O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI

J.S.Mamatov, H.R.Umarov

Kompleks o’zgaruvchili funksiyalar nazariyasi

Ma’ruzalar matni

Guliston 2019

Qo'llanma kompleks o'zgaruvchili funktsiyalar nazariyasi fanidan mustaqil ishlarni bajarish uchun mo'ljallangan bo'lib, shu fanning o'quv dasturi asosida tuzilgan va o'quv adabiyoti Davlat ta'lim standartining bakalavr mutaxassisligi "Matematika" va "Amaliy matematika va informatika" yo'nalishlariga mos keladi.

Qo'llanma kompleks sonