$A_n(f)L_p = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

и

$$\omega(\delta; f)_{Lp} = O(\delta^\alpha), \quad 0 < p < 1$$

эквиваленты. Это вытекает из теоремы 2.3 и 2.4.

Следствие 2.5. Если и $0 < p < \frac{1}{2}$ и

$$f_1(x) = \begin{cases} |x|^{1-\frac{1}{p}}, & |x| \le a, \\ 0, & |x| > a, a = const, \end{cases}$$

то имеет место соотношение

$$\omega(\delta, f_1)_{Lp} = \delta\left(\ln\frac{1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство следствия 2.5. приводится после доказательства выше перечисленных теорем. Для периодических функций теоремы 2.3 и 2.4 независимо друг от друга получили Стороженко Э.А. [9] и Иванов В.И. [48].

Доказательство теоремы 2.3.

Рассмотрим целую функцию

$$g_\sigma(x) = \left(\frac{\sin\frac{\sigma x}{2r}}{x}\right), \quad 2rp \ge k + r, \ \text{k=1,2,…}$$

Положим,

$$\gamma_{\sigma,r} = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{\sigma x}{2r}}{x}\right)^{2r} dx \;.$$

Тогда интеграл (см.[12], с. 273).

$$\frac{1}{\gamma_{\sigma,r}} = \int_{-\infty}^{\infty} g_\sigma(t)\left(\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu} f(x+\nu t)\right)dt = Q_\sigma(x, f) \qquad (2.24)$$

есть целая функция конечной степени ≤σ. Ясно, что

$$f(x) - Q_\sigma(x, f) = \frac{1}{\gamma_{\sigma r}}\int_{-\infty}^{\infty} g_\sigma(t)\Delta_t^k f(\alpha)dt \,, \qquad (2.25)$$

$$\Delta_t^k f(x) = \sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu} f(x+\nu t).$$

Отметим, что под интегральное выражение в равенстве (2.25) есть целая функция степени ≤σ относительно переменного t . Применяя неравенство (2.7) при 0<p<q=1 из (2.25), получим;

$$A_\sigma(f)_{Lp} \le \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left| f(x) - Q_\sigma(x)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{\gamma_{\sigma,r}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|g_\sigma(t)\Delta_t^k f(x)\right|dt\right)^p dx\right\}^{\frac{1}{P}} \le$$

$$\le \frac{C(p)}{\gamma_{\sigma,r}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sigma^{\frac{1}{p}-1}\left\|g_\sigma(t)\Delta_t^k f(x)\right\|_{L_p}\right)^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} = \frac{C(p)}{\gamma_{\sigma,r}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^{1-p}\left\|g_\sigma(t)\Delta_t^k f(x)\right\|_{L_p}^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \frac{C(p)}{\gamma_{\sigma,r}}\sigma^{\frac{1}{p}-1}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|g_\sigma(t)\right|^p\left|\Delta_t^k f(x)\right|^p dt\right)\right\}^{\frac{1}{p}} = \frac{C(p)}{\gamma_{\sigma,r}}\sigma^{\frac{1}{p}-1}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|g_\sigma(t)\right|^p\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Delta_t^k f(x)\right|^p dx\right)\right\}^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \frac{C(p)}{\gamma_{\sigma,r}}\sigma^{\frac{1}{p}-1}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|g_\sigma(t)\right|^p \omega_k^p(t, f)_{L_p} dt\right\}^{\frac{1}{p}} . \qquad (2.26)$$

В силу свойства модуля гладкости (см.§ 1 свойства 4) из нераветства (2.26) находим

$$A_\sigma(f)_{L_p} \le \frac{C(p)}{\gamma_{\sigma,r}}\sigma^{\frac{1}{p}-1}\left\{\sigma^k\omega_k^p\left(\frac{1}{\sigma}, f\right)_{L_p}\int_{-\infty}^{\infty}\left|g_\sigma(t)\right|^p\left(t+\frac{1}{\sigma}\right)^k dt\right\}^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \frac{C(p)}{\gamma_{\sigma,r}}\sigma^{\frac{1}{p}-1}\omega_k\left(\frac{1}{\sigma}, f\right)_{Lp}\left\{2^k\int_{-1/\sigma}^{1/\sigma}\left|g_\sigma(t)\right|^p dt + 2^k\sigma^k\int_{|t|\ge\frac{1}{\sigma}} t^2\left|g_\sigma(t)\right|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} . \qquad (2.27)$$

Учитывая неравенство (2.10), находим

$$\int_{-1/\sigma}^{1/\sigma}\left|g_{\sigma}(t)\right|^{p}dt\le\int_{-\infty}^{\infty}\left|g_{\sigma}(t)^{p}\right|dt=C(p)\left(\frac{2}{2r}\right)^{2rp-1}. \qquad (2.28)$$

Так как $2rp\ge +k+2, k=0,1,2....,$то

$$\sigma^{k}\int_{|t|\ge\frac{1}{\sigma}}t^{k}\left|g_{\sigma}(t)\right|^{P}dt\le C(p)\left(\frac{\sigma}{2r}\right)^{2rp-1}. \qquad (2.29)$$

В силу (2.28),(2.29) из (2.27) получим:

$$A_{\sigma}(f)_{Lp}\le\frac{C(p,k)}{\gamma_{\sigma,r}}\sigma^{\frac{1}{p}-1}\omega_{k}\left(\frac{1}{\sigma},f\right)_{Lp}\left(\frac{\sigma}{2r}\right)^{2r-\frac{1}{p}}=\frac{C(p,k,r)}{\gamma_{\sigma,r}}\sigma^{2r-1}\omega_{k}\left(\frac{1}{\sigma},f\right)_{Lp}. \qquad (2.30)$$

Так как

$$\gamma_{\sigma,r}=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{\sigma t}{2r}}{t}\right)^{2r}=C(r)\left(\frac{\sigma}{2r}\right)^{2r-1},$$

то из неравенства (2.30) находим, что

$$A_{\sigma}(f)_{L_p}\le C(P,K)\omega_{k}\left(\frac{1}{\sigma},f\right)_{Lp},$$

теорема доказана.

В дальнейшем нам нужна следующая лемма.

Лемма 2.I. Для любого натурального имеет место неравенство:

$$\omega_{k}(h,Q_{\sigma})_{Lp}\le C(p)h^{k}\left\|Q_{\sigma}^{(k)}(x)\right\|_{L_p},0<p<1. \qquad (2.31)$$

Доказательство. Достаточно доказать лемму для k=1.

Разлагая целую функцию $Q_{\sigma}(x+h)$ в ряд Тейлора по степени h, получим

$$Q_{\sigma}(x+h)=Q_{\sigma}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Q_{\sigma}^{(\gamma)}(k)}{\gamma!}h^{\nu}.$$

Отсюда, применяя теорему 2.1 при $h\le\frac{1}{\sigma}$, получим:

$$\left\|Q_{\sigma}(\alpha+h)-Q_{\sigma}(x)\right\|_{Lp}^{p}\le\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{h}{k!}\right)^{p}\left\|Q_{\sigma}^{(\nu)}(x)\right\|_{L_p}^{p}\le h\sum_{\nu-1}^{\infty}\left(\frac{h^{\nu-1}}{\nu!}\right)^{p}\left[C(p)(\sigma)^{\nu-1}\left\|Q_{\sigma}^{1}(x)\right\|_{L_p}^{p}\right]^{p}=$$

$$=h^{p}\left\|Q_{6}^{1}(x)\right\|_{Lp}^{p}\sum_{\nu=1}^{\infty}C(p)\left[\frac{(h\sigma)^{\nu-1}}{\nu!}\right]^{p}\le C(p)h^{p}\left\|Q_{\sigma}^{1}(x)\right\|_{Lp}^{p}$$

Отсюда вытекает утверждение леммы при к=1 При $k \ge 2$ лемма доказывается с помощью свойства модуля гладкости (см. свойство 6).

Доказательство теоремы 2.4.

Пусть $\{Q_n(x)\}$ последовательность целых функций соответственно отепени $\le n$, осуществляющих при каждом η наилучшие приближения $A_n(f)_{Lp}$ в метрике $L_p(-\infty,\infty), 0<p<1,$ т.е. (см. лемма 2.А)

$$\left\| f(x) - Q_n(x) \right\|_{Lp}^p = A_n^p(f)_{Lp} \ . \tag{2.32}$$

Тогда при $h=\dfrac{1}{\sigma}$, $2^m < [\sigma] \le 2^{m+1}$, $m=0,1,2,...$

$$\left\| \Delta_n^k f(x) \right\|_{Lp}^p \le 2^{kp} A_{2^m}^p(f)_{Lp} + \left\| \Delta_n^k Q_{2^m}(x) \right\|_{Lp} \le 2^{kp} A_{2^m}^p(f)_{Lp} + \omega_k^p\left(\frac{1}{\sigma}, Q_{2^m}(x)\right)_{Lp} \ . \tag{2.33}$$

В силу леммы 2.1 из неравенства (2.33) получим:

$$\left\| \Delta_n^k f(x) \right\|_{Lp}^p \le 2^{kp} A_{2^m}^p(f)_{Lp} + \frac{C(p)}{\sigma^{kp}} \left\| Q_{2^m}^{(k)}(x) \right\|_{Lp}^p \ . \tag{2.34}$$

Далее, применяя теорем 2.1, учитывая равенство (2.32) и используя монотонность наилучших приближений, получим:

$$\left\| Q_{2^m}^{(k)}(x) \right\|_{Lp}^p \le 2^{(k+1)} A_\sigma^p(f)_{Lp} + \sum_{\nu=1}^{m} 2^{(\nu+1)kp} \left\| Q_{2^{\nu+1}}(x) + Q_{2^\nu}(x) \right\|_{Lp}^p \le$$

$$\le 2^{(k+1)p} A_0^p(f)_{Lp} + 2^{(2k+1)p} \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\mu=2^{\nu+1}+1}^{2^\nu} \mu^{kp-1} A_\mu^p(f)_{Lp} \le 2^{(2k+1)p} \sum_{\nu=0}^{[\sigma]} (\nu+1)^{kp-1} A_\nu^p(f)_{Lp} \ . \tag{2.35}$$

Из (2.34) и (2.35) вытекает утверждение теоремы.

Доказательство следствия 2.5. Рассмотрим функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} |x|^{1-\frac{1}{p}}, \ |x| \le a, \ 0<p<1; \\ 0, \ |x|>a, \ a=const>1 \end{cases}.$$

При $h \le x < 1$ имеем:

$$\left|\Delta_h f_1(x)\right| = \left|(x+h)^{1-\frac{1}{p}} - x^{1-\frac{1}{p}}\right| = \left|1-\frac{1}{p}\right| \left|x+\theta(x,h)h\right|^{-\frac{1}{p}} h \ge \left(\frac{1}{p}-1\right)(x+h)^{-\frac{1}{p}} \cdot h \ ,$$

Теперь из последнего неравенства получим:

$$\left\|\Delta_h f_1(x)\right\|_{L_p}^p = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\Delta_h f_1(x)\right|^p dx \ge \left(\frac{1}{p}-1\right)^p \int_{-\infty}^{\infty} (x+h)^{-1} h^p \int_0^{1-h} (x+h)^{-1} dx = \left(\frac{1}{p}-1\right)^p h^p \ln\frac{1}{h} \ .$$

Отсюда

$$\omega(h, f_1)_{L_p} \geq C(p)h\left(\ln\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{p}} \quad . \qquad (01)$$

Докажем

$$A_n(f_1)_{L_p} = 0\left(\frac{1}{h}\right) \quad . \qquad (02)$$

Для этого сначала покажем, что

$$\omega(h, f_1)_{L_p} = 0(h) \quad . \qquad (03)$$

Имеем:

$$|\Delta_n f_1(x)| = \left|(x+h)^{1-\frac{1}{p}} - |x|^{1-\frac{1}{p}}\right| = \frac{|x+h|^{\frac{1}{p}-1} - |x|^{\frac{1}{p}-1}}{|x+h|^{\frac{1}{p}-1}|x|^{\frac{1}{p}-1}} \leq C(p)\frac{h^{\frac{1}{p}-1}}{|x+h|^{\frac{1}{p}-1}|x|^{\frac{1}{p}-1}}.$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Delta_n f(x)|^p\,dx \leq C(p)h^{1-p}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{|x+h|^{1-p}|x|^{1-p}} = C(p)h^{1-p}\left(\int_0^{\infty} - \int_{-\infty}^{0}\right). \qquad (04)$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{\infty} = \int_0^{h} + \int_h^{\infty} = J_1 + J_2, \qquad (05)$$

$$J_1 = \int_0^h \frac{dx}{|x+h|^{1-p}|x|^{1-p}} \leq \frac{1}{h^{1-p}}\int_0^h x^{p-1}dx = \frac{1}{p}\cdot\frac{h^p}{h^{1-p}} \, .$$

Так как $0 < p < \frac{1}{2}$, то

$$J_2 = \int_h^{\infty}\frac{dx}{|x+h|^{1-p}|x|^{1-p}} \leq \int_h^{\infty} x^{2(p-1)}dx = \frac{1}{1-2p}h^{2p-1} \, .$$

Учитывая оценки полученных для J_1 и J_2 из неравенства (05), получим:

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{|x+h|^{1-p}|x|^{1-p}} \leq C(p)_h^{2p-1} \quad . \qquad (06)$$

Аналогично

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{|x+h|^{1-p}|x|^{p}} \leq C(p)h^{2p-1} \quad . \qquad (07)$$

Теперь из неравенства (04), (06), (07) вытекает неравенство (03).

Так как (см. неравенство (2,22))

$$A_\delta(f)_{L_p} \le C_k \omega_k\left(\frac{1}{\delta}, f\right)_{L_p},$$

то из (03) вытекает (02). В силу (02) из неравенства (2.23) получим:

$$\omega(\delta, f)_{L_p} \le C(p,k)\delta\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (08)$$

Неравенства (08) и (01) дают утверждения следствии 2.5.

§4. Наилучшие приближения и дифференциально-разностные свойства функции в пространстве $L_p(-\infty,\infty)$, $0<p\le\infty$

Теорема 2.5. Пусть $f(x)\in L_p(-\infty,\infty)$, $0<p<1$ и при натуральном r выполняется условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{pr-1} A_n^p(f)_{L_p} < \infty.$$

Тогда функция $f(x)$ имеет r-производную $f^{(r)}(x)$, $f^{(r)}(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ и для n≥1 имеет место неравенство:

$$\omega_k\left(\frac{1}{n}; f^{(r)}(x)_{L_p}\right) \le C(p,k)\left\{\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{pr-1} A_\nu^p(f)_{L_p}\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{n^k}\left(\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{p(k+1)-1} A_\nu^p(f)_{L_p}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}, \qquad (2.36)$$

где константа $C(p,k)$ не зависит от f.

Наряду с теоремой 2.5 установим следующее утверждение.

Теорема 2.6. Если $f(x)\in L_p(-\infty,\infty)$, $0<p<\le q<\infty$ и для некоторых r выполнено условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{rp+\frac{q}{p}-2} A_n^q(f)_{L_p} < \infty,$$

то функция $f(x)$ почти всюду на $(-\infty,\infty)$ совпадает с функцией, имеющий абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$, а производная $f^{(r)}(x)$ существует в смысле $L_q(-\infty,\infty)$ и имеет место неравенство

$$\left\| f^{(r)}(x) - Q_\delta^{(r)}(x)\right\|_{L_q}^q \le C(p,r)\left\{\delta^{\frac{q}{p}+rq-1} A_\delta^q(f)_{L_p} + \sum_{k=[\delta]+1}^{\infty} k^{\frac{q}{p}+rq-2} A_k^q(f)_{L_p}\right\}, \qquad (2.36.A)$$

где константа $C(p,r)$ зависит только от p,r и $Q_\delta(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ таково, что

$$\| f(x)-Q_\delta(x)\|_{L_p} = A_\delta(f)_{L_p}.$$

Из теоремы 2.5 и 2.6 следует следующее следствие.

Следствие 2.5 . Если при $\alpha\le m$ выполнено условие

$$\omega_m(t,f)_{L_p}=0(t^\alpha),\quad 0<p<1$$

то функция $f(x)$ почти всюду на $(-\infty,\infty)$ совпадает с функцией, имеющей абсолютно непрерывную производную $f^{(r-1)}(x)$ (где $r<\alpha,\ r-$ öåëîå), а производная $f^{(r)}(x)$ порядка $r<\alpha,$ принадлежит пространству $L_p(-\infty,\infty),\ 0<p<1$ и имеет место неравенство:

$$\omega_k\left(t;f^{(r)}\right)_{L_p}=\begin{cases} O(t^k),\alpha-r>k;\\ O(t^{\alpha-r}),\alpha-r<k;\\ O(t^k\ln t),\alpha-r=k.\end{cases}$$

В самом деле, из условия следствия вытекает (на основании теоремы 2.3) $A_\delta(f)_{L_p}=O(\delta^{-\alpha})$. Тогда, применяя теорему 2.6 при $p=q,$ получаем первое утверждение. Вторая часть утверждения вытекает из теоремы 2.5.

Доказательство теоремы 2.5.

Отметим, что данная теорема доказана ещё в главе 1 § 2(см. теорема 1.6). Но здесь приводится другое доказательство.

Рассмотрим ряд

$$g_1^{(s)}(x)+\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(g_{2^{\nu+1}}^{(s)}(x)-g_{2^\nu}^{|s|}(x)\right), \tag{2.37}$$

где $g_\delta(x)=g_\delta(f;x)$ целая функция наилучшего приближения функции $f(x)\in L_p(-\infty,\infty),\quad 0<p<1$, функции $f(x)$ в метрике $L_p(-\infty,\infty)$, т.е. (см. лемме 2.А).

$$A_\delta(f)_{L_p}=\| f(x)-g_\delta(x)\|_{L_p},\ 0<p<1\quad . \tag{2.38}$$

В силу неравенства (2.3) получим:

$$\left\|g_{r^{\nu+1}}^{(s)}(x)-g_{r^\nu}^{(s)}(x)\right\|_{L_p}\le C(p)r^{(\nu+1)s}A_{r^\nu}(f)_{L_p}\quad ; \tag{2.39}$$

$$\left\|g_1^{(s)}(x)\right\|_{L_p}\le C(p)\left\|g_1^s(x)-g_0^{(s)}(x)\right\|_{L_p}\le C(p)\left\|g_1(x)-g_0(x)\right\|\le rC(p)A_0(f)_{L_p}. \tag{2.40}$$

На основании неравенств (2.39), (2.40) и по условию теоремы утверждаем, что последовательность частичных сумм ряда (2.37), т.е.

$$Q_m^{(s)}(x)=g_1^{(s)}(x)+\sum_{\nu=0}^{m}\left[g_{r^{\nu+1}}^{(s)}(x)-g_{r^{\nu}}^{(s)}(x)\right] \tag{2.40.A}$$

сходится на $(-\infty,\infty)$ в смысле метрики $L_p(-\infty,\infty)$. Дальше рассуждая как в [12] (см.[12], с. 347-348), получим:

$$Q_m^{(s)}(x)\to f^{(s)}(x), \qquad m\to\infty \tag{2.41}$$

в смысле метрике $L_p(-\infty,\infty)$, причём $f(x)$ почти всюду совпадает с функцией, имеющей абсолютно непрерывную производную (s-1)-порядка и

$$f^{(s)}(x)\in L_p(-\infty,\infty) \qquad 0<p<1.$$

Теперь переходим к доказательству неравенства (2.36). Имеем, что

$$\omega_k^p\left(\frac{1}{n};f^{(s)}\right)_{L_p}\le\omega_k^p\left(\frac{1}{n};f^{(s)}-Q_m^{(s)}\right)_{L_p}+\omega_k\left(Q\frac{1}{n};Q_m^{(s)}\right)_{L_p} \tag{2.42}$$

Отметим, что соотношение (2.41) даёт

$$f^{(s)}(x)=g_1^{(s)}(x)+\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[g_{r^{\nu+1}}^{(s)}(x)-g_{r^{\nu}}^{(s)}(x)\right]. \tag{2.43}$$

На основании (2.43), (2.3), (2.38) и учитывая монотонность $A_\delta(f)_{L_p}$ получим:

$$\omega_k^p\left(\frac{1}{n};f^{(s)}-Q_m^{(s)}\right)_{L_p}\le r^k\omega_1^p\left(\frac{1}{n};f^{(s)}-Q_m^{(s)}\right)_{L_p}\le r^k\int_{-\infty}^{\infty}\left|f^{(s)}(x)-Q_m^{(s)}(x)\right|^p dx=$$

$$=r^k\sum_{\nu=m+1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|g_{r^{\nu+1}}^{(s)}(x)-g_{r^{\nu}}^{(s)}(x)\right|^p dx\le r^k\sum_{\nu=m+1}^{\infty}r^{(\nu+1)sp}\int_{-\infty}^{\infty}\left|g_{r^{\nu+1}}(x)-g_{r^{\nu}}(x)\right|^p dx=$$

$$=r^k\sum_{\nu=m+1}^{\infty}r^{(\nu+1)sp}rA_{2^\nu}^p(f)_{L_p}\le C(k,s,p)\sum_{\mu=r^m+1}^{\infty}\mu^{sp-1}A_\mu^p(f)_{L_p}\quad. \tag{2.44}$$

Далее, учитывая свойства модуля гладкости

$$\omega_k^p(\delta,f)_{L_p}\le\delta^{sp}\omega_k^p\left(\delta,f^{(s)}\right)_{L_p}$$

получим:

$$\omega_k^p\left(\frac{1}{n};Q_m^{(s)}\right)_{L_p}\le\omega_k^p\left(\frac{1}{n};g_1^{(s)}\right)_{L_p}+\sum_{\nu=0}^{m}\omega_k^p\left(\frac{1}{n};g_{r^{\nu+1}}^{(s)}(x)-g_{r^{\nu}}^{(s)}(x)\right)_{L_p}\le$$

$$\le\frac{1}{n^{kp}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|g_1^{(s+k)}(x)\right|^p dx+\frac{1}{n^{kp}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|g_{r^{\nu+1}}^{(s+k)}(x)-g_{r^{\nu}}^{(s+k)}(x)\right|^p dx. \tag{2.45}$$

Отметим, что

$$r^{(\nu+1)kp}A^p_{r^\nu}(f)_{L_p} \le r^{rk} \sum_{\mu=r^{\nu-1}+1}^{r^\nu} \mu^{kp-1}A^p_\mu(f)_{L_p} \,. \qquad (2.46)$$

Теперь, выбирая m так, чтобы

$$r^m \le n = [\delta] < r^{m+1},$$

на основании (2.3), (2.38), (2.46) из неравенства (2.45) получим (см. ещё (2.40))

$$\omega^p_k\left(\frac{1}{n};Q^{(s)}_m\right)_{L_p} \le \frac{1}{n^{kp}}\int_{-\infty}^{\infty}|g_1(x)|^p dx + \frac{1}{n^{kp}}\sum_{k=0}^{m} r^{(\nu+1)(s+k)p}\int_{-\infty}^{\infty}\left|g_{r^{\nu+1}}(x) - g_{r^\nu}(x)\right|^p dx \le \frac{1}{n^{kp}}A^p_0(f)_{L_p} +$$

$$+\frac{1}{n^{kp}}\sum_{\nu=0}^{m} r^{(\nu+1)(s+k)p}A^p_{r^\nu}(f)_{L_p} \le C(k,s,p)\frac{1}{n^{kp}}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{(s+k)p-1}A^p_\nu(f)_{L_p} \,. \qquad (2.47)$$

Из неравенства (2.42), (2.44), (2.47) вытекает неравенство (2.36).

Теорема доказана полностью.

Доказательство теоремы 2.6.

Первая часть утверждения теоремы доказана в главе I § 1 (см. теорему 1.2). Осталось доказать неравенство (2.36.А). Пусть $g_\delta(x)$ целая функция степени осуществляющая наилучшие приближения функции $f(x)$ в $L_p(-\infty,\infty)$ (см. лемма 2.А), т.е. поступаем также как при доказательстве теоремы 2.5. Рассмотрим ряд (2.37) . В силу неравенства (2.3), (2.7) и учитывая (2.38), получим

$$\left\|g^r_{r^{\nu+1}}(x) - g^r_{r^\nu}(x)\right\| \le \sum_{m=r^{\nu-r}}^{r^{\nu+1}} m^{\frac{q}{p}-r+rp}A^q_m(f)_{L_p} \,. \qquad (2.48)$$

Неравенство (2.48) и условие теоремы обеспечивают сходимость ряда (2.37) к производной $f^{(r)}(x)$ в метрике $L_q(-\infty,\infty)$, где

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[g_{2^{k+1}}(x) - g_{2^k}(x)\right] + g_1(x) \,.$$

Теперь выберем m так, чтобы $r^{m-1} \le \sigma < r^m$. Так как

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[g^{(r)}_{r^{k+1}}(x) - g^{(r)}_{2^k}(x)\right] + g^{(r)}(x).$$

в смысле $L_q(-\infty,\infty)$, то на основании неравенств (2.3), (2.7) и равенства (2.38) получим: (учитывая (2.40.А))

$$\left\| f^{(r)}(x)-g_\sigma^{(r)}(x)\right\|_{L_q}^q \le \left\| g_\sigma^{(r)}(x)-g_{r^m}^{(r)}(x)\right\|_{L_q}^q + \sum_{k=m+1}^{\infty}\left\| g_{r^k}^{(r)}(x)-g_{r^{k-1}}^{(r)}(x)\right\|_{L_q}^q$$

$$\le C(r,p)\left\{\sigma^{rq}\left\| g_\sigma(x)-g_{r^m}(x)\right\|_{L_q}^q + \sum_{k=m+1}^{\infty}\left(r^k\right)^{rq}\left\| g_{r^k}(x)-g_{r^{k-1}}(x)\right\|_{L_q}^q\right\} \le$$

$$\le C(p,r)\left\{\sigma^{rq}\sigma^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q}\left\| g_\sigma(x)-g_{r^m}(x)\right\|_{L_q}^q + \sum_{k=m+1}^{\infty}\left(r^k\right)^{rq}\left(r^k\right)^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q}\left\| g_{r^k}(x)-g_{r^{k-1}}(x)\right\|_{L_q}^q\right\} \le$$

$$\le C(p,r)\left\{\sigma^{\left(\frac{q}{p}+rq-1\right)}\mathrm{A}_\sigma^q(f)_{L_p} + \sum_{k=m+1}^{\infty} r^{k(\frac{q}{p}-1+rq)}\mathrm{A}_{r^k}^q(f)_{L_p}\right\} \le C(p,r)\left\{\sigma^{\left(\frac{q}{p}+rq-1\right)}\mathrm{A}_\sigma^q(f)_{L_p} + \sum_{\nu=[\sigma]}^{\infty}\nu^{\frac{q}{p}+rq-1}\mathrm{A}_{r^k}^q(f)_{L_p}\right\}$$

Теорема доказана.

§5. Соотношения между наилучшими приближениями (модулями гладкости) в различных метриках

Теорема 2.7. Если *f(x)*$\in L_p(-\infty,\infty)$, $0<p<\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2}\mathrm{A}_\sigma^q(f)_{Lp} < \infty, \quad p<q,$$

то имеет место неравенство

$$\mathrm{A}_p^q(f)_{L_q} \le C(p,q)\left\{(\sigma+1)^{\frac{q}{p}-1}A_\sigma^q(f)_{L_p} + \sum_{k=[\sigma]+1}^{\infty} k^{\frac{q}{p}-r}A_k^q(f)_{L_p}\right\}, \quad 0<p\le q<\infty \qquad (2.49)$$

Доказываемые ниже теоремы показывают связь между модулями гладкости в различных метриках.

Теорема 2.8. Если *f(x)*$\in L_p(-\infty,\infty)$, $p>0$ и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2}\omega^q(\frac{1}{n};f)_{Lp}, \quad q>p, \qquad (2.50)$$

то имеет место неравенство

$$\omega^q(\frac{1}{n};f)_{L_p} \le C(p,q)\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\frac{q}{p}-2}\omega^q(\frac{1}{n};f)_{L_p}, \qquad (2.51)$$

Наряду с теоремой 2.8 доказывается следующая:

Теорема 2.9. Если *f(x)*$\in L_p(-\infty,\infty)$, $p>0$ и выполнено условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}+rq-2}\omega^q(\frac{1}{n};f)_{Lp}\langle\infty, \quad q>p,$$

то имеет место неравенство

$$\omega^{q}(\frac{1}{n}; f^{(r)})_{Lp} \le C(p,q)\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\frac{q}{p}+rq-2}\omega^{q}(\frac{1}{k}; f)_{Lp}, \quad \text{r=1,2,…}$$

Доказательство теоремы 2.9 проводится с помощью неравенства

$$\mathrm{A}_{6}^{q}(f^{(r)})_{Lq} \le C(p,q)\left\{6^{\frac{q}{r}-rq-1}\mathrm{A}_{6}^{q}(f)_{Lp} + \sum_{k=[6]+1}^{\infty} K^{\frac{q}{p}+rq-2}\mathrm{A}_{k}^{q}(f)_{Lp}\right\}, \ 0<p\le q<\infty,$$

также как теорема 2.8 Последнее неравенство доказано в § 4 главы II (см. теорема 2.6)

Теорема 2.10. Если *f(x)*$\in$Lp(-∞,∞), 0<p<1и натуральное число m>k , то имеет место неравенства:

$$\omega_{m}^{p}(\delta; f)_{Lp} \le 2^{m-k}\omega_{k} \ ; \tag{2.52а}$$

$$\omega_{k}(\delta; f)_{Lp} \le C(k,p)\left\{\delta^{k} + \delta^{k}\left(\int_{6}^{1} t^{-kp-1}\omega_{m}^{p}(t;r)_{Lp}dt\right)^{\frac{1}{p}}\right\}, \tag{2.52б}$$

$$0<\delta\le\frac{1}{r} \ . \tag{2.52в}$$

Теорема 2.5 позволяет доказать следующее.

Теорема 2.11 Если *f(x)*$\in$Lp(-∞,∞), 0<p<1 и натуральном m, r (m>1) выполнено условие

$$\int_{0}^{1}\frac{\omega_{m}^{p}(t, f)_{lp}}{t^{pr+1}}dt < \infty,$$

то функция *f(x)* имеет $r-$ производную *f*$^{(r)}$*(x)*$\in$Lp(-∞,∞), 0<p<1 и для *m*≥1 имеет место неравенство:

$$\omega_{k}(\delta; f^{(r)})_{Lp} = \delta^{k} + \delta^{k}\left(\int_{0}^{1} t^{-p(k+r)-1}\omega_{m}^{p}(t; f)_{Lp}dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{0}^{6} t^{-2p-1}\omega_{m}^{p}(t; f)_{Lp}dt\right)^{\frac{1}{p}}, \ \text{m>k}. \tag{2.52c}$$

Отметим, что аналогичное неравенство (2.52в) при 1≤p<∞ (при 2≤p<∞ совпадает) вытекает из других результатов автора [56]. Из теоремы 2.10 вытекает следствие 2.7. Если для функции *f(x)*$\in$Lp(-∞,∞), 0<p<1 $\omega_{2}(\delta; f)_{Lp} \le \delta$, то

$$\omega_{1}(\delta; f)_{Lp} \le \delta\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Последняя оценка при 2≤p≤∞ содержится в работе [56], а для периодических функций при 1<p<∞ получена в [55] (см.

ещё [42] p=2). Утверждение теорема 2.8 вытекает из неравенство (2.36.А) при r=0.

Доказательство теорема 2.8.

При 1<p<∞ теорема доказана автором в [113] и [114]. Здесь рассмотрим случай 0<p<q≤1 и 0<p<1<q.

Отметим некоторые свойства модуля непрерывности

$$\begin{cases} \omega^p(\frac{1}{n}; f)_{L_p} \le 2\omega^p(\frac{1}{2n}; f)_{L_p}; \\ n\omega^p(\frac{1}{n}; f)_{L_p} \le 2N\omega^p(\frac{1}{N}; f)_{L_p}; \\ n \ge N; n = 1,2,... \end{cases} \tag{2.53}$$

Неравенство (2.53) вытекает из свойства модуля гладкости (см. напр. [12], с . 116, формула (2) и (6). В силу неравенства (2.22) (k=1) из неравенства (2.49) получим

$$\mathrm{A}_n^q(f)_{Lq} \le C(p,q)\left\{(n+1)^{\frac{q}{p}-1}\omega^q(\frac{1}{n}; f)_{L_p} + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\frac{q}{p}-2}\omega^q(\frac{1}{k}; f)_{L_p}\right\}, \ 0<p<q<\infty. \tag{2.54}$$

В силу (2.53) получим

$$n^{\frac{q}{p}-1}\omega\left(\frac{1}{n}; f\right)_{Lp} \le C(p,q)\sum_{K=n+1}^{2n} k^{\frac{q}{p}-2}\omega^q\left(\frac{1}{k}; f\right)_{Lp} \le C(p,q)\sum_{K=n+1}^{\infty} k^{\frac{q}{p}-2}\omega^q\left(\frac{1}{k}; f\right)_{Lp}.$$

Учитывая последнее неравенство из (2.54) получим

$$A_n^q(f)_{Lp} \le C(p,q)\sum_{K=n+1}^{\infty} k^{\frac{q}{p}-2}\omega^q\left(\frac{1}{K}; f\right)_{Lp}, \ 0<p<q<\infty$$

В дальнейшем нам будет нужна следующая оценка. С помощью свойства модуля непрерывности (2.53) получим:

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{q-1}\sum_{m=k+1}^{n+1} m^{\frac{q}{p}-r}\omega^q\left(\frac{1}{k}; f\right)_{Lp} = \sum_{m=0}^{n}(m+1)^{q-1}\omega^q\left(\frac{1}{m+1}; f\right)_{Lp}\sum_{k=0}^{m}(k+1)^{q-1} \le$$

$$\le C(v)\sum_{m=0}^{n}(m+1)^{\frac{p}{q}-r}\left[(m+1)\omega\left(\frac{1}{m+1}; f\right)_{Lp}\right]^q \le C(v)\left[(n+1)\omega\left(\frac{1}{m+1}; f\right)_{Lp}\right]^q\sum_{m=0}^{n}(m+1)^{\frac{q}{p}-2} \le$$

$$\le C(v)(n+1)^{\frac{q}{p}-1+q}\omega^q\left(\frac{1}{n+1}; f\right)_{Lp}, \ 0 < p < q < \infty.$$

Рассмотрим случай 0<p<q<1. На основании теоремы 2.4 (k=1) и в силу неравенств (2.55) и (2.56) получим:

$$\omega^q\left(\frac{1}{n+1};f\right)_{Lp}\leq\frac{C(p,q)}{(n+1)^q}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{q-1}A_K^q(f)_{Lp}\leq\frac{C(p,q)}{(n+1)^q}\sum_{K=0}^{n}(k+1)^{q-1}\sum_{m=k+1}^{\infty}m^{\frac{q}{p}-2}\omega^q\left(\frac{1}{m};f\right)_{Lp}=$$

$$=\frac{C(p,q)}{(n+1)^q}\left\{\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{q-1}\sum_{m=K+1}^{\infty}m^{\frac{q}{p}-2}\omega^q\left(\frac{1}{m};f\right)_{Lp}\right\}\leq\frac{C(p,q)}{(n+1)^q}\left\{(n+1)^{\frac{q}{p}-1+q}\omega^q\left(\frac{1}{n+1};f\right)_{Lp}+\right.$$

$$\left.+(n+1)^q\sum_{m=n+2}^{\infty}m^{\frac{q}{p}-2}m^q\left(\frac{1}{m};f\right)_{Lp}\right\}\leq C(p,\nu)\sum_{m=m+1}^{\infty}m^{\frac{q}{p}-2}\omega^q\left(\frac{1}{m};f\right)_{Lp}.$$

т.е. теорема. доказана для $0<p<q<1$. Так как теорема 2.4 при $1\leq p\leq 2$ доказана в [4], то неравенство (2.55) и (2,56) влечёт утверждение теоремы в случае $0<p<1\leq q\leq 2$ (т.е. аналогично получим (2.57)).Осталось рассмотреть случай $0<p<1$, $q>2$. Будем пользоваться известными неравенствами (см.[4])

$$\omega_K\left(\frac{1}{\delta},f\right)_{Lq}\leq\frac{C(p,k)}{\delta^K}\left(\sum_{\nu=0}^{[\delta]}(\nu+1)^{2k-1}A_\nu^2(f)_{Lq}\right)^{\frac{1}{2}},\quad 2<q<\infty,\qquad k=1,2. \tag{2.58}$$

В силу неравенств (2.58) (k=1) и (2.55) имеем:

$$\begin{aligned}\omega^2\left(\frac{1}{n+1};f\right)_{Lq}&\leq\frac{C(p,q)}{(n+1)^2}\sum_{K=0}^{n}(k+1)\left(\sum_{m=K+1}^{\infty}m^{\frac{q}{p}-2}\omega^q\left(\frac{1}{m};f\right)_{Lp}\right)^{\frac{2}{q}}\leq\\&\leq\frac{C(p,q)}{(n+1)^2}\sum_{K=0}^{n}(k+1)\left(\sum_{m=K=1}^{n+1}m^{\frac{q}{p}-2}\omega^q\left(\frac{1}{m};f\right)_{Lp}\right)^{\frac{2}{q}}+\sum_{K=0}^{n}(k+1)\left(\sum_{m=n+2}^{\infty}m^{\frac{q}{p}-2}\omega^q\left(\frac{1}{m};f\right)_{Lp}\right)^{\frac{2}{q}}.\end{aligned}\tag{2.59}$$

Рассмотрим каждое слагаемое в фигурных скобках неравенства (2.59). Выберем число $\varepsilon>0,\ \varepsilon<1-\frac{2}{q}\ \left(\frac{2}{q}<1\right)$. Учитывая $\frac{1}{p}>1,\ \frac{\varepsilon q}{q-2}<1, k+1=\frac{(k+1)^{1+\varepsilon}}{k+1^{\varepsilon}}$ и применяя неравенства Гельдера в силу (2.53), (2.54 а), получим; что

$$S_1=\sum_{k=0}^{n}(k+1)\left[\sum_{m=k+1}^{n+1}m^{\frac{q}{p}-2}\omega^q\left(\frac{1}{m};f\right)_{Lp}\right]^{\frac{2}{q}}\le$$

$$\le\left\{\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{\frac{(1+\varepsilon)q}{2}}\sum_{m=k}^{n}(m+1)^{\frac{q}{p}-1}\omega^q\left(\frac{1}{m+1};f\right)_{Lp}\right\}^{\frac{2}{q}}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^{\frac{\varepsilon q}{q-2}}}\right\}^{\left(1-\frac{2}{q}\right)}\le$$

$$\le\frac{C(p,q)}{(n+1)^{2/q+\varepsilon-1}}\left\{\sum_{m=0}^{n}(m+1)^{\frac{q}{p}-2}\omega^q\left(\frac{1}{m+1};f\right)_{Lp}\sum_{k=0}^{m}(k+1)^{\frac{(1+\varepsilon)q}{2}}\right\}^{\frac{2}{q}}\le$$

$$\le\frac{C(p,q)}{(1+n)^{2/q+\varepsilon-1}}\left\{\sum_{m=0}^{n}(m+1)^{\frac{q}{p}-1-q+\frac{(1+\varepsilon)q}{2}}\left[(m+1)\omega\left(\frac{1}{m+1};f\right)_{Lp}\right]^q\right\}^{\frac{2}{q}}\le$$

$$\le\frac{C(p,q)\left[(n+1)\omega\left(\frac{1}{n+1};f\right)_{Lp}\right]^2}{(1+n)^{\frac{2}{q}+\varepsilon-1}}\left\{\sum_{m=\nu}^{n}(m+1)^{-1+2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right\}^{\frac{2}{q}}\le$$

$$\le C(p,q)\omega^2\left(\frac{1}{n+1};f\right)_{Lp}\frac{(n+1)^{2+2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)}}{(n+1)^{\frac{2}{q}+\varepsilon-1}}=C(p,q)(n+1)^{2+\frac{2}{p}-\frac{2}{p}}\omega^2\left(\frac{1}{n+1};f\right)_{Lp}\le \tag{2.60}$$

$$\le C(p,q)(n+1)^2\left[(n+1)^{\frac{1}{p}-1}\omega\left(\frac{1}{n+1};f\right)^2_{Lp}\le(p,q)(n+1)^2\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{\frac{q}{p}-2}\omega^q\left(\frac{1}{k};f\right)_{Lp}\right]^{\frac{2}{q}}.$$

Для второго слагаемого в неравенстве (2.59) получим:

$$S_2=\sum_{K=0}^{n}(K+1)\left(\sum_{m=K+1}^{\infty}m^{2/p-2}\omega^2\left(\frac{1}{m};f\right)_{Lp}\right)^{2/q}=(n+1)^2\left[\sum_{m=n+1}^{\infty}m^{\frac{q}{p}-2}\omega^q\left(\frac{1}{m};f\right)_{Lp}\right]^{\frac{2}{q}}. \tag{2.61}$$

Теперь из неравенства (2.59), (2.60), (2,61) получим:

$$\omega_K^2\left(\frac{1}{n+1};f\right)_{Lp}\le C(p,q)\left[\sum_{m=n+1}^{\infty}m^{\frac{q}{p}-2}\omega^q\left(\frac{1}{m};f\right)_{Lp}\right]^{\frac{2}{q}},$$

т.е. теорема доказана в случае $0<p<1$, $q>2$. Доказательство теоремы 2.8 завершено.

Теорема 2.9 доказывается с помощью неравенства (2.36 А) также как теорема 2.8.

Доказательство теоремы 2.10. Неравенство (2.52а) вытекает из свойства модуля гладкости в $L_p(-\infty,\infty)$, $0<p<1$. (см.§3, глава II). Докажем неравенство (2.52б). На основании теоремы 2.4, 2.3 и учитывая свойство модуля гладкости, получим

$$\omega_K^p\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)_{L_p} \le \frac{C(k,p)}{\sigma^{k,p}}\left\{A_0^p(f)_{Lp} + \sum_{\nu=1}^{[\sigma]}(\nu+1)^{kp-1}A_\nu^p(f)_{Lp}\right\} \le$$
$$\le \frac{C(k,p)}{\sigma^{k,p}}\left\{A_0^p(f)_{Lp} + \sum_{\nu=1}^{[\sigma]}\nu^{kp}\omega_m^p\left(\frac{1}{\nu+1}; f\right)_{Lp}\right\}. \quad (2.62)$$

Отметим, что

$$A_0(f)_{Lp} \le C\|f(x)\|_{Lp}. \quad (2.63)$$

Так как модуль гладкости $\omega_m^P(\alpha, f)_{Lp}$ не убывает относительно t, то

$$\sum_{\nu=1}^{[\sigma]}\nu^{kp-1}\omega_m^p\left(\frac{1}{\nu+1}; f\right)_{Lp} \le C(p,k)\sum_{\nu=1}^{[\sigma]}\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{p}}\frac{\omega_m^p(t;f)_{Lp}}{t^{kp+1}}dt \le C(p,k)\int_{\frac{1}{[\sigma]}}^{1}t^{-kp-1}\omega_m^p(t;f)_{Lp}dt \le$$
$$\le C(k,p)\int_{\sigma}^{1}t^{-kp-1}\omega_m^p(t;f)_{Lp}dt, \qquad \delta = \frac{1}{[\sigma]} \le \frac{1}{2}. \quad (2.64)$$

Теперь из неравенств (2.62), (2.63) и (2.64) получаем:

$$\omega_K(\delta; f)_{Lp} \le \delta^k + \delta^k\left(\int_{\delta}^{1}t^{-kp-1}\omega_m^P(t;f)dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

т.е. утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 2.11

Сначала покажем, что выполнимость условия теоремы влечёт с ходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{rp-1}A_n^P(f)_{Lp}.$$

В самом деле, в силу теоремы 2.3 и, учитывая свойства $\omega^P(t;f)_{Lp}$ получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{rp-1}A_n^P(f)_{Lp} \le \sum_{n=1}^{\infty}n^{rp-1}\omega^P\left(\frac{1}{n+1}; f\right)_{Lp} \le \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}t^{-rp-1}\omega^P(t;f)_{Lp}dt \le$$
$$\le \int_0^1 t^{-rp-1}\omega_m^P(t;f)_{Lp}dt \le \int_0^1 t^{-rp-1}\omega_m^P(t;f)_{Lp}dt < \infty.$$

Теперь, применяя теорему 2.6, получим; что $f(x)$ имеет производную $f^r(x) \in Lp(-\infty,\infty)$, $0 < p < 1$, и имеет место неравенство (2.36). Чтобы доказать неравенство (2.52 c), остаётся оценить каждое слагаемое в правой части неравенство (2.36). Поступая так же, как при получении неравенства (2.64), находим:

$$\left(\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{P(K+r)-1}A_{\nu}^{P}(f)_{Lp}\right)^{\frac{1}{P}}\le\|f(x)\|_{Lp}+\left(\int_{\delta}^{1}t^{-(K+r)P-1}\omega_{m}^{P}(t;f)_{Lp}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (2.65)$$

и аналогично находим, что

$$\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{PZ-1}A_{\delta}^{P}(f)_{Lp}\right)^{\frac{1}{P}}\le\left(\int_{0}^{\delta}t^{-PZ-1}\omega_{m}^{P}(t;R)_{Lp}\right)^{\frac{1}{P}},\quad 0\le\delta\le\frac{1}{2};\qquad r<m\,. \qquad (2.66)$$

Неравенства (2.36), (2.65), (2.66) влекут неравенство (2.52c). Теорема доказана полностью.

ГЛАВА III
МОДУЛЬ ГЛАДКОСТИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА И НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_p(-\infty,\infty)$

§ 1. Прямые и обратные теоремы теории приближения в терминах модуля гладкости дробного порядка

Как известно, понятие модуль гладкости функций целого порядка вводится на основе разности функций целого порядка. Чтобы дать определение модуля гладкости функции дробного порядка (или вообще любого порядка), вводим понятие разности функции любого порядка, следуя за Бутцером и Вестфалем [57].

Определение I. Выражение при любом α>0

$$\Delta_h^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x-kh), \tag{3.1}$$

$$\left(\frac{k}{\alpha}\right) = (k!)^{-1}[\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k)[\alpha-k+1]]$$

называется разностью функции $f(x)$ порядка $\alpha > 0$ с шагом h. Нетрудно заметить, что при α - натуральных выражения (3.1) есть разность обычного порядка, и ещё для r>0 введённый Бугровым [58] следующем образом.

Определение 2. Разностью порядка $r > 0$ функции $f(x)$ с шагом h назовём выражение

$$\Delta_n^r f(x) = \exp(\pi r i) \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{-r-1} f(x+kh), \tag{3.2}$$

где числа A_k^{-r-1} определяются из соотношения

$$(1-x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{-r-1} x^k .$$

Ясно, что при r - натуральных выражение (3.2) есть обычная разность. Свойства выражений (3.1) и (3.2) соответственно рассмотрены в [57] и [58]. Отметим ещё, что разность дробного порядка $\alpha > 0$ в виде

$$\Delta_n^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f\left(x + (\alpha - k)h\right) \tag{3.3}$$

рассмотрена Таберским [44]. Разность дробного порядка в виде (3.1) рассматривалась в работах А.Грюнвальда [59] в 1867 г. и А.В.Летникова [60] в 1868 году.

Отметим, что на основе разности (3.1) Ж.Лиувиль [61] в 1832 году впервые ввёл понятие производной функции $f(x)$ дробного порядка следующим образом (см. ещё [53], с. 322 и с. 280).

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_n^\alpha f(x)}{h^\alpha} = f^{(\alpha)}(x), \qquad \alpha > 0 \ , \tag{3.3а}$$

в котором Грюнвальд и Летников изучали более обоснованно свойства этих производных [42]. Назовём производную $f^{(\alpha)}(x)$ по (3.3а) производной в смысле Лиувиля-Грюнвальдо-Летниково (Л-Г-Л).

Разность дробного порядка $\Delta_n^\alpha f(x)$ обладает следующими свойствами:

1. а) $\left\|\Delta_n^\alpha f(x)\right\|_{L_p} \le M(\alpha) \left\|f(x)\right\|_{L_p}, \qquad 1 \le p \le \infty,$

б) $\left\|\Delta_n^\alpha f(x)\right\|_{L_p}^p \le M(\alpha) \left\|f(x)\right\|_{L_p}^p, \qquad 0 < p < 1,$

величина $\left\|f(x)\right\|_{L_p}$ понимается как в главе 1, константа $M(\alpha)$ зависит только от α, причём

$$M(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \left|\binom{\alpha}{k}\right| = 2^{\{\alpha\}},$$

$\{\alpha\} = \inf\{k, k \ge \alpha\}$ $\quad k$ - натурального число.

2. $\Delta_h^\alpha\left(\Delta_h^\beta f(x)\right) = \Delta_h^{\alpha+\beta} f(x)$;

3. Если $f(x) \in L_p(-\infty, \infty), \qquad 0 < p \le \infty$, то $\lim_{h\to 0} \left\|\Delta_h^\alpha f(x)\right\|_{L_p} = 0$;

4. а) $\left\|\Delta_h^{(\alpha+\beta} f(x)\right\|_{L_p}^p \le 2^{\{\beta\}} \left\|\Delta_h^\alpha f(x)\right\|_{L_p}, \qquad 1 \le p \le \infty$;

б) $\left\|\Delta_h^{(\alpha+\beta} f(x)\right\|_{L_p}^p \le 2^{\{\beta\}} \left\|\Delta_h^\alpha f(x)\right\|_{L_p}^p, \qquad 0 < p < 1.$

Доказательство этих свойств аналогичное доказательствам, приведённых для случая $p \ge 1$ (см. [53], с. 280).

Величина

$$\omega_\alpha(\delta,\ f)_{L_p} = \sup_{|h|\le\delta} \left\| \Delta_h^\alpha f(x) \right\|_{L_p}$$

называется модулем гладкости функции $f(x)$ порядка $\alpha > 0$ в пространстве $L_p(-\infty,\infty),\quad 0 \le p \le \infty$ и обладает следующими свойствами:

1. $\lim_{\delta\to 0} \omega_\alpha^p(\delta,\ f)_{L_p} = 0, \qquad 0 < p \le \infty;$

2. а) $\omega_\alpha^p(\delta,\ f)_{L_p} \le r^{\{\alpha-\beta\}} \omega_\beta^p(\delta,\ f)_{L_p}, \qquad 0 \le \beta \le 1,\quad 0 < p < 1;$

   б) $\omega_\alpha^p(\delta,\ f)_{L_p} \le r^{\{\alpha-\beta\}} \omega_\beta(\delta,\ f)_{L_p}, \qquad 1 \le p \le \infty;$

3. а) $\omega_\alpha^p(\delta, f+\varphi)_{L_p} \le \omega_\alpha^p(\delta,\ f)_{L_p} + \omega_\alpha^p(\delta, \varphi)_{L_p}, \qquad 0 < p \le 1;$

   б) $\omega_\alpha(\delta, f+\varphi)_{L_p} \le \omega_\alpha(\delta,\ f)_{L_p} + \omega_\alpha(\delta, \varphi)_{L_p}, \qquad 1 \le p \le \infty$.

Эти свойства вытекают из свойств разности функции $f(x)$ порядка $\alpha > 0$.

Изучение свойств периодических функций в зависимости от модуля гладкости дробного порядка впервые рассматривались Бутцером и Вестфалем [57], а затем изучены в работах [44], [62], [69] и др.

Для функций, заданных на всей вещественной оси, эти вопросы изучались в [4] и в работах автора [70], [71], [72]. В данной главе изучаются свойства функций в терминах модуля гладкости дробного порядка. В этом параграфе докажем прямые и обратные теоремы теории приближений в терминах модуля гладкости дробного порядка и исследуем некоторые свойства производной дробного порядка функции $f(x)$, заданной на всей вещественной оси в пространстве $L_p(-\infty,\infty)$.

Теорема 3.1. Если $f(x) \in L_p(-\infty,\infty),\quad 0 < p \le \infty$, то для любого $\alpha > 0$ имеет место неравенство:

$$A_\delta(f) \le C(\alpha,\ p)\,\omega_\alpha\left(\frac{1}{\delta},\ f\right)_{L_p}, \tag{3.4}$$

где константа $C(\alpha,\ p)$ при $1 \le p \le \infty$, не зависит от p.

Теорема 3.2. Если функция $f(x) \in L_p(-\infty,\infty),\quad 1 \le p \le \infty$, то для любого $\alpha > 0$ имеет место неравенство

$$\omega_\alpha\left(\frac{1}{n+1}; f\right)_{L_p} \le \frac{C(\alpha)}{(n+1)^\alpha}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{\alpha-1}A_k(f)_{L_p} \quad . \tag{3.5}$$

Теорема 3.1 для $1\le p\le\infty$ и теорема 3.2 на основании разности дробного порядка в виде (3.3) доказаны в [44] совершенно другим способом.

При $1<p<\infty$ теорему 3.2 можно улучшить следующим образом.

Теорема 3.3. Пусть $f(x)\in L_p(-\infty,\infty)$, $0<p<\infty$ имеет преобразование Фурье $f(x)\in L_p(-\infty,\infty)$. Тогда при всяком $\alpha>0$ имеет место неравенство:

$$\omega_\alpha\left(\frac{1}{\delta}; f\right)_{L_p} \le \frac{M(\alpha, p)}{\delta^\alpha}\left\{\sum_{\nu=0}^{[6]}(\nu+1)^{\alpha\gamma-1}A_\nu^\gamma(f)_{L_p}\right\}^{\frac{1}{\gamma}} \quad \gamma=\min(2, p). \tag{3.6}$$

Видно, что неравенство (3.5) также как и неравенство (3.6) даёт оценку сверху модуля гладкости порядка $\alpha>0$. Однако ниже устанавливаемая лемма показывает, что оценка (3.6) является улучшением неравенства (3.5) при $1<p<\infty$ и порядок правой части (3.6) в ряде случаев является более точным, чем правой части (3.5) (см. ниже следствие 3.5).

Лемма 3.1. Для любого $\alpha>0$, $1<p<\infty$ и для любой монотонно убывающей последовательности $\{\alpha_n\}$ справедливо неравенство:

$$\left\{\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{\alpha p-1}\alpha_\nu^p\right\}^{\frac{1}{p}} \le C(\alpha, p)\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{\alpha-1}\alpha_\nu, \quad 1<p<\infty.$$

При натуральных $\alpha\ge1$ и $1<p<\infty$ лемма 3.1. доказана в работа [4]. Имеет место следующее утверждение, указывающее свойства производной дробного порядка.

Теорема 3.4. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию теоремы 3.3, кроме того, при некотором $\beta>0$ выполнено условие

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{\beta\gamma-1}A_\nu^\gamma(f)_{L_p}<\infty, \quad \gamma=\min(\beta, p) \tag{3.7}$$

Тогда функция $f(x)$ имеет дробную производную по Лиувилю-Грюнвальду-Летникову в смысле $L_p(-\infty,\infty)$ порядка β

, принадлежащую пространству $L_p(-\infty,\infty)$, т.е. $f^{(\beta)}(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ и при всяком $\alpha>0$ справедливо неравенство: (доказано автором ДАН Тадж. 1981. №3. Теорема 4.)

$$\omega_\alpha\left(\frac{1}{n+1};\, f_L^\beta\right)_{L_p} \le C(\alpha,\beta,p)\left\{\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\beta\nu-1}A_\nu^\gamma(f)_{L_p}+\frac{1}{(n+1)^{\alpha\gamma}}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{\gamma(\alpha+\beta)-1}A_\nu^\alpha(f)_{L_p}\right\}^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (3.8)$$

где константа $C(\alpha,\beta,p)$ не зависит от f.

Отметим, что выше приведённые теоремы 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 при натуральных числах α и β доказаны в [42], [44], а теорема 3.1 и аналогичные теоремы 3.2, 3.4 при натуральных α для $0<p<1$ доказаны в §I глава II.

Имеется обобщение теоремы 3.4 на функции двух переменных [63]. Из вышеустановленной теоремы вытекает следствие.

Следствие 3.1. Если $f(x)\in L_p(-\infty,\infty),\quad 1\le p\le\infty;\quad 0<s\le\alpha$,

$$\omega_\alpha(\delta,\, f)_{L_p}=0(\delta^s),\quad \alpha\ge s,$$

то

$$A_\delta(f)=0(\delta^{-s}).$$

Следствие 3.2. Если $f(x)\in L_p(-\infty,\infty),\quad 1\le p\le\infty;$ и удовлетворяет условию

$$A_n(f)_{L_p}=0(n^{-s}),\quad s>0,$$

то

$$\omega_\alpha(t;\, f)_{L_p}=\begin{cases}0(t^s), & s<\alpha,\\ 0(t^\alpha|\ln t|), & s=\alpha,\\ 0(t^\alpha), & s>\alpha.\end{cases}$$

Из этих следствий видно, что при $s<\alpha$ для условия

$$A_n(f)_{L_p}=0\left(\frac{1}{n^s}\right)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\omega_\alpha(\delta,\, f)_{L_p}=0(\delta^s),\quad s>\alpha.$$

Следствие 3.3. При $s=\alpha$ условие

$$A_n(f)_{L_p}=0\left(\frac{1}{n^S}\right),\quad s>0,$$

и (см. теорему 3.2)

$$\omega_{\alpha+1}(\delta,\ f)_{L_p}=0(\delta^{\alpha})$$

эквивалентны.

Из теоремы 3.4 получаем следующие следствия.

Следствие 3.4. Если для некоторого $r>0$ функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\omega_r(t,\ f)_{L_p}=0(\delta^{s}),\quad s>0,$$

то производная $f^{(\beta)}(x)$; $\beta>s$ по Л-Г-Л в смысле $L_p(-\infty,\infty)$ существует, $f^{(\beta)}(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ и справедливо неравенство:

$$\omega_\alpha\left(t;\ f^{(\beta)}\right)_{L_p}=\begin{cases}0\left(t^{s-\beta}\right), & s-\beta<\alpha,\\ 0\left(t^{\alpha}|\ln t|\right), & s=\alpha,\\ 0\left(t^{\alpha}\right), & s-\beta>\alpha.\end{cases}$$

В самом деле, из условия $\omega_r(t,\ f)_{L_p}=0(t^{s})$ вытекает, что $A_n(f)_{L_p}=0(n^{-s})$ (см. теорему 3.1). Тогда ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty}v^{\beta\gamma-1}A_v^{\gamma}(f)_{L_p}$$

сходится при $\beta<s$.

Теперь, применяя теорему 3.4, получим утверждение следствия 3.4. Из теоремы 3.3 получаем следующее следствие.

Следствие 3.5. Если для функции

$$A_n(f)_{L_p}=0(n^{-\alpha}),\quad \alpha>0,$$

то

$$\omega_\alpha(t,\ f)_{L_p}=\begin{cases}O\left(t^{\alpha}|\ln t|\right)^{\frac{1}{p}} & 1<p\le 2,\\ O\left(t^{\alpha}|\ln t|\right)^{\frac{1}{2}} & 2<p<\infty.\end{cases}\tag{3.9}$$

В условиях следствия 3.5 из теоремы 3.2 получим, что

$$\omega_\alpha(t;\ f)_{L_p}=O\left(t^{\alpha}|\ln t|\right).\tag{3.10}$$

Таким образом, из (3.9) и (3.10) видим, что теорема 3.3 приводит к более точным результатам, чем теорема 3.2 при $1<p<\infty$.

Доказательство теоремы 3.1. Известно, следующее неравенство:

$$A_\sigma(f)_{L_p} \le C(k,\,p)\omega_k\left(\frac{1}{\sigma};\,f\right)_{L_p} \tag{3.11}$$
$$k=1,2,\ldots;\qquad 0<p<\infty,$$

где константа $C(a,b,\ldots)$ зависит только от $a,b,\ldots$: причём при $1\le p\le\infty$ константа $C(k,\,p)$ не зависит от p. Для $1\le p\le\infty$ неравенство (3.11) хорошо известно [12] (см. [12], с.274), а для $0<p<1$ получено автором (ДАН Тадж. 1987, №7, с.397-400). Возьмём число $\alpha>0$ так, чтобы $\alpha\le k$. Тогда на основании (3.11) и свойства модуля гладкости порядка $\alpha>0$ и $\beta>0$ получим:

$$A_\sigma(f)_{L_p} \le C(k,\,p)\omega_k\left(\frac{1}{\sigma};\,f\right)_{L_p} \le C(\alpha,\,\beta)\omega_\alpha\left(\frac{1}{\sigma};\,f\right)_{L_p}.$$

Теорема доказана.

Доказательство теорема 3.2.

Пусть $Q_\delta(x)$ - целая функция степени $\le\sigma$, осуществляющая наилучшее приближение функции $f(x)$ в пространствах $L_p(-\infty,\infty)$ $1\le p\le\infty$, т.е.

$$A_\sigma(f)_{L_p} = \|f(x)-Q_\sigma(x)\|_{L_p}\ . \tag{3.12}$$

Тогда по свойству разности дробного порядка, пользуясь неравенством Минковского и учитывая (3.12) имеем:

$$\left\|\Delta_n^\alpha f(x)\right\|_{L_p} \le \left\|\Delta_n^\alpha\left[f(x)-Q_{2^m}(x)\right]\right\|_{L_p} + \left\|\Delta_n^\alpha Q_{2^m}(x)\right\|_{L_p} \le r^{\{\alpha\}}A_{r^m}(f)_{L_p} + \left\|\Delta_n^\alpha Q_{2^m}(x)\right\|_{L_p} \tag{3.13}$$

Очевидно, что

$$Q_{2^m}(x) = Q_r(x) + \sum_{v=1}^{m}\left[Q_{2^{x+1}}(x) - Q_{2^v}(x)\right].$$

Отсюда по свойству разности дробного порядка имеем

$$\Delta_n^\alpha Q_{2^m}(x) = \Delta_n^\alpha Q_r(x) + \sum_{v=1}^{m}\Delta_n^\alpha\left[Q_{2^{v+1}}(x) - Q_{2^v}(x)\right]\ . \tag{3.14}$$

Известно, что (см. [58])

$$\left\|\Delta_n^r Q_k(x)\right\|_{L_p} \le C(kh)^r\left\|Q_k(x)\right\|_{L_p},\quad r>0\ . \tag{3.15}$$

Поскольку

$$\left\|\Delta_n^r Q_k(x)\right\|_{L_p} \leftrightarrow \left\|\Delta_n^\alpha Q_k(x)\right\|_{L_p},\quad \alpha>0 \tag{3.16}$$

($A\leftrightarrow B$ означает $C_1B\le A\le C_2B$), то в силу (3.15)

$$\left\|\Delta_n^\alpha Q_k(x)\right\|_{L_p} \le (kh)^\alpha\left\|Q_k(x)\right\|_{L_p}. \tag{3.17}$$

На основании равенства (3.14), применяя неравенство Минковского, и в силу (3.17) находим, что

$$\left\|\Delta_n^{\alpha} Q_{r^m}(x)\right\|_{L_p} \le \left\|\Delta_n^{\alpha} Q_r(x)\right\|_{L_p} + \sum_{\nu=1}^{m}\left\|\Delta_n^{\alpha}\left[Q_{r^{\nu+1}}(x)-Q_{r^{\nu}}(x)\right]\right\|_{L_p} \le$$

$$\le C(2h)^{\alpha}\left\|Q_r(x)\right\|_{L_p} + C\sum_{\nu=1}^{m}\left(r^{\nu+1}h\right)^{\alpha}\left\|Q_r^{\nu+1}(x)-Q_{r^{\nu}}(x)\right\|_{L_p}. \qquad (3.18)$$

Отсюда, пользуясь неравенством Минковского, и в силу (3.12), получим:

$$Q_2(x)=Q_0(x)+\left[Q_1-Q_0\right]+\left[Q_2-Q_1\right],$$

$$\left\|\Delta_h^{\alpha} Q_{r^m}(x)\right\|_{L_p} \le C(\alpha)\left\{h^{\alpha}A_0(f)_{L_p} + h^{\alpha}\sum_{\nu=1}^{m}\left(r^{\nu+1}\right)^{\alpha}A_{r^{\nu}}(f)_{L_p}\right\} =$$

$$= C(\alpha)h^{\alpha}\left\{A_0(f)_{L_p} + \sum_{\nu=1}^{r^{\nu}} r^{(\nu+1)\alpha}A_{r^{\nu}}(f)_{L_p}\right\}. \qquad (3,19)$$

Учитывая, что

$$r^{(\nu+1)\alpha}A_{r^{\nu}}(f)_{L_p} \le r^{r\alpha}\sum_{\mu=r^{\nu-1}+1}^{r^{\nu}}\mu^{\alpha-1}A_{\mu}(f)_{L_p},$$

из неравенства (3.19) находим, что

$$\left\|\Delta_h Q_{r^m}(x)\right\|_{L_p} \le C(\alpha)h^{\alpha}\left\{A_0(f)_{L_p} + \sum_{\nu=1}^{m}\sum_{\mu=2^{\mu-1}+1}^{r^{\nu}}\mu^{\alpha-1}A_{\mu}(f)_{L_p} + A_1(f)_{L_p}\right\} =$$

$$= C(\alpha)\sum_{\nu=0}^{r^m}(\nu+1)^{\mu-1}A_{\nu}(f)_{L_p}. \qquad (3.20)$$

Теперь выберем $h=\frac{1}{n}$ и $r^m \le n \le r^{m+1}, \quad m=0,1,2,\ldots$ из неравенства (3.13) и (3.20) получим, что $r^m \le n \le$

$$\left\|\Delta_{\frac{h}{n}}^{\alpha} f(x)\right\|_{L_p} \le C(\alpha)\left(\frac{h}{n}\right)^{\alpha}\sum_{\nu=0}^{n}(\mu+1)^{\alpha-1}A_{\nu}(f)_{L_p}.$$

Отсюда по определению модуля гладкости дробного порядка получим что:

$$\omega_{\alpha}\left(\frac{1}{n}, f\right)_{L_p} \le \frac{C(\alpha)}{n^{\alpha}}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{\alpha-1}A_{\nu}(f)_{L_p}.$$

Теорема 3.2 доказана.

Для доказательства теоремы 3.3 необходима следующая лемма.

Лемма 3.2. Пусть $F(x)$ - преобразование Фурье функции $f(x)\in L_p(-\infty,\infty),\quad 1<p<\infty$ такое, что $F(x)=0$ при $x<0$. Тогда для любого $r\geq 0$ и $\alpha>0$ имеет место неравенство:

$$S=\left\|\int_{r^{n+1}}^{r^{n+r}}U^2F(u)\left(1-e^{-iut}\right)^{\alpha}e^{iux}du\right\|_{L_p}\leq C(p,\alpha,r)t^{\alpha}\left\{\sum_{\nu=2^n-1}^{2^{n+1}}(\nu+1)^{\gamma(\alpha+2)-1}A_{\nu}^{\gamma}(f)_{L_p}\right\}^{\frac{1}{\gamma}},\quad (3.21)$$

$\gamma=\min(r,\,p)$.

Доказательство. Интегрируя по частям, получим:

$$\int_{2^n-1}^{2^{n+1}-1}U^2F(u)\left(1-e^{-iut}\right)^{\alpha}e^{iut}du=\left(2^{n+1}-1\right)^2\left(\int_{2^n}^{2^{n+1}}F(u)e^{iux}du\right)\left(1-e^{-i\left(2^{n+1}-1\right)t}\right)^{\alpha}-$$

$$-\int_{2^n-1}^{2^{n+1}}\int_{2^{n-1}}^{u}F(u)e^{iux}d\left(u^r\left(1-e^{-iut}\right)^{\alpha}\right)dt\,. \qquad (3.22)$$

Теперь нам необходимы следующие известные неравенства (см. [79], [4])

$$\left\|\int_{-u}^{u}F(t)e^{itx}\right\|_{L_p}\leq M(p)\left\|f(x)\right\|_{L_p} \qquad (3.23)$$

$$\left\|f(x)-\int_{-\delta}^{\delta}F(u)e^{iux}du\right\|_{L_p}\leq CA_{\delta}(f)_{L_p}\,. \qquad (3.24)$$

Применяя неравенство Минковского, на основании неравенства (3.23), (3.24) из равенства (3.22), получаем:

$$S\leq M(p)t^{\alpha}2^{n(r+\alpha)}\left\|\int_{2^{n+1}-1}^{2^{n+2}-1}F(u)e^{iux}du\right\|_{L_p}\leq$$

$$\leq M(p)t^{\alpha}2^{n(r+\alpha)}\left\|\int_{0}^{2^{n+2}-1}F(u)e^{iux}du-\int_{0}^{2^{n+2}-1}F(u)e^{iux}du\right\|_{L_p}\leq C(p)t^{\alpha}2^{n(r+\alpha)}A_{2^{n+1}-1}(f)_{L_p}.$$

В силу монотонного убывания $A_n(f)_{L_p}$ отсюда получим

$$S^{\gamma}\leq C(p)t^{\alpha\gamma}2^{n\gamma(r+\alpha)}A_{2^{n+1}-1}^{\gamma}(f)_{L_p}\leq C(p)t^{\alpha\gamma}\sum_{\nu=2^n-1}^{2^{n+1}-1}\left(\nu+1\right)^{\gamma(\alpha+2)-1}A_{\nu}^{\alpha}(f)_{L_p}.$$

Лемма 3.2 доказана.

Доказательство теоремы 3.3. Доказательство теоремы проводим для функций $f(x)$, имеющих преобразование Фурье $F(x)=0$ когда $x<0$, что не ограничивает общности. В силу свойства разности дробного порядка и равенства (3.24) получим:

$$\left\|\Delta_t^\alpha f(x)\right\|_{L_p}^\gamma \le \left\|\Delta_t^\alpha\left[f(x)-\int_0^{2^m-1}F(u)e^{iux}du\right\|_{L_p}^\gamma + \left\|\Delta_t^\alpha\left(\int_0^{2^m-1}F(u)e^{iux}du\right)\right\|_{L_p}^\gamma \le C(\alpha)2^{\alpha\gamma}A_{2^m-1}^\gamma(f)_{L_p} + R \quad (3.25)$$

$$R = \left\|\Delta_t^\alpha\left(\int_0^{2^m-1}F(u)e^{iux}du\right)\right\|_{L_p}.$$

Известно, что (см. [4], теорема 4)

$$\|f(x)\|_{L_p} \le M(p)\left\{\|\varphi(x+i)\|_{L_p}\right\} + \left\|\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_0^{2^m-1}F(u)e^{iux}du\right|^2du\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_p}, \quad (3.26)$$

$$\varphi(x+iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty F(u)e^{-uy}e^{-iux}du.$$

Имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta_t^\alpha\left(f(u)e^{-iux}\right)du = \left(1-e^{-ixt}\right)^\alpha F(x). \quad (3.27)$$

В самом деле,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta_t^\alpha f(u)e^{-iux}du = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u-kt)e^{-iux}du = F(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}e^{-iktx} = F(x)\left(1-e^{-itx}\right)^\alpha.$$

Заменяя функции $f(x)$, $\varphi(x+i)$ соответственно на $\Delta_t^\alpha f(x)$ $\Delta_t^\alpha u(x+i)$ в неравенстве (3.26) и в силу равенства (3.27) получим:

$$\left\|\Delta_t^\alpha f(x)\right\|_{L_p} \le M(p)\left\|\Delta_t^\alpha\varphi(x+i)\right\|_{L_p} + \left\|\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_{2^n-1}^{2^{n+1}-1}F(u)\left(1-e^{-iut}\right)^\alpha e^{iux}du\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_p}. \quad (3.28)$$

Так как, функция $\varphi(x+iy)$ аналитична в верхней полуплоскости $y \ge 0$ (см. [79]), то, учитывая свойства разности дробного порядка, интегрируя по частям, а также применяя неравенство Минковского, получим:

$$\left\|\Delta_t^\alpha\varphi(x+i)\right\|_{L_p} = \left\|\Delta_t^\alpha\left(\int_0^\infty F(u)e^{-u}u^{iux}du\right)\right\|_{L_p} \le Ct^\alpha\left\|\int_0^\infty u^\alpha F(u)e^{-u}e^{-iux}du\right\|_{L_p} \le$$

$$\le Ct^\alpha\left\|\int_0^\infty\left(F(v)e^{-\frac{v}{2}}e^{ivx}dv\right)d\left(u^\alpha e^{-\frac{u}{2}}\right)\right\|_{L_p} \le Ct^\alpha\int_0^\infty\left\|\int_0^u F(v)e^{-\frac{v}{2}}e^{ivx}dv\right\|_{L_p}d\left(u^\alpha e^{-\frac{u}{2}}\right). \quad (3.29)$$

Известно, что (см. [19])

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x+iy)|^p dx \le \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx \qquad 1 \le p < \infty, \quad y > 0. \quad (3.30)$$

Применяя неравенства (3.23), (3.30) из неравенства (3.29) находим, что:

$$\left\|\Delta_t^\alpha \varphi(x+i)\right\|_{L_p} \le C(p)t^\alpha \left\|\int_0^\infty F(v)e^{-\frac{v}{2}}e^{ivx}dv\right\|_{L_p}\int_0^\infty d\left(u^\alpha e^{-\frac{u}{2}}\right) \le C(p)t^\alpha \left\|\varphi\left(x+\frac{i}{2}\right)\right\|_{L_p} \le M(p)t^\alpha \left\|f(x)\right\|_{L_p}. \qquad (3.31)$$

Таким образом, в силу (3.28) и (3.31) получим, что

$$R \le M(p)\left\|\Delta_t^\alpha f(x)\right\|_{L_p}^\gamma \le C(p)\left\{t^{\alpha\gamma}\left\|f(x)\right\|_{L_p}^\gamma + \left\|\left(\sum_{\gamma=1}^m\left|2\int_{2^{\gamma-1}-1}^{2^\gamma-1}F(u)e^{iux}\left(1-e^{-iut}\right)^\alpha du\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_p}^\gamma\right. . \qquad (3.32)$$

Отметим, что в случае $1<p\le 2$ всегда существует преобразование Фурье $F(x)$ функции $f(x)$ (см. [19], [24]). Если при $P>2$ не существует преобразования Фурье, то вместо функции $f(x)$ рассматривается функция $f(x)=\frac{\sin\varepsilon x}{\varepsilon x}$, которая не ограничивает общности (см. [14], [4]).

Пусть теперь $1<p\le 2$, $\gamma=p$. Тогда, применяя леммы 3.2 при $r=0,\quad \gamma=p$ и то, что

$$\left\|f(x)\right\|_{L_p} \le CA_0(f)_{L_p}$$

из неравенства (3.32) получим:

$$R \le C(p)\left\{t^{\alpha p}A_0^p(f)_{L_p} + \sum_{\nu=1}^{m-1}\left\|\int_{2^\nu-1}^{2^{\nu+1}}F(u)\left(1-e^{-iut}\right)^\alpha e^{iux}du\right\|_{L_p}^p\right. \le$$

$$\le C(p)t^{\alpha p}\left\{A_0^p(f)_{L_p} + \sum_{\nu=1}^{m-1}\sum_{M=1}^{2^\delta}\left(M+1\right)^{\alpha p-1}A_\mu^p(f)_{L_p}\right\} \le C(p)t^{\alpha p}\sum_{\gamma=0}^n\left(\gamma+1\right)^{\alpha p}A_\gamma^p(f)_{L_p},$$

(3.33)

$$2^m \le n = [\delta] < 2^{m+1};\quad m=0,1,2,\ldots.$$

Пологая $0<t<\frac{1}{n}$ и учитывая монотонность $A_\gamma(f)_{L_p}$ в силу неравенств (3.25), (3.33) находим, что:

$$\left\|\Delta_t^\alpha f(x)\right\|_{L^p}^p \le \frac{C(x,\,p)}{\delta^{\alpha p}}\sum_{\gamma=0}^{[\delta]}\left(\nu+1\right)^{\alpha p}A_\gamma(f)_{L_p},$$

т.е. теорема доказана для $1<p\le 2\quad \gamma=p$. Если $2<p\le\infty$ и $\gamma=2$, то применяя неравенство Минковского из (3.32), получим:

$$R \le M(p)\left\{t^{2\alpha}A_0^2(f)_{L_p} + \sum_{\nu=1}^m\left\|\int_{2^\nu}^{2^\nu+1}F(u)\left(1-e^{-iux}\right)^\alpha e^{iux}du\right\|_{L_p}^2\right. .$$

Отсюда после применения леммы 3.2 при $\gamma = 2,\ r = 0$ приходим к оценке

$$R \le C(p)\left\{t^{2\alpha} A_0^2(f)_{L_p} + t^{2\alpha}\sum_{\nu=0}^{m-1}\sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{2^\nu}(\mu+1)^{2\alpha-1}A_\mu^2(f)_{L_p} \le C(p)t^{2\alpha}\sum_{\nu=0}^{[\delta]}(\nu+1)^{2\alpha-1}A_\nu^2(f)_{L_p}\right. , \qquad (3.34)$$

где $2^m \le [\delta] < 2^{m+1},\quad m = 0,1,2,\ldots$.

Следовательно, при любом $t \le \frac{1}{\delta}$ из неравенство (3.25) и (3.34) получим:

$$\left\|\Delta_t^\alpha f(x)\right\|_{L_p}^2 \le \frac{C(p,\alpha)}{\delta^{\nu 2\alpha}}\sum_{\nu=0}^{[\delta]}(\nu+1)^{2\alpha-1}A_\nu^2(f)_{L_p}.$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы при $2 < p \le \infty \quad \gamma = 2$. Доказательство теоремы 3.3 завершено.

Теперь докажем выше приведенный леммы 3.1.

Доказательство леммы 3.1.

$$2x = \sum_{\nu=0}^{m}\left[(\nu+1)^\alpha - \nu^\alpha\right]a_0 + m^\alpha a_m = \sum_{\nu=0}^{m-1}\left[(\nu+1)^\alpha - \nu^\alpha\right]a_\nu + (m+1)^\alpha a_m,$$

$$2h_1 = \sum_{\nu=0}^{m}\left[(\nu+1)^\alpha - \nu^\alpha\right]a_\nu - m^\alpha a_m,$$

$$2h_2 = \sum_{\nu=0}^{m-1}\left[(\nu+1)^\alpha - \nu^\alpha\right]a_\nu - (m+1)^\alpha a_m.$$

Учитывая, что $h_2 < h_1$ и $1 < p < \infty$, получим (см. [23], с.114)

$$(x+h_2)^p + (x-h_2)^p \le (x+h_1)^p + (x-h_1)^p \qquad (3.35)$$

Отсюда

$$(m+1)^{2p}a_m^p - m^{\alpha p}a_m^p \le \left\{\sum_{\nu=0}^{m}\left[(\nu+1)^\alpha - \nu^\alpha\right]a_\nu\right\}^p - \left\{\sum_{\nu=0}^{m-1}\left[(\nu+1)^\alpha - \nu^\alpha\right]a_\nu\right\}^p. \qquad (3.36)$$

Теперь, суммируя по m из последнего неравенства, получим:

$$\sum_{m=1}^{n}\left[(m+1)^{\alpha p} - m^{\alpha p}\right]a_m^p \le \left\{\sum_{\nu=0}^{m}\left[(\nu+1)^{\alpha p} - \nu^\alpha\right]a_\nu\right\}^p - a_0^p$$

Следовательно,

$$\sum_{m=0}^{n}\left[(m+1)^{\alpha p} - m^{\alpha p}\right]a_m^p \le \left\{\sum_{\nu=0}^{n}\left[(\nu+1)^\alpha - \nu^\alpha\right]a_\nu\right\}^p. \qquad (3.37)$$

Отсюда вытекает утверждение леммы 3.1.

Доказательство теоремы 3.4. При выполнении условия (3.7), рассуждая так же как при доказательстве теоремы 2.6

(см. §4, глава II), утверждаем, что функция $f(x)$ имеет производную порядка $\beta > 0$ Лиувилю-Грюнвальду-Летникова, принадлежащую пространству $L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p < \infty$. Докажем неравенство (3.8). Отметим следующий факт, доказанный автором в [70].

Лемма 3.3. Пусть функция $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ имеет преобразование Фурье $F[f(x)]$. Если у функции $f(x)$ существует производная порядка $\alpha > 0$ $f^{(\alpha)}(x) \in L_p(-\infty, \infty)$, то почти всюду на $(-\infty, \infty)$

$$F\left[f^{(\alpha)}(x)\right] = (ix)^{\alpha} F[f(x)].$$

Доказательство леммы 3.3. Из равенства (3.27) имеем, что $F\left(\Delta_t^{\alpha} f\right) = \left(1 - e^{-ixt}\right)^{\alpha} F(f)$, где $F(f)$ преобразование Фурье функции $f(x)$. Отсюда по определению производной дробного порядка (см. (3.4)) получим:

$$F\left[f^{(\alpha)}\right] = F\left[\lim_{t\to 0} t^{-\alpha} \Delta_t^{\alpha} f(x)\right] = \lim_{t\to 0}\left\{t^{-\alpha}\left(1 - e^{-ixt}\right)^{\alpha} F[f]\right\} = (ix)^{\alpha} F(f).$$

Утверждение леммы вытекает из (3.4) и (3.27). Применяя лемму 3.3, рассуждая так же как при доказательстве теоремы 3.3, получим неравенство, аналогичное (3.28), т.е.

$$\left\|\Delta_t^{\alpha} f^{(\beta)}(x)\right\|_{L_p} \le M(p)\left\{\left\|\Delta_t^{\alpha}\psi(x+i)\right\|_{L_p} + \left\|\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_{2^n-1}^{2^{n+1}} F(u)u^{\beta}\left(1-e^{-iut}\right)^{\alpha} e^{iu\alpha} du\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_p}\right\}, \qquad (3.38)$$

$$\psi(x+iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} u^{\beta} F(u) e^{-iuy} e^{-iux} dx.$$

Для функции $\psi(x+iy)$ неравенство (3.30) имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi(x+iy)\right|^p dx \le \int_{-\infty}^{\infty}\left|f^{(\beta)}(x)\right|^p dx, \quad y > 0, \qquad (3.39)$$

$$1 \le p < \infty.$$

На основании неравенств (3.38), (3.23), (3.24), (3.39) и применяя лемму 3.2, приводя соответствующие выкладки как при доказательстве теоремы 3.3, приходим к неравенству (3.8).

Теорема доказана полностью.

§ 2. Соотношения между модулями гладкости различных дробных порядков в пространствах $L_p(-\infty, \infty)$

На основании доказанных теорем 3.1, 3.2, 3.3 и свойств модулей гладкости при любом $\alpha > 0$ доказываются следующие соотношения между модулями гладкости различных порядков в пространстве $L_p(-\infty, \infty), 1 \le p \le \infty$.

Теорема 3.5. Если $f(x) \in L_p(-\infty, \infty), \quad 1 \le p \le \infty$, то для любых $\beta > \alpha$ имеет место неравенство:

$$\omega_\alpha(v, f) = 0 \quad \left\{ \delta^\alpha + \delta^\alpha \left(\int_\delta^1 t^{-\gamma^{\alpha-1}} \omega_\beta^\gamma(t; f)_{L_p} \right)^\gamma \right. , \tag{3.40}$$

$$0 < \delta \le \frac{1}{2}, \quad \gamma = \min(2, p), \quad 1 \le p \le \infty, \quad \gamma = 1, \quad p = \infty;$$

$$\omega_\beta(\delta; f)_{L_p} \le 2^{\{\beta - \alpha\}} \omega_\alpha(\delta; f)_{L_p}, \quad 0 < \delta < 1, \quad 1 \le p < 1.$$

Теорема 3.6. Если $f(x) \in L_p(-\infty, \infty), \quad 1 < p < \infty$, то при $0 < h \le \frac{1}{2}$ и любых $\beta < \alpha$ имеет место неравенство:

$$\omega_\alpha(h; f)_{L_p} \ge (\alpha, p) h^\alpha \left\{ \int_h^1 t^{-\varepsilon l - 1} \omega_\beta^\varepsilon(t; f) dt \right\}^{\frac{1}{2\varepsilon}} , \tag{3.41}$$

$$\varepsilon = \max(2, p).$$

Доказываются ещё два утверждение, показывающих зависимость между модулями гладкости самой функции и её дробной производной $f^{(\delta)}(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ порядка $\delta > 0$.

Теорема 3.7. Пусть $f(x) \in L_p(-\infty, \infty), \quad 1 \le p \le \infty$ и при некотором $\beta > r$ выполнено условия:

$$\int_0^1 t^{-\gamma r - 1} \omega_\beta^\gamma(t; f)_{L_p} dt < \infty. \tag{3.42}$$

Тогда функция $f(x)$ имеет производную порядка $r > 0$ по Лиувилю-Грюнвальду-Летникову $f^{(r)}(x) \in L_p(-\infty, \infty)$, и справедлива неравенство

$$\omega_\alpha\left(h; f^{(r)}\right)_{L_p} \le C(\alpha, p) \left\{ h^\alpha + h^\alpha \left(\int_h^1 t^{-\gamma^{(\alpha+r)-1}} \omega_\beta^\gamma(t; f) \right)_{L_p}^{\frac{1}{\gamma}} + \left(\int_0^h t^{-\gamma r - 1} \omega_\beta^\gamma(t; f)_{L_p} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right. , \quad \beta > \alpha \tag{3.43}$$

$$\gamma = \min(r,p), \quad 0 < h \le \frac{1}{2}$$

Теорема 3.8. Пусть $f(x) \in L_p(-\infty,\infty), \quad 1 \le p < \infty$ имеет производную порядка $r > 0$ по Лиувилю-Грюнвальду-Летникову и $f^{(r)}(x) \in L_p(-\infty,\infty)$. Тогда имеет место неравенство:

$$\omega_\alpha\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)_{L_p} \ge \frac{1}{\sigma^\alpha}\left(\sum_{\nu=1}^{[\sigma]} \nu^{\alpha\varepsilon} A_\nu^\varepsilon(f)_{L_p}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}, \tag{3.44}$$

$$\varepsilon = \max(2,p);$$

$$\omega_\beta(h; f)_{L_p} \le h^r \omega_\alpha\left(h; f^{(r)}\right)_{L_p}, \quad \beta > \alpha.$$

Теорема 3.8 содержит в себе следующие утверждения.

Теорема 3.9. Пусть $f(x) \in L_p(-\infty,\infty), \quad 1 < p < \infty$. Тогда для любого $\alpha > 0$ имеет место неравенство:

$$\omega_\alpha\left(\frac{1}{\delta}; f\right)_{L_p} \ge \frac{1}{\delta^\alpha}\left(\sum_{\nu=1}^{[\delta]} \nu^{\alpha\varepsilon} A_\nu^\varepsilon(f)_{L_p}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}. \tag{3.44a}$$

Эта теорема доказывается точно также как и теорема 3.8. (Здесь надо рассмотреть $r = 0$). Неравенство (3.44) является улучшением следующего результата при $1 < p < \infty$.

Теорема 3.10. Если $f(x) \in L_p(-\infty,\infty), \quad 1 \le p \le \infty$ имеет производную порядка $r > 0$ по Лиувилю-Грюнвальду-Летникову и $f^{(r)}(x) \in L_p(-\infty,\infty)$, то имеет место неравенство:

$$A_\delta(f)_{L_p} \le \frac{\delta(\alpha,r)}{\delta^r}\omega_\alpha\left(\frac{1}{\delta}; f^{(r)}\right)_{L_p}.$$

Метод доказательства теоремы 3.6 позволяет установить следующее.

Теорема 3.11. Пусть $f(x) \in L_p(-\infty,\infty), \quad 1 < p < \infty$ имеет производную порядка $r > 0$ по Лиувилю-Грюнвальду-Летникову и $f^{(r)}(x) \in L_p(-\infty,\infty)$, то при $\alpha + r < \beta, \; 0 < h \le \frac{1}{2}$ имеет место неравенство:

$$\omega_\alpha\left(h; f^{(r)}\right)_{L_p} \ge h^\alpha \left\{\int_h^1 t^{-(\alpha+r)\varepsilon-1}\omega_\beta^\varepsilon(t; f)_{L_p}\,dt\right\}^{\frac{1}{\varepsilon}}, \quad \varepsilon = \max(r,p), \quad p = 1, \quad p = \infty:$$

$$\omega_\alpha(h; f)_{L_p} \le h^\alpha \omega_\alpha\left(h; f^{(r)}\right)_{L_p}, \tag{3.45}$$

$$p = 1; \quad p = \infty.$$

Неравенство (3.41а) устанавливается также как доказательство неравенства (3.41). Отметим, что утверждение теоремы 3.10 вытекает из неравенства (3.44). Однако в ряде случаев (3.44) даёт лучшую оценку, чем теорема 3.10. Например, если функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$A_\sigma(f)_{L_p} \sim \frac{1}{\sigma^{\alpha+r}}; \quad 1<p<\infty,$$

то из (3.44) получим

$$\omega\left(h; f^{(r)}\right)_{L_p} \geq h^\alpha \left(\ln\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \gamma=\min(r,p)$$
,

а из теоремы 3.10 вытекает лищь

$$\omega\left(h; f^{(r)}\right)_{L_p} \geq h^\alpha$$

Отметим, что утверждение теорем 3.5, 3.6 для $1<p<\infty$ при натуральных α, β установлена в [14], а теорем 3.7 и 3.8 для натуральных α, β, r установлено в [4], [14].

Из теорем 3.6 и 3.5 вытекают следующие следствия.

Следствие 3.6. Пусть для функции $f(x) \in L_p(-\infty,\infty), \quad 1<p<\infty$ выполняется условие

$$\omega_S(t; f)_{L_p} \geq O\left(t^{S-1}\right) \quad S>1.$$

Тогда:

1) $\omega_{\alpha-1}(t; f)_{L_p} \geq t^{\alpha-1}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}, \quad \alpha>1 \qquad \varepsilon=\max(r,\, p)$;

2) $\omega_{\alpha-1}(\delta; f)_{L_p} \leq \delta^{\alpha-1}\left[1+\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right], \quad \alpha>1 \qquad \gamma=\min(r,\, p)$.

Из теорем 3.7, 3.8 следует

Следствие 3.7. Если выполняется условие

$$\omega_S(t; f)_{L_p} = t^{S-1}, \quad S>1, \quad r>0,$$

то

1) $\omega_{\alpha-1}(h; f^{(r)})_{L_p} \leq h^{\alpha-1}\left[1+\left(\ln\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right], \quad \alpha>1 \qquad \gamma=\min(r,\, p)$.

2) $\omega_{\alpha-1}(h; f^{(r)})_{L_p} \geq t^{\alpha-1}\left[\ln\frac{1}{t}\right]^{\frac{1}{\varepsilon}}, \quad \alpha>1 \qquad \varepsilon=\max(r,\, p)$.

Для установления утверждения следствий 3.6 и 3.7 достаточна заменить α на $\alpha-1$, β на α в соответствующих теоремах.

Доказательство теоремы 3.5.

В силу теорем 3.3, 3.2, 3.1 получаем:

$$\omega_\alpha\left(\frac{1}{\delta}; f\right)_{L_p} \le \frac{C(\alpha,p)}{\delta^\alpha}\left\{A_0^\gamma(f)_{L_p} + \sum_{\nu=1}^{[\delta]}(\nu+1)^{\alpha\gamma-1}A_\nu^\gamma(f)_{L_p}\right\}^{\frac{1}{\gamma}} \le$$

$$\le \frac{C(\alpha,p)}{\delta^\alpha}\left\{A_0^\gamma(f)_{L_p} + \sum_{\nu=1}^{[\delta]}(\nu+1)^{\alpha\gamma-1}\omega_\beta^\gamma(\frac{1}{\nu}; f)_{L_p}\right\}^{\frac{1}{\gamma}} \qquad (3.46)$$

Так как $\omega_\beta(t;f)_{L_p}$ монотонна и не убывает относительно t, то при $\delta=\frac{1}{\sigma}\le\frac{1}{2}$ имеем: (0<δ<1)

$$\sum_{\nu=1}^{[\sigma]}(\nu+1)^{\alpha\gamma-1}\omega_\beta^\gamma\left(\frac{1}{\nu}; f\right)_{L_p} \le \sum_{\nu=1}^{[\sigma]}\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\frac{\omega_\beta^\gamma(t; f)_{L_p}}{t^{\alpha\gamma+1}}dt \le \int_\delta^1 t^{-\alpha\gamma-1}\omega_\beta^\gamma(t; f)_{L_p}dt\ . \qquad (3.47)$$

Из неравенства (3.46), (3.47) при $\delta=\frac{1}{\sigma}\le\frac{1}{2}$ получим соотношение (3.40). Неравенства (3.40а) отмечена как свойство модуля гладкости дробного порядка (см. свойство 2). Теорема доказана.

Теорема 3.6 доказывается с помощью теоремы 3.8. Поэтому сначала приведём доказательство теоремы 3.8. Доказательство теоремы проводим в следующих предположениях:

1. Функция $f(x)$ представляет собой граничные значения некоторой функции $\varphi(x+iy)\in H_p$, т.е. функции, удовлетворяющей условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x+iy)|^p dx<\infty,\quad y>0,\quad 1\le p\le\infty\,.$$

2. Функция $f(x)$ имеет преобразование Фурье $F(x)\in L_q(-\infty,\infty),\ 1\le q\le\infty$, причём $F(x)=0$ когда $x<0$. Такие предложения не нарушают общности (см. [14], с. 94 и [4]). В силу очевидного неравенства

$$A_\delta(f)\le\left\|f(x)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\delta f(u)e^{iux}du\right\|_{L_p} = \|R_\delta(x)\|_{L_p} \qquad (3.48)$$

при $r^m \le \delta \le 2^{m+1}, \quad m=1,2,\dots$ получим

$$\rho_{\varepsilon\alpha} = \frac{1}{\delta^{\alpha\varepsilon}}\sum_{\nu=1}^{\{\delta\}} \nu^{\varepsilon(\alpha+r)-1} A_\nu^\varepsilon(f)_{L_p} \le \delta^{-\alpha\varepsilon}\sum_{\nu=1}^{m} r^{\nu\varepsilon(\alpha+r)} A_{2^\nu}^\varepsilon(f)_{L_p} \le \sum_{\nu=0}^{m+1}\frac{r^{\nu\varepsilon(\alpha+r)}}{\delta^{\alpha\varepsilon}}\left\|R_{r^\nu}(x)\right\|_{L_p} \qquad (3.49)$$

На основании неравенства (3.26) имеем:

$$\left\|R_{r^\nu}(x)\right\|_{L_p} \le \left\|\varphi_\nu(x+i)\right\|_{L_p} + \left\|\left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\left|\Delta_\mu F(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_p}, \qquad (3.50)$$

где

$$\varphi_\nu(x+i) = \int_{r^\nu}^{\infty} F(u)e^{-u}e^{iux}du,$$

$$\Delta_\mu F(x) = \int_{r^\mu}^{r^{\mu+1}} F(u)e^{iux}du.$$

Из неравенств (3.49), (3.50) получим:

$$\rho_{\varepsilon,\alpha} \le \delta^{-\alpha\varepsilon}\sum_{\nu=0}^{m+1} 2^{\nu\varepsilon(\alpha+r)}\left\|\varphi_\nu(x+i\right\|_{L_p}^{\varepsilon} + \sum_{\nu=0}^{m+1}\frac{2^{\nu\varepsilon(\alpha+r)}}{\delta^{\alpha\varepsilon}}\left\|\left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\left|\Delta_\mu F(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_p}^{\varepsilon} = B_1 + B_2.$$

Интегрируя по частям и применяя неравенство Минковского, в силу неравенства (3.23), а также неравенства (3.30), получим:

$$B_1 \le \sum_{\nu=0}^{m+1}\delta^{-\alpha\varepsilon}2^{\nu\varepsilon(\alpha+2)}\left\{\left\|\int_0^{r^\nu}(u)e^{-\frac{u}{2}}e^{iux}du\right\|_{L_p} e^{-2^\nu} + \int_{2^\nu}^{\infty}\left\|\int_0^{u}F(t)e^{-\frac{u}{2}}e^{itx}dt\right\|_{L_p} de^{-\frac{u}{2}}\right\}^{\varepsilon} \le \delta^{\varepsilon(r-\alpha)}\left\|f(x)\right\|_{L_p}^{\varepsilon}.$$

Оценим теперь B_2. Рассмотрим случай $1<p<r, \quad \varepsilon = r$. Применяя неравенство Минковского, получим:

$$B_2 = \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{m+1}\frac{2^{2\nu(\alpha+r)}}{\delta^{2\alpha}}\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\left|\Delta_\mu F(x)\right|^2\Big)^{\frac{p}{2}}dx\right\}^{\frac{2}{p}}.$$

С помощью преобразования Абеля находим:

$$B_2 = \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{m+1}\frac{2^{2\nu(\alpha+r)}}{\delta^{2\alpha}}\left|\Delta_\mu F(x)\right|^2 + \frac{2^{2(m+1)(\alpha+r)}}{\delta^{2\alpha}}\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\left|\Delta_\mu F(x)\right|^2\Big)^{\frac{p}{2}}dx\right\}^{\frac{2}{p}}.$$

Известно, что (см [25]).

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{\nu=\mu}^{\infty}\left|\Delta_\nu F(x)\right|^2\right)^{\frac{p}{2}}dx\right\}^{\frac{1}{p}} \le \left\|R_{2^\mu}(x)\right\|_{L_p} \tag{3.51}$$

$$1 < p < \infty, \quad \mu = 0,1,2,\dots .$$

В силу неравенств (3.51), (3.24) и следующего неравенства (см. теорему 3.10)

$$A_\sigma(f)_{L_p} \le \frac{1}{\sigma^r}\omega_\alpha\left(\frac{1}{\sigma};\, f^{(\kappa)}\right)_{L_p} \tag{3.52}$$

получим, что

$$Q_1 = \delta^{2r}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\left|\Delta_\mu F(x)\right|^2\right)^{\frac{p}{2}}dx\right\}^{\frac{2}{p}} \le \delta^{r2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|R_{2^{m+1}}(x)\right|^p dx\right\}^{\frac{2}{p}} \le \delta^{2r}A_\delta^2(f)_{L_p} \le \omega_\alpha^2\left(\frac{1}{\delta};\, f^{(r)}\right)_{L_p}.$$

Применяя неравенство (3.51), находим, что

$$Q_r = \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{m}\frac{2^{2\nu(\alpha+r)}}{\delta^{2\alpha}}\left|\Delta_\nu F(x)\right|^2\right)^{\frac{p}{2}}dx\right\}^{\frac{2}{p}} \le \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{\nu=0}^{m}\delta^{-\alpha}2^{\nu(\alpha+r)}\Delta_\nu F(x)\right|^p dx\right\}^{\frac{2}{p}} =$$

$$= \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{\nu=0}^{m}\int_{2^\nu}^{2^{\nu+1}}\Phi(u)F(u)u^r\left(1-e^{-i\frac{u}{\delta}}\right)^{\alpha}e_{du}^{iux}\right|_{dx}^{p}\right\}^{\frac{2}{p}},$$

где

$$\Phi(u) = u^{-r}\delta^{-\alpha}\left(1-e^{-i\frac{u}{\delta}}\right)^{-\alpha}2^{\nu(\alpha+z)}, \qquad 2^\nu \le u \le 2^{\nu+1}, \quad \nu = 0,1,2,\dots,m.$$

Нам нужна следующая теорема С.М.Михлина в формулировке М.Ф.Тимана [14].

Теорема. Пусть $f(x) \in L_p(-\infty,\infty)$, $1 < p < \infty$ имеет преобразование Фурье $F(x) \in L_q(-\infty,\infty)$, $1 \le q \le \infty$. Если $\Phi_1(u)$ удовлетворяет для всех $\nu = 0,1,2,\dots$ условиям

$$\left|\Phi_1(u)\right| \le M,\ \int_{2^\nu}^{2^{\nu+1}}\left|d\Phi_1(u)\right| \le M,\ \int_{-2^{\nu+1}}^{-2^\nu}\left|d\Phi_1(u)\right| \le M, \tag{3.53}$$

то функция $g(x)$, имеющая своим преобразованием Фурье $F(x)\Phi_1(x)$ также принадлежит $L_p(-\infty,\infty)$,

$$\left\|g(x)\right\|_{L_p} \le M(p)\left\|f(x)\right\|_{L_p}. \tag{3.54}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция

$$\Phi_1(u)=\begin{cases}\Phi(u), & 2^{\nu}\le u\le 2^{\nu+1},\\ 0, & u<1, u>2^{m+1}.\end{cases}$$

удовлетворяет условию (3.53). Поэтому, применяя теоремы Михлина С.Г., получим:

$$Q_2=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{1}^{2^{m+1}}u^r\left(1-e^{-i\frac{u}{\delta}}\right)^{\alpha}F(x)e^{iux}du\right|^p dx\right\}^{\frac{2}{p}}.$$

Отсюда в силу неравенства (3.23), находим, что (см. ещё (3.27) и леммы 3.3)

$$Q_2\le\omega_{\alpha}^2\left(\frac{1}{\delta};\ f^{(r)}(x)\right)_{L_p}.$$

Учитывая оценки, полученные для Q_1, Q_2, находим, что

$$B_2\le\omega_{\alpha}^2\left(\frac{1}{\delta};\ f^{(r)}\right)_{L_p}.$$

В силу оценки для B_1 и B_2 получим, что

$$\rho_{\varepsilon,\alpha}\le\delta^{r(r-\alpha)}\|f(x)\|_{L_p}^2+\omega_{\alpha}^2\left(\frac{1}{\delta};\ f^{(r)}\right)_{L_p} \qquad (3.55)$$

при $1<p<2,\quad \gamma=2$.

Теперь рассмотрим случай $2<p<\infty,\quad \varepsilon=p$.

Так как $\frac{p}{2}>1$, то

$$B_2=\delta^{-\alpha p}\sum_{\nu=0}^{m+1}2^{\nu p(\alpha+r)}\left\|\left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\left|\Delta_{\mu}F(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_p}^p=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{m+1}\delta^{-\alpha p}2^{\nu p(\alpha+r)}\left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\left|\Delta_{\mu}F(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}dx\le\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{\nu=0}^{m+1}\delta^{-2\alpha}2^{2\nu(\alpha+r)}\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\left|\Delta_{\mu}F(x)\right|^2\right]^{\frac{p}{2}}dx.$$

Далее, продолжая рассуждение также как при получении оценки для B_2 в случае $1<p\le 2,\quad \varepsilon=2$ получим

$$B_2\le\omega_{\alpha}^p\left(\frac{1}{\delta};\ f\right)_{L_p},$$

и наконец,

$$\rho_{\varepsilon,\alpha} \le \delta^{p}(r-\alpha)\|f(x)\|_{L_p}^{p} + \omega_{\alpha}^{p}\left(\frac{1}{\delta}; f^{(r)}\right)_{L_p} . \qquad (3.56)$$

Неравенства (3.55) и (3.56) записываются в следующем виде

$$\rho_{\varepsilon.\alpha} \le C(\rho,\alpha,r)\left\{\delta^{\varepsilon(r-\alpha)}\|f(x)\|_{L_p}^{\varepsilon} + \omega_{\alpha}^{\varepsilon}\left(\frac{1}{\delta}; f^{(r)}\right)_{L_p}\right\}, \quad 1<p<\infty, \varepsilon=\max(r,p) \qquad (3.57)$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 3.6. Положим, что $\frac{1}{n+1} \le h \le \frac{1}{n}$ n=1,2,… . В силу монотонности $\omega_{\beta}(t;f)_{L_p}$ получим:

$$\rho = \frac{1}{n^{\alpha\,\varepsilon}}\int_{\frac{1}{n}}^{1} t^{-\alpha\,\varepsilon-1}\,\omega_{\beta}^{\varepsilon}(t;f)_{L_p}\,dt = \frac{1}{n^{\alpha\varepsilon}}\sum_{\nu=1}^{n-1}\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu+1}} t^{-\alpha\varepsilon-1}\,\omega_{\rho}^{\varepsilon}(t;f)_{L_p}\,dt \le \frac{1}{n^{\alpha\varepsilon}}\sum_{\nu=1}^{n-1}\omega_{\beta}^{\varepsilon}\left(\frac{1}{\nu};f\right)_{L_p}\nu^{\alpha\varepsilon-1} \qquad (3.58)$$

.

Пусть теперь < r < p ∞ и $\varepsilon=\rho$ тогда в силу теоремы 3.3 из неравенства: (3.58) находим, что

$$\rho \le \frac{C(\alpha,\rho)}{n^{2p}}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\alpha\rho-1-\beta P}\left\{\sum_{m=0}^{\nu}(m+1)^{2\beta-1}A_{m}^{2}(f)_{L_p}\right\}^{\frac{\rho}{2}} . \qquad (3.59)$$

Отметим, что (см[23], с.306)

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-a}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \le k\sum_{n=1}^{m} n^{-a}(n\cdot a_n)^{b} \qquad (3.60)$$

.

Так как α<β, $\frac{p}{2}>1$, то применяя неравенство (3.60) из неравенства (3.59), получим:

$$\rho \le \frac{1}{n^{2\rho}}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\alpha\rho-\beta\rho-1}\left(V\cdot V^{2\beta-1}A_{\nu-1}^{2}(f)_{L_p}\right)^{\frac{p}{2}} = \frac{1}{n^{\alpha\rho}}\sum_{\nu=1}^{n}V^{\alpha\rho-1}A_{\nu-1}^{p}(f)_{L_p} \qquad (3.61)$$

.

Осталось показать, что

$$\frac{1}{n^{\alpha\rho}}\sum_{\nu=1}^{n}V^{\alpha\rho-1}A_{\nu-1}^{p}(f)_{L_p} \le w_{\alpha}^{p}\left(\frac{1}{n};f\right)_{L_p} . \qquad (3.62)$$

Неравенство (3.62) Вытекает из неравенства (3.44) при *r=0, ε = p.*

Неравенство (3.61), (3.62) дают неравенство (3.61), т.е. утверждение теоремы при *2<p<∞, ε=p.*

Пуст теперь $1<p\le 2$, *ε=2,* Тогда в силу теоремы 3.3 из неравенства (3.58) находим, что:

$$\rho \le \frac{1}{n^{2d}} \sum_{\nu=1}^{n} \omega_\beta^{\ 2}\left(\frac{1}{\nu}; f\right)_{Lp} \cdot \nu^{2d} \le \frac{1}{n^{2d}} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2d-1} \frac{1}{\nu^{2\beta}} \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} (\mu+1)^{\beta p-1} A^{p}{}_{\mu}(f)_{Lp} \right)^{\frac{z}{p}}.$$

Так как α<β, $\frac{p}{2} > 1$, то в силу неравенства (3.60) из неравенства (3.63) получим:

$$\rho \le \frac{1}{n^{2d}} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2d-1-2\beta} \left[\nu(\nu+1)^{\beta p-1} A^{p}{}_{\nu}(f)_{Lp} \right]^{\frac{2}{p}} \le \frac{1}{n^{2d}} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2d-1} A_\nu^2 (f)_{Lp}.$$

Пологая r = 0, ε=2 в неравенства (3.44) на основании неравенства (3.64), получим:

$$\beta \le w_\alpha^2\left(\frac{1}{n}; f\right)_{L_p},$$

т.е. утверждение теоремы при $1 < p \le 2, \varepsilon = 2.$

Доказательство теоремы завершено.

Теперь докажем теорему 3.7. Предположим, что функция $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ имеет преобразование Фурье $\mathrm{F}(x) \in L_q(-\infty, \infty), 1 \le q \le \infty$. Такое предположение не нарушает общности (см. [4] , [14]). Покажем , что уловие (3.42) влечёт выполнимость уловия (3.7) теоремы 3.4. В силу монотонности $\omega_\beta(t; f)_{L_p}$ и теоремы 3.1 получим:

$$\infty > \int_0^1 t^{-\gamma r-1} \omega_\beta^\gamma (t; f)_{L_p} dt \ge \sum_{v=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{v+1}}^{\frac{1}{v}} t^{-\gamma r-1} \omega_\beta^\gamma (t; f)_{L_p} dt \ge$$

$$\ge \sum_{v=1}^{\infty} v^{\gamma r-1} \omega_\beta^\gamma \left(\frac{1}{v}; f\right) \ge \sum_{v=1}^{\infty} v^{\gamma r-1} A_v^\gamma (f)_{L_p}. \qquad (3.65)$$

Теперь, применяя теорему 3.4, утверждаем, что функция $f(x)$ имеет производную порядка r>0 Л-Г-Л и $f_x^{(r)} \in L_p(-\infty, \infty).$ Осталось доказать неравенство (3.43), поступая также как при получении (3.65), находим, что (см. способ получения (2.65))

$$\| f(x) \|_{L_p} + \left(\int_n^1 t^{-\gamma(\alpha+r)-1} w_\beta^\gamma (t; f)_{L_p} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \ge \left(\sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{\gamma(\alpha+r)-1} A_\nu^\gamma (f)_{L_p} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \qquad (3.66)$$

и аналогично (см.способ получения (2.66))

$$\left(\int_0^h t^{-\gamma r-1}\omega_\beta(t;f)_{L_p}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \geq \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} V^{\gamma r-1} A_\nu^\gamma(f)_{L_p}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, r<\beta, h\leq\frac{1}{2} \qquad (3.67)$$

Полагая h = $\frac{1}{n+1}$; n =1,2… на основании неравенств (3.8), (3.66), (3.67), получим неравенство (3.43).

Доказательство теоремы 3.9 приведено совместно с доказательством теоремы 3.8, в котором достаточно считать r=o, т.е. $f^{(r)}(x)=f^{(o)}(x)=f(x)$.

Доказательство теоремы 3.10. Для модуля гладкости функций дробного порядка и её производного дробного порядка по Л-Г-Л имеет место неравенство:

$$\omega_{\alpha+\beta}(\delta;f)_{Lp} \leq C(\alpha)\delta^\alpha\omega_\beta(\delta;f^{(\alpha)})_{Lp}, \ \alpha>0,\ \beta>0,\ \delta>0,\ 1\leq p\leq\infty \qquad (3.68)$$

Неравенство (3.68) для периодических функций доказано в [64], а для функций, заданных на всей вещественной оси доказывается аналогично.

Так как по теореме 3.1 (см. работа автора, ДАН Тадж. 1981, №3, с.148-149)

$$A_\sigma(f)_{L_p} \leq C(r)\omega_r\left(\frac{1}{\sigma};f\right)_{L_p}, \quad 1\leq p\leq\infty, \quad r>0,$$

то в силу неравенства (3,68) получим:

$$A_\sigma(f)_{Lp} \leq C(\alpha,\beta)\frac{1}{\sigma^\alpha}\omega_\beta\left(\frac{1}{\sigma};f^{(\alpha)}\right)_{Lp}.$$

Теорема доказана.

Неравенство (3.41а) в теореме 3.11 доказывается также, как неравенство (3.41). Неравенство (3.45) вытекает из (3.68).

§ 3. Преобразование Фурье и модуль гладкости дробного порядка (наилучшие приближения) в $L_p(-\infty,\infty)$

Пусть функция *f(x)* задана на всей вещественной оси и принадлежит пространству $L_p(-\infty,\infty)$. В случае, когда для функции *f(x)* существует преобразование Фурье F(*x*)=F(*f*) естественно выяснить вопрос о поведении функции F(*x*) при $x\to\infty$ в зависимости от свойств функции *f(x)*.

Некоторые свойства преобразования Фурье, например, можно найти в книгах [24], [20], [74], [75].

В этом параграфе рассматривается поведение преобразования Фурье в зависимости от скорости убывания модуля гладкости функций любого порядка, а также от их наилучших приближений в пространствах $L_p(-\infty,\infty)$. Ниже будем пользоваться обозначениями предыдущих параграфов.

Теорема 3.12. Пусть функция $f(x) \in L_p(-\infty,\infty)$, $1<p<\infty$ в имеет преобразование Фурье $F(x)$. Тогда, если $F(x) \geq 0$ и не возрастает на $(0, \infty)$, то при $x \to \infty$

$$F(x) = O\left\{ X^{\frac{1}{p}-1} \omega_\alpha\left(\frac{1}{X}; f\right)_{L_p} \right\}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \tag{3.69}$$

$$F(x) = O\left\{ X^{\frac{1}{p}-2} \left[1 + \left(\int_{\frac{1}{X}}^{1} t^{-\gamma-1} \omega_\alpha^\gamma (t; f)_{L_p} \, dt \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right] \right\}, \quad \alpha>1, \tag{3.70}$$

где $\gamma=\min(2,p)$ оценка O зависит от f.

Отметим, что преобразование $F(x)$ при $1 \leq p \leq 2$ всегда существует (см. [19]).

Теорема 3.13. Если $f(x) \in L_p(-\infty,\infty)$, то при $x \to \infty$ имеет место оценка:

$$F(x) = O\left\{ \omega_\alpha\left(\frac{1}{x}; f\right)_L \right\}, \quad \alpha>0. \tag{3.71}$$

Теорема 3,14. Если в условиях теоремы 3.12 функция $f(x)$ имеет производную $f^{(r)}(x)$ порядка r=0 в смысле Лиувиля-Грюнвальда-Летникова, то при $x \to \infty$ имеет место оценка

$$F\left[f^{(r)}\right] = O\left\{ x^{\frac{\perp}{P}-\perp-r} \omega_r\left(\frac{\perp}{x}; f^{(r)}\right)_{Lp} \right\}, \quad 0<\alpha<1; \tag{3.72}$$

$$F\left[f^{(r)}\right] = O\left\{ x^{\frac{\perp}{P}-r-r} 1 + \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\perp} t^{-\gamma-\perp} \omega_2^y \left(t; f^{(r)}\right)_{Lp}^{\frac{\perp}{\gamma}} \right) \right\}, \quad \alpha>1. \tag{3.73}$$

Это вытекает из теоремы 3,12 и из леммы 3,3 (см. § I)

Наряду с вышеприведёнными оценками сверху для преобразования Фурье имеются оценку снизу при дополнительных условиях, налагаемых на функцию F(x).

Теорема 3.15. Пусть выполняются условия теоремы 3,12 и следующие условия:

1. Функция F(x) почти всюду имеет вторую производную $F''(x) \geq 0;$

2. $\int\limits_o^x t^{1-\frac{1}{p}} F(t)dt = O\left(x^{2-\frac{1}{p}} F(x)\right), \quad 1 < p < \infty;$

3. $\sum\limits_{y=[x]}^{\infty} V^{p-2}(F(v))^p = O\left(x^{p-1}(F(x))^p\right)$

Тогда:

$$X^{\frac{1}{p}-1} \omega_\alpha\left(\frac{1}{x}; f\right)_L = O\{F(x)\}, O < \alpha \leq 1; \tag{3.74}$$

$$\omega_\alpha\left(\frac{1}{x}; f\right)_L = O\{F(x)\}, O < \alpha \leq 1. \tag{3.75}$$

Из теоремы 3.12 и 3.13 с помощью неравенства (3.6) (3.5) получим следующие оценки в зависимости от наилучших приближений функции *f(x)* целыми функциями $Q_\sigma(x)$ степени $\leq\sigma$

$$F(x) = O\left\{X^{-\frac{1}{p}(\alpha+\perp)} \left(\sum_{\nu=o}^{[x]} (V+1)\right)^{\alpha\gamma-1} A_\nu^\gamma(f)_{L_p}\right\}, \ 0<\alpha\leq 1,\ 1<p<\infty; \tag{3.76}$$

$$F(x) = O\left\{x^{-\alpha} \sum_{\nu=0}^{[x]} (\nu+\perp)^{\alpha-\perp} A_\nu(f)_L\right\}, \quad \alpha>0. \tag{3.77}$$

Из теоремы 3,15 вытекает следующая оценка снизу для преобразования Фурье

$$\delta^{\frac{1}{P}-1} A_\delta(f)_{Lp} = O\{F(\delta)\}, \quad 1<p<\infty. \tag{3.78}$$

Отметим, что неравенства (3,69) и (3,74) при $\alpha=1$, $1<p\leq 2$, указаны в [74], [78]. Из теорем 3,12 и 3,13 вытекает следующее следствие.

Следствие 3.1. Если функция f(x) удовлетворяет условию

$$\omega_\alpha(t; f)_{Lp} = t^\alpha; \quad 0 < \alpha < 1,\ 1 < p < \infty,$$

то при $x\to\infty$ $F(x) = O\left(x^{\frac{\perp}{P}-\alpha-\perp}\right), \quad O < \alpha < 1.$

Следствие 3.2. Если при p=1

$$\omega_\alpha(t;f)_{Lp}=t^\alpha,\quad \alpha>0,$$

то при $x\to\infty$ $F(x)=O\left(x^{-\alpha}\right),\quad \alpha>0$.

Из теоремы 3.15 вытекает следующее следствие.

Следствие 3.3. Если выполнены условия теоремы 3,15 и выполняется условие

$$\omega_\alpha(t;f)_{Lp}=t^\alpha,\quad 0<\alpha\le 1,\quad 1<p<\infty,$$

то при $x\to\infty$ $F(x)>x^{\frac{1}{p}-(\alpha-1)}$.

Следствие 3.4. Если выполнены условия теоремы 3,15 и условия при p=1

$$\omega_\alpha(t;f)_{L}=t^\alpha,\quad 0<\alpha\le 1,$$

то при $x\to\infty$ $F(x)>x^{-\alpha},\quad 0<\alpha\le 1.$

Доказательство теоремы 3.12. Пусть *f*(*x*)-чётная функция, для каждого фиксированного h преобразовании Фурье для функции *f(x-h)-f(x+h)* получим F(*x*)sinh*x*. Пусть G(y)=1 при $\frac{u}{2}\le|y|\le u$ и G(y)=0 при всех остальных *y*. Тогда её преобразованием Фурье является функция

$$g(x)=\int\limits_{\frac{u}{2}<|y|<u}e^{-iyx}dy=2\int\limits_{\frac{u}{2}}^{u}\cos yx dy.$$

В силу равенства Парсевалья (см.[24],с.68). имеем:

$$\int\limits_{o}^{\infty}[f(x-h)-f(x+h)]g(x)dx=M\int\limits_{\frac{u}{2}}^{u}F(x)\sinh x dx\quad. \tag{3.79}$$

Из условии теоремы следует, что правая часть в (3.79) имеет оценка

$$\int\limits_{\frac{u}{2}}^{u}F(x)\sinh x dx>C\cdot u\cdot F(u),\quad h\le\frac{1}{u}\quad. \tag{3.80}$$

Применяя неравенство Гельдера в левой части (3.79), получим:

$$\int\limits_{o}^{\infty}\left|[f(x+h)-f(x-h)]g(x)\right|dx\le\left\{\int\limits_{o}^{\infty}|f(x+h)-f(x-h)|^{p}dx\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int\limits_{o}^{\infty}|g(x)|^{q}dx\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{3.81}$$

Оценим интеграл в (3.81)

$$\int_o^\infty \left|g(x)\ \right|^q dx = 4\int_o^\infty \left|\frac{1}{x}\cos\frac{3}{4}u\alpha\sin\frac{1}{4}u\alpha\ \right|^g d\alpha = \int_o^{\frac{4}{3u}} O\left(u^q\right)dx + \int_{\frac{4}{3y}}^\infty O\left(x^{-q}\right)dx = O\left(u^{q-1}\right) \qquad (3.82)$$

Тогда в силу (3.74), (3.80), (3.8I), (3.82) получим:

$$F(u) \le \frac{C_0}{u}\int_{\frac{u}{2}}^{u} F(x)\sinh x dx \le \frac{C_0}{u}\int_{-\infty}^{\infty}\left| f(x+h) - f(x)\ \right|\left|g(x)\ \right|dx \le \frac{C_1}{u}u^{1-\frac{1}{q}}\omega_1(h; f)_{Lp} =$$

$$= O\left(u^{\frac{1}{p}-1}\omega_1\left(\frac{1}{u}; f\right)_{Lp}\right)\ . \qquad (3.83)$$

Теперь в силу неравенства (3.40а) при $O<\alpha\le 1$ из неравенства (3.83) получим утверждение теоремы для $O<\alpha\le 1$, т.е. неравенство (3.69).

Докажем теперь неравенство (3.70). С помощью неравенства (3.40) при $\delta = \frac{1}{x}$ из неравенства (3.83) получим:

$$F(x) = O\left\{x^{\frac{1}{p}-2}\left[1 + \left(\int_{\frac{1}{x}}^{1} t^{-\gamma-1}\omega_\alpha^\gamma(t; f)_{Lp}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]\right\},$$

т.е. утверждение теоремы при α>1. Теорема доказана для чётных функций. Аналогично доказывается, для нечётных функций. Следовательно, теорема 3.13 вытекает из равенство (3.27).

Доказательство теоремы 3.14. На основании леммы 3.3 имеем:

$$F\left[f^{(r)}\right] = (ix)^r F(f), \qquad r > 0\,. \qquad (3.84)$$

Тогда, применяя теорему 3,I2 для функции $F\left[f^{(r)}(x)\right]$, получим; что

$$\left|X\ \right|^r\left|F(x)\ \right| = O\left\{X^{\frac{1}{p}-1}\omega_\alpha\left(\frac{1}{x}; f^{(r)}\right)_{Lp}\right\}, \quad O < \alpha \le 1.$$

Отсюда

$$\left|F(x)\right| = O\left\{x^{\frac{1}{p}-1-r}\omega_\alpha\left(\frac{1}{x}; f^{(r)}\right)_{Lp}\right\}\ , \quad O < \alpha < 1\ . \qquad (3.85)$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.15. При выполнении условия теоремы получим (см. [76], [78]), что

$$F(x) \geq C(P) X^{\frac{1}{P}-1} \omega_{\perp}\left(\frac{1}{x}; f\right) \quad x \to \infty \ . \tag{3.86}$$

Так как (см. (3,40а))

$$\omega_1(\delta; f) \geq C(\alpha)\omega_2(\delta; f)_{Lp}, \alpha \geq 1, \tag{3.87}$$

то из (3.86) и (3.89) получим, что

$$F(x) \geq C(\alpha, P) X^{\frac{1}{P}-1} \omega_{\alpha}\left(\frac{1}{x}; f\right)_{Lp},$$

т.е. оценка (3.74), Предполагая p=1 в условиях теоремы в работе [78] указана оценка:

$$\omega_1\left(\frac{1}{x}; f\right)_L \leq CF(x), \ x \to \infty \ . \tag{3.88}$$

Теперь из неравенств (3,88) и (3,87) получим оценку (3.75) .

Теорема доказана.

ГЛАВА IV
ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ВЕРХНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

§ 1. Некоторые свойства функций в пространстве $H_p(-\infty, \infty)$, $0<p<1$

Пусть $H_p=H_p(-\infty, \infty)$ обозначает класс аналитических функций $f(z)=f(x+iy)$ в верхней полуплоскости $y>0$ таких, что (равномерно по y)

$$\|f(x+iy)\|_{H_p}=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\le M<\infty,\quad 0<p<\infty\,,$$

$$\|f(x+iy)\|_{H_p}=\operatorname*{vrai\,sup}_{-\infty\le x\le\infty}|f(x+iy)|\le M<\infty,\quad p=\infty\,,$$

где M не зависит от y.

Отметим, что при $0<p<1$ величина $\|f(x+iy)\|_{H_p}$ не является нормой (не выполняется неравенство треугольника), но мы будем пользоваться этими обозначениями.

Класс $H_p(-\infty,\infty)$ при $1\le p<\infty$ впервые рассмотрен и изучен Хиллем и Тамаркиным [79]. После них при $0<p<1$ рассмотрен Коватом [80].

В.И. Крылов [81], продолжая исследование Хилля, Тамаркина и Кавата получил некоторые важные и интересные результаты. В этой главе, продолжая и дополняя исследования вышеназванных авторов изучаем свойства функции $f(z)=f(x+iy)$ в классе $H_p(-\infty,\infty)$, в зависимости либо от наилучших приближений целыми функциями, либо от модуля гладкости функций. Отметим, что классы $H_p(-\infty,\infty)$ при различных p и q не содержат друг друга, т.е. $p\neq q$ и $f(x+iy)\in H_q(-\infty,\infty)$ и наоборот. Известно, что (см.[79], [80]) если $f(x+iy)\in H_p(-\infty,\infty)$, $p>0$, то

$$\lim_{y\to 0} f(z) = \lim_{y\to 0} f(x+iy) = f(x) \qquad (4.1)$$

существует почти для всех $x\in(-\infty,\infty)$ функция $f(x)$, которая называется граничной для $f(x+iy)$. Доказано, что (см.[79]) если $f(x+iy)\in H_p(-\infty,\infty)$, при $p\geq 1$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x+iy) - f(x) \right|^p dx \to 0, \quad y\to 0, \ p\geq 1. \qquad (4.2)$$

Доказательство соотношений (4.1), (4.2) и другие свойства функции $f(x+iy)$ в $H_p(-\infty,\infty)$ можно найти в [27], [82], [143]. Для единичного круга доказаны Приваловым [83], (см. [83], стр. 89). В этом параграфе докажем соотношение (4.2) для $0<p<1$ и получим соответствующие оценки в зависимости от наилучших приближений целыми функциями граничной функции $f(x)\in L_p(-\infty,\infty)$.

Теорема 4.1. Если $f(x+iy)\in H_p(-\infty,\infty)$, $0<p<1$, то имеет место соотношения

$$\lim_{y\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x+iy) \right|^p dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) \right|^p dx, \qquad (4.3)$$

$$\lim_{y\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x+iy) - f(x) \right|^p dx = 0, \qquad (4.3a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x+iy) \right|^p dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x+iy_0) \right|^p dx, \ y>y_0\geq 0. \qquad (4.4)$$

Теорема 4.2 Если $f(x+iy)\in H_p(-\infty,\infty)$, $0<p<\infty$ и $A_\sigma(f)_{L_p}$ - наилучшее приближение граничной функции $f(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ целыми функциями степени $\leq\sigma$, то при $0<y<1$ имеет место неравенство

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x+iy) - f(x) \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq C(y-y_0) \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{1}{y-y_0}\right]} A_\nu(f)_{L_p}, \quad 1\leq p<\infty, \ y>y_0\geq 0; \qquad (4.4a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x+iy) - f(x) \right|^p dx \leq C(p) y^p \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{1}{y}\right]} (\nu+1)^{p-1} A_\nu^p(f)_{L_p}, \ 0<p<1; \qquad (4.4b)$$

где константа зависит только от p. Неравенство (4.4a) для гармонических функций доказано в [14]. Из теоремы 4.2. получим следующие следствия.

Следствие 4.1. Если граничная функция $f(x) \in L_p(-\infty,\infty)$, $0<p<1$, удовлетворяет условие

$$\omega^p(\delta; f)_{L_p} = O(\delta), \quad 0<p<1,$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy) - f(x)|^p dx = O(y), \quad 0<y<1.$$

Это вытекает из неравенства (см. §2, гл.II)

$$A_\sigma(f)_{L_p} \le C(p,k)\omega_k\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)_{L_p}, \qquad 0<p<1.$$

Следствие 4.2. Если граничная функция $f(x) \in L_p(-\infty,\infty)$, $1 \le p < \infty$ удовлетворяет условие

$$A_n(f)_{L_p} = 0\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \qquad 0<\alpha<1,$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy) - f(x)|^p dx = 0\left(y^{\alpha p}\right), \qquad y \to 0.$$

Доказательство теоремы 4.1.

Доказательство соотношения (4.3) проводятся с помощью класса $H_2(-\infty;\infty)$, в котором имеют место следующие соотношения (см. [79]):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2 dx \to \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx, \ y \to 0; \tag{4.5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy) - f(x)|^p dx \to 0, \quad y \to 0. \tag{4.6}$$

Пусть теперь $f(z) \in H_p(-\infty;\infty), \quad 0<p<1$, тогда $f(z) = b_f F(z), \ F(z) \ne 0, \ y>0,$

$$F(z) \in H_p(-\infty;\infty), \quad |f(x)| = |F(z)|, \tag{4.7}$$

где $b_f(z)$ функция Бляшке, причём $|b_f(z)| \le 1$ (см. [79]; ещё [81]).

Так как $f(z) \in H_p(-\infty;\infty)$, то $F(z) \in H_p(-\infty;\infty), \ 0<p<\infty$ (см. [81]; [79]).

Теперь возьмём функцию

$$\gamma(z) = [F(z)]^{\frac{p}{2}}, \ 0<p<1. \tag{4.8}$$

Ясно, что $\gamma(z) \in H_2(-\infty;\infty)$, если $F(z) \in H_p(-\infty;\infty)$, Теперь

$$f(z)=b_f(z)[\gamma(z)]^{\frac{2}{p}}, \tag{4.9}$$

где $\gamma(z)\in H_2(-\infty;\infty)$, введём следующие обозначения:

$$\begin{cases} b_f(x)=b, & b_f(x+iy)=b_y \\ \gamma(x)=\gamma, & \gamma(x+iy)=\gamma y \end{cases}. \tag{4.10}$$

Пользуясть обозначением (4.10) и в силу равенства (4.9) имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[|f(x)|^p-|f(x+iy)|^p\right]dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left[|b|^p|\gamma|^2-|b_y|^p|\gamma_y|^2\right]dx=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[|b|^p-|b_y|^p\right]|\gamma|^2dx+\int_{-\infty}^{\infty}|b_y|^p\left[|\gamma|^2-|\gamma_y|^2\right]dx. \tag{4.11}$$

Так как $\left[|b|^p-|b_y|^p\right]<1$, то по теореме предельного перехода под знаком интеграла получим: (выполняется условие теоремы Лебега)

$$\lim_{y\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\left[|b|^p-|b_y|^p\right]|\gamma|^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{y\to 0}\left[|b|^p-|b_y|^p\right]|\gamma|^2dx=0. \tag{4.12}$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое в правой части равенства (4.11).

Применяя неравенство Коши-Бунковского и соотношение (4.5)

$$\int_{-\infty}^{\infty}|b_y|^p\left[|\gamma|^2-|\gamma_y|^2\right]dx\le\int_{-\infty}^{\infty}\left||\gamma|^2-|\gamma_y|^2\right|dx\le\int_{-\infty}^{\infty}\left|\gamma^2-\gamma_y{}^2\right|dx\le\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|\gamma-\gamma_y|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|\gamma+\gamma_y|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le C\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|\gamma(x)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|\gamma-\gamma_y|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда, применяя соотношение (4.6) для функции $\gamma(x+iy)$ получим, что

$$\lim_{y\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|b_y|^p\left[|\gamma|^2-|\gamma_y|^2\right]dx=0. \tag{4.13}$$

Теперь из (4.11), (4.12), (4.13) вытекает

$$\lim_{y\to 0}-\int_{-\infty}^{\infty}\left[|f(x)^p|-|f(x+iy)|^p\right]dx=0,\quad y\to 0,$$

т.е. равенство (4.3) доказано.

Неравенство (4.4) доказывается следующим образом. Для функции $f(z)\in H_1(-\infty;\infty)$ имеем (см. [79], [81], с. 102).

$$f(x+iy)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t+iy_0)\frac{(y-y_0)dt}{(x-t)^2+(y-y_0)^2}, \qquad y>y_0\geq 0. \tag{4.14}$$

Заменяя функцию $f(x+iy)$ на $[f(x+iy)]^p$ получим

$$[f(x+iy)]^p=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[f(t+iy_0)]^p\frac{y-y_0}{(x-t)^2+(y-y_0)^2}dt,$$

Отсюда, учитывая, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y-y_0}{(x-t)^2+(y-y_0)^2}dx=1, \qquad y_0\geq 0 \tag{4.15}$$

и выполняя соответствующие выкладки получим неравенство (4.4).

Теперь докажем (4.3а) пользуясь равенством (4.14), можем утверждать, что

$$|f(x+iy)-f(x)|^p=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)-f(x)|^p\frac{ydt}{(x-t)^2+y^2}, \qquad (4.14а).$$

для любого $0<p<\infty$ (см.[79] доказательство теоремы 2.1 и леммы 2.4).

С помощью неравенства (4.14а) при $p\geq 1$ в [79] доказано равенство (4.3а).

Из неравенства (4.14а) получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)-f(x)|^p\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{\xi^2+y^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+\xi)-f(x)|^p dx\right)d\xi. \qquad (4.14б)$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+\xi)-f(x)|^p dx=\varphi(\xi).$$

непрерывная функция от ξ и $\lim\limits_{\xi\to 0}\varphi(\xi)=0$, то из (4.14б) получим (4.3а). Теорема доказана полностью. Другое доказательство (4.3а) приведено в [81] и в [27] (см. [27] , с. 136).

Доказательство теоремы 4.2.

Сначала рассмотрим $1\leq p<\infty$. Будем пользоваться следующим представлением (см.[79]).

$$f(x+iy)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t+iy_0)\frac{y-y_0}{(x-t)^2+(y-y_0)^2}dt \qquad y>y_0>0. \qquad (4.16).$$

Обозначая $y-y_0=y_1$ в силу равенства (4.15), (4.16), получим:

$$f(x+iy)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[f(x+t+iy)+f(x-t+iy_0)-2f(x)]\frac{y_1dt}{t^2+y_1^2}. \qquad (4.17).$$

Так как (см.[70], [81])

$$\|f(x+iy)\|_{Hp}\le C\|f(x)\|_{Lp}\ , \quad 1\le p<\infty, \quad y>0, \qquad (4.18).$$

то применяя обобщенное неравенство Минковского и неравенство (4.18) в равенство (4.17), получим:

$$\|f(x+iy)-f(x)\|_{Hp}\le C\int_0^{\infty}\frac{y_1}{t^2+y_1^2}\omega_2(t;t)_{Lp}dt=C\left\{\int_0^{y_1}+\int_{y_1}^{1}+\int_1^{\infty}\right\}=C[I_1+I_2+I_3]. \quad (4.19)$$

Оценим каждый интеграл в (4.19) ,

$$I_1\le\int_0^{\infty}\frac{y_1}{t^2+y_1^2}\omega_2(t;t)_{Lp}dt\le\omega_2(y_1;f)_{Lp}.$$

В силу монотонности величины $\omega_2(y_1;f)_{Lp}$ имеем $I_1\le I_2$. Пользуясь известным (см.[4]) неравенством

$$\omega_k\left(\frac{1}{\sigma};f\right)_{Lp}\le\frac{C_k}{\sigma_k}\sum_{v=1}^{[\sigma]}v^{k-1}A_{v-1}(f)_{Lp}, \qquad 1\le p<\infty$$

получим:

$$I_2=\int_{y_2}^{1}\frac{y_1}{t^2+y_1^2}\omega_2(t;f)_{Lp}dt\le y_1\sum_{v=1}^{\left[\frac{1}{y_1}\right]}\int_{\frac{1}{v+1}}^{\frac{1}{v}}\frac{\omega_2(t;f)_{Lp}}{t^2}dt\le y_1\sum_{v=1}^{\left[\frac{1}{y_1}\right]}\omega_2(t;f)_{Lp}\le$$

$$\le y_1\sum_{v=1}^{\left[\frac{1}{y_1}\right]}\frac{1}{v^2}\sum_{\mu=0}^{v}\mu A_{\mu-1}[R]_{Lp}\le y_1\sum_{v=1}^{\left[\frac{1}{y_1}\right]}A_{\mu-1}[f]_{Lp}.$$

Учитывая, что

$$\|f(x)\|_{Lp}\le CA_0(f)_{Lp}$$

получим

$$I_3=\int_{y_2}^{1}\frac{y_1}{t^2+y_1^2}\omega_2(t;f)_{Lp}dt\le y_1A_0(f)_{Lp}.$$

В силу полученных оценок для величин $I_1,\ I_2,\ I_3$ из неравенства (4.19) получим

$$\|f(x+iy)-f(x)\|_{Hp}\le Cy_1\sum_{v=0}^{\left[\frac{1}{y_1}\right]}A_v(f)_{Lp}, \quad y_1=y-y_0, \qquad y>y_0>0.$$

Неравенство (4.40) доказано.

Теперь рассмотрим случай $0<p<1$. Рассуждения проводим как в случае $p\geq 1$. Пользуясь следующим равенством (см.[79] доказательство теоремы 2.1)

$$f(z)-f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}[f(t)-f(x)]\frac{y}{(t-y)^2+y^2}dt$$

для любого $0<p<\infty$ можно утверждать (см.[79] доказательство леммы 2.4 и доказательство теоремы 2.1), что

$$|f(x+iy)-f(x)|^p\leq\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)-f(x)|^p\frac{y}{(t-x)^2+y^2}dt\,. \tag{4.20}$$

В [79] с помощью (4.20) доказано соотношение (4.2). Из неравенства (4.20) при $0<p<1$ получим

$$\|f(x+iy)-f(x)\|_{Hp}^p\leq\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{\xi^2+y^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+\xi)-f(x)|^p dx\right)d\xi\leq\int_{-\infty}^{\infty}\omega_1^p(|\xi|;f)_{Lp}\frac{y}{\xi^2+y^2}d\xi\leq$$

$$\leq\int_0^{\infty}\omega_1^p(\xi;f)_{Lp}\frac{y}{\xi^2+y^2}d\xi=\int_0^y+\int_y^1+\int_1^{\infty}=A_1+A_2+A_3\,.$$

В силу монотонности $\omega^p(t;f)_{Lp}$ имеем:

$$A_1=\int_0^y\omega_1^p(\xi;f)_{Lp}\frac{y^2}{\xi^2+y^2}d\xi\leq\omega_1^p(y;f)_{Lp},$$

$$A_1=\int_y^1\omega_1^p(\xi;f)_{Lp}\frac{y^2}{\xi^2+y^2}d\xi\leq yA_1=y\int_y^1\frac{\omega_1^p(\xi;f)}{\xi^2}d\xi= \tag{4.22}$$

$$=y\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{y_1}\right]}\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\frac{\omega_1^p(\xi;f)_{Lp}}{\xi^2}d\xi\leq y\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{y_1}\right]}\omega_1^p\left(\frac{1}{\nu};f\right)_{Lp}$$

Автором доказано (см. [71] или глава II), что

$$\omega_1^p\left(\frac{1}{n};f\right)_{Lp}\leq\frac{C(p)}{n^p}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p-1}A_{\nu-1}^p(f)_{Lp}\,. \tag{4.23}$$

С помощью неравенства (4.23) из неравенства (4.22) находим, что (см. получение оценки для I_2)

$$A_2\leq C(p)y^p\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{y}\right]}\nu^{p-1}A_{\nu-1}^p(f)_{Lp}\,.$$

Отметим, что

$$A_1\leq A_2\,,\quad A_3\leq Cy^pA_0(f)_{Lp}\,.$$

На основании оценок, полученных для A_1, A_2, A_3 из неравенства (4.21) следует неравенство (4.4в) , т.е. утверждение теоремы для $0<p<1$. Доказательство теоремы завершено.

§ 2. Неравенство типа Харди – Литтльвуда – Никольского и С. Н. Бернштейна в $H_p(-\infty,\infty)$

Обозначим через

$$T_p(f;y)=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x+iy)^p dx\right|\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 0<p<\infty,$$

$$T_\infty(f;y)=Sup\left|f(x+iy)\right|, \quad p=\infty, \qquad -\infty\le x\le\infty.$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 4.3. если $f(x+iy)\in H_p(-\infty;\infty), \quad 0<p\le\infty$, то имеет место неравенство:

$$T_1(f;y)\le C(p)(y-y_0)^{1-\frac{1}{p}}T_p(f;y_0),\ 0<p<1,\ C(p)=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}}\frac{4}{2-p},\ y>y_0\ge 0; \quad (4.24)$$

$$T_q(f;y)\le C(p)(y-y_0)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}T_p(f;y_0),\ 0<p<q,\ C(p,q)=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{4q}{2q-p}\right)^{\frac{1}{q}}. \quad (4.24а)$$

Отметим, что константа $0<C(p)<2$ и при $q=\infty, \qquad C(p,q)=(\pi)^{\frac{1}{p}}$.

Неравенство типа (4.24а) для периодических функций в единичном круге получено Харди и Литтльвудом [84], т.е.

$$\left\{\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|^q d\varphi\right\}^{\frac{1}{q}}=0\left\{(1-r)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-p}\right\} \quad 0<p<q,\ \ \beta\ge 0, \qquad (4.25)$$

если

$$\left\{\int_0^{2\pi}\left|f\left(r^{iy}\right)\right|^p d\varphi\right\}^{\frac{1}{p}}=0\left\{(1-r)^{-\beta}\right\}, \qquad \beta\ge 0.$$

Относительно неравенства (4.25) см. ещё [88] теорема 5.9. Для целых функций степени $\le\sigma$ в пространстве $L_p(-\infty;\infty)$ известно неравенство (см. [1], с.150 и [12], с. 248)

$$\left\|Q_\sigma(x)\right\|_{Lp}\le C\sigma^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left\|Q_\sigma(x)\right\|_{Lp} \quad 0<p<q\le\infty \qquad (4.26)$$

называемое неравенством С.М.Никольского.

Теорема 4.4. Если $f(x+iy)\in H_p(-\infty;\infty)$, $0<p<\infty$, то любого натурального k имеет место неравенство:

$$T_p\left(f^{(k)};y\right)\le C(p,k)(y-y_0)^{-k}T_p\left(f;y_0\right), \qquad y>y_0>0 \quad k=1,2,3,..., \tag{4.27}$$

при $p\ge 1$ константа $C(p,k)$ не зависит от p. Отметим также, что для аналитических функций в единичном круге теорема 4.4 доказана в [89], а теорема 4.3 для $0<p<1$ $q=1$ в [83], с.85 и вновь получена другим способом в [89] для круга. Установим ещё утверждение, касающееся производной $f'(z)$ в $H_p(-\infty;\infty)$.

Теорема 4.5. если функций $f(z)\in H_p$, $f'(z)\in H_p(-\infty,\infty)$, то при $y>y_0>0$ имеет место неравенство

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f'(z)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\le C\frac{\omega(y-y_0)_{L_p}}{y-y_0}, \tag{4.28}$$

где $\omega(\delta;f)_{Lp}$ - модуль непрерывности граничной функции $f(x)$ в $L_p(-\infty;\infty)$. Отметим, что обобщая один результат Харди и Литтльвуда [94], Брудный Ю.А. и Гапенграуз [95] доказали теорему 4.5 при $p\ge 1$ для периодических функций аналитических в единичном круге. Для полигармонических функций в единичном круге неравенство (4.28) получена М.Ф. Тиманом [96]. Отметим также, что неравенство (4.28) для функций аналитических в единичном круге при $0<p<\infty$ указаны Э.А.Стороженко и Я.Валашеком в [97]. Из теоремы 4.4 вытекает:

Следствие 4.3. Если выполнено условие

$$T_p(f:y_0)=0(y_0^{-\alpha}), \qquad \alpha>0,$$

то

$$T_p(f^{(k)};y)=0(y_0^{-k-\alpha}), \qquad y_0>0,$$

$$k=1,2,....; \qquad y>2y_0>0,$$

Это есть аналог одного результата Харди и Литтльвуда [93], полученного для периодических функции в классе $H_p(-\pi,\pi)$. Из теоремы 4.5 следует.

Следствие 4.4. Если граничная функция $f(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ удовлетворяет условию

$$\omega(t;f)_{lp} = 0(t^{\alpha}), \qquad 0<\alpha<1,$$

то

1) $\|f'(z)\|_{H_p} = O\left(y_1^{\alpha-1}\right)$, $1\le p\le\infty$, $\qquad y>y_1>0;$

2) $\|f'(z)\|_{H_p} = O\left(y_0^{\alpha-1}\right)$, $\frac{1}{2}<p<1$, $\alpha<2-\frac{1}{p}$, $y>y_0$.

Доказательство теоремы 4.3.

Известно [79]. (см.[79] форм. (2.7) и доказательство теоремы 2.1), что для функции $f(z)\in H_1(-\infty,\infty)$ имеется представление

$$f(x+iy)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t+iy_0)\frac{y-y_0}{(x-t)^2+(y-y_0)^2}dt, \qquad \gamma>\gamma_0\ge 0\,. \tag{4.29}$$

В равенстве (4.29) функцию $f(x+iy)$ заменим на функцию $[f(x+iy)]^p \in H(-\infty,\infty)$, (см. [81], с.101). Тогда

$$[f(x+iy)]^p=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f\left(t+iy_0\right)\right]^p\frac{\left(y-y_0\right)dt}{\left(x-t\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}. \tag{4.30}$$

Обозначим

$$F_p(t,x,y,y_0)=\frac{1}{\pi}[f(t+iy_0)]p\frac{(y-y_0)}{(x-t)^2+(y-y_0)^2}\,. \tag{4.31}$$

Из (4.30) имеем

$$f(x+iy)=[\int_{-\infty}^{\infty}F_p(t,x,y,y_0)dt]^{\frac{1}{p}}\,. \tag{4.30a}$$

Отсюда

$$(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|dx)^p \le \{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}F_p(t,x,y,y_0)dt\right|^{\frac{1}{p}}dx\}^p.$$

Так как 0<P<1 и $\frac{1}{p}>1$, то применяя обобщеное неравенство Минковского в правой части неравенства (4.32) и учитывает (4.31) получим

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy_0)|dx\right)^p &\le \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|F_p(t,x,y,y_0)|^{\frac{1}{p}}dx\right]^p dt=\\ &=\frac{y-y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t+iy_0)|^p\left(\int_{-\infty}^{\infty}[(x-t)^2+(y-y_0)^2]^{-\frac{1}{p}}dx\right)^p dt\end{aligned}\,. \tag{4.33}$$

Теперь оценим интеграл

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}[(x-t)^2+(y-y_0)^2]^{-\frac{1}{p}}dx=\int_{-\infty}^{\infty}[u^2+(y-y_0)^2]^{-\frac{1}{p}}du= \qquad .$$
$$=2\int_{0}^{\infty}[u^2+(y-y_0)^2]^{-\frac{1}{p}}du=2B \tag{4.34}$$

$$B=\int_0^{\infty}=\int_0^{y-y_0}+\int_{y-y_0}^{\infty}=B_1+B_2,$$

$$B_1=\int_0^{y-y_0}\left[u^2+(y-y_0)^2\right]^{-\frac{1}{p}}du\le (y-y_0)^{-\frac{2}{p}}\cdot(y-y_0)=(y-y_0)^{1-\frac{2}{p}},$$

$$B_2=\int_{y-y_0}^{\infty}\left[u^2+(y-y_0)^2\right]^{-\frac{1}{p}}du\le\int_{y-y_0}^{\infty}u^{-\frac{2}{p}}du=\frac{p}{2-p}(y-y_0)^{1-\frac{2}{p}}.$$

Таким образам, интеграл (4.34) имеет оценку:

$$I\le 2(y-y_0)^{1-\frac{2}{p}}+\frac{2p}{2-p}(y-y_0)^{1-\frac{2}{p}}=\frac{4}{2-p}(y-y^0)^{1-\frac{2}{p}}. \tag{4.35}$$

Учитывая оценки (4.35) в силу неравенства (4.33) находим:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|dx\right)^p\le\frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{2-p}\right)^p(y-y_0)^{1+p-2}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t+iy_0)|^p dt=\frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{2-p}\right)^p(y-y_0)^{p-1}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t+iy)|^p dt,$$

т.е. теорема доказана для $0<p<1,\ q=1.$ Теперь докажем общий случай $0<p<q<\infty$. Из равенства (4.30а) имеем

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}F_p(t,x,y,y_0)dt\right|^{\frac{q}{p}}dx\right\}^{\frac{p}{q}}$$

Так как $p>q,\ \dfrac{q}{p}>1$, то отсюда, применяя обобщённое неравенство Минковского, получим:

$$\|f(x+iy)\|_{Hq}\le\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|F_p(t,x,y,y_0)|^{\frac{q}{p}}dx\right]^{\frac{p}{q}}dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Учитывая обозначение (4.31), из последнего неравенства получим, что

$$\|f(x+iy)\|_{H_q}\le\left(\frac{y-y_0}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(t+iy)|^p\left[\left|(x-t)^2+(y-y_0)^2\right|^{-\frac{q}{p}}dx\right]^{\frac{p}{q}}dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.36}$$

Внутренний интеграл в правой части неравенства (4.36) оценивается также как и интеграл (4.34). Тогда вычисляя подробно, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|(x-t)^2+(y-y_0)^2\right|^{-\frac{q}{p}}dx\le$$

$$\le 2(y-y_0)^{1-\frac{2q}{p}}+\frac{2p}{2q-p}(y-y_0)^{1-\frac{2q}{p}}=\frac{4q}{2q-p}(y-y_0)^{1-\frac{2q}{p}}.$$

Учитывая оценку (4.37) из неравенства (4.36) получим

$$\|f(x+iy)\|_{H_q}\le\left(\frac{y-y_0}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{4q}{2q-p}\right)^{\frac{1}{q}}(y-y_0)^{\left(\frac{p}{q}-2\right)^{\frac{1}{p}}}\|f(t+iy_0)\|_{Hp}\le$$

$$\le\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{4q}{2q-p}\right)^{\frac{1}{q}}(y-y_0)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{2}{p}}+\|f(t+iy_0\|_{Hp}=C(p,q)(y-y_0)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|f(t+iy_0\|_{Hp},$$

$$C(p,q)=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{4q}{2q-p}\right)^{\frac{1}{q}},\ \text{q>p>0.}$$

Теорема доказана для $0<p<q<\infty$.

Рассмотрим случай $q=\infty$

$$\sup_{-\infty\le x<\infty}|f(x+iy)|\le\ \le\sup_{-\infty\le x\le\infty}\left[\frac{1}{p}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t+iy_0)|^p\frac{(y-y_0)dt}{(x-t)^2+(y-y_0)^2}\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда

$$\|f(x+iy)\|_{H_\infty}\le\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}}(y-y_0)^{-\frac{1}{p}}\|f(t+iy_0)\|_{Hp}.$$

т.е. утверждение теоремы при $q=\infty$. Теорема доказана полностью

Доказательство теоремы 4.4. Функция $f(z)\in H_1(-\infty,\infty)$ аналитическая функция в верхней полуплоскости, имеет представление (см.[79])

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t+iy_1)}{t+iy_1-z}dt,\ y>y_0>0.$$

Применяя равенство (5.38) к функции $(z-iy_0)^{-\lambda}f(z+s)$ где $\lambda>0$, s-произвольная вещественная и $y_0>0$, получим:

$$f(z+s)\cdot(z-iy_0)^{-\lambda}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}f(t+s+iy_1)\frac{(t+iy_1-iy_0)^{-\lambda}}{(t+iy_1-z)}dt.$$

Отсюда дифференцируя по z, находим, что

$$f'(z+s)=\lambda(z-iy_0)^{-1} f(z+s)+\frac{1}{2\pi i}(z-iy_0)\int_{-\infty}^{\infty} f(t+iy_1+s)\frac{(t+iy_1-iy_0)^{-\lambda}}{(t+iy_1-z)^2}dt.$$

Полагая $z=iy$ при 0<p<1 из последнего равенства получим

$$\begin{aligned}&\left|f'(s+iy)\right|^p \le \lambda^p (y-y_0)^{-p}\left|f(s+iy)\right|^p +\\&+\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^p (y-y_0)^{\lambda p}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t+s+iy_1)\right|\frac{\left|t+i(y_1-y)\right|^{-\lambda}}{\left|t+i(y_1-y)^2\right|}dt\right].\end{aligned} \tag{4.40}$$

Рассмотрим интеграл в правой части (4.40)

$$J^p=\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t+s+iy_1)\right|\frac{\left|t+i(y_1-y)\right|^{-\lambda}}{\left|t+i(y_1-y)^2\right|}dt\right]^p. \tag{4.41}$$

Применяя теорему 4.3 при 0<p<1 для интеграла (4.41) получим:

$$\begin{aligned}&J^p \le C(P)(y_1-y_2)^{p-1}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t+s+iy_2)\right|^p\frac{\left|t+i(y_2-y_0)^{-\lambda p}\right|}{\left|t+i(y_2-y)^{2p}\right|}dt=\\&=C(P)(y_1-y_2)^{p-1}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(u+iy_2)\right|^p\left|(u-s)^2+(y_2-y_0)^2\right|^{-\frac{\lambda p}{2}}\left|(u-s)^2+(y_2-y)^2\right|^{-p}du\end{aligned} \tag{4.42}$$

$y_1>y_2>0$.

Вещественную λ>0 выберем так, чтобы λp=2 и учитывая, что

$$\left|(u-s)^2+(y_2-y)^2\right|^{-p}\le(y-y_2)^{-2p},$$

из неравенства (4.42) получим:

$$J^p \le C(P)(y_1-y_2)^{p-1}(y-y_2)^{-2p}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(u+iy_2)\right|^p\frac{du}{\left[(u-s)^2+(y_2-y_0)^2\right]} \tag{4.43}$$

Теперь из неравенства (4.40), (4.41), (4.43) находим, что

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\left|f'(s+iy)\right|^p ds \le \left(\frac{2}{p}\right)^p (y-y_0)^{-p}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(s+iy)\right|^p ds+\\&+\left(\frac{1}{2p}\right)(y-y_0)^2 C(P)(y-y_2)^{-2p}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(u+iy_2)\right|^p\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{(u-s)^2+(y_2-y_0)^2}\right)du\end{aligned}. \tag{4.44}$$

Отметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{(u-s)^2+(y_2-y_0)^2}=\pi(y_2-y_0)^{-1}. \tag{4.45}$$

Так, как $y>y_1>y_2>0$ и $y_0>0$ произвольная, то, полагая $y_1-y_2=y_2-y_0=\frac{y-y_0}{3}$, где $y_2>y_0>0$, из неравенства (4.44) с учётом (4.45), получим:

$$\begin{gathered}\int_{-\infty}^{\infty}|f(s+iy)|^p ds\le\left(\frac{2}{p}\right)^p(y-y_0)^{-p}\int_{-\infty}^{\infty}|f(s+iy)|^p ds+\\+\left(\frac{1}{2p}\right)^p C(P)(y-y_0)^2\left(\frac{y-y_0}{3}\right)^{p-1}\left(\frac{2(y-y_0)}{3}\right)^{-2p}\left(\frac{y-y_0}{3}\right)^{-1}\int_{+\infty}^{\infty}|f(u+iy_2)|^p du\end{gathered}. \tag{4.46}$$

Так как интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^p dx=\varphi(y)$$

не возрастает (см.[8]), то при $0<y_0<y_2<y$ из неравенства (4.46) получим:

$$\begin{gathered}+\int_{+\infty}^{\infty}|f'(s+iy_2)|^p ds\le\left[\left(\frac{2}{p}\right)^p+c(p)\left(\frac{1}{2\pi}\right)x\left(\frac{1}{3}\right)^{p-2}\right]=\\=(y-y_0)^{-p}\int_{-\infty}^{\infty}|f(u+iy_0)|^p du=M(p)(y-y_0)^{-p}\int_{+\infty}^{\infty}|f(u+iy_2)|^p du,\end{gathered}$$

т.е. теорема доказана для k=1, 0<p<1. Повторяя приведённые выше рассуждения к раз, получим утверждение теоремы для любого к при 0<p<1. При 1≤p<∞ проводим рассуждение аналогично случаю 0<p<1, но в этом случае при интегрировании не равенства (4.40) применяем обобщённое неравенство Минковского.

Доказательство теоремы 4.5

Известно, что (см.[79] функция *f(z)* представляется в виде:

$$f(x+iy)=\frac{1}{\pi}\int_{+\infty}^{\infty}f(t+iy_0)\frac{y-y_0}{(x-t)^2+(y-y_0)^2}dt.$$

Обозначая $\bar{y}=y-y_0$, получим:

$$f'(z)=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{y}\,f(x+iy_1)2(x-t)}{\left[(x-t)^2+\bar{y}^2\right]^2}dt\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+t)\bar{y}}{\left[(x-t)^2+\bar{y}^2\right]^2}=[f(x+iy_0)-f(t+iy_0)]dt.$$

Здесь учтено, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ydt}{(x-t)^2+y^{-2}}=\pi\ ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{y}(x-t)dt}{\left[(x-t)^2+\bar{y}^{-2}\right]^2}=0\ .$$

Далее, с помощью замены переменных *x-t=-u,* получим:

$$f'(z)=\frac{2\bar{y}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u\left[f(x+u+iy_0)-f(x+iy_{.0})\right]}{\left(u^2+\bar{y}^2\right)^2}du\ . \qquad (4.47)$$

Пусть p≥1. Применяем обобщённое неравенство Минковского

$$\|f'(z)\|_{Hp}\le\frac{2\bar{y}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|u|\|f(x+u+iy_0)-f(x+iy_{.0})\|_{Hp}}{\left(u^2+\bar{y}^2\right)^2}du\ . \qquad (4.47a)$$

Отметим, что (см.[79])

$$\|f'(z)\|_{Hp}\le\|f(x)\|_{Lp},\ y>0,\ z=x+iy\ .$$

Тогда

$$\|f'(x+u+iy_0)-f(x+iy_0)\|_{Hp}\le\|f(x+u)-f(x)\|_{Lp}\le\omega(|u|:f)_{Lp}\ .$$

В силу (4.47a) получим:

$$\|f'(z)\|_{H_p}\le\frac{2\bar{y}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|u|\omega(|u|;f)_{L_p}}{\left(u^2+\bar{y}^2\right)^2}du=\frac{2\bar{y}}{\pi}\left(\int_0^{\infty}+\int_{-\infty}^{0}\right)=\frac{2\bar{y}}{\pi}(I_1+I_2)\ . \qquad (4.48)$$

Рассмотрим I_1 и I_2

$$I_1=\int_0^{\infty}\frac{u\omega(u;f)_{L_p}}{\left(u^2+\bar{y}^2\right)^2}du=\int_0^{\bar{y}}+\int_{\bar{y}}^{\infty}=A_1+A_2\ .$$

В силу монотонности модуля непрерывности

$$A_1=\int_0^{\bar{y}}\frac{u\omega(u;f)_{L_p}}{\left(u^2+\bar{y}^2\right)^2}du\le\omega(\bar{y};f)_{L_p}\frac{1}{\bar{y}^4}\int_0^{\bar{y}}udu\le\omega(\bar{y};f)_{L_p}\frac{1}{\bar{y}^2}=\frac{\omega(u;f)_{L_p}}{\bar{y}^2}\ .$$

В силу свойства модуля непрерывности получим:

$$A_2=\int_{\bar{y}}^{\infty}\frac{u\omega(u;f)_{L_p}}{\left(u^2+y^2\right)^2}du\le\omega(\bar{y};f)_{L_p}\int_{\bar{y}}^{\infty}\frac{u\left(1+\frac{u}{\bar{y}}\right)}{\left(u^2+y^2\right)^2}du\le$$

$$\le\omega(\bar{y};f)_{L_p}\left\{\int_{\bar{y}}^{\infty}\frac{udu}{\left(u^2+y^2\right)^2}+\int_{\bar{y}}^{\infty}\frac{u^2du}{\left(u^2+y^2\right)^2}\right\}=\frac{C\omega(\bar{y};f)_{L_p}}{\bar{y}^2}\ .$$

Следовательно,

$$I_1 \le A_1 + A_2 \le C\frac{\omega(\bar{y}; f)_{L_p}}{\bar{y}^2}. \tag{4.49}$$

Аналогично

$$I_2 \le C\frac{\omega(\bar{y}; f)_{L_p}}{\bar{y}^2}. \tag{4.49.A}$$

И наконец что (см. 4.48), (4.49) и (4.49а)

$$\| f'(z)\|_{L_p} \le C\frac{\omega(y-y_0)_{L_p}}{(y-y_0)}, \quad p\ge 1.$$

Теорема доказана.

§3. Прямые и обратные теоремы теории приближения в пространствах $H_p(-\infty,\infty)$

Пусть $f(z) = f(x+iy) \in H_p(-\infty,\infty)$, $0<p\le\infty$. Величина

$$\omega_k(\delta; f; y)_{Hp} = \sup_{0<h\le\delta}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Delta_h^k f(z)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}, k=1,2\ldots,1<p<\infty,$$

$$\omega(\delta; f; y)_{H_\infty} = \sup_{-\infty<x<\infty}\left|\Delta_h^k f(z)\right|, \qquad p=\infty,$$

где

$$\Delta_h^k f(z) = \sum_{m=0}^{k}(l)^{k-m}\binom{k}{m} f(x+mh+iy)$$

называется модулем гладкости функции $f(z) = f(x+iy)$ к – го порядка в пространстве $H_p(-\infty;\infty)$, а величина

$$A_\delta(f; y)_{H_p} = \inf\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left| f(x+iy) - Q_v(x+iy)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}, \ 0<p<\infty$$

$$A_v(f; y)_{H_p} = \inf_{Q_\sigma(z)}\left[\sup\left| f(z) - \varphi_v(z)\right|\right], \ p=\infty$$

называется наилучшим приближением функции $f(x+iy)$ целыми функциями $Q_\sigma(x+iy) \in H_p(-\infty;\infty)$ степени $\le\sigma$ в пространстве $H_p(-\infty;\infty)$. Отметим, что $\omega_k(\delta; f; y)H_p$ и $A_\sigma(f; y)_{H_p}$ обладает такими же свойствами как и в $L_p(-\infty;\infty)$. Здесь устанавливаются аналоги теорем Джексона в пространстве $H_p(-\infty;\infty)$. В пространстве $H_p(-\infty;\infty)$ теоремами Джексона являются следующие, т.е. прямые теоремы.

Теорема 4.6. Если $f(x+iy)\in H_p(-\infty;\infty)$, $0<p<\infty$, то при любом натуральном k имеет место неравенство:

$$A_\sigma(y;f)_{H_p}\le C(P,K)\omega_K\left(\frac{1}{\sigma};y_0;f\right)_{H_P}, \quad y_0\ge 0, \qquad (4.50)$$

где константа C(p,k) при $1\le p\le\infty$ не зависит от p,

$$y-y_0>0(1\le p\le\infty); y-y_0>\frac{1}{\sigma}, 0<p<1.$$

$$A_\sigma(y;f)_{H_P}\le C(P,K)\omega_K\left(\frac{1}{\sigma};f\right)_{L_P}, y>0. \qquad (4.50a)$$

Теорема 4.7. Если производная $f^{(n)}(z)\in H_p(-\infty;\infty)$, $n=0,1,2,...,0<p\le\infty$, то при любом k имеет место неравенства:

$$A_\sigma(y;f)_{H_P}\le c(P,S)\frac{1}{\sigma^K}\omega_S\left(\frac{1}{\sigma};y_0;\left(\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\right)_{y-y_0}\right)_{H_P} \qquad (4.51)$$

$$y>y_0\ge 0, \quad p\ge 1, \quad y-y_0\ge\frac{1}{\sigma}, \qquad 0<p<1; (K,S=1,2,......).$$

Доказательство этих теорем опирается следующие леммы, которые представляет самостоятельный интерес

Лемма 4.1. Если $f(x+iy)\in H_P(-\infty;\infty)$ и

$$g_\nu(u)=u^{-2r}\left(\sin\frac{\nu u}{2r}\right)^{2r}, r\ge 1, \qquad (4.52)$$

то интеграл

$$F_\nu(x+iy)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{S=1}^{K}(-1)^{K-S}\binom{K}{S}f(x+su+iy)\right]g_\nu(u)du \qquad (4.53)$$

естъ целая функция степени ν и $F_\nu(x+iy)\in H_P(-\infty;\infty)$, $0<p\le\infty$, $y>y_0>0$.

Лемма 4.2. Если $f(x+iy)\in H_P(-\infty;\infty)$ и

$$\frac{\partial f}{\partial x}\in H_P(-\infty;\infty), 0<p\le\infty,$$

то при $y>y_0\ge 0$ имеет место неравенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x+iy)-f(x+iy_0\right|^P dx\le C(y-y_0)^P\int_{-\infty}^{\infty}\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y=y_0}\right|^P dx.$$

Лемма 4.3. Если $\frac{\partial^K f(x+iy)}{\partial x^K}\in H_P(-\infty;\infty), 0\prec p\le\infty,$

то для натуральных k≥0, s≥0 имеет место неравенство:

$$\omega_{K+S}(\delta; y; f)_{H_P} \le C(p,s)\delta^K \omega_S\left(\delta; y_0; \left(\frac{\delta^K f}{\delta x^K}\right)_{y=y_0}\right)_{H_P}, \qquad y > y_0 \ge 0 \quad .$$

Отметим, что теоремы 4.6 и 4.7 в пространствах Харди $H_P(-\pi;\pi)$, т.е. для аналитических функций в единичном круге, для которых

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(re^{i\varphi})\right|^P d\varphi < \infty, \qquad 0 < p < 1$$

доказаны в [89]. Обратными теоремами в $H_P(-\infty;\infty)$ являются следующие.

Теорема 4.8. Пусть $f(x+iy)\in H_P(-\infty;\infty), 0 < p \le \infty$ и $f(x)\in L_P(-\infty;\infty)$ её граничная функция. Тогда:

$$\omega_K\left(\frac{1}{\sigma}; f; y\right)_{H_P} \le \frac{C(K)}{\sigma^K}\sum_{\nu=0}^{[\sigma]}(\nu+1)^{K-1}A_\nu(f)_{L_p}, 1\le p\le\infty,\ y>0, K=1,2,,...;$$

$$\omega_K^P\left(\frac{1}{\sigma}; f; y\right)_{H_P} \le \frac{C(K,P)}{\sigma^K}\left\{\sum_{\nu=0}^{[\sigma]}(\nu+1)^{KP-1}A_\nu^P(f)_{L_p}\right\}^{\frac{1}{P}}, 0<p<1, y>0 \quad ,$$

где $A_\sigma(f)_{L_p}$ - наилучшее приближение граничной функции $f(x)$ целыми функциями $Q_\sigma(x)$ степени $\le\sigma$ в $L_P(-\infty;\infty)$,

Теорема 4.9. Пусть выполняется условие теоремы 4.8. и сходятся ряды при $r=1,2,...,$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)^{r-1}A_\nu(f)_{L_p}, 1\le p\le\infty;$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)^{rp-1}A_\nu^P(f)_{L_p}, 0<p<1.$$

Тогда:

1) $$\omega_K\left(\frac{1}{\sigma}; f^{(r)}; y\right)_{H_P} \le C(k,r)\left\{\sum_{Y=[\sigma]+1}^{\infty}\nu^{r-1}A_\nu(f)_{L_p} + \frac{1}{\sigma^K}\sum_{\nu=0}^{[\sigma]}(\nu+1)^{(r+k)-1}A_\nu(f)_{L_p}\right\}, 1\le p\le\infty;$$

$\forall y > 0$:

2) $$\omega_K^P\left(\frac{1}{\sigma}; f^{(r)}; y\right)_{H_P} \le C(k,r)\left\{\sum_{\nu=[\sigma]+1}^{\infty}\nu^{rp-1}A_\nu^P(f)_{L_p} + \frac{1}{\sigma^{KP}}\sum_{\nu=0}^{[\sigma]}(\nu+1)^{(r+k)P-1}A_\nu^P(f)_{L_p}\right\}^{\frac{1}{P}},$$

$0<p<1, \forall y>0,$

Если граничная функция $f(x)\in L_P(-\infty;\infty)$ функции $f(x+iy)\in H_P(-\infty;\infty)$ имеет преобразование Фурье при $1<p<\infty$, то оценки в теоремах 4.8 и 4.9 можно усилить. А именно справедлива следующая теорема.

Теорема 4.10. Пусть $f(x+iy)\in H_P(-\infty;\infty)$ и её граничная функция $f(x)\in L_P(-\infty;\infty),1<p<\infty$ имеет преобразование Фурье $F(x)$, тогда при любом натуральном К имеет место:

1) $$\omega_K\left(\frac{1}{\sigma};f;y\right)_{H_P}\le\frac{C(P,K)}{\sigma^K}\left\{\sum_{\nu=0}^{[\sigma]}(\nu+1)^{\gamma K-1}A_\nu^\gamma(f)_{L_P}\right\}^{\frac{1}{\gamma}},\ \gamma=\min(2,P); \qquad (4.59)$$

2) Если при некотором $r=1,2...$ сходится ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)^{\gamma r-1}A_\nu^\gamma(f)_{L_P},$$

то

$$\omega\left(\frac{1}{\sigma};f^{(r)};y\right)_{H_P}\le C(k,r,p)\left\{\sum_{\nu=[\sigma]+1}^{\infty}(\nu+1)^{\gamma r-1}A_\nu^\gamma(f)_{L_P}+\frac{1}{\sigma^{K\gamma}}\sum_{\nu=0}^{[\sigma]}(\nu+1)^{\gamma(k+r)-1}A_\nu^\gamma(f)_{L_P}\right\}^{\frac{1}{\gamma}},$$

$\gamma=\min(2,p)$.

Сравниваем результаты теоремы 4.8. и теоремы 4.10. Если граничная функция $f(x)\in L_P(-\infty;\infty),1\le p\le\infty$ такова, что

$$A_\sigma(f)_{L_P}\approx\frac{1}{\sigma^K},$$

то из теоремы 4.8 получим, что

$$\omega_K(\sigma;f;y)_{H_P}=O\left(\delta^K\ln\frac{1}{\delta}\right),y>0.$$

А из теоремы 4.10 получим, что

$$\omega_K(\delta;f;y)_{H_p}=O\left[\delta^K\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right],y>0.$$

Видно, что результаты теоремы 4.10. более точны, чем теоремы 4.8.

Если же

$$A_\sigma(f)_{L_p}\approx\frac{1}{\sigma^{K+2}},\quad 1<p<\infty,$$

то из теоремы 4.8 и 4.10 соответственно получим;

$$\omega_K\left(\delta;f^{(r)};y\right)_{H_P}=O\left(\delta^K\ln\frac{1}{\delta}\right),y>0,$$

$$\omega_K\left(\delta;f^{(r)};y\right)_{H_P}=O\left[\delta^K\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right],\ y>0.$$

Из теоремы 4.6 вытекает

Следствие 4.1. Если граничная функция $f(x) \in L_P(-\infty;\infty), 0 < p \le \infty,$ то

$$A_\sigma(f)_{L_p} \le C(P,K)\omega_K\left(\frac{1}{\sigma};f\right)_{L_P}$$

Доказательство леммы 4.1.

Разлагаем целую функцию $g_v(z-u)$ в ряд Тейлора

$$g_v(z-u) = \sum_{K=0}^{\infty}\frac{g_v^{(K)}(-u)}{K!}z^K \tag{4.62}$$

абсолютно сходящийся при любом $u \in (-\infty;\infty)$ и любом комплексном $z = x+iy$. Умножая обе части (4.62) на функцию

$$\Delta_u^n f(z) = \sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\binom{n}{s}f(x+su+iy)$$

получим:

$$F_y(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} g_v(z-u)\Delta_u^n f(z)du = \sum_{K=0}^{\infty}\frac{Z^K}{K!}\int_{-\infty}^{\infty} g_v^{(k)}(-u)\Delta_u^n f(z)du. \tag{4.63}$$

Рассмотрим случай 1) $1 \le p < \infty$, 2) $p=\infty$, 3) $0<p<1$

1) Применяя неравенство Гальдера и в силу неравенства С.Н.Бернштейна в $L_P(-\infty;\infty)$, получим (см.(1.32.))

$$|F_y(z)| \le \sum_{K!}^{\infty}\frac{|z|^K}{K!}\left\|g_v^{(K)}(u)\right\|_{L_g}\left\|\Delta_u^n f\right\|_{H_p} \le C(n)\|f\|_{H_P}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{|z|^K}{K!}y^k\|g_v(u)\|_{L_g} =$$

$$= C(n)\|f\|_{H_P}\|g_v(u)\|_{L_g}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{|vz|^K}{K!} = C(n)\|f\|_{H_P}\|g_v(u)\|_{L_g}e^{v|z|} \quad ,$$

т.е. $F_v(z)$ целая функция. 2) Случай $p=\infty$ очиведен.

3) $0<p<1,$ Из (4.63) в силу (4.24) и неравенство Бернштейна в $L_P(-\infty;\infty)$ получим (см(2.3)

$$|F_v(z)| \le \sum_{K=0}^{\infty}\frac{|z|^K}{K!}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left[g_v^{(K)}(-u)\right]\left[\Delta_u^n f(z)\right]du\right| \le$$

$$\le (y-y_0)^{1-\frac{1}{p}}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{|z|^K}{K!}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|g_v^{(K)}(u)\right|^P\left|\Delta_u^n f(x+iy_0\right|^P du\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\leq (y-y_0)^{1-\frac{1}{p}} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{|z|^K}{K!} \left[\max_u \left| g_\nu^{(K)}(u) \right|^P \int_{-\infty}^{\infty} \left| \Delta_u^n f(x+iy_0) \right|^P \right]^{\frac{1}{P}} \leq$$

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{|z|^K}{K!} \left[\max_u \left| g_\nu^{(K)}(u) \right|^P \int_{-\infty}^{\infty} \left| \Delta_u^n f(x+iy_0) \right|^P \right]^{\frac{1}{P}} \leq$$

$$\leq (y-y_0)^{1-\frac{1}{P}} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{|z|^K}{K!} \nu^K \left(\max |g_\nu(u)|^P \int_{-\infty}^{\infty} C(n) |f(u+iy_0|^P du \right)^{\frac{1}{P}} \leq$$

$$C(n)(y-y_0)^{1-\frac{1}{P}} \|g_\nu(u)\|_{L_p} \|f(u+iy_0\|_{H_P} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{|z|^K \nu^K}{K!} = C(n,y,p) e^{\nu|z|},$$

т.е . $F_\nu(z)$ - целая функция степени ν . Принадлежность в $H_P(-\infty;\infty)$ целой функции $F_\nu(z)$ при 1≤p<∞ вытекает из (4.53) с применением обобщённого неравенства Минковского, а при $0<p<1$ с применением теоремы 4.3. Лемма 4.1. доказана полностью.

Доказательство леммы 4.2 Имеем

$$f(x+iy) - f(x+iy_0) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad y > y_0 \geq 0.$$

Так как функция $f(x+iy)$ аналитическая в верхней полуплоскости, то

$$\left| f'(z) \right| = \left| \frac{df}{dz} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|, \ y > 0.$$

Следователъно,

$$| f(x+iy) - f(x+iy_0)| \leq \left[\sup_{y_0 \prec y} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \right] (y-y_0).$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty} | f(x+iy) - f(x+iy)|^P dx \leq (y-y_0)^P \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sup_{y_0<y} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \right]^P dx.$$

Отметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} | f(x+iy)|^P dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} | f(x+iy_0)|^P dx, y>0, \tag{4.65}$$

$$0 < p \leq \infty, \ y > y_0 \geq 0,$$

Неравенство (4.65) при $1 \leq p \leq \infty$ доказано в [79], [81], с . 101, а при $0<p<1$ автором [90] (см. теорему 4.1, § 1).

Применяя неравенство (4.65) в правой части неравенства (4.64), получим утверждение леммы.

Доказательство леммы 4.3. Сначала рассмотрим случай $0<p<1$. Имеем:

$$f(x+h+iy_0)-f(x+iy_0)=$$

$$=\left[f(x+h+iy)-f(x+iy)\right]+\left[f(x+iy)-f(x+iy_0)\right]-$$

$$-\left[f(x+h+iy)-f(x+h+iy_0)\right].$$

Отсюда, применяя лемму 4.2, получим:

$$\left\|\Delta_n f(x+iy_0)\right\|_{H_P}^P\le C\left\{\left\|\Delta_n f(x+iy)\right\|_{H_P}^P+\left(y-y_0\right)^P\left\|\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]\right\|_{H_P}^P+\right.$$

$$\left.+(y-y_0)\left\|\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y=y_0}\right\|_{H_P}^P\right\}=C\left\{\left\|\Delta_n f(x+iy)\right\|_{H_P}^P+2(y-y_0)^P\left\|\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y-y_0}\right\|_{H_P}^P\right\},\qquad(4.66)$$

Теперь положим $y-y_0=h$. Тогда

$$\left\|\Delta_n f(x+iy_0)\right\|_{H_P}^P\le C\left\{\left\|\Delta_n f(x+iy)\right\|_{H_P}^P+2h^P\left\|\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y=y_0}\right\|_{H_P}^P\right\}.$$

Отсюда методом индукции получим

$$\left\|\Delta_H^K f(x+iy_0)\right\|_{H_P}^P\le C\left\{\left\|\Delta_H^K f(x+iy)\right\|_{H_P}^P+2h^P\left\|\Delta_h^{K-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y=y_0}\right\|_{H_P}^P\right\},\ .\qquad(4.67)$$

Применяя лемму 4.2 в правой части (4.67) и в силу неравенства (4.65), находим что

$$\left\|\Delta_h^K f(x+iy_0)\right\|_{H_P}^P\le C\left\{h^{KP}\left\|\left(\frac{\partial^K f}{\partial^K x^K}\right)_{y=y_0}\right\|_{H_P}^P+2h^{KP}\left\|\left(\frac{\partial^K f}{\partial x^K}\right)_{y=y_0}\right\|_{H_P}^P\right\}\le Ch^{KP}\left\|\left(\frac{\partial^K f}{\partial x^K}\right)_{y=y_0}\right\|_{H_P}^P.\qquad(4.68)$$

Теперь заменяя функции $f(x+iy)$ на функции $\Delta_h^S f(x+iy_0)$ в неравенство (4.68), получим

$$\left\|\Delta_h^K\left(\Delta_h^S f\left(x+iy_0\right)\right)\right\|_{H_P}^P\le Ch^{KP}\left\|\left[\frac{\partial^K}{\partial x^K}\left(\Delta_h^S f\right)\right]_{y=y_0}\right\|_{H_P}^P==Ch^{KP}\left\|\Delta_h^S\left[\frac{\partial^K f}{\partial x^K}\right]_{y=y_0}\right\|_{H_P}^P.\qquad(4.69)$$

Отсюда вытекает утверждение леммы при $0<p<1$. При $1\le p\le\infty$ лемма доказывается, как в случае $0<p<1$ (т.е. не отличается от случая $0<p<1$).

Доказательство теоремы 4.6. Рассмотрим функцию

$$Q_\nu(x+iy)=\frac{1}{\gamma_{r/\nu}}F_\nu(x+iy), \qquad \gamma_{r/\nu}=\int_{-\infty}^{\infty}g_\nu(u)du,$$

где функция $g_\nu(u)$ определена равенством (4.52) и функция $F_\nu(x+iy)$ определена равенством (4.63). По лемме 4.1 функция $Q_\nu(x+iy)$ есть целая функция степени ν. $Q_\nu(x+iy)\in H_P(-\infty;\infty)$, $0<p<\infty$. Имеем, что

$$f(x+iy)-Q_\nu(x+iy)=\frac{1}{\gamma_{r,\nu}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\Delta_h^k f(x+iy)\right)g_\nu(u)du, \tag{4.70}$$

$$\Delta_h^k f(x+iy)=\sum_{s=0}^{k}(-1)^{k-s}\binom{k}{s}f(x+sh+iy).$$

В силу неравенства (4.4а) из равенства (4.70) , полагая $y-y_0=\frac{1}{\nu}$, получим

$$A_\nu(f;\gamma)_{H_p}\le C(p)\nu^{\frac{1}{p}-1}(\gamma_{r,\nu})^{-1}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|g_\nu(u)|^p\omega_k^p(|u|;y_0;f)_{H_p}du\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{4.71}$$

Оценим интеграл

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}|g_{\nu(u)}|^p\omega_k^p(|u|;f)_{H_p}du. \tag{4.72}$$

Нетрудно показать, что

$\omega_k^p(\lambda u;y_0;f)_{H_p}\le(1+\lambda)^k\omega(u;y_0;f)_{H_p}$, 0<p<1 , k=1,2,… (4.73)

Неравенство (4.73,) в пространстве $L_p(-\infty,\infty)$ отмечено в [49]. При помощи (4.73) получаем

$$I\le\nu^k\omega_k^p\left(\frac{1}{\nu};y_0;f\right)_{H_p}\int_{-\infty}^{\infty}\left(|u|+\frac{1}{\nu}\right)^k|g_\nu(u)|^pdu\le$$

$$\le\omega_k^p\left(\frac{1}{\nu};y_0;f\right)_{H_p}\left[2\int_{-\frac{1}{\nu}}^{\frac{1}{\nu}}|g_\nu(u)|^pdu+2\nu^k\int_{|u|>\frac{1}{\nu}}u^k|g_\nu(u)|^pdu\right]. \tag{4.74}$$

Учитывая, что (см. [1], с. 151)

$$\gamma_{\nu_r}=\int_{-\infty}^{\infty}g_\nu(u)du=C(r)\left(\frac{\nu}{2r}\right)^{2r-1}. \tag{4.75}$$

При выборе r так, чтобы 2rp≥1 получим

$$\int_{-\frac{1}{\nu}}^{\frac{1}{\nu}}|g_\nu(\nu)|^pdu\le C(p.r)\nu^{2rp-1}. \tag{4.76}$$

Теперь, выбирая r так, чтобы 2rp≥k+2 ,в силу (4.75) получим:

$$\nu^k \int\limits_{|u|>\frac{1}{\nu}} u^k |g_\nu(u)|^p du \le C(r.p)\nu^{2rp-1}. \qquad (4.77)$$

Из (4.74), (4.76), (4.77) вытекает

$$I \le C(p)\nu^{2rp-1}\omega_k^p\left(\frac{1}{\nu}; y_0; f\right)_{H_p}, \qquad (4.78)$$

Теперь из (4.71), (4.75), (4.78) вытекает

$$A_\nu(y; f)_{H_p} \le C(p)\nu^{\frac{1}{p}-1} \cdot \nu^{1-2r} \cdot \nu^{2r-\frac{1}{p}}\omega_k^p\left(\frac{1}{\nu}; y_0; f\right)_{H_p} = C(p)\omega_k^p\left(\frac{1}{\nu}; y_0; f\right)_{H_p}$$

т.е. утверждение теоремы при 0<p<1. На основании равенства (4.70) теорема при 1≤p≤∞ доказывается аналогично случаю 0<p<1. Но в этом случае вместо неравенства (4.4а) применяется обобщённое неравенство Минковского и учитывается, что (см.[81])

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p dx \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy_0)|^p dx, \ 0 \le y_0 < y.$$

В случае 1≤p≤∞ неравенство (4.73) имеет вид:

$$\omega(\lambda u; y; f)_{H_p} \le (1+\lambda)^k \omega_k(u; y; f)_{H_p} \quad (\lambda \Rightarrow 0),$$

который доказывается также как в пространстве $L_p(-\infty,\infty)$ (см.[12] , с. 116). Доказательство теоремы завершено.

Утверждение теоремы 4.7 вытекает из теоремы 4.6 и леммы 4.3.

Доказательство теоремы 4.8.

Пусть целая функция $Q_\delta(x)$, осуществляющая наилучшее приближение граничной функции $f(x) \in L_p(-\infty,\infty)$ в пространстве $L_p(-\infty,\infty),\ 0 < p < \infty$, т.е.

$$\| f(x) - Q_\sigma(x) \|_{L_p} = A_\sigma(f)_{L_p}. \qquad (4.79)$$

Известно, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p dx \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx, \quad 0<p<\infty. \qquad (4.80)$$

Неравенство (4.80) для 1≤p≤∞ доказано в [79], для 0<p<1 см (4.4). Сначала рассмотрим случай 1≤p≤∞. Пользуясь свойством разности k порядка, применяя неравенство (4.80) и неравенство Минковского, а также учитывая равенство (4.79), получим

$$\left\|\Delta_h^k f(z)\right\|_{H_p} = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_h^k |f(x+iy)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \le \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_h^k |f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\|\Delta_h^k f(x)\right\|_{L_p} \le$$
$$\le \left\|\Delta_h^k\left[f(x)-Q_{2^m}(x)\right]\right\|_{L_p} + \left\|\Delta_h^k Q_{2^m}(x)\right\|_{L_p}.$$

Применяя тождества (см.[12], с.116)

$$\Delta_h^r f(x) = \int_0^h \ldots \int_0^h f^{(r)}(x+t_1+t_2+\ldots+t_r)dt_1dt_2\ldots dt_r$$

в силу неравенства Минковского, получим

$$\left\|\Delta_h^k Q_{2m}(x)\right\|_{L_p} \le h^k \left\|Q_{2^m}^{(k)}(x)\right\|_{L_p}, k=1,2,\ldots \qquad (4.82)$$

Очевидно,что

$$Q_{2^m}^{(k)}(x) = Q_2^{(k)} + \sum_{\nu=1}^{m}\left[Q_{2^{\nu+1}}^{(k)}(x) - Q_{2^\nu}^{(k)}(x)\right].$$

Отсюда в силу неравенство Минковского и применяя неравенство Бернштейна (см.[12] , с. 232)

$$\left\|Q_\sigma^{(k)}(x)\right\|_{L_p} \le \sigma^k \left\|Q_\sigma(x)\right\|_{L_p}, \text{ k=1,2,....} \qquad (4.82a)$$

с учётом (4.79) находим, что

$$\left\|Q_{2^m}^{(k)}(x)\right\|_{L_p} \le \left\|Q_2^{(k)}(x)\right\|_{L_p} + \sum_{k=1}^{m}\left\|Q_{2^{\nu+1}}^{(k)}(x) - Q_{2^n}^{(k)}(x)\right\|_{L_p} \le 2^k\left\|Q_2(x)\right\|_{L_p} +$$
$$+\sum_{\nu=1}^{m} 2^{(\nu+1)k}\left\|Q_{2^{\nu+1}}(x) - Q_{2^\nu}(x)\right\|_{L_p} \le 2^{k+1}A_0(f)_{L_p} + \sum_{\nu=1}^{m} 2^{(\nu+1)k+1}A_{2^\nu}(f)_{L_p}. \qquad (4.83)$$

Так как

$$2^{(\nu+1)k}A_{2^\nu}(f)_{L_p} \le 2^{2k}\sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu}\mu^{k-1}A_\mu(f)_{L_p},$$

то из (4.83) вытекает, что

$$\left\|Q_{2^m}^{(k)}(x)\right\|_{L_p} \le C(k)\left\{A_0(f)_{L_p} + A(f)_{L_p} + \sum_{\nu=1}^{m}\sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^u}\mu^{k-1}A_\mu(k)_{L_p}\right\} \le C(k)\sum_{\nu=0}^{2^m}(\nu+1)^{k-1}A_\nu(f)_{L_p}$$

4.84)

Теперь из (4.81),(4.82),(4.84) получим

$$\left\|\Delta_h^k f(z)\right\|_{H_p} \le C(k)\left\{A_{2^m}(f)_{L_p} + h^k\sum_{\nu=0}^{2^m}(\nu+1)^{k-1}A_\nu(f)_{L_p}\right\}.$$

Выбирая $2^m \le n \le 2^{m+1}$, *m=0,1,…,* $h=\frac{1}{n}$ из последнего неравенства получим

$$\left\|\Delta^k_{\frac{1}{n}} f(z)\right\|_{H_p} \le \frac{C(k)}{n^k}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{k-1}A_\nu(f)_{L_p},$$

т.е. утверждение теоремы при $1\le p\le\infty$.

Теперь рассмотрим случай *0<p<1*. Пользуясь свойством разности k го порядка имеем

$$\left\|\Delta^k_n f(z)\right\|^p_{H_p} = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\Delta^k_n f(x+iy)\right|^p dx \le \left\|\Delta^k_n\left[f(x+iy)-Q_{2^m}(x+iy)\right]\right\|^p_{H_p} + \left\|\Delta^k_n Q_{2^m}(x+iy)\right\|^p_{H_p} \quad (4.85)$$

Применяя неравенство (4.80) и в силу (4.79), находим, что

$$\left\|\Delta^k_n\left[f(x+iy)-Q_{2^m}(x+iy)\right]\right\|^p_{H_p} \le \Delta^k_n\left\|f(x+iy)-Q_{2^m}(x+iy)\right\|^p_{H_p} \le$$

$$\le \Delta^k_n\left\|f(x)-Q_{2^m}(x)\right\|^p_{H_p} \le 2^{kp}A^p_{2^m}(f)_{L_p}. \quad (4.86)$$

Известно, что (см.[90])

$$\left\|\Delta^k_n f(x+iy)\right\|^p_{H_p} \le C(p)h^{kp}\left\|\frac{\partial^k f(x+iy)}{\partial x^k}\right\|^p_{H_p}, \ 0<p<\infty. \quad (4.87)$$

Применяя сначала неравенство (4.87), а затем неравенство (4.80), получим

$$\left\|\Delta^n_k Q_{2^m}(x+iy)\right\| \le C(p)h^{kr}\left\|\frac{\partial^k Q_{2^m}(x+iy)}{\partial x^k}\right\|^p_{H_p} \le C(p)h^{kr}\left\|\frac{\partial^k Q_{2^m}(x)}{\partial x^k}\right\|^p_{H_p} = C(p)h^{kr}\left\|Q^{(k)}_{2^m}(x)\right\|^p_{L_p}.$$

(4.88)

Как было показано в главе II, §3 (см. (2.35))

$$\left\|Q^{(k)}_{2^m}(x)\right\|^p_{L_p} \le 2^{(2k+1)p}\sum_{\nu=0}^{2^m}(\nu+1)^{kp-1}A^p_\nu(f)_{L_p}. \quad (4.89)$$

В силу (4.89) из (4.88) получим

$$\left\|\Delta^k_n Q_{2^m}(x+iy)\right\|^p_{H_p} \le C(k,p)h^{kp}\sum_{\nu=0}^{2^m}(\nu+1)^{kp-1}A^p_\nu(f)_{L_p}. \quad (4.90)$$

Подставляя (4.86) и (4.90) в (4.83), находим

$$\left\|\Delta^k_n f(z)\right\|^p_{H_p} \le C(k,p)\left\{A^p_{2^n}(f)_{L_p} + h^{kp}\sum_{\nu=0}^{2^m}(\nu+1)^{kp-1}A^p_\nu(f)_{L_p}\right\},$$

Теперь, выбирая $2^m \le n < 2^{m+1}$, $h=\frac{1}{n}$ из последнего неравенства, получим

$$\left\|\Delta^k_{\frac{1}{n}} f(z)\right\|^p_{H_p} \le C(k,p)\frac{1}{n^{kp}}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{k-1}A^p_\nu(f)_{L_p}$$

т.е. утверждение теоремы при $0<p<1$. Доказательство теоремы завершено.

Теорема 4.9 доказывается как и теорема 4.8, а теорема 4.10 вытекает из результата работы [4] после применения неравенства (4.80).

§ 4. Приближение функции класса $H_p(-\infty, \infty)$ с некоторыми средними от интеграла Коши

Для пространств $L_p(-\infty, \infty)$, $1\le p\le\infty$ в ряде работ (см. напр. [1], [14], [90], [91], [92] и др.) изучены некоторые вопросы приближения функций различными средними их интегралов Фурье.

В этом параграфе рассмотрены приближения функции из класса $H_p(-\infty, \infty)$ с помощью средних от интегралов Коши в зависимости либо от модуля гладкости, либо от наилучших приближений.

Под интегралом типа Коши для верхней полуплоскости мы понимаем интеграл вида

$$I(z,f)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-z}dt,$$

где $f(x)$ измеримая комплексная функция, определенная в точках вещественной оси плоскости $z=x+iy$, $\mathrm{Im}z>0$.

Пусть функция $f(x+iy)\in H_p(-\infty,\infty)$, $1\le p\le\infty$. Для каждой такой функции $f(z)$ рассмотрим интеграл вида:

$$U_\sigma(f)=U_\sigma(f;g;z)=\int_{-\sigma}^{\sigma}g_\sigma(u)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{t-z+u_1}\right]du, \tag{4.91}$$

где $u_1=(u+2\sigma)^{-1}, \sigma>0$ $g_\sigma(u)$ – некоторая функция, удовлетворяющая условием:

1) $g_\sigma(u)=0$ при $|u|\ge\sigma$; 2) $\int_{-\infty}^{\infty}g_\sigma(u)du=1$ 3) $g_\sigma(u)\in L_2(-\infty,\infty)$.

В качестве функции $g_\sigma(u)$, удовлетворяющей приведённым выше условиям 1), 2), 3) можно рассмотреть среднее типа Фейера, типа Чезаро порядка $\alpha>0$, типа Зигмунда, типа Абеля-Пуссона, т.е.

1. $g_\sigma(u)=\frac{1}{2\sigma}\left(1-\frac{|u|}{\sigma}\right)$; 2. $g_\sigma(u)=\frac{\alpha+1}{2^{\alpha+1}\sigma}\left(1-\frac{|u|}{\sigma}\right)^{\alpha}, \alpha>0$;

3. $g_\sigma(u)=\frac{1}{2\sigma}\left(1-\frac{u^r}{\sigma^r}\right)$; 4. $g_\sigma(u)=\sigma\left(1-e^{-\sigma^2}\right)^{-1}e^{-\sigma|u|}$ соответственно.

Справедливо следующее утверждение, дающее уклонения функции $f(x+iy)$ от средних $U_\sigma(f;g;z)$ в пространствах $H_p(-\infty,\infty)$.

Теорема 4.11. Если функция $f(x+iy)\in H_p(-\infty,\infty)$, $0<p\le\infty$, то при $y>0$, $1\le p\le\infty$ и при $y\ge\frac{1}{\sigma}$, $0<p<1$ имеет место неравенство

$$\|f(z)-U_\sigma(f)\|_{H_p}\le C(p)\|g_\sigma(u)\|_{2,[-\sigma,\sigma]}\sigma^{\frac{1}{2}}\omega\left(\frac{1}{\sigma};f\right)_p.$$

Доказательство теоремы. Сначала рассмотрим случай $1\le p\le\infty$. На основании равенства (4.91) имеем:

$$|f(z)-U_\sigma(f)|\le\int_{-\sigma}^{\sigma}|g_\sigma(u)\|f(z)-f(z-(u+2\sigma)^{-1})|du \tag{4.92}$$

Отсюда, применяя обобщённое неравенство Минковского, получим:

$$R_\sigma(f)=\|f(z)-U_\sigma(f)\|_{H_p}\le\int_{-\sigma}^{\sigma}|g_\sigma(u)|\left\|f(z)-f\left(z-(u+2\sigma)^{-1}\right)\right\|_{H_p}du$$

В силу известного неравенства (см.[79], для $p\ge1$ и [99] для $0<p<1$)

$$\|f(x+iy)\|_{H_p}\le\|f(x)\|_{L_p}, 0<p\le\infty, y>0, \tag{4.93}$$

находим, что

$$R_\sigma(f)\le\int_{-\sigma}^{\sigma}|g_\sigma(u)|\left\|f(x)-f\left(x-(u+2\sigma)^{-1}\right)\right\|_p du\le\int_{-\sigma}^{\sigma}|g_\sigma(u)|\omega\left(|u+2\sigma|^{-1};f\right)_p du.$$

На основании свойства модуля непрерывности (см. [123], гл.3 п.3.3. стр.116).

$$\omega(\lambda\delta;f)_p\le(1+\lambda)\omega(\delta;f)_p, \lambda>0, 1\le p\le\infty \tag{4.94}$$

получим

$$R_\sigma(f)\le\int_{-\sigma}^{\sigma}|g_\sigma(u)|\omega\left(\frac{1}{\sigma}\cdot\sigma(u+2\sigma)^{-1};f\right)\le\int_{-\sigma}^{\sigma}|g_\sigma(u)|\left[(1+\sigma(u+2\sigma)^{-1}\right]\omega\left(\frac{1}{\sigma};f\right)\le$$

$$\le\omega\left(\frac{1}{\sigma};f\right)_{Lp}\left\{\int_{-\sigma}^{\sigma}|g_\sigma(u)|du+\sigma\int_{-\sigma}^{\sigma}|g_\sigma(u)||u+2\sigma|^{-1}du\right\}=\omega\left(\frac{1}{\sigma};f\right)_p(I_1+I_2). \qquad (4.95)$$

Далее оценим I_1 и I_2. Применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$I_2=\sigma\int_{-\sigma}^{\sigma}|g_\sigma(u)||u+2\sigma|^{-1}du\le\sigma\left\{\int_{-\sigma}^{\sigma}|u+2\sigma|^{-2}du\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{-\sigma}^{\sigma}|g_\sigma(u)|^2du\right\}^{\frac{1}{2}}\le\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma\left(\frac{1}{\sigma}\int_{-\sigma}^{\sigma}|g_\sigma(u)|^2du\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sigma\int_{-\sigma}^{\sigma}|g_\sigma(u)|^2du\right)^{\frac{1}{2}},$$

ибо

$$\left(\int_{-\sigma}^{\sigma}\frac{1}{(u+2\sigma)^2}du\right)^{\frac{1}{2}}=\left[-(u+2\sigma)^{-1}\Big|_{-\sigma}^{\sigma}\right]=\left[\sigma^{-1}-(3\sigma)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma^{-\frac{1}{2}}.$$

Аналогично

$$I_1=\int_{-\sigma}^{\sigma}|g_\sigma(u)|du\le\left\{2\sigma\int_{-\sigma}^{\sigma}|g_\sigma(u)|^2du\right\}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\left(\sigma\int_{-\sigma}^{\sigma}|g_\sigma(u)|^2du\right)^{\frac{1}{2}}$$

Подставляя оценки, полученные для I_1 и I_2 в (4.95), убедимся в справедливости теоремы 1 при $1\le p\le\infty$, с константой $C(p)=\sqrt{2}+\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Теперь рассмотрим случай $0<p<1$. С помощью подстановки $u=\frac{1}{(x-t)}-2\sigma$, имеем

$$f(z)-U_\sigma(f;g;z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\sigma}^{\sigma}g_\sigma(u)\left[f(z)-f\left(z-\frac{1}{u+2\sigma}\right)\right]du=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int_{x-\frac{1}{\sigma}}^{x-\frac{1}{3\sigma}}g_\sigma\left(\frac{1}{x-t}-2\sigma\right)\left[f(x+iy)-f(t+iy)\right]\frac{dt}{(x-t)^2} \qquad (4.96)$$

Так как $g_\sigma(u)=0$, при $|u|\ge\sigma$, то $g_\sigma\left(\frac{1}{x-t}-2\sigma\right)=0$ при любом $t\notin\left(x-\frac{1}{\sigma},x-\frac{1}{3\sigma}\right)$, поэтому из представления (4.96) получим

$$f(z)-U_\sigma(f;g;z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} g_\sigma\left(\frac{1}{x-t}-2\sigma\right)\left[f(x+iy)-f(t+iy)\right]\frac{dt}{(x-t)^2} \qquad (4.97)$$

Известно (см.[90], [125]), что если 0<p<1, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|dx\le C_1(p)(y-y_0)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy_0)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad y>y_0\ge 0\ , \qquad (4.98)$$

$$C_1(p)=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}}\frac{4}{2-p}.$$

Применяя неравенство (4.98) при $y_0=0$ в правой части равенство (4.97), получим

$$\left|\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} g_\sigma\left(\frac{1}{x-t}-2\sigma\right)\left[f(x+iy)-f(t+iy)\right]\frac{dt}{(x-t)^2}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}C_1(p)y^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|g_\sigma\left(\frac{1}{x-t}-2\sigma\right)\right|^p|f(x)-f(t)|^p\frac{dt}{(x-t)^{2p}}\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (4.99)$$

Неравенство (4.99) и равенство (4.97) дают оценку

$$|f(z)-u_\sigma(f)|^p\le\left(\frac{1}{\pi}\right)^p\left[C_1(p)\right]^p y^{p-1}\int_{-\infty}^{\infty}\left|g_\sigma\left(\frac{1}{x-t}-2\sigma\right)\right|^p|f(x)-f(t)|^p\frac{dt}{(x-t)^{2p}}.$$

С помощью подстановки

$$u=\frac{1}{(x-t)}-2\sigma,\quad t=x-\frac{1}{u+2\sigma},\quad dt=\frac{du}{(u+2\sigma)^2}$$

из последнего неравенства получим

$$|f(z)-u_\sigma(f)|^p\le\left(\frac{1}{\pi}\right)^p\left(\frac{1}{\pi}\right)\left(\frac{4}{2-p}\right)^p y^{p-1}\int_{-\infty}^{\infty}|g_\sigma(u)|^p\left|f(x)-f\left(x-\frac{1}{u+2\sigma}\right)\right|^p\frac{(u+2\sigma)^{2p}}{(u+2\sigma)^2}du=$$

$$=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{p+1}\left(\frac{4}{2-p}\right)^p y^{p-1}\int_{-\infty}^{\infty}|g_\sigma(u)|^p\left|f(x)-f\left(x-\frac{1}{u+2\sigma}\right)\right|^p(u+2\sigma)^{2p-2}du. \qquad (4.100)$$

Отсюда, интегрируя по x, получим

$$\|f(z)-U_\sigma(f)\|_{H_p}^p\le C_2(p)y^{p-1}\int_{-\sigma}^{\sigma}|g_\sigma(u)|^p\omega^p\left(\frac{1}{|u+2\sigma|};f\right)_p(u+2\sigma)^{2p-2}du \qquad (4.101)$$

В силу известного неравенства (см.[49], стр. 397)

$$\omega^p(\lambda\delta;f)_p\le(\lambda+1)\omega^p(\delta;f)_p, 0<p<1, \lambda>0$$

из (4.101) получим

$$\|f(z)-U_\sigma(f)\|_{H_p}^p\le C_2(p)y^{p-1}\omega^p\left(\frac{1}{\sigma};f\right)_p\left\{\int_{-\sigma}^{\sigma}(u+2\sigma)^{2p-2}|g_\sigma(u)|^p du+\right.$$

$$+\sigma\int_{-\sigma}^{\sigma}(u+2\sigma)^{2p-3}|g_\sigma(u)|^p\,du\Bigg\} = C(p)y^{p-1}\omega^p\left(\frac{1}{\sigma};p\right)_p\left(A_1^p+A_2^p\right), \qquad (4.102)$$

где $C(p)=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{p+1}\left(\frac{4}{2-p}\right)^p.$

Оценим теперь A_1^p и A_2^p. Применяя неравенство Гельдера с показателем $s=\frac{2}{p}>2$, получим

$$A_1^p=\int_{-\sigma}^{\sigma}|u+2\sigma|^{2p-2}|g_\sigma(u)|^p\,du\le\left\{\int_{-\sigma}^{\sigma}|g_\sigma(u)|^2\,du\right\}^{\frac{p}{2}}\left\{\int_{-\sigma}^{\sigma}|u+2\sigma|^{2p-2\cdot\frac{2}{2-p}}\,du\right\}^{\frac{2-p}{2}}=$$

$$=\frac{2-p}{3p-2}\left(3^{\frac{3p-2}{2-p}}-1\right)\sigma^{\frac{3p-2}{2-p}}\left\{\int_{-\sigma}^{\sigma}|g_\sigma(u)|^2\,du\right\}^{\frac{p}{2}}=C_3(p)\sigma^{\frac{3p-2}{2-p}}\left\{\int_{-\sigma}^{\sigma}|g_\sigma(u)|^2\,du\right\}^{\frac{p}{2}}.$$

$$A_2^p=\sigma\int_{-\sigma}^{\sigma}|u+2\sigma|^{2p-3}|g_\sigma(u)|^p\,du\le\frac{2-p}{3p-4}\left(3^{\frac{3p-4}{2-p}}\right)\sigma^{\frac{3p-4}{2-p}}\left(\int_{-\sigma}^{\sigma}|g_\sigma(u)|^2\,du\right)^{\frac{p}{2}}=C_4(p)\sigma^{\frac{3p-4}{2-p}}\left(\int_{-\sigma}^{\sigma}|g_\sigma(u)|^2\,du\right)^{\frac{p}{2}}.$$

На основании этих оценок из (4.102) следует утверждение теоремы для 0<p<1 при

$$[C(p)]^p=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{p+1}\left(\frac{4}{2-p}\right)^p\cdot[C_3(p)+C_4(p)]=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{p+1}\left(\frac{4}{2-p}\right)^p\cdot\left[\frac{2-p}{3p-2}\left(3^{\frac{3p-2}{2-p}}-1\right)+\frac{2-p}{3p-4}\left(3^{\frac{3p-4}{2-p}}\right)\right],$$

т.е. $$C(p)=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{1+\frac{1}{p}}\cdot\frac{4}{2-p}\left(\frac{2-p}{3p-2}\left(3^{\frac{3p-2}{2-p}}-1\right)+\frac{2-p}{3p-4}\left(3^{\frac{3p-4}{2-p}}\right)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема доказана.

Теорема 4.12. Если функция $f(x+iy)\in H_p(-\infty,\infty)$, $0<p\le\infty$, то имеет место неравенство

$$\|f(z)-U_\sigma(f;g;z)\|_{H_p}\le C_5(p)\|g_\sigma(u)\|_2\cdot\sigma^{\frac{1}{2}}\left\{A_\sigma(f)_p+\frac{1}{\sigma}\left(\sum_{\alpha=0}^{[\sigma]}A_k^\alpha(f)_p\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\},$$

где $\alpha=1$, если $1\le p<\infty$; $\alpha=p$ если $0<p<1$. Здесь $z=x+iy$, причем $y\ge\frac{1}{\sigma}$, если $1\le p<\infty$; $y>0$ если $0<p<1$. Величина C(p) не зависит от p при $1\le p<\infty$.

Доказательство теоремы 4.12. На основании (4.91) и в силу неравенства (4.93) получим

$$R(f,u_1)=\|f(z)-f(z-u_1)\|_{H_p}\le\|f(x)-f(x-u_1)\|_p,\quad 1\le p\le\infty \qquad (4.103)$$

где $u_1=(u+2\sigma)^{-1}$.

Пусть $\{Q_n(x)\}$ последовательность целых функций экспоненциального типа σ, осуществляющих наилучшие приближения граничной функции $f(x) \in L_p(-\infty,\infty)$ т.е.

$$\|f(x)-Q_\sigma(x)\|_p = A_\sigma(f)_p, \quad 0<p\le\infty . \tag{4.104}$$

Пользуясь (4.104) и неравенством

$$\|\Delta_h^k Q_{2^m}(x)\|_p \le h^k \|Q_{2^m}^{(k)}(x)\|_p, \qquad 1\le p\le\infty, \ k=1,2,... \tag{4.105}$$

(см.[12], гл.3, формула (4), с.116,) из (4.103) и (4.104) получим

$$R(f,u_1)\le 2A_{2^m}(f)_p + \|Q_{2^m}(x)-Q_{2^m}(x-u_1)\|_p \le 2A_{2^m}(f)_p + |u_1|\|Q'_{2^m}(x)\|_p \tag{4.106}$$

В силу обобщенного неравенства Миньковского имеем

$$\|Q'_{2^m}(x)\|_p \le \|Q'_2(x)\|_p + \sum_{k=1}^{m-1}\|Q'_{2^{k+1}}(x)-Q'_{2^k}(x)\|_p \tag{4.107}$$

Используя неравенство Бернштейна (см.[12], стр.232)

$$\|Q_\sigma^{(r)}(x)\|_p \le \sigma^r \|Q_\sigma(x)\|_p, \qquad p\ge 1, \ r=1,2,... \tag{4.108}$$

и монотонность $A_n(f)_p$, имеем

$$\|Q_1^{(k)}(x)\|_p = \|Q_1^{(k)}-Q_0^{(k)}\|_p \le \|Q_1-Q_0\|_p \le 2A_0(f)_p, \tag{4.109}$$

$$\|Q'_2(x)\|_p = \|Q'_2(x)-Q'_0(x)\|_p \le 2\|Q_2(x)-Q_0(x)\|_p \le 4A_0(f)_p . \tag{4.110}$$

На основании неравенства (4.108) и (4.109), (4.110), равенства (4.104) и неравенства (4.107) и (4.108) при $2^m \le [\sigma] < 2^{m+1}$ получим

$$\|Q'_{2^m}(x)\|_p \le \|Q'_2(x)\|_p + \sum_{k=1}^{m-1}\|Q'_{2^{k+1}}(x)-Q'_{2^k}(x)\|_p \le 2\|Q_2(x)-Q_0(x)\|_p + \sum_{k=1}^{m-1} 2^{(k+1)}\|Q_{2^{k+1}}(x)-Q_{2^k}(x)\|_p \le$$

$$\le 4A_0(f)_p + 4\sum_{k=1}^{m-1} 2^k A_{2^k}(f)_p \le 4A_0(f)_p + 4\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{\nu=2^{k-1}-1}^{2^k} A_\nu(f)_p \le 8\sum_{\nu=0}^{[\sigma]} A_\nu(f)_p . \tag{4.111}$$

Из неравенства (4.106) и (4.111) следует, что

$$R(f;u_1) \le 2A_{2^m}(f)_p + 8|u_1|\sum_{\nu=0}^{|\sigma|} A_\nu(f)_p . \tag{4.112}$$

Пусть теперь h=[σ], $2^m \le h \le 2^{m+1}$, m=0,1,2,… Тогда, применяя обобщённое неравенство Минковского, из неравенства (4.112), находим:

$$\|f(z)-u_\sigma(f)\|_{H_p} \le \int_{-\sigma}^{\sigma}|g_\sigma(u)|\cdot\|f(z)-f(z-u_1)\|_{H_p}du \le \left\{2A_\sigma(f)_p\int_{-\sigma}^{\sigma}|g_\sigma(u)|du + \right.$$

$$+8\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(f)_p \int_{-\sigma}^{\sigma} |u_1|\cdot|g_\sigma(u)|du \Bigg\} = \left(2A_\sigma(f)_p B_1 + 8\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(f)_p B_2 \right). \qquad (4.113)$$

Оценим B_1 и B_2. В силу неравенства Коши-Буняковского получим

$$B_1 = \int_{-\sigma}^{\sigma} |g_\sigma(u)|du \le \left(2\sigma \int_{-\sigma}^{\sigma} |g_\sigma(u)|^2 du \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad B_2 = \int_{-\sigma}^{\sigma} |u_1|\cdot|g_\sigma(u)|du \le \left(\frac{2}{3\sigma} \int_{-\sigma}^{\sigma} |g_\sigma(u)|^2 du \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь с учётом оценки для B_1 и B_2 из неравенства (4.113) следует утверждение теоремы для $1 \le p < \infty$, т.е.

$$\|f(z) - u_\sigma(f)\|_{H_p} \le 2\sqrt{2}\left[\sigma \int_{-\sigma}^{\sigma} |g_\sigma(u)|^2 du \right]^{\frac{1}{2}} A_\sigma(f)_p + 8\sqrt{\frac{2}{3}} \left(\int_{-\sigma}^{\sigma} |g_\sigma(u)|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(f)_p \le$$

$$\le 16\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma^{\frac{1}{2}} \|g_\sigma(u)\|_2 \left[A_\sigma(f)_p + \frac{1}{\sigma}\sum_{\nu=0}^{[\sigma]} A_\nu(f)_p \right]$$

Следовательно $C_5(p) = 16\sqrt{\frac{2}{3}}$, $1 \le p < \infty$.

Рассмотрим случай $0<p<1$. На основании равенства (4.104) имеем:

$$\|f(x) - f(x-u_1)\|_p^p \le 2A_{2^m}^p(f)_p + \|Q_{2^m}(x) - Q_{2^m}(x-u_1)\|_p^p. \qquad (4.114)$$

Известны, следующие неравенства (см.[90] фор. (3) стр. 793, [22] фо. (10) стр. 399)

$$\|\Delta_h^k f(x+iy)\|_{H_p}^p \le h^{kp} \left\| \left(\frac{\partial^k f}{\partial x^k} \right)_{y=y_0} \right\|_{H_p}^p, \quad y_0 \ge 0 \quad . \qquad (4.115)$$

$$\|Q_{2^m}^{(k)}(x)\|_p^p \le 2^{(2k+1)/p} \sum_{\nu=0}^{[\sigma]} (\nu+1)^{kp-1} A_\nu^p(f)_p, \quad p<1 \quad . \qquad (4.116)$$

Полагая в (30) $k=1$, $h=|u_1|$, $f(x+iy) = Q_{2^m}(x+iy)$ получим

$$\|Q_{2^m}(x) - Q_{2^m}(x-u_1)\|_p^p \le |u_1|^p \|Q'_{2^m}(x)\|_p^p.$$

Учитывая неравенства (4.116) при k=1 из полученного неравенства получим

$$\|Q_{2^m}(x) - Q_{2^m}(x-h)\|_p^p \le |u_1|^p 2^{\frac{3}{p}} \sum_{\nu=0}^{2^m} (\nu+1)^{k-1} A_\nu^p(f)_p. \qquad (4.117)$$

На основании неравенства (4.117) и (4.114) получим

$$\|f(x) - f(x-u_1)\|_p^p \le 2A_{2^m}^p(f)_p + 2^{\frac{3}{p}}|u_1|^p \sum_{\nu=0}^{2^m} (\nu+1)^{p-1} A_\nu^p(f)_p, \quad C_6(p) = 2^{\frac{3}{p}}. \qquad (4.118)$$

Интегрируя по x (4.100) и используя неравенство (4.118), находим:

$$\|f(z)-U_\sigma(f)\|_{H_p}^p \le \left(\frac{1}{\pi}\right)^{p+1}\left(\frac{4}{2-p}\right)^p y^{p-1}\int_{-\infty}^{\infty}|g_\sigma(u)|^p\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)-f\left(x-\frac{1}{u+2\sigma}\right)\right|^p dx\right)(u+2\sigma)^{2p-2}du=$$

$$=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{p+1}\left(\frac{4}{2-p}\right)^p y^{p-1}\int_{-\infty}^{\infty}|g_\sigma(u)|^p\|f(x)-f(x-u_1)\|_p^p(u+2\sigma)^{2p-2}du\le$$

$$\le\left(\frac{1}{\pi}\right)^{p+1}\left(\frac{4}{2-p}\right)^p y^{p-1}\int_{-\infty}^{\infty}|g_\sigma(u)|^p\left\{2A_{2^m}^{\nu}(f)_p+2^{\frac{3}{p}}|u_1|^p\sum_{\nu=0}^{2^m}(\nu+1)^{p-1}A_\nu^p(f)_p\right\}(u+2\sigma)^{2p-2}du=$$

$$=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{p+1}\left(\frac{4}{2-p}\right)^p 2^{\frac{3}{p}+1}y^{p-1}\left\{\mathrm{M}_1^{\mathrm{p}}\cdot A_{2^m}^p(f)_p+M_2^p\cdot\sum_{\nu=0}^{2^m}(\nu+1)^{p-1}A_\nu^p(f)_p\right\}, \tag{4.119}$$

$$C_7(p)=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{p+1}\left(\frac{4}{2-p}\right)^p 2^{\frac{3}{p}+1}$$

где

$$M_1^p=\int_{-\sigma}^{\sigma}(u+2\sigma)^{2p-2}|g_\sigma(u)|^p du,$$

$$M_2^p=\int_{-\sigma}^{\sigma}(u+2\sigma)^{2p-2}|u_1|^p\cdot|g_\sigma(u)|^p du=\int_{-\sigma}^{\sigma}|u+2\sigma|^{p-2}\cdot|g_\sigma(u)|^p du$$

Применяя неравенства Гельдера с показателем $\alpha=\frac{2}{p}>2,\quad \beta=\frac{2}{2-p}$ получим

$$M_1^p\le\left(\int_{-\sigma}^{\sigma}|g_\sigma(u)|^2du\right)^{\frac{p}{2}}\left(\int_{-\sigma}^{\sigma}\left[(u+2\sigma)^{2p-2}\right]^{\frac{2}{2-p}}du\right)^{\frac{2-p}{2}}. \tag{4.120}$$

Обычные вычисления дает

$$\int_{-\sigma}^{\sigma}(u+2\sigma)^{\frac{2(2p-2)}{2-p}}du=\left(\frac{2(2-p)}{3p-2}\right)^{\frac{2-p}{2}}\left[3^{\frac{3p-2}{2-p}}-2^{\frac{3p-2}{2}}\right]^{\frac{2-p}{2}}\cdot\sigma^{\frac{3p-2}{2}}. \tag{4.121}$$

На основании (4.120) и (4.121) получим

$$M_1^p\le C_8(p)\sigma^{\frac{3p-2}{2}}\left(\int_{-\sigma}^{\sigma}|g_\sigma(u)|^2du\right)^{\frac{p}{2}},$$

где $C_8(p)=\left(\frac{2(2-p)}{3p-2}\right)^{\frac{2-p}{2}}\left[3^{\frac{3p-2}{2-p}}-2^{\frac{3p-2}{2}}\right]^{\frac{2-p}{2}}$.

Применяя неравенства Гельдера с показателем $\alpha = \frac{2}{p} > 2, \quad \beta = \frac{2}{2-p}$ получим

$$M_2^p \le \left(\int_{-\sigma}^{\sigma} |g_\sigma(u)|^2 du\right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_{-\sigma}^{\sigma} \left[|u+2\sigma|^{p-2}\right]^{\frac{2}{2-p}} du\right)^{\frac{2-p}{2}} . \qquad (4.122)$$

Обычные вычисления дает

$$\left(\int_{-\sigma}^{\sigma} (u+2\sigma)^{-2} du\right)^{\frac{2-p}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2-p} \cdot \sigma^{\frac{p-2}{2}} . \qquad (4.123)$$

На основании (4.122) и (4.123) получим

$$M_2^p \le C_9(p)\sigma^{\frac{p-2}{2}} \left(\int_{-\sigma}^{\sigma} |g_\sigma(u)|^2 du\right)^{\frac{p}{2}},$$

где $C_9(p) = \left(\frac{2}{3}\right)^{2-p}$.

На основании полученных оценок для M_1^p, M_2^p из неравенства (4.119) получим

$$\|f(z) - U_\sigma(f)\|_{H_p}^p \le$$

$$\le C_7(p) y^{p-1}\left\{C_8(p)\sigma^{\frac{3}{2}p-1}\|g_\sigma(u)\|_2^p A_{2^m}^p(f)_p + C_9(p)\sigma^{\frac{p}{2}-1}\|g_\sigma(u)\|_2^p \sum_{\nu=0}^{2^m}(\nu+1)^{p-1} A_\nu^p(f)_p\right\} \le$$

$$\le C_7(p)\left[C_8(p) + C_9(p)\right] y^{p-1}\sigma^{\frac{3}{2}p-1}\|g_\sigma(u)\|_2^p \left\{A_{2^m}^p(f)_p + \frac{1}{\sigma^p}\sum_{\nu=0}^{2^m}(\nu+1)^{p-1} A_\nu^p(f)_p\right\}.$$

Отсюда при $y = \frac{1}{\sigma}$, $2^m \le [\sigma] \le 2^{m+1}$, m=0,1,… получим

$$\|f(z) - U_\sigma(f)\|_{H_p} \le C_{10}(p)\sigma^{\frac{1}{2}}\|g_\sigma(u)\|_2 \left\{A_\sigma(f)_p + \frac{1}{\sigma}\left(\sum_{\nu=0}^{[\sigma]}(\nu+1)^{p-1} A_\nu^p(f)_p\right)^{\frac{1}{p}}\right\},$$

где

$$C_{10}(p) = 2^{\frac{1}{p}}\left[C_7(p)\left[C_8(p) + C_9(p)\right]\right]^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\frac{1}{\pi}\right)^{p+1}\left(\frac{4}{2-p}\right)^p 2^{\frac{3}{p}+1}\left[\left(\frac{2(2-p)}{3p-2}\right)^{\frac{2-p}{2}}\left[3^{\frac{3p-2}{2-p}} - 2^{\frac{3p-2}{2}}\right]^{\frac{2-p}{2}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2-p}\right]\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Этим доказана теорема при $0<p<1$. Доказательство теоремы завершено. Замечаем, что при $1 \le p < \infty$ величина $C(p)=C=16\sqrt{\frac{2}{3}}$, т.е. не зависит от p, а при $0<p<1$, $C(p)=C_{10}(p)$, т.е. зависит от p.

ГЛАВА V
ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЪНЫХ СРЕДНИХ ИХ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ

§ 1. Приближение функций из класса $L_p(-\infty,\infty)$ средними Чезаро и Гаусса – Вейерштрасса

Рассмотрим средние Чезаро и Гаусса – Вейерштрасса от интегралов Фурье (см. [24], 43-49).

$$\sigma_\alpha(f;y;x)=\frac{1}{\pi}\int_0^y\left(1-\frac{u}{y}\right)^\alpha\int_{-\nabla}^{\infty}f(t)\cos u(x-t)dtdu,\quad \alpha>0 \tag{5.1}$$

$$R(f;y;x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}t^{-yu^2}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{iu(x-t)}dtdu. \tag{5.2}$$

Отметим, что средние Гаусса – Вейерштрасса (5.2) тесно связаны с решением уравнений теплопроводности.

Известно , что (см.[24], с. 43-44) (5.1) при $\alpha>0,\ y\to\infty$ и (5.2) при $y\to 0$ сходятся почти для всех *x* к функции *f(x)*, если *f(x)*$\in L_p(-\infty,\infty)$ (см.[126]). Возникает вопрос, какова оценка уклонения функции *f(x)*$\in L_p(-\infty,\infty)$ $1\le p\le\infty$ от средних (5.1) и (5.2), в зависимости от свойств функции *f(x)*.

Справедливы следующие утверждения:

Теорема 5.1. Если функция *f(x)*$\in L_p(-\infty,\infty)$, то для любого $\alpha>0$, при $y\to\infty$ имеет место неравенства

1. $$\|\sigma_\alpha(f;y;x)-f(x)\|_{L_p}\le C_1y^{-1}\sum_{m=1}^{[y]}A_{m-1}(f)_{L_p},\qquad \alpha\ge 1; \tag{5.3}$$

2. $$\|\sigma_\alpha(f;y;x)-f(x)\|_{L_p}\le C_2y^{-2}\sum_{m=1}^{[y]}([y]-m+1)^{\alpha-1}A_{m-1}(f)_{L_p},\qquad \alpha<1. \tag{5.4}$$

Здесъ и в дальнейшем C_k - абсолютная константа.

Теорема 5.2. Если функция *f(x)*$\in L_p(-\infty,\infty)$ $1\le p\le\infty$, то при $0<y<1$ имеет место неравенство.

$$\left\|R(f;y;x)-f(x)\right\|_{L_p}\le C_3\omega\left(\sqrt{y}\,;f\right)_{L_p}. \tag{5.5}$$

Следующая теорема показывает оценку снизу для уклонения функции *f(x)* от R(*f;y;x*) в $L_p(-\infty,\infty)$.

Теорема 5.3. Если функция $f(x)\in L_p(-\infty,\infty)$, $1<p<\infty$, то при $0<y<1$ имеет место неравенство

$$C_4\omega\left(\sqrt{y}\,;f\right)_{L_p}\le\left\|R(f;y;x)-f(x)\right\|_{L_p}.$$

Наряду с теоремой 5.3. справедливы следующие утверждения.

Теорема 5.4. Если $f(x)\in L_p(-\infty,\infty)$, $1<p<\infty$ то при $0<y<1$ имеет место неравенство.

$$C_5\sqrt{y}\left\{\sum_{m=1}^{\left[\frac{1}{\sqrt{y}}\right]}n^{\beta-1}A_n^{\beta}(f)_{L_p}\right\}^{\frac{1}{\beta}}\le\left\|R(f;y;x)-f(x)\right\|_{L_p},$$

где $\beta=\max(2,p)$

Теорема 5.5. Если $|f(x)|\le M$ на $(-\infty;\infty)$, то

$$\omega(y;f)_{L_\infty}\le C\left\|R(f;y;x)-f(x)\right\|_{L_\infty}.$$

Отметим, что теорема 5.1 при $\alpha=1$ получена в [91]. Неравенство (5.3) для среднего Вале-Пусена получена Б.М.Николским (см.[1], с.360), теорема 5.3 и теорема 5.4 для интеграла Пуассона доказана М.Ф.Тиманом [14]. Аналогичная оценка для среднего Зигмундом получена в [91].

В работах Б.И.Голубова [126], [139]-[142] рассмотрены вопросы о сходимости и суммируемости интегралов (рядов) типа Абаля – Пуассона.

Результаты данного параграфа содержится в [90], [138]. Отметим также, что в силу обратной теоремы в $L_p(-\infty,\infty)$ (см.[14]) из неравенства (5.5) получаем

$$\left\|R(f;y;x)-f(x)\right\|_{L_p}\le c\sqrt{y}\sum_{m=1}^{\left[\frac{1}{\sqrt{y}}\right]}A_{m-1}(f)_{L_p} \tag{5.6}$$

Из теорем 5.1, 5.2, 5.3 вытекают следующие следствия.

Следствия 5.1. Если функций *f(x)* удовлетворяет условию:

$$A_n(f)_{L_p} = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (5.8)$$

то

1. $\|\sigma_\alpha(f;y;x) - f(x)\| = 0\left(\frac{\ln y}{y}\right), \quad \alpha \ge 1,\ y \to \infty;$
2. $\|\sigma_\alpha(f;y;x) - f(x)\| = 0\left(\frac{\ln y}{y^\alpha}\right), \quad 0 < \alpha < 1,\ y \to \infty$.

Следствие 5.2. Если функция *f(x)*$\in$Lp(-∞,∞) 1≤p≤∞ удовлетворяет условию

$$\omega(\delta; f)_{L_p} = (\delta^\alpha); \qquad 0 < \alpha \le 1, \qquad (5.9)$$

то

$$\|R(f;y;x) - f(x)\|_{L_p} \le C_1\left(y^{\frac{\alpha}{2}}\right), \ y \to 0,\ 1 \le p \le \infty;$$

$$\|R(f;y;x) - f(x)\|_{L_p} \ge C\left(y^{\frac{\alpha}{2}}\right), \quad 1 < p < \infty;\ 0 < y < 1.$$

Таким образом, при $1 < p < \infty$ в условиях (5.9)

$$C_2\left(y^{\frac{\alpha}{2}}\right) \le \|R(f;y;x) - f(x)\| \le C_1\left(y^{\frac{\alpha}{2}}\right) \quad 0 < y < 1, \quad 0 < \alpha \le 1.$$

Теперь сделаем несколько замечаний.

1. При $\alpha = 1$ из теоремы 5.1 получаем один результат работы [91].

2. Если выполнены условия (5.8), то интеграл Фурье

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty f(t)\cos u(x-t)dt \qquad (5.10)$$

суммируем методом (C,α) при $0 < \alpha < \infty$ к функции $f(x)$ в метрике $L_p(-\infty;\infty)$,$1 \le p \le \infty$, т.е. $\|\sigma_\alpha(f;y;x) - f(x)\|_{L_p} \to 0, \quad y \to \infty$.

3. В условии (5.8) интеграл (5.10) суммируем методом Фейера к функции *f(x)* в Lp(-∞,∞) 1≤p≤∞ (случай $\alpha = 1$) .

4. Если $\alpha_1 < \alpha_2$, то (C,α_1) суммируемость интеграла (5.10) влечёт суммируемость (C,α_2)в метрике Lp(-∞,∞) 1≤p≤∞. Этот факт доказан в случае $p = \infty$ в [24] (см.[24], с.89). Для случая $1 \le p \le \infty$ доказывается аналогично.

5. Если *f(x)*$\in$Lp(1,p) 1≤p≤∞ на $(-\infty;\infty)$, т.е.

$$\|f(x+h)-f(x)\|_{L_p}\leq Mh,$$

то интеграл (5.10) суммируем методом (C,α) при 0<α<∞ к функции *f(x)* в Lp(-∞,∞).

В самом деле , в силу неравенства (см.[24])

$$A_\sigma(f)_{L_p}\leq C\omega\left(\frac{1}{\sigma};f\right)_{L_p}$$

из условия (5.11) вытекает выполнимость условия (5.8). Этот обеспечивает (C,α) суммируемость при $\alpha>0$.

6. В условиях (5.8) или (5.11) при α=1имеет место оценка (см. следствие 5.1)

$$\|\sigma_1(f;y;x)-f(x)\|_{L_p}=0\left(\frac{\ln y}{y}\right), \tag{5.12}$$

Причём эта оценка в смысле порядка является точной (см.[112]).

Доказательство теоремы 5.1.

Интегрируя по частям, находим

$$\sigma_\alpha(f;y;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\int_0^y\left(1-\frac{u}{y}\right)^\alpha\cos u(x-t)du\,dt=\frac{\alpha}{\pi y}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\int_0^y\left(1-\frac{u}{y}\right)^{\alpha-1}\frac{\sin u(x-t)}{x-t}du\,dt=$$

$$=\frac{\alpha}{\pi y}\int_0^y\left(1-\frac{u}{y}\right)^{\alpha-1}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-z)\frac{\sin uz}{z}dz\,dy=\frac{\alpha}{\pi y}\int_0^y\left(1-\frac{u}{y}\right)^{\alpha-1}\int_{-\infty}^{\infty}[f(x+z)-f(x-z)]\frac{\sin uz}{z}dz\,du$$

Учитывая, что

$$\int_0^\infty\frac{\sin uz}{z}dz=\frac{\pi}{2} \tag{5.14}$$

в силу (5.13) получим

$$\sigma_\alpha(f;y;x)-f(x)=\frac{\alpha}{\pi y}\int_0^y\left(1-\frac{u}{y}\right)^{\alpha-1}\int_{-\infty}^{\infty}[f(x+z)-f(x-z)-2f(x)]\frac{\sin uz}{z}dz\,du. \tag{5.15}$$

Пуст $Q_\sigma(x)$ целая функция степени $\leq\sigma$, осуществляющая наилучшее приближение функции $f(x)$ в метрике $L_p(-\infty;\infty)$, т.е.

$$\|f(x)-Q_\sigma(x)\|_{L_p}=A_\sigma(f)_{L_p}\ . \tag{5.16}$$

Для любой целой функции $Q_\sigma(x)\in L_p(-\infty;\infty)$ степени $\sigma\leq u$ имеет место равенство

$$Q_\sigma(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}Q_\sigma(x+t)\frac{\sin ut}{t}dt \tag{5.17}$$

Тогда ясно, что

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}[Q_\sigma(x+t)-Q_\sigma(x-t)-2Q_\sigma(x)]\,\frac{\sin ut}{t}dt=0\,. \tag{5.18}$$

На основании (5.15) и (5.18) имеем

$$\sigma_\alpha(f;y;x)-f(x)=\frac{\alpha}{\pi y}\int\limits_0^{y}\left(1-\frac{u}{y}\right)^{\alpha-1}\int\limits_0^{\infty}\phi_x(f-Q_\sigma;t)\frac{\sin ut}{t}dt\,, \tag{5.19}$$

где $\phi_x(\varphi;t)=\varphi(x+t)+\varphi(x-t)-2\varphi(x)$.

Теперь натуральное число m выберем так, чтобы $2^m\le y\le 2^{m+1}$. Тогда, обозначая

$$E_\nu(u)=\{2^{\nu-1}-1\le u\le 2^{\nu-1},\qquad \nu=1,2,3,\dots,m\},\ E_y(u)=\{2^{m-1}\le u\le y\}$$

из равенства (5.19) получаем

$$\|\sigma_\alpha(f;y;x)-f(x)\|_{L_p}\le\frac{\alpha}{\pi y}\left[\sum_{\nu=1}^{m}\left\|\int\limits_{E_\nu(u)}\left(1-\frac{u}{y}\right)^{\alpha-1}\int\limits_0^{\infty}\phi_x\left(f-Q_{2^{\nu-1}-1};t\right)\frac{\sin ut}{t}dt\right\|_{L_p}+\right.$$

$$\left.+\left\|\int\limits_{E_y(u)}\left(1-\frac{u}{y}\right)^{\alpha-1}\int\limits_0^{\infty}\phi_x\left(f-Q_{2^{m}-1};t\right)\frac{\sin ut}{t}dt\,du\right\|_{L_p}\right]=\frac{\alpha}{\pi y}(I_1+I_2).$$

Отметим, что

$$\|\phi_x(f-Q_\sigma;t)\|_{L_p}\le 4A_\sigma(f)_{L_p} \tag{5.21}$$

$$I_1=\sum_{\nu=1}^{m}\left\|\int\limits_{E_\nu(u)}\left(1-\frac{u}{y}\right)^{\alpha-1}\int\limits_0^{\infty}\phi_x\left(f-Q_{2^{\nu-1}-1};t\right)\frac{\sin ut}{t}dt\right\|_{L_p}\le$$

$$\le\sum_{\nu=1}^{m}\left\|\int\limits_{E_\nu(u)}\left(1-\frac{u}{y}\right)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2^{\nu-1}}}\phi_x\left(f-Q_{2^{\nu-1}-1};t\right)\frac{\sin ut}{t}dt\,du\right\|_{L_p}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{m}\left\|\int\limits_{E_\nu(u)}\left(1-\frac{u}{y}\right)^{\alpha-1}\int\limits_{\frac{\pi}{2^{\nu-1}}}^{\infty}\phi_x\left(f-Q_{2^{\nu-1}-1};t\right)\frac{\sin ut}{t}dt\,du\right\|_{L_p}=I_1^{(1)}+I_1^{(2)}. \tag{5.22}$$

Оценим $I_1^{(1)}$. Применяя обобщённое неравенство Минковского, в силу (5.21) находим, что

$$I_1^{(1)}\le 4\pi\sum_{\nu=1}^{m}A_{2^{\nu-1}-1}(f)_{L_p}\int\limits_{E_\nu(u)}\left(1-\frac{u}{y}\right)^{\alpha-1}\frac{u}{2^{\nu-1}}du\,.$$

Отсюда, интегрируя по частям, находим, что

$$I_1^{(1)} \le \frac{4\pi}{4\alpha}\sum_{\nu=1}^{m}\frac{1}{2^{\nu-1}}\ A_{2^{\nu-1}-1}(f)_{L_p}\cdot 2^{2(\nu-1)} = \frac{\pi}{\alpha}\sum_{\nu=1}^{m} 2^{\nu-1}\ A_{2^{\nu-1}-1}(f)_{L_p}\,. \qquad (5.23)$$

Чтобы оценить $I_1^{(2)}$., предварительно оценим следующий интеграл. А именно, интегрируя по частям, находим

$$\left|\int_{E_\nu(u)}\left(1-\frac{u}{y}\right)^{\alpha-1}\int_{\frac{\pi}{2^{\nu-1}}}^{\infty}\phi_x\left(f-Q_{2^{\nu-1}-1};t\right)\frac{\sin ut}{t}\,dt\right| \le \left|\int_{\frac{\pi}{2^{\nu-1}}}^{\infty}\frac{1}{t}\phi_x\left(f-Q_{2^{\nu-1}-1};t\right)\left[-\frac{\cos ut}{t}\left(1-\frac{u}{y}\right)^{\alpha-1}\right]_{E_\nu(u)}dt\right| +$$

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2^{\nu-1}}}^{\infty}\frac{1}{t}\phi_x\left(f-Q_{2^{\nu-1}-1};t\right)\left[\int_{E_\nu(u)}\left(-\frac{\cos ut}{t}\cdot\frac{(1-\alpha)}{y}\cdot\left(1-\frac{u}{y}\right)^{\alpha-1}\right)du\right]dt\right| +$$

$$\left|\left[\left(1-\frac{u}{y}\right)^{\alpha-1}\right]_{E_\nu(u)}\right|\int_{\frac{\pi}{2^{\nu-1}}}^{\infty}\frac{1}{t^2}\left|\phi_x\left(f-Q_{2^{\nu-1}-1};t\right)dt + \frac{|1-\alpha|}{y}\right|\int_{E_\nu(u)}\left(1-\frac{u}{y}\right)^{\alpha-2}du\left|\int_{\frac{\pi}{2^{\nu-1}}}^{\infty}\frac{1}{t^2}\ \right|\phi_x\left(f-Q_{2^{\nu-1}-1};t\right)dt \le$$

$$\le y^{1-\alpha}\left(y-2^{\nu}+1\right)^{\alpha-1}\int_{\frac{\pi}{2^{\nu-1}}}^{\infty}\frac{1}{t^2}\left|\phi_x\left(f-Q_{2^{\nu-1}-1};t\right)\right|dt\,. \qquad (5.24)$$

На основании неравенства (5.24), применяя неравенство Минковского, получим (см. ещё (5.31)).

$$I_1^{(2)} = \sum_{\nu=1}^{m}\left\|\int_{E_\nu(u)}\left(1-\frac{u}{y}\right)^{\alpha-1}\int_{\frac{\pi}{2^{\nu-1}}}\phi_x\left(f-Q_{2^{\nu-1}-1};t\right)\frac{\sin ut}{t}\,dt\,du\right\|_{L_p} \le$$

$$\le 4\sum_{\nu=1}^{\nu} y^{1-\alpha}\left(y-2^{\nu}+1\right)^{\alpha-1} A_{2^{\nu-1}-1}(f)_{L_p}\,\frac{1}{\pi}2^{\nu-1} \le \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\nu} y^{1-\alpha}\left(y-2^{\nu}+1\right)^{\alpha-1}\cdot 2^{\nu-1}\cdot A_{2^{\nu-1}}(f)_{L_p}$$

Из неравенств (5.22), (5.23), (5.25) получим

$$I_1 \le \frac{\pi}{\alpha}\sum_{\nu=1}^{\nu} 2^{\nu-1} A_{2^{\nu-1}-1}(f)_{L_p} + \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\nu} y^{1-\alpha}\left(y-2^{\nu}+1\right)^{\alpha-1}\cdot A_{2^{\nu-1}-1}(f)_{L_p}\,.$$

Теперь рассмотрим I_2

$$I_2 = \left\|\int_{E_\nu(u)}\left(1-\frac{u}{y}\right)^{\alpha-1}\int_0^{\infty}\phi_x\left(f-Q_{2^{\nu-1}-1};t\right)\frac{\sin ut}{t}dtdu\right\|_{L_p} \le \left\|\int_{E_\nu(u)}\left(1-\frac{u}{y}\right)^{\alpha-1}\int_0^{\frac{\pi}{2^{m-1}}}\phi_x\left(f-Q_{2^{\nu-1}-1};t\right)\frac{\sin ut}{t}dtdu\right\|_{L_p} +$$

$$+\left\|\int_{E_\nu(u)}\left(1-\frac{u}{y}\right)^{\alpha-1}\int_{\frac{\pi}{2^{m-1}}}^{\infty}\phi_x\left(f-Q_{2^{\nu-1}-1};t\right)\frac{\sin ut}{t}dtdu\right\|_{L_p} = I_2^{(1)} + I_2^{(2)}\,. \qquad (5.27)$$

Применяя обобщённое неравенство Минковского, в силу (5.21) находим

$$I_2^{(1)} \le 4\pi \frac{1}{2^m} A_{2^m-1}(f)_{L_p} \int\limits_{E_v(u)} \left(1-\frac{u}{y}\right)^{\alpha-1} du \quad ;$$

$$I_2^{(1)} \le \frac{\pi}{2} 2^m A_{2^m-1}(f)_{L_p} \quad . \tag{5.28}$$

В силу неравенства (5.24), применяя обобщённое неравенство Минковского, для $I_2^{(2)}$ получим оценку

$$I_2^{(2)} \le 4y^{1-\alpha}\left(y-2^m+1\right)^{\alpha-1} A_{2^m-1}(f)_{L_p} \frac{1}{\pi}\cdot 2^m = \frac{4}{\pi} y^{1-\alpha}\left(y-2^m+1\right)^{\alpha-1}\cdot 2^m \cdot A_{2^m-1}(f)_{L_p} \tag{5.29}$$

Из неравенств (5.27), (5.28), (5.29) находим

$$I_2 \le \frac{\pi}{\alpha}\cdot 2^m \cdot A_{2^m-1}(f)_{L_p} + \frac{4}{\pi} y^{1-\alpha}\left(y-2^m+1\right)^{\alpha-1} 2^m \cdot A_{2^m-1}(f)_{L_p} . \tag{5.30}$$

На основании (5.20), (5.26), (5.30) получим

$$\left\|\sigma_\alpha(f;y;x)-f(x)\right\|_{L_p} \le \frac{1}{y}\sum_{v=1}^{m} 2^{v-1} A_{2^{v-1}-1}(f)_{L_p} + \frac{c(\alpha)}{y^\alpha}\sum_{v=1}^{m}\left(y-2^{v-1}+1\right)^{\alpha-1} 2^v A_{2^{v-1}-1}(f)_{L_p} +$$

$$+\frac{1}{y} 2^m A_{2^{m-1}-1}(f)_{L_p} + \frac{c(\alpha)}{y^\alpha}\left(y-2^{m-1}+1\right)^{\alpha-1} A_{2^{m-1}-1} 2^m =$$

$$= \frac{1}{y}\sum_{v=1}^{m} 2^{v-1} A_{2^{v-1}-1}(f)_{L_p} + \frac{c(\alpha)}{y^\alpha}\sum_{v=1}^{m}\left(y-2^v+1\right)^{\alpha-1} 2^v A_{2^{v-1}-1}(f)_{L_p} \le$$

$$= \frac{c_1}{y}\sum_{m=1}^{[y]} A_{m-1}(f)_{L_p} + \frac{c_2(\alpha)}{y^\alpha}\sum_{m=1}^{[y]}(y-m+1)^{\alpha-1} A_{m-1}(f)_{L_p} \; .$$

Отсюда при $\alpha \ge 1$ следует неравенство (5.3),а при $0<\alpha<1$ следует неравенство (5.4). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 5.2.

Имеем (см. [24], с. 44)

$$R(f;y;x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-yu^2} e^{iu(x-t)} du\right) f(x) dt = \frac{1}{\sqrt{4\pi y}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\frac{(x-t)^2}{4y}} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi y}}\int\limits_{0}^{\infty}\left[f(x+t)+f(x-t)\right] e^{-\frac{t^2}{4y}} dt \quad . \tag{5.31}$$

В силу равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\frac{t^2}{4y}} dt = \sqrt{4\pi y} \tag{5.32}$$

получим

$$R(f;y;x) - f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi y}}\int\limits_{0}^{\infty}\left[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\right] e^{-\frac{t^2}{4y}} dt \quad . \tag{5.33}$$

Пуст теперь $1 \le p < \infty$. Тогда, применяя обобщенное неравенство Минковского из (5.33), получим

$$\left\| R(f;y;x) - f(x) \right\| \le \frac{1}{\sqrt{4\pi y}} \int_0^\infty \left\| f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) \right\|_{L_p} e^{-\frac{t^2}{4y}} dt \tag{5.34}$$

По определению модуля гладкости и его своства из неравенства (5.34) получим

$$\left\| R(f;y;x) - f(x) \right\| \le \frac{1}{\sqrt{4\pi y}} \int_0^\infty \omega_2(t;f)_{L_p} e^{-\frac{t^2}{4y}} dt \le$$

$$\le (\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \int_0^\infty \omega_2\left(\sqrt{y}\,u;f\right)_{L_p} e^{-\frac{u^2}{2}} du \le (\pi)^{-\frac{1}{2}} \omega_2\left(\sqrt{y};f\right)_{L_p} \int_0^\infty (1+u)^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du .$$

Отсюда в силу (5.32) получим

$$\left\| R(f;y;x) - f(x) \right\| \le C\omega_2\left(\sqrt{y}\,u;f\right)_{L_p},$$

т.е. утверждение теоремы для $1 \le p < \infty$. При $p = \infty$ исполъзуем свойства абсолютных величин и свойства модуля непрерывности, получим неравенство (5.5). Теорема доказана.

Утверждение теоремы 5.4 вытекает из теоремы 5.3 с учетом следующего известного неравенства (см.[14])

$$\frac{C_1}{\sigma} \left\{ \sum_{n=1}^{[\sigma]} n^{\beta-1} A_{n-1}^{\beta}(f)_{L_p} \right\}^{\frac{1}{\beta}} \le \omega\left(\frac{1}{\sigma};f\right)_{L_p}, \quad \beta = \max(2,p), \quad 1 < p < \infty .$$

Доказательство теоремы 5.3.

Пусть функция *f(x)* имеет преобразование Фурье

$$F(x) \in L_p(-\infty;\infty) \quad 1 \le p \le \infty .$$

Тогда обозначая

$$S_{\frac{1}{\sqrt{y}}}(f;x) = \int_{-\frac{1}{\sqrt{y}}}^{\frac{1}{\sqrt{y}}} F(u) e^{iux} du .$$

имеем

$$\omega_2\left(\sqrt{y};f\right)_{L_p} = \left\| f\left(x + \frac{1}{2}\sqrt{y}\right) - f\left(x - \frac{1}{2}\sqrt{y}\right) \right\|_{L_p} \le \left\| f\left(x + \frac{1}{2}\sqrt{y}\right) - S_{\frac{1}{\sqrt{y}}}\left(f;x + \frac{1}{2}\sqrt{y}\right) \right\|_{L_p} +$$

$$+ \left\| f\left(x - \frac{1}{2}\sqrt{y}\right) - S_{\frac{1}{\sqrt{y}}}\left(f;x - \frac{1}{2}\sqrt{y}\right) \right\|_{L_p} + \left\| S_{\frac{1}{\sqrt{y}}}\left(f;x + \frac{1}{2}\sqrt{y}\right) - S_{\frac{1}{\sqrt{y}}}\left(f;x - \frac{1}{2}\sqrt{y}\right) \right\|_{L_p} \le$$

$$\le 2\left\| f(x)-S_{\frac{1}{\sqrt{y}}}(f;x)\right\|_{L_p}+\left\|\int_{-\frac{1}{\sqrt{y}}}^{\frac{1}{\sqrt{y}}} F(u)e^{iux}\left(e^{iu\frac{\sqrt{y}}{2}}-e-^{iu\frac{\sqrt{y}}{2}}\right)\right\|_{L_p}\le 2\left\| f(x)-S_{\frac{1}{\sqrt{y}}}(f;x)\right\|_{L_p}+\left\|\int_{-\frac{1}{\sqrt{y}}}^{\frac{1}{\sqrt{y}}} F(u)\sin\frac{u\sqrt{y}}{2}e^{iux}du\right\|_{L_p}=$$

$$=2\left\| f(x)-S_{\frac{1}{\sqrt{y}}}(f;x)\right\|_{L_p}+\left\|\int_{-\frac{1}{\sqrt{y}}}^{\frac{1}{\sqrt{y}}} F(u)\phi_1(u)\left(1-e^{-u^2y}\right)e^{iux}du\right\|_{L_p}=2I_1+I_2, \qquad (5.35)$$

$$\phi_1(u)=\begin{cases}\dfrac{\sin\frac{u\sqrt{y}}{2}}{1-e^{-u^2y}}, & |u|\le\dfrac{1}{\sqrt{y}};\\ 0, & |u|>\dfrac{1}{\sqrt{y}}\end{cases}$$

В дальнейшем нам необходимы следующие факты.

Лемма 5.1. (Теор. Рисс см.[19]) Если *f(x)*$\in$Lp(-∞,∞), 1<p<∞ то имеет место неравенство

$$\left\|\int_{-a}^{a} F(u)e^{iux}du\right\|_{L_p}\le C\| f(x)\|_{L_p}$$

Лемма 5.2. (Теор. Михлин см.[111]). Пусть *f(x)*$\in$Lp(-∞,∞), 1≤p<∞ и имеет преобразование Фурье F*(x)*$\in$Lp(-∞,∞), 1≤p≤∞. Если $\phi(u)$ удовлетворяет для всех $v=0,1,2,3,...$ условия

$$\phi(u)\le M,\qquad \int_{2^v}^{2^{v+1}}|d\phi(u)|\le M,\qquad \int_{-2^{v+1}}^{-2^v}|d\phi(u)|\le M,\qquad (C)$$

то функция *g(x)*, имеющая своим преобразование Фурье $\phi(x)\cdot F(x)$, также принадлежит Lp(-∞,∞) и имеет место неравенство

$$\| g(x)\|_{L_p}\le M(p)\| f(x)\|_{L_p}.$$

Отметим, что в [111] вместо условия (C) требуется условие $\left|x^k\phi^k\right|\le M,\quad k=0,1,2,...$

Теперь применяя леммы 5.1 и 5.2 находим, что

$$I_2=\left\|\int_{-\frac{1}{\sqrt{y}}}^{\frac{1}{\sqrt{y}}} F(u)\phi_1(u)\left(1-e^{-u^2y}\right)e^{iux}du\right\|_{L_p}\le\left\|\int_{-\frac{1}{\sqrt{y}}}^{\frac{1}{\sqrt{y}}} F(u)\left(1-e^{-u^2y}\right)e^{iux}du\right\|_{L_p}\le$$

$$\le\left\|\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\left(1-e^{-u^2y}\right)e^{iux}du\right\|_{L_p}=\| f(x)-R(f;y;x)\|_{L_p}$$

Оценим I_2. Имеем , что

$$f(x)-S_{\frac{1}{\sqrt{y}}}(f;x)=\int\limits_{|u|>\frac{1}{\sqrt{y}}} F(u)e^{iux}du\,\frac{\left(1-e^{-u^2y}\right)}{1-e^{-u^2y}}du=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(u)\Phi_2(u)\left(1-e^{-u^2y}\right)e^{iux}du-G_{\frac{1}{\sqrt{y}}}(f;x)=B_1-G_{\frac{1}{\sqrt{y}}}(f;x)$$

где

$$G_{\frac{1}{\sqrt{y}}}(f;x)=\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{y}}}^{\frac{1}{\sqrt{y}}}F(u)\Phi_2(u)\left(1-e^{-u^2y}\right)\cdot e^{iux}du\,,$$

$$\Phi_2(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-e^{-u^2y}}, & |u|\le\dfrac{1}{y}\\ 0, & |u|\rangle\dfrac{1}{\sqrt{y}}\end{cases}$$

Применив леммы 5.1 и 5.2, получим

$$\left\|G_{\frac{1}{\sqrt{y}}}(f;x)\right\|\le C_p\left\|\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{y}}}^{\frac{1}{\sqrt{y}}}F(u)\left(1-e^{-u^2y}\right)e^{iux}du\right\|_{Lp}\le C(P)\left\|\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(u)\left(1-e^{-u^2y}\right)e^{iux}du\right\|_{Lp}=C(P)\left\|f(x)-R(f;y;x)\right\|_{Lp}.$$

Применив лемму 5.2 получим

$$\|B_1\|\le C(P)\left\|\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(u)\left(1-e^{-u^2y}\right)e^{iux}du\right\|_{Lp}=C(P)\left\|f(x)-R(f;x;y)\right\|_{Lp}.$$

Теперь

$$J_1=\left\|f(x)-S_{\frac{1}{y}}(f;x)\right\|_{Lp}\le\|B_1\|_{Lp}+\left\|G_{\frac{1}{y}}\right\|_{Lp}\le C(P)\left\|f(x)-R(f;y;x)\right\|_{Lp}.$$

Учитывая оценки для J_1 и J_2 получим утверждение теоремы. Теорема доказана в предположениях, что у функции $f(x)$ существует преобразование Фурье. В противном случае мы рассмотрим вместо функции $f(x)$ функцию

$$f_\lambda(x)=f(x)\frac{\sin\lambda x}{\lambda x}\qquad(\lambda>0).$$

В этом случае имеем (учитывая свойства модуль гладкости)

$$\omega_2\left(\sqrt{y};f\right)_{Lp}\le C\left\|f(x)-f_\lambda(x)\right\|_{Lp}+\omega_2\left(\sqrt{y};f_\lambda\right)\le\left\|f_\lambda(x)-R(f_\lambda;y;x)\right\|_{Lp}+\left\|f(x)-f_\lambda(x)\right\|_{Lp}.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 5.5.

Так как функция

$$R(f;y;x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi y}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\frac{(x-t)^2}{4y}} dt$$

является решением уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}$$

и $|R(f;y;x)| \le M$ для всех y>0 при $f(x) \le M$, то применяя теорему 6 из работы [14] соответствующем случае получим утверждение теоремы.

§ 2. Отклонения решений некоторых дифференциальных уравнений от их граничных значений

Методы теории приближений оказываются плодотворными для исследования решений дифференциальных и интегральных уравнений, а также при нахождении их решений (см. [100] и там библиография).

В работах С.М.Никольского [101], [102], В.К. Дзядыка [100], [103], М.Ф.Тимана[96], [104]. В. И. Горбайчука [105] и других указаны методы нахождения решений и исследованы их свойства. Оценки для уклонения решений и исследованы их свойства. Оценки для уклонения решений некоторых дифференциальных уравнений в частных производных от их граничных значений получены в работах М.Ф.Тимана [14], [96], [104], Каниева [106], В.И.Горбайчука [105] и других.

В этом параграфе рассматриваются отклонения решений уравнений Лапласа, уравнения теплопроводности (диффузий) и уравнения Шредингера от их граничных значений. Результаты этого параграфа содержится в [107], [108].

Способ доказательства теоремы предыдущего параграфа позволяет получить оценки для уклонения решений вышеназванных уравнений в зависимости от убывания к нулю либо от модуля гладкости функций, либо от наилучших приближений в пространствах

$L_p(R_n),\quad 1\le p\le\infty\quad R_n=\{-\infty<x_i<\infty,\qquad i=1,2,\cdots,n\}$.

Рассмотрим следующие задачи:

1) задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta U+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad ,$$

$$\Delta U=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \tag{5.36}$$

$$U(x_1,\ldots,x_n;y)_{y=0}=f_1(x_1,\ldots,x_n) \tag{5.37}$$

в полупространстве $R_{n+1}=\{-\infty<x_i<\infty,\quad y>0\quad i=1,2,\cdots,n\}$.

2) Задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\Delta V\ , \tag{5.38}$$

$$V(x_1,\ldots,x_n;t)\,|_{t=0}=f_2(x_1,\ldots,x_n)\quad , \tag{5.39}$$

в полупространстве $R_{n+1}=\{-\infty<x_i<\infty,\qquad i=1,\cdots,n\}$, где $f_1(x_1,\ldots,x_n)$ и $f_2(x_1,\ldots,x_n)$-заданные функции. Обозначим через $R_1(u;f;y)$ и $R_2(V;f_2;t)$ отклонения решения уравнений (5.36) и (5.38) соответственно от их граничных значений (5.37) и (5.39) в пространстве $L_p(R_n)$, т.е.

$$R_1(u;f;y)=\|u(x_1,\ldots,x_n)-f_1(x_1,\ldots,x_n)\|) \tag{5.40}$$

$$R_2(V;f;t)=\|V(x_1,\ldots,x_n;t)-f_2(x_1\ldots,x_n)\|_{Lp}\,. \tag{5.41}$$

Известно, что (см.[109], с. 402), если $f_1(x_1,\ldots,x_n)$ и $f_2(x_1,\ldots,x_n)$ непрерывные и ограниченные на $(-\infty,\infty)$ функции, то при $P=\infty$

$$R_1(u;f;y;)\to 0,\qquad y\to 0$$

$$R_2(V;f_2;t)\to 0,\qquad t\to 0$$

Естественно возникает вопрос, каковы оценки для величин (5.40) и (5.41) в зависимости от свойств функции (5.37) и (5.39).

Справедливы следующие утверждение.

Теорема 5.6. Если функция $f_1(x_1,\ldots,x_n)\in L_p(R_n),\ 1\le p\le\infty$, то при 0<y<1 имеет место неравенство:

$$R_1(u; f_1 y) \le C(n)\left\{\omega(y; y,\dots,y; f)_{Lp} + y^{\frac{1}{n}} \sum_{K=1}^{\left[\frac{1}{y}\right]} x^{\frac{1-n}{n}} \omega\left(\frac{1}{K},\dots,\frac{1}{K}; f\right)_{Lp} + y^{\frac{1}{n}} \|f\|_{Lp}\right\}, \qquad (5.42)$$

где

$$\omega(\delta_1,\dots,\delta_n; f)_{Lp} = Sup\| f(x_1+h_1,\dots,x_n+h_1) - f(x_1,\dots,x_n)\|_{Lp}$$

полный модуль непрерывности функции $f(x_1,\dots,x_n)$ в пространстве $L_p(R_n)$

Теорема 5.7. Если функция $f_1(x_1,\dots,x_n) \in L_p(R_n)$; $1 \le p \le \infty$, то при $0 \langle y \langle 1$ имеет место неравенство

$$R_1(u; f; y) \le C(n)\left\{ y \sum_{x=0}^{\left[\frac{1}{y}\right]} \sum_{i=1}^{n} A_\nu^1(f_1)_{Lp} + y^{\frac{1}{n}} A_{0,\infty}^{(i)}(f_1)_{Lp} \right\}, \qquad (5.43)$$

где $A_\delta^{(i)}(f)_{Lp}$- частные наилучшие приближения функции $f(x_1,\dots,x_n)$ в $L_p(R_n)$ целыми функциями $Q(x_1,\dots x_n)$ степени по переменной x_i.

Теорема 5.8. Если функция $f(x_1,x_2,\dots,x_n) \in L_p(R_n)$ $1 \le P \le \infty$, то при 0<t<1имеет место неравенство.

$$R_2(V; f_2; t) \le C(n)\omega\left(\sqrt{t};\dots,\sqrt{t}; f_2\right)_{Lp}, \qquad (5.44)$$

где константа $C(n)$ зависит только от размерности пространства R_n.

Теорема 5.9. Если функция $f(x_1,\dots,x_n) \in L_p(R_n)$; 1≤p≤∞, то имеет место неравенство

$$R_2(V; f_2; t) \le C(n) t^{\frac{1}{2}} \sum_{V=0}^{\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right]} \sum_{i=1}^{n} A_\nu^{(i)}(f_2)_{L_p} \qquad (5.45)$$

Отметим, что теорема 5.7 при n=1 доказана в [14], [104]. Оценка вида (5.43) для гармонических функций в единичном круге получена в [96], [104] и оценка вида (5.42) для биогармонических функций в единичном круге получена в [106]. Наряду с уравнением (5.38) рассмотрим уравнение Шредингера

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Delta W + hi\frac{\partial W}{\partial t} = 0, \qquad (5.46)$$

$$\hbar = const, \quad m=const,$$

с начальным условием

$$W(x_1;...;x_n;t)\big|_{t=0} = f_3(x_1,...,x_n). \qquad (5.47)$$

Известно, что (см.[110],с.179)

$$W(x_1;...;x_n;t) \to f_3(x_1,...,x_n); \qquad t \to 0.$$

Теорема 5.10. Если функция $f_3(x_1,\ldots,x_n) \in L_p(R_n)$, $1 \le p \le \infty$, то при $0<t<1$ имеет место неравенство

$$R_3(W; f_3; t) = \left\| W(x_1;...;x_n;t) - f_3(x_1,...,x_n) \right\|_{L_p} \le C(h,m,n)\,\omega\left(\sqrt{t},...,\sqrt{t}; f\right)_{L_p}. \qquad (5.48)$$

Отметим, что некоторые вопросы касающихся свойствами функций в пространствах L_p, $1 \le p \le \infty$, связанные уравнением типа (5.36), (5.38), (5.46) рассмотрены работах Тухтасинова М. [179] ([179], с. 22-25, 36-41, 126-130).

Из теорем 5.6, 5.8, 5.10 вытекает следующее:

Следствие 5.3. Если функция $f_K(x_1,\ldots,x_n)$; $K=1,2,3,\ldots$ удовлетворяет условию

$$\omega(\delta_1,...,\delta_n; f_k)_{L_p} = O(\delta_1 \cdot \delta_2 \cdot ... \cdot \delta_n); \quad 1 \le p \le \infty,$$

то

$$R_1(u; f; y) = O\left(y^{\frac{1}{n}} \ln \frac{1}{y} \right); \quad 0<y<1, \ n=1,2,\ldots;$$

$$R_2(V, f_2, t) = O\left(t^{\frac{n}{2}} \right), \quad 0<t<1, \quad n=1,2,\ldots;$$

$$R_3(W; f_3; t) = O\left(t^{\frac{n}{2}} \right); \quad 0<t<1, \quad n=1,2,\ldots;$$

Следствие 5.4. Если функция $f(x_1,\ldots,x_n) \in L_p(R_n)$ такова, что

$$\omega(\delta_1,...,\delta_n; f_k)_{L_p} = O(\delta_1 + \delta_2 + ... + \delta_n)$$

то

$$R_1(u; f; y) = O\left(y^{\frac{1}{n}} \right); \quad R_2(V, f_2, t) = O\left(t^{\frac{1}{2}} \right), \quad R_3(W; f_3; t) = O\left(t^{\frac{1}{2}} \right);$$

Следствие 5.5. Если функция $f_K(x_1,\ldots,x_n)$, $K=1,2$ удовлетворяет условия

$$A_\nu^{(i)}(f_k)_{L_p} \leftrightarrow O\left(\frac{1}{\nu+1}\right), \ k=1,2. \quad i=1,2,\ldots,n \quad n=1,2,\ldots \ ,$$

то

$$R_1(u;f_1;y;)=O\left(y^{\frac{1}{n}}\ln\frac{1}{y}\right),\quad 0<y<1;\ R_2(V,f_2,t)=O\left(t^{\frac{1}{2}}\ln\frac{1}{\sqrt{t}}\right),\quad 0<t<1$$
.

Отметим, что некоторые вопросы связанные исследованием свойств функций, являющихся решением тех или иных дифференциальных уравнений, в определеных функциональных пространствах (например, в пространствах C(0,T), L_2(0,T)) рассмотрен М. Тухтасиновым в [179], (см.[179], с.90-130).

Доказательство теоремы 5.6.

Доказательство теоремы проведём лишь для $n=2$. При любом $n\geq 3$ способ доказательства ничем не отличается от случая $n=2$. Только в этом случае вычисления будут громоздкими. В этом случае решением уравнения (5.36) с условием (5.37) является (см.[109], с. 274) функция

$$u(x_1,x_2,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t_1,t_2)\frac{y}{\rho^3}dt_1dt_2,\qquad \rho^2=(t_1-x_1)^2+(t_2-x_2)^2+y^2\quad. \tag{5.49}$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{\rho^3}dt_1dt_2=1, \tag{5.50}$$

То обозначая $\tau^2=t_1^2+t_2^2+y^2$ в силу (5.49) и (5.50), получим

$$u(x_1,x_2,y)-f_1(x_1,x_2)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[f_1(x_1+t_1,x_2+t_2)-$$
$$f_1(x_1,x_2)]\frac{y}{\tau^3}dt_1dt_2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[f_1(x_1+t_1,x_2+t_2)-$$
$$f_1(x_1,x_2+t_2)+f(x_1,x_2+t_2)-f_1(x_1,x_2)]\frac{y}{\tau^3}dt_1dt_2. \tag{5.51}$$

Пусть теперь $1\leq\rho\leq\infty$. Тогда применяя обобщенное неравенство Минковского в равенстве (5.51), получим

$$R_1(u,f_1,y)=\|u(x_1,x_2,y)-f_1(x_1,x_2)\|_{L_P}\leq$$
$$\leq\frac{y}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\omega^{(1)}(|t_1|;f_1)_{L_p}+\omega^{(2)}(|t_2|;f_1)_{L_p}\right]\frac{dt_1dt_2}{\tau^3}=\frac{y}{2\pi}(M_1+M_2), \tag{5.52}$$

где

$$M_k=\frac{y}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^{(K)}(|t_k|f)_{L_p}\frac{dt_1dt_2}{\tau^3},\quad \text{k=1,2,...}\ , \tag{5.53}$$

$$\omega^{(1)}(\delta; f)_{L_p} = \sup_{|t|\le\delta} \| f(x_1+t,x_2) - f(x_1,x_2)\|_{L_p} ,$$
$$\omega^{(2)}(\delta; f)_{L_p} = \sup_{|t|\le\delta} \| f(x_1+t,x_2) - f(x_1,x_2)\|_{L_p}$$
частные модули непрерывности функции $f(x_1, x_2)$ в метрике $L_P\ (R_2)$.

Рассмотрим М1 и разобьём на три слагаемых

$$M_1 = 4\left\{\int_0^\infty \left(\int_0^y \frac{\omega^{(1)}(t_1 f_1)}{\tau^3} dt_1\right) dt_2\right.$$
$$+ \int_0^\infty \left(\int_y^1 \frac{1}{\tau^3}\omega^{(1)}(t_1 f_1)_{L_P} dt_1\right) dt_2 +$$
$$+ \int_0^\infty \left(\int_1^\infty \omega^{(1)}(t_1 f_1)\, dt_1\right) dt_2 = 4(B_1 + B_2 + B_4). \qquad (5.54)$$

Рассмотрим каждое слагаемое в (5.54). Представим следующим образом:

$$B_1 = \int_0^y \left(\int_0^y dt_1\right) dt_2 + \int_y^1 \left(\int_0^y dt_1\right) dt_2 + \int_1^\infty \left(\int_0^y dt_1\right) dt_2 = J_1^{(1)} + J_2^{(1)} + J_3^{(1)} \qquad (5.55)$$

Так как $\omega^{(1)}(t\, f)_{L_P}$ не убывает относительно t , то

$$J_1^{(1)} \le \omega^{(1)}(y,\, f)_{L_P} \int_0^y \int_0^y \frac{dt_1 dt_2}{\tau^3} \le \omega^{(1)}(y,\, f)\ \frac{1}{y^3} y^2 \le \frac{\omega^{(1)}(y,\, f)_{L_P}}{y},$$

$$J_2^{(1)} \le \omega^{(1)}(y,\, f)_{L_P} \int_y \frac{dt_1}{\tau^{3/2}} \cdot \frac{dt_1}{\tau^{3/2}} \le \omega^{(1)}(y,\, f)_{L_P} \int_0^y \frac{dt_1}{y^{3/2}} \int_y^1 \frac{dt_2}{t_2^{\frac{3}{2}}} \le$$

$$\le \omega^{(1)}(y,\, f)_{L_P} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \int_y^\infty t_2^{\frac{-3}{2}}\, dt_2 = \frac{2\omega^{(1)}(y,\, f)_{L_P}}{y}.$$

Аналогично при 0<y<1

$$J_3^{(1)} \le \omega^{(1)}(y,\, f)_{L_P} \int_1^\infty \left(\int_0^y \frac{dt_2}{y^{3/2}}\right) \frac{dt_1}{t_2^{\frac{3}{2}}} \le$$

$$\leq \omega^{(1)}(y,\, f)_{L_P} \int\limits_{y}^{\infty} t_1^{\frac{-3}{2}}\, dt_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{2\omega^{(1)}(y,\, f)_{L_P}}{y}\ .$$

В силу полученных оценок для $J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, J_3^{(1)}$ из неравенства (5.55) получим:

$$B_1 \leq \frac{2}{y}\omega^{(1)}(y,\, f)_{L_P}\,. \tag{5.56}$$

Теперь рассмотрим B_2.

$$B_2 = \int_0^{\infty}\left(\int^1 dt_1\right) dt_2 = \int_0^{y}\left(\int_y^1 dt_1\right) dt_2 + \int_1^{8}\left(\int_y^1 dt_1\right) dt_2 = J_1^{(1)} + J_2^{(1)} + J_3^{(1)} \tag{5.57}$$

Так как $\omega^{(1)}(y,\, f)_{L_P}$ не убывает относительно t , то

$$J_2^{(2)} = \int\limits_{y}^{1}\left(\int\limits_{y}^{1} \frac{\omega^{(1)}(t,\, f_1)_{L_P}}{r^{3/2}}\, dt_1\right)\frac{dt_2}{r^{3/2}} \leq \int\limits_{y}^{1} \frac{dt_2}{t_2^{3/2}} \int\limits_{y}^{1} \frac{\omega(t_1\,, f\,)_{L_P}}{t_1^{3/2}}\, dt_1 \leq$$

$$\leq \int\limits_{y}^{\infty} \frac{dt_2}{t_2^{3/2}} \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{y}\right]} \int\limits_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}} \frac{\omega^{(1)}(t_1\,, f\,)_{L_P}}{t_1^{3/2}}\, dt_1$$

$$\leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{y}} \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{y}\right]} (\nu+1)^{\frac{3}{2}}\, \omega^{(1)}\left(\frac{1}{\nu}; f\right)_{Lp} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{x+1}\right)$$

$$\leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{y}} \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{y}\right]} \frac{1}{\sqrt{\nu}}\, \omega^{(1)}\left(\frac{1}{\nu}; f\right)_{Lp},$$

а также

$$J_1^{(2)} = \int\limits_0^y \left(\int\limits_y^1 \frac{\omega^{(1)}(t,\, f)_{L_P}}{r^{3/2}} dt_1 \right) \frac{dt_2}{r^{3/2}}$$

$$\leq \int\limits_0^y \frac{dt_2}{y^{3/2}} \int\limits_y^1 t_1^{-\frac{3}{2}} \omega(t_1\,, f\,)_{L_P}\, dt_1 \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}} \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{y}\right]} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \omega^{(1)} \left(\frac{1}{\nu}; f_1\right)_{L_p}.$$

Аналогично для $J_3^{(2)}$ получим

$$J_3^{(2)} = \int\limits_1^\infty \left(\int\limits_y^1 \frac{\omega^{(1)}(f_1\,, t_1)}{r^{3/2}} dt_1 \right) \frac{dt_2}{r^{3/2}} \leq \int\limits_y^\infty \frac{dt_2}{t_2^{3/2}} \int\limits_y^1 \frac{\omega(t_1\,, f_1\,)_{L_p}}{t_1^{3/2}} dt_1$$

$$\leq \frac{2}{\sqrt{y}} \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{y}\right]} \frac{1}{\nu} \omega^{(1)} \left(\frac{1}{\nu}; f_1\right)_{L_p},$$

$$0<y<1.$$

Полученные оценки для $J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, J_3^{(2)}$ влекут, что (см.(5.57))

$$B_2 \leq \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{y}} \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{y}\right]} \frac{1}{\nu} \omega^{(1)} \left(\frac{1}{\nu}; f_1\right)_{L_p} \quad . \tag{5.58}$$

Теперь рассмотрим B_3. При $0<y<1$ имеем

$$B_3 = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_1^\infty dt_1 \right) dt_2 \leq \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_y^\infty dt_1 \right) dt_2 =$$

$$= \int_0^y \left(\int_y^\infty dt_1 \right) dt_2 + \int_y^1 \left(\int_1^\infty dt_1 \right) dt_2 + \int_1^\infty \left(\int_0^\infty dt_1 \right) dt_2 = J_1^{(3)} + J_2^{(3)} + J_3^{(3)}. \tag{5.59}$$

Отметим, что

$$\omega^{(1)}(t_1; f_1)_{L_p} \leq 2\|f(x)\|_{L_p}. \tag{5.60}$$

В силу (5.60) получим (с учётом, что 0<y<1)

$$J_1^{(3)} = \int_0^y \int_y^\infty \frac{\omega^{(1)}(t_1,\, f)_{L_P}}{r^{3/2}} dt_1 \frac{dt_2}{r^{3/2}} \le 2\|\mathrm{f(x)}\|_{\mathrm{L_p}} \int_0^y \frac{dt_2}{y^{\frac{3}{2}}} \int_1^\infty t_1^{-\frac{3}{2}} dt_1$$

$$\le \frac{2}{\sqrt{y}} \|f(x)\|_{L_p}.$$

$$J_2^{(3)} \le 2\|\mathrm{f(x)}\|_{\mathrm{L_p}} \int_y^1 \frac{dt_2}{(t_2^2 + y^2)^{3/4}} \int_1^\infty t_1^{-\frac{3}{2}} dt_1$$

$$\le 2\|\mathrm{f(x)}\|_{\mathrm{L_p}} \int_y^\infty t_1^{-\frac{3}{2}} dt_1 = \frac{4}{\sqrt{y}} \|f(x)\|_{L_p},$$

$$J_3^{(3)} \le 2\|\mathrm{f(x)}\|_{\mathrm{L_p}} \int_1^\infty \frac{dt_1}{t_1^{3/2}} \int_y^\infty \frac{dt_2}{t_2^{3/2}} = \frac{4}{\sqrt{y}} \|f(x)\|_{L_p}.$$

Следовательно, (см.(5.59)).

$$B_3 \le \frac{10}{\sqrt{y}} \|f(x)\|_{L_p}. \qquad (5.61)$$

Теперь из неравенств (5.54), (5.56), (5.58), (5.61) получим

$$M_1 \le 4\left\{\frac{2}{y}\omega^{(1)}(y; f_1)_{L_p} + \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{y}} \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{y}\right]} \omega^{(1)}\left(\frac{1}{\nu}; f\right)_{L_p} + \frac{2}{\sqrt{y}} \|f(x)\|_{L_p}\right\}.$$

Аналогично

$$M_2 \le 4\left\{\frac{2}{y}\omega^{(2)}(y; f_1)_{L_p} + \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{y}} \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{y}\right]} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \omega^{(1)}\left(\frac{1}{\nu}; f\right)_{L_p} + \frac{2}{\sqrt{y}} \|f\|_{L_p}\right\}.$$

Теперь на основании полученных оценок для M_1 и M_2 находим, что

$$R_1(u; f_1; y) \le C\left\{\omega^{(1)}(y; f_1)_{L_p} + \omega^{(2)}(y; f_1)_{L_p} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{y} \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{y}\right]} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left[\omega^{(1)}\left(\frac{1}{\nu}; f\right)_{L_p} + \omega^{(2)}\left(\frac{1}{\nu}; f\right)_{L_p}\right] + \sqrt{y}\|f\|_{L_p}\right\}. \qquad (5.62)$$

Так как (см.[12], с. 124-126)

$$\omega^{(1)}(\delta;f)_{L_p}+\omega^{(2)}(\delta;f)_{L_p}\leftrightarrow\omega(\delta;\delta;f)_{L_p}\ ,\qquad (5.62а)$$

то из неравенств (5.62) получим утверждение теоремы для n=2 1≤p<∞. При p=∞ для n=2 теорема доказывается с помощью свойства абсолютных величин. Для любого n≥3, 1≤p≤∞ теорема доказывается аналогично. Теорема доказана полностью.

Доказательство теоремы 5.7.

Отметим следующее известное неравенство (см. [12], с.375)

$$\omega^{(i)}\left(\frac{1}{\nu};f\right)\le\frac{c}{\nu}\sum_{k=0}^{\nu}A_{k,\infty}^{(i)}(f)_{L_p},\ \ i=1,2,\dots,n,\quad 1\le p\le\infty. \qquad (5.63)$$

Так как (см. [12], с.124-126)

$$\omega(\delta,\dots,\delta,f_1)_{L_p}\le\sum_{k=1}^{n}\omega^{(k)}(\delta,f_1)_{L_p}\ ,\qquad (5.64)$$

то в силу неравенства (5.63) получим

$$\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{y}\right]}\nu^{\frac{1-n}{n}}\omega\left(\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu},\dots,f\right)_{L_p}\le\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{y}\right]}\nu^{\frac{1-n}{n}}\sum_{k=1}^{n}\omega^{(k)}\left(\frac{1}{\nu},f_1\right)_{L_p}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{y}\right]}\nu^{\frac{1-n}{n}}\omega^{(k)}\left(\frac{1}{\nu},f_1\right)_{L_p}\le$$

$$\le C\sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{y}\right]}\nu^{\frac{1-n}{n}}\frac{1}{\nu}\sum_{i=0}^{\nu}A_{i,\infty}^{(k)}(f_1)_{L_p}$$

$$=C\sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{y}\right]}\nu^{\frac{1}{n}-2}\frac{1}{\nu}\sum_{i=0}^{\nu}A_{i,\infty}^{(k)}(f_1)_{L_p}\le$$

$$\leq C\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{\left[\frac{1}{y}\right]} A_{i,\infty}^{(k)}(f_1)_{L_p}\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{y}\right]}\nu^{\frac{1}{n}-2}\leq$$

$$\leq C(n)\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{\left[\frac{1}{y}\right]} A_{i,\infty}^{(k)}(f_1)_{L_p}\right)\cdot y^{1-\frac{1}{n}} \quad . \tag{5.65}$$

Отметим, что

$$\|f\|_{L_p}\leq CA_{0,\infty}^{(k)}(f)_{L_p}\,,\qquad k=1,2,\ldots,n\,,\qquad 1\leq p\leq\infty\,. \tag{5.66}$$

Из неравенства (5.64), (5.63) получим

$$\omega(y,\ldots,y;f_1)_{Lp}\leq C\cdot y\sum_{K=1}^{n}\sum_{i=0}^{\left[\frac{1}{y}\right]} A_i^{(K)},\infty(f_1)_{Lp} \quad . \tag{5.67}$$

Теперь из неравенств (5.42), (5.67) , (5.65) и (5.66) получим:

$$R_1(u;f_1y)\leq C(n)\left\{y\sum_{K=1}^{n}\sum_{i=0}^{\left[\frac{1}{y}\right]} A_i^{(K)},\infty(f_1)_{Lp}+y^{\frac{1}{n}}A_{0,\infty}^{(K)}(f_1)_{Lp}\right\}.$$

Доказательство теоремы завершено.

Доказательство теоремы 5.3.

Решением уравнения (5.38) с условием (5.39) является функция (см. например, [109], с. 400)

$$V=V(x_1,x_2,\ldots,x_n;t)=\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\right)^n\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} f_2(s_1,\ldots,s_n)\exp\left(-\frac{r_n^2}{4t}\right)ds_1\ldots ds_n\,, \tag{5.68}$$

$$r_n^2=\sum_{k=1}^{n}(s_k-x_k)^2\,.$$

Доказательство теоремы проведём для случая $n=2$ Для любого $n\geq 3$ способ доказательства ничем не отличается от случая $n=2$. Пользуясь равенством

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\exp(-y^2)dy=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},\\&\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-y^2)dy=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\end{aligned}\right\} \tag{5.69}$$

и равенством (5.68) при $n=2$, получим, что:

$$V=V(x_1,x_2,\ldots,x_n;t)=\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\right)^n\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(S_1,\ldots,S_n)\exp\left(-\frac{r_n^2}{4t}\right)ds,\ldots ds_n,\quad r_n^2=\sum_{K=1}^{n}(S_K-X_K)^2 .$$

Отсюда применяя обобщённое неравенство Миньковского получим

$$R_2(V,f_2,t)=\|V(x_1,x_2,t)-f(x_1,x_2)\|_{Lp}\le\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\omega\left(2\sqrt{t}\,z_1,2\sqrt{t}\,z_2,f\right)_{Lp}\exp\left(-z_1^2-z_2^2\right)^2dz_1\,dz_2 .$$

На основании (5.64), (1.69) из (5.70) находим:

$$R_2(V,f_2,t)\le\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\int\limits_0^{\infty}\omega^{(1)}\left(2\sqrt{t}\,z_1,f\right)_{Lp}\exp\left(-z_1^2\right)dt_1+\int\limits_0^{\infty}\omega^{(2)}\left(2\sqrt{t},z_2,f_2\right)_{Lp}\exp\left(-z_2^2\right)dz_2\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(J_1+J_2). \quad (5.71)$$

Рассмотрим J_1 и разобьём его на два слагаемых следующим образом:

$$J_1=\int\limits_0^{\infty}\omega^{(1)}\left(2\sqrt{t}\,z_1,f\right)_{Lp}\exp\left(-t_1^2\right)dz_1=\int\limits_0^{\frac{1}{2}\sqrt{t}}+\int\limits_{\frac{1}{2}\sqrt{t}}^{\infty}=J_1^{(1)}+J_1^{(2)} . \quad (5.72)$$

Учитывая, что $\omega\ (t,f)$ не убывает относительно t, получим (см. ещё (5.69)

$$J_1^{(1)}\le\omega^{(1)}(t,f)_{Lp}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\sqrt{t}}e^{-z_1^2}dz_1\le\frac{\sqrt{\pi}}{2}\omega^{(1)}(t,f)_{Lp} .$$

В силу свойства модуля непрерывности

$$\omega(\lambda t,f)_{Lp}\le(1+\lambda)\omega(t,f)_{Lp},\quad \lambda>0$$

получим: (см. ещё (5.59))

$$J_1^{(2)}=\int\limits_{\frac{1}{2}\sqrt{t}}^{\infty}\omega\left(2\sqrt{t},z_1,f_2\right)_{Lp}e^{-z_1^2}dz_1\le\omega^{(1)}\left(\sqrt{t},f_1\right)_{Lp}\int\limits_{\frac{1}{2}\sqrt{t}}^{\infty}(1+2z_1)e^{-z_1^2}dz_1\le$$

$$\le\omega^{(1)}\left(\sqrt{t};f\right)_{Lp}\quad\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}+e^{-\frac{1}{y}}\right)\le C\omega^{(1)}\left(\sqrt{t},f_2\right)_{Lp}$$

На основании полученных оценок для $J_1^{(1)},\ J_1^{(2)}$ с учётом при 0<y<1 из (5.72) находим, что

$$J_1\le C\cdot\omega^{(1)}\left(\sqrt{t},f\right)_{Lp} . \quad (5.73)$$

Аналогично

$$J_2\le C\cdot\omega^{(2)}\left(\sqrt{t},f\right)_{Lp} . \quad (5.74)$$

Теперь из неравенств (5.71), (5.73), (5.74) вытекает что

$$R_2(V,f,t)\le C\left[\omega^{(1)}\left(\sqrt{t},f\right)_{Lp}+\omega^{(2)}\left(\sqrt{t},f\right)_{Lp}\right]. \quad (5.75)$$

Отсюда в силу соотношения (5.62 а) получим утверждение теоремы при $1 \le p < \infty$. При $p = \infty$ теорема доказывается с помощью свойства абсолютных величин. Теорема доказана.

Утверждение теоремы 5.9 для $n = 2$ вытекает из неравенств (5.75) и (5.63). Для любого $n \ge 3$ устанавливается аналогично.

Доказательство теоремы 5.10.

Решение уравнения (5.47) является функция (см.[110], с. 179)

$$W(x_1,...,x_n;t) = \left(-\frac{im}{2\pi ht}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f_3(s_1...s_n) \exp\left(\frac{im}{2ht} r_n^2\right) ds_1...ds_n, \quad r_n^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - s_n)^2. \tag{5.76}$$

Сравнивая функцию (5.76) с функцией (5.68), видим, что они отличаются друг от друга только на константу. Подинтегральная функция $\exp\left(\frac{im}{2ht} r_n^2\right)$ в (5.76) представляется в виде $\exp\left(-\frac{r_n^2}{4t}\right)$, который содержится в (5.68), т.е.

$$\exp\left(\frac{im}{2ht} r_n^2\right) = \exp\left(-\frac{m r_n^2}{2iht}\right).$$

Теперь ясно, что теорема доказывается точно таким же способом, как и теорема 5.8, т.е. все вкладки повторяются дословно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения// -М.: Наука, 1969. -480 с.

2. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представлекия функций и теоремы вложения// -М.: Наука, 1975.-478 с.

3. Hardy J.H., Littlewood J.E. A convergence criterion for Fouriez series// Math. zeit,I928, 28, № 4,612-634.

4. Тиман М.Ф. Наилучшее приближение и модуль гладкости функций, заданных на всей вещественной оси //Изв.ВУЗ, Мат.,1961.№6.-С.108-120.

5. Тиман м.Ф. О некоторых теоремах вложения классов функций// ДАН СССР, 1970.-Т.198.-№ 6.-С.1251-1254.

6. Ульянов П.Л.Вложения некоторых классов функций //Изв. АН СССР, сер. матем.,I968.-Т.32.-№3.-С.649-686.

7. Ульянов П.Л. Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями.непрерывности) в разных метриках // Матем. сб.,1970.-Т.181 (123).-№1.-С.104-131.

8. Тиман М.Ф. О вложении $L_p^{(k)}$ классов функций //Изв. ВУЗ.-матем., 1974. -№10 .-С. 61-74.

9. Стороженко З.А. Приближение функций и теоремы вложения в пространствах H_p и L_p //Автореф.дисс.на соискание уч. степени докт.физмат наук.-Тбилиси,1979.-26 с.

10. Коляда В.И. Теоремы вложения и метрические свойства функций // Автореф. дисс. на соискание уч.степени докт. физмат наук.-М.,1986.-29 с

11. Гаймназаров Г. Теоремы вложения для L_p классов функций //Изв. ВУЗ.-матем.,1972.-№4.-С.44-54.

12. Тиман А.Ф. Теория приближения, функций действительного переменного. -М.: Физматгиз, I960.-624- с.

13. Гаймназаров Г. Наилучшие приближения и некоторые свойства функций//Автореф. дисс. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук.-Душанбе,1972.-11 с.

14. Тиман М.Ф. Приближение функций, заданных на всей вещественной оси, целыми функциями экспоненциального типа // Изв. ВУЗ.-Матем.,1968.-№2.-С.89-101.

15. Теоремы вложения и их приложения.-Труды симпозиума по теоремам вложения.-Баку;1966. -М.:Наука, 1970. -247 с.

16. Теоремы вложения и их приложения, Материалы Всесоюзного симпозиума, Алма-Ата 1973 г. -Алма-Ата:Наука,1976-176 с.

17. Андриенко В.А. Теоремы вложения для функций одного переменного //В книге "Математический анализ",итоги науки. -М.,1971.-С.203-269.

18. Темиргалиев Н.Т. О вложении некоторых классов функций .// Матем. заметки, 1976.-Т.20.-Вып.6.-С.195-215.

19. Hille E. Tamarkin J. On the theory of Fouriez transfurme // Bull. Amer, Math soc, 1933. V. 39 , P.768-774

20. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. -М.: Наука, 1965.-407 с.

21. Гаркави А.Л. Теоремы существования элемента наилучшего приближения в пространствах типа (F) с инте-

гральной метрикой //Матем. заметки, I970.-Т.8.-№ 5.-С.583-594.

22. Гаймназаров Г. Некоторые неравенства в пространствах $L_p(-\infty,\infty)$, $0<p<1$//Докл. АН ТаджССР,1985. -Т. 28. -№12. -С. 685-687.

23. Харди Г. Литтльвуд Дж, Полиат. Неравеиства.-М.: ИЛ, 194 8.- 456с.

24. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье.-ОГИЗ:Гостехиздат,1948.-679с.

25. Sunouti G. On lungtions regular in halfplaпe// Johoky Math. Journ 1957 ,v.9 №1, p.37-44.

26. LorentzG.G. Some new funktvonal spages //Ann. Math. 1950, T.51, P.37-55

27. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. -М.: Мир,1974. -331 с.

28. Jahancon H. Embedding of H_p^{ω} in some Lorentz Spases // Der math . Univ. Umea.(Rill),1975 , №26 ,P 26.

29. Брудный Ю.А. О шкале пространства L_p и точных теоремах вложения// В книге "Теоремы вложения и их приложения". -Алма-Ата: Наука, 1976.-С. 23-27.

30. Крючков В.С. Теоремы вложения для пространства $L_{p,s}^r(R^n)$//В-книге "Теоремы вложения и их приложения".-Алма-Ата:Наука,1976.-С.68-71.

31. Темиргалиев Н. О вложении в некоторые пространства Лоренца//Изв. ВУЗ, Матем.,1980.-№6.-С.83-85.

32. Темиргалиев Н. О вложении классов L_p в пространстве Лоренца //Сиб. матем.Пур, 1983.-Т.24,-№2.-С. 160-172.

33. Акишев Г.А. Об условиях вложения классов функций многих переменных в пространство Лоренца и их применения//Автореф. дисс. на соискание уч.степени канд. физмат наук.-Алма-Ата, 1983.-16 с.

34. Акишев Г.А., Наурызбаев К.Ж., Смаилов Е.С. Сходимость рядов из коэффициентов и вложение в пространство Лоренца// В книге "Теория приближения функций", Труды междунар. конф. по теории приближения функций. -М., 1987.-С. 7-8.

35. Шерстнева Л.А. Некоторые теоремы вложения классов Никольского из пространства Лоренца// 1988, -Т.I4.-№4.-С. 323-345.

36. Гаймназаров Г. О вложении $L_p(-\infty,\infty)$ классов в пространство Лоренца//Материалы Всесоюзной конф.по теории приближения функций. Днепропетровск,1991.-С.33-34.

37. Освальд П. О модулях непрерывности равноизмеримых функций в классах $\varphi(L)$// матем. заметки,1975. -Т.17.-№2.-С.231-244.

38. Тиман М.Ф., Рубинштейн А.И. О вложении классов функций определённых на нульмерных группах //Изв.ВУЗ, Матем.1980-№8.-С.66-76.

39. Гаймназаров Г. О теоремах Джексона в пространстве $L_p(-\infty,\infty)$, $0<p<1$//Материалы Всесоюзн. симпозиума по теории приближения функций. -Уфа, 1987, 3-5 июня.

40. Бернштейн С.Н. Собрание сочинений. -Т.П.-М.: АН СССР, 1952.

41. Джафаров А.С. О наилучшем приближении в среднем функций многих переменных при помощи целых функ-

ций конечной степени // Труды Азербайджанского госпединститута, 1955.-№2.-С.110-I35.

42. Тиман М.Ф., Тиман А.Ф. О зависимости между модулями гладкости функций, заданных на всей вещественной оси// ДАН СССР, 1957.-Т.113.-С.995-997.

43. Бернштейн С.Н. Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной переменной// В книге Собрание сочинений. –Т.П 1952 (ГОНТИ, 1937).

44. Taberski R. Differences moduli and derivatiwes of fractional orders// Rocs Pol. tow. Mat. 1977, ser 1, 19, №2, p.389-400.

45. Рудин У. Функциональный анализ.-М.:Наука, 1975. -443 с.

46. Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p, $0<p<1$//Матем.сб.,1975.-1.98.-№ 3.- С.395-415.

47. Арестов В.В. О неравенствах С.Н.Бернштейна для алгебраических и тригонометрических полиномов //ДАН СССР, 1979.-Т.246.-№6.-С 1289-1292.

48. Иванов В.И. Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике $L_p(-\infty,\infty)$ для $0<p<1$ //Матем. заметки 1975.-Т.18.-№5.-С.641-658.

49. Гаймназаров Г. Прямые и обратные теоремы Джексона в пространствах $L_p(-\infty,\infty)$, $0<p<1$. //Докл. АН ТаджССР, 1987.-Т.30.-№7.-С.397-400.

50. Брудный Ю.А. Приближения целыми функциями на внешности отрезка и полуоси// Докл.АН СССР, 1959.-Т.124.- №4. -С. 739- 742.

51. Лизоркин И.П. Оценка тригонометрических интегралов и неравенство Бернштейна для дробных производных//Изв. АН СССР, сер. матем.,1965.-Т.29.-№1.-С.109-126.

52. Marchoud A . Sur les deriwes et sur les differences des fonctions de warielles reelles// J. Math, pures. et appl ,1927, T 6, №4, p.337 -425.

53. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.-Минск: Наука и техника,1987.-688 с.

54. Гаймназаров Г. О свойствах функций в пространствах $L_p(-\infty,\infty)$, $0<p<1$ с заданными наилучшими приближениями// Докл. АН ТаджССР, 1988.-Т. 31.-№10.-С.627-630.

55. Zugmund A. A remark on the integral тodules of continaity // Unev. Mac. Jucum Revista, 1950, A-7, p.259.

56. Гаймназаров Г. Наилучшее приближение функций, заданных на всей вещественной оси целыми функциями и преобразования типа свертки //Докл. АН ТаджССР,1972.-Т.25.-№4.-С.7-9.

57. Butzer P. L. Wtestphal U. An acces to fraktional differentiation via fraktional difference quotionts // Lect. Modes, Math 1975, vol 457 . P. 116-145.

58. Бугров Я.С. дробные разностные операторы и классы функций//В кн-.:Теория приближений функций.-Труды международной конференции по теории приближения функций, 1983,-АН СССР,1987.-С.75-78.

59. Griinwald A.R. Uber "begrente" deriwationen und deren Anwending// Z.angev. Math, ung phus. 1967, Bd.12, 441-480 .

60. Летников А.В. Теория дифференцирования с произвольным указателем//Матем.сб., 1968.-Т.3.-С.1-68.

61. Liouville J. Metoire sur la calculdes, differenticlles a indiges quliangues.

62. Есмаганбетов М.Г. Об оценках модулей гладкости положительного порядка функций из $L_p(-\infty,\infty)$, 0<p<1и их приложениях//Автореф. дисс.на соискание уч.степени кандидата физмат наук.-16 с.

63. Джармуханбетова А.Д. О некоторых условиях принадлежности в обобщённых производных Лиувиля в $L_{p_1,p_2}(R_2)$ //Тезисы докл. республиканской конф. "Теория приближения и вложения функциональных пространств" Караганда, 1991.-С.19.

64. Butzer P. L. Duchoff H., Gorlich E. and Stens R. L. Best trigonometric appovirmation, fractional order derivatives and Lipshitz classes//Can.J.Math,1977,V.29, №4, p 781-793.

65. Пономаренко В.Г. модули гладкости дробного порядка и наилучших приближений в L_p(kp<∞)// В кн.: Конструктивная теория функций.-Труды международной конф. 1981г. -Варна,София:Болг.АН,19 83.-с.129-133.

66. Drianov D.P. Average modulus of smovthness of fractional index and fractional order derivatives//докл. Болг.АН, I982.-Т.35.-№2.-С.I635-I637.

67. Drianov D.P. Average modulus of smovthness of fractional index and applications//докл. Болг. АН, 1982.-Т.36.-Н.-С.41-43.

68. Самко С.Г., Якубов А.Я. Оценка Зигмунда для модулей непрерывности дробного порядка сопряженной функции//Изв. ВУЗ]' Натем.,1985.~№12.-С.49-53.

69. Самко С.Г., Нкубов А.Я. Оценка Зигмунда для гиперсингулярных интегралов в случае модулей непрерывности дробного порядка// Изв. Сев.-Кавказ, научн. центр. высшей шк.-Сер. естест.наук, 1986.-С.37-42.

70. Гаймназаров Г. О модулях гладкости дробного порядка функций, заданных на всей вещественной оси//докл.АН ТаджССР,1981.-Т.24.-ГЗ.-С.148-149.

71. Гаймназаров Г. Некоторые соотношения для модулей гладкости дробного порядка в пространстве $L_p(-\infty,\infty)$//Изв.АН Тадж,1985.-&3.-С.8-13.

72. Гаймназаров Г., Кагадий А.П. Некоторые оценки для преобразования Фурье// Изв. АН Тадж.-Отд. Физмат,хим.и геолог, наук,1989.-№2.-и.52-55.

73. Тиман М.Ф.Исследование свойств функций с заданными наилучшими приближениями //Автореф.дисс.на соискание уч. степени доктора физмат наук.-Ленинград, 1973.-43 с.

74. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. -М.: Мир, 1965.-Т.П.-534с.

75. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения.-Госиздат физмат. -М.,1963.-254 с.

76. Кагадий Л.П. Свойства периодических функций двух переменных и поведение коэффициентов фурье //Автореф.дисс. на соискание уч. степени канд.физмат наук.-Тарту, 1971.-I3 с.

77. Мамедов Р.Г., Османов Г. Некоторые своистова преобразований Фурье и свойства коэффициентов Фурье //Изв.АН Азерб.ССР.-Сер. физмат наук, 1966.-№2.-С.15-24

78. Кагадий Л.П. Преобразование фурье и разностные свойства функций, заданных на всей вещественной оси//Научные записи сб. работ аспирантов ДГУ.- Механика и матем..-Днепропетровск,1970.-С.116—118.

79. Helle E., Tamarkin J. On the absolute integrobllity of Fourier transforms Fundam. Math, v.25 . 1935; p 329-35

80. Kawate T. Japanesl journal of Mathematics . 19 T.13, №3-4.

81. Крылов В.И. О функциях, регулярных в полуплос-кости// Матем.сб.,1939.-Т.6.-№1.-С. 95-137.

82. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций,-М.:ИЛ, 1963.-363 с.

83. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций.-М.: Гостехиздат,1950.-336 с.

84. Hardy G.H. and Litlewood J.E . Theorews conserning Cezaro means of power series//Proc, London Math. Soc.1934, V36 .p 516-531 .

85. Duren P.L. Theory of H^p spaces. Academic Press, New York and London 1970.

86. Duren PL. and Shields A.L. Coeffiecient mutip-liers of H^p and B^p spaces//Pacific journ. of Math. v970. v32, №1, p.69-78 .

87. Duren P.L. and Shields A.L. Properties of $H^p(0<p<1)$ and ist containing Bana spage// Trans , Amer . Math .soc 1969, 141 p 255-262.

88. Duren P.L. Romberg B. W. and Shields A. L. Linear functionols on H^p spaces with $0<p<1$//J. Reine Angev. Math. 1969. V238. P.32-60.

89. Стороженко Э.А. О теоремах типа Джексона в H^p $0<p<1$//Изв. АН СССР.-Сер. матем.,1980.-Т.44.-№4.- С.946-962.

90. Гаймназаров Г. Теоремы Джексона в пространствах $H_p(-\infty,\infty)$ и приближение функции из класса $L_p(-\infty,\infty)$ средними Чезаро и Гаусса-Вейерштрасса//Докл. АН ТаджССР,1990.-Т.33.-№12.-С.791-794.

91. Пономаренко В.Г. Интегралы Фурье и наилучшее приближение целыми функциями //Изв. ВУЗ.-Матем. ,1-966.-№3.-С.109-123.

92. Пономаренко В.Г. К вопросу о суммировании интегралов Фурье //Изв. ВУЗ.-матем.,1976.-№5.-С.66-91.

93. Hardy G.H., Littlewood J. E . Some properties of conjugate functions//j. reine and angew. Moth 1931, v167 . p. 405-423 .

94. Hardy G.H. , Litlewood J.E. Some properties of fractional integrals//Math. zeit.1932,v34,p.403-439 .

95. Брудный Ю.А. и Гопенгауз И.Е. Обобщение одной теоремы Харди и Литтльвуда// Матем. сб.,1960.-Т.52.-С.891-694.

96. Тиман М.Ф. Оценка производных решений краевой задачи для полигармонического уравнения //Дифф.уравн., 1969.-Т.5.-№3.-С.

97. Стороженко З.А., Валашек Я. Обобщение одной теоремы Харди-Литтльвуда// В кн. Конструктивная теория

функций -81.-Труды междунар. конф. по констр. теории функций. -Варна, 1-5 июня 1981 г. -София: БАН, 1983.-С.164-167.

98. Лаврентьев М.А. и Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного.-М.: Наука, 1965.-716 с.

99. Гаймназаров Г. О свойствах функций в пространствах $H_p(-\infty,\infty)$//докл. АН Тадж.ССР, 1988.-Т.31.-№11.-С.699-702.

100. Дзядык В.К. Аппроксимеционные методы аналитического и численного решения дифференциальных уравнении //В кн. Теория приближения функций.-Труды междунар. конф. по теории приближения функций. 1983.-М.: Наука, 1987.-С.137-150.

101. Никольский СМ. Некоторые неравенства для функций из весовых классов с вырождением на всей границе //В кн.: Теоремы вложения и их приложения.-Алма-Ата, 1976.-С.94-95.

102. Никольский С.М. Об одной граничной оценке для гармонической в N-мерной области функции //СМЖ, 1960.-Т.I.-№1.-С.78-87.

103. Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений//Киев "Наукова думка", 1988.-303 с.

104. Тиман М.Ф. Отклонение гармонических функций от их значений на границе и наилучшее приближение//ДАН СССР, 1962.-Т.145.-№5.-С.1008-1009.

105. Горбайчук В.И. Изучение методами теории приближения граничных свойств решений краевых задач в плоских

областях// В кн.: Теория приближения функций.-Труды междунар. конф. по теории приближения функций 1983.-М.:Наука,1987.-С.118-120.

106. Каниев С. Об уклонении в среднем биогармонических в круге функций от их граничных значений// В кн. функциональный анализ и теория функций.-Сборник 2.-Казань, 1964.-С.146-157.

107. Гаймназаров Г. Об отклонении решений некоторых дифференциальных уравнений в частных производных от заданных значений //Материалы республ. конф. "О некоторых переменных функционального анализа в теории дифференциальных уравнений.-Душанбе,1990.-С.51-53.

108. Гаймназаров Г.- О свойствах решений некоторых дифференциальных уравнений. // Тезисы докладов респубд.научн.конф. "Дифференциальные уравнения и их приложения"-Куляб, 1991.-0.45-46.

109. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных// -М., 1977.-430 с.

110. Борн М. Размышления и воспоминания// -М.,1977.-278 с.

111. Михлин С.Г. О мультипликаторах интегралов Фурье// ДАН СССР, 1956.-Т.109.-№4.-С.70I-703.

112. Натансон И. Н. Об одном способе суммирования интегралов Фурье //Матем. сб. 1939.-Т.7(49).-№2.43.313-320.

113. Гаймназаров Г. Обобщение одной теоремы вложения //докл. АН ТаджССР, 1970.-Т.13.-№1.-С. 7-10.

114. Гаймназаров Г. О вложении $L_p(-\infty,\infty)$ классов функций и соотношений между наилучшими приближениями и

модулями непрерывности в различных метриках//докл. АН ТаджССР,1977.-Т.20.-№4,- С.9-11.

115. Арестов В.В. Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов//Изв. АН СССР, Сер.матем., 1981. –Т.45.-№1.-с. 3-21.

116. Есмаганбетов М.Г. Об оценке модулей гладкости положительного порядка функций из класса $L_p(0, 2\pi)$, $1<p<\infty$//В кн.:Теория приближения функций.-Труды Международной конф. по теории приближения функций 1983. -М.:АН СССР,1987.-С.159-160.

117. Гаймназаров Г. Обобщение одной теоремы Харди и Литтльвуда о вложении классов Липшица //Изв.ВУЗ.-Матем., 1972.-№7.-С.12-18.

118. Гаймназаров Г. Некоторые теоремы вложения для функций заданных на всей вещественной оси//ДАН Тадж.ССР, 1983, т.26,№9, стр. 543-547.

119. Riesz F.Uber die Rendwerle einer analytisch Function//Math.Z.,1923, v.18, p.87-95.

120. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации, М.Л. Гостехиздат,1947 г.

121. Бернштейн С.Н. Собрание сочинений,т. 1, изд. АН СССР,1952г.

122. Никольский СМ. В книге "Математика в СССР за 30 лет" , М.-7., 1948, стр. 247.

123. Гаймназаров Г. О связи между наилучшими приближениями и модулями гладкости в пространствах $H_p(-\infty,\infty)$// В сб.научных статей, Ташкент 1992, с.121-122.

124. Гаймназаров Г. Приближение функций класса H_p(-∞,∞)// Сбор.статей «Исследования по теории дифференциальных, интегральных и операторных уравнений» Худжанд 1993, с.8-11.

125. Гаймназаров Г. Неравенства типа СМ. Никольского и С.Н.Бернштейна в пространствах $H_p(-\infty,\infty)$, $0<p\leq\infty$//ДАН Тадж.ССР,1991,т.34, № 11

126. Голубов Б.И. О методе суммирования типа Абеля Пуассона кратных интегралов Фурье//Матем.сбор. 1979, т.108,№2, ч стр. 229-246.

127. Ибрагимов И.И. Теория приближения целыми функциями Баку 1979г.,468с.

128. Ибрагимов И.И. Экстремальные задачи в классе целых функций конечной степени //Изв. СССР, сер.мат.23, В 2 1956 , 243-256

129. Никольский СМ. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Труды МИАН СССР, 38 1951 , 244-278

130. Алимов Ш.А. О принадлежности градиента гармонических функций классу С.М.Никольского //Тр.МИАН СССР, 1987,т.180, 25-27.

131. Тиман М.Ф. Некоторые дополнения к теоремам вложения//Изв. ВУЗ, математика, 1984,№5,. 57-63.

132. Гребенюк Д.Г. Полиномы наилучшего приближения коэффициенты которых линейно зависимы. –Т., 1960.

133. Виденский В.С. О неравенствах относительно производных многочлена// ДАН СССР,67 №5,1949,777-760.

134. Гаймназаров Г. (совместно с Тиманом М.Ф.) Наилучшие приближения и абсолютная сходимость рядов Фурье-Хаара// ДАН СССР, т.158, №6, 1971, 258-259.

135. Виденский З.С. Об оценках производных многочлена //Изв. АН СССР, сер.матем. 15, 1951,401-420.

136. Виденский В.С. Обобщение неравенств В.А.Маркова // ДАН СССР, 120, №3, 1956, 447-450.

137. Гаймназаров Г. Приближение функции из класса $L_p(-\infty,\infty)$ средними Чезаро и Гаусса-Вейерштрасса //Тезисы докл. на уч. конф. "Теория приближения и вложения функных про-ств". Караганда 1991. стр.18.

138. Гаймназаров Г. Некоторые неравенства в пространствах $H_p(-\infty,\infty)$//"Теория приближения и задачи вычислительной математики". Тезисы докладов междун. конф, г.Днепропетровск,1993. стр.50

139. Голубов Б.И. О сходимости сингулярных интегралов типа Гаусса-Вейрштрасса для функций нескольких переменных// ДАН СССР, т.20, №5, 979, стр.1103-1107.

140. Голубов Б.И. О скорости сходимости интегралов типа Абеля-Пуассона для функций многих переменных // Изв. АН СССР, сер. матем. т.44, Кб, 1960, стр.1255-1278.

141. Голубов Б.И. Кратные ряды и интегралы Фурье // В сб. Итоги науки и техники, серия "Математический анализ", т.9. 1982. стр3-54.

142. Голубов Б.И. О суммировании кратных рядов Фурье методом типа Абеля-Пуассона// матем. заметки, т.27, №1, 1980. стр. 49-59.

143. Кусис П. Введение в теорио пространств H^p с приложением доказательства теоремы о короне// Москва, изд. "Мир", 934, 364 стр.

144. Gaimnazarov G., (Timan M.F.) Best approximations and absolute convergence of fourier-haar series//American Mathematical Society, Soviet Math.Dokl.vol.12(1971), No3. p.986-988.

145. Арестов В.В., Габушин В.Н. Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными// Изв.ВУЗ, Математика, №11(402), 1995, стр.42-49.

146. Гейт В.Э. Теоремы вложения относительно (C, α)-приближений// Изв.ВУЗ, Математика, №9(400). 1995. стр.83-84.

147. Гейт В.Э. теоремы вложения для классов Боаса// Изв.ВУЗ, Математика, №5(408). 1996. стр.29-33.

148. Родзиевский Г.В. Прямые и обратные теоремы в задачах о приближении по векторам конечной степени// матем.сбор. т.189, №4, 1998. стр.83-110.

149. Скалыга В.И. Многомерные аналоги неравенств В.А.Маркова и С.Н.Бернштейна// Изв. РАН, т.65, №6, 2001, стр.129-172.

150. Платонов С.С. Теоремы Джексоновского типа на компактных симметрических пространствах ранга 1// СМЖ т.42, №1, 2001, стр.136-148.

151. Фалалеев Л.п. О приближении функций обощенными операторами Абеля-Пуассона// СМЖ, т.42, №4, 2001, стр.926-940.

152. Прибегин С.Г. Об одном методе приближения в H^pб $0<p\leq1$// Матем.сбор. т.192, №11, 2001 г., стр.123-136.

153. Нурсултанов Е.Д. О коэффициентах кратных рядов Фурье из L_p-пространств// Изв. РАН., т.65, №3, 2001. стр 3-14.

154. Коляда В.И. Вложения дробных пространств Соболева и оценки преобразований Фурье// Матем. Сборник, т.192, №7, 2001. стр.51-72.

155. Прохоров Д.В., Степанов В.Д. О неравенствах на открытых множествах действительной оси// СМЖ, т.43, №4, 2002. стр.864-878.

156. Гаймназаров Г. Дифференциально-разностные свойства функций // Тезисы, материалы ГГУ.конфер. Гулистан. 1999 .

157. Гаймназаров Г. Об обратных теоремах Джексона в пространствах $H_p(-\infty, \infty)$// материалы международной научной конфференции, "Актуальные проблемы подготовки кадров XXI века", Бишкек. 1999. стр. 363 -370.

158. Гаймназаров Г. О модулях гладкости функций дробного порядка. // Журнал «ГулДУ ахборотномаси». 2001 г . № 1. стр 7-13.

159. Гаймназаров Г. О свойствах функций в пространствах .//Гулистан ГулДУ. 2001.

160. Гаймназаров Г. $H_p(-\infty, \infty)$ фазодаги функцияларнинг хоссалари ҳақида//Гулистон Гул ДУ. 2002.

161. Гаймназаров Г. Об аналитических функциях в верхней полуплоскости, принадлежаших классу $H_p(-\infty, \infty)$//Журнал «Гул ДУ ахборотномаси». 2003. № 2 . стр 9-17.

162. Гаймназаров Г. Юқори ярим текисликдаги аналитик функциялар ҳақида. // Республика илмий конференция материаллари . Жиззах 2004 г.

163. Гаймназаров Г. Об одной математической модели физико – технической задачи// Республика илмий конференция материаллари. Жиззах. 2004.

164. Гаймназаров Г. Отклонение решений некоторых дифференциальных уравнений от их заданных значений// Материалы Рсепубликанской конф. Нукус. 2004. стр 7-13.

165. Гаймназаров Г. Об аналитических функциях в верхней полуплоскости//Гулистон, ГГУ, 2005 г .

166. Гаймназаров Г. Отклонение решения уравнения теплопроводности от начального значения// Самарканд, Сам ГУ. 2006 г.

167. Гаймназаров Г. О некоторой обратной теоремы типа Бернштейна// Журнал «ГулДУ Ахборотномаси» № 2. 2006 г. стр 6-14.

168. Гаймназаров Г. Об некоторой обратной теоремы типа Бернштейна для наилучших приближений целыми функциями экспоненциального типа//НамДУ. 2006 г. стр 3-7.

169. Гаймназаров Г, Гаимназаров О.Г. Функционал анализ курсидан масалалар ечиш. -Т.: «Фан ва техналогия», 2006, 115 бет.

170. Гаймназаров Г. Приближения функций класса $H_p(-\infty,\infty)$ средними интегралами типа Шварца// Международная конф. Самарканд ,19-20 октября 2007 г. стр.36-38.

171. Гаймназаров Г. Некоторые свойства усредненный модуль гладкости функций дробного порядка// «Казахстан в новом мире и проблемы национального образования», материалы международной научно-практической конференции. г.Жетысай, 16-18 мая, 2008 г.

172. Гаймназаров Г. Уклонения решения некоторых дифференциальных уравнений от его граничного значения// материалы Республиканский научной конференции, г.Наманган, 6-7 ноября 2009 г. стр.47-48.

173. Гаймназаров Г. О приближении функций в пространствах $L_p(-\infty,\infty)$// вестник ГГУ, №1, 2010 г. стр.6-9.

174. Гаймназаров Г. О некоторых неравенствах для функций имеющих производную дробного порядка// Доклады АН Респ.Узбекистан, 2011, №2, стр. 16-21.

175. Гаймназаров Г. Отклонения решения Лапласа от граничных значений// Материалы Республиканской научной конференции «Проблемы современной математики», г.Карши, 22-23 апреля 2011.

176. Гаймназаров Г. Вложения $L_p(-\infty,\infty)$ классов функций в пространство Лоренца// Материалы Республиканыкой конф. Г.Фергана, 10-12 мая, 2011г. стр 215-217.

177. Gaimnazarov G., Norjigitov H. and Gaimnazarov O.G. On some properties of functions associated with the derivative of fractional order in the space $L_p(-\infty,\infty)$. Far East Journal of Mathe-

matical Sciences (FJMS) Volume 76, Number 2, 2013, pp 319-336.

178. Gaimnazarov G., Gaimnazarov O.G. Inequality of Nikolsky and Bernshteins's type classification within $H_p(-\infty,\infty)$.// New York Science Journal/ - New York, 2016. –V.9. –№3. P. 61-69.

179. Тухтасинов М. Управления конфликтами, линейная теория управления с распределенными к сосредоточенными параметрами. –Т., 2020. 265 стр.

180. Гаймназаров Г., Норжигитов Х., Нурбоев А.Р. Некоторые оценки для производной дробного и целого порядка функций в постранствах H_p, $0<p<\infty$// Материалы конф. С участием зарубежных ученых. Ташкент, 7-8 сентября 2017 г.

181. Gaimnazarov G. Restriction the derivative norm and fractional order analytic function// Faculty of science the oth international Arab conference on mathematics an compitations, 24-26 april 2019, Jordan, Amman, Zarqa university (JACMC 2019).

182. Гаймназаров Г., Гаимназаров О.Г. Некоторые свойства функций в пространствах $H^p(-\infty,\infty)$ и $L^p(-\infty,\infty)$// Материалы международной конференции 14-15 ноября 2019г. Ташкент. 2019.

183. Гаймназаров Г., Гаимназаров О.Г., Арслонов У. О существовании производных дробного порядка функций многих переменных в $L_p^{(n)}$// Материалы международной научной конференции. 12-13 март 2020 г. Фергана-2020.

Интернет сайты

184. www.mathnet.ru/php/archive.phtml Голубов Б.И. Модифицированный двоичный интеграл и производная дробного

порядка на R+// Функциональный анализ и его приложения,2005, т.39, вып.2, С.64-70.

185. www.mathnet.ru/php/archive.phtml Бородин П.А. Приближения наипростейшими дробями на полуоси// Матем.сб., 2009, том.200, номер 8, страницы 25-44.

186. http://math.ras.ru/IzvestiyaRAN Тихонов С.Ю. О двух теоремах Лоренца// Изв.РАН.Сер.математика, 2005, том 69, выпуск 1, страницы 165-178.

187. http://a-server.math.nsc.ru/publishing/smz/index.php Мироненко А.В. Оценка величины наилучшего приближения классом функций с ограниченной второй производной// Сиб.матем.журн., 2006, том 47, номер 4, старницы 842-858.

188. http://www.library.omsu.ru Галеев Э.М. Приближение классов периодических функций многих переменных. Дисс.на соиск.учен.степ. д-ра физ.-мат.наук: М. 1993.

189. http://www.dissercat.com/content/pryamye-teoremy-teorii-priblizheniya Сильванович О.В. Аппроксимация целыми функциями на подмножествах полуоси. Дисс.на соиск.учен.степ. кандидата физ.-мат.наук: Санкт-Петербург. 2009.

190. http://www.dissercat.com/content/pryamye-teoremy-teorii-priblizheniya Захарова М.В. Некоторые экстремальные задачи для целых функций экспоненциального типа. Дисс.на соиск.учен.степ. кандидата физ.-мат.наук: Тула. 2008.

191. http://www.dissercat.com/content/pryamye-teoremy-teorii-priblizheniya Парилов Д.В. Классы Харди, мультипликаторы Фурье и квадратичные функции. Дисс.на со-

иск.учен.степ. кандидата физ.-мат.наук: Санкт-Петербург. 2007.

192. http://math.ras.ru
193. www.guide.vang.net
194. www.dissercat.com
195. www.mathnet.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

Нумерация страниц ставится в конце!

ГАЙМНАЗАРОВ ГУЛЬМУРАТ

КОНСТРУКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ ЗАДАННЫХ НА ВСЕЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Ташкент – «Инновацион ривожланиш нашриёт-матбаа уйи» – 2020

Редактор: Ш.Кушербаева
Тех. редактор: А.Мойдинов
Художник: А.Шушунов
Корректор: Ш.Миркасимова
Компьютерная вёрстка: Н.Рахматуллаева

E-mail: tipografiyacnt@mail.ru Тел: 71-245-57-63, 71-245-61-61.
Изд.лиц. AI№009, 20.07.2018. Разрешено в печать . .2020.
Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman».
Офсетная печать. Усл. печ.л. . Изд. печ.л. .
Тираж . Заказ № .

Отпечатано в типографии
«Инновацион ривожланиш нашриёт-матбаа уйи».
100066, г. Ташкент, ул. Алмазар, 171.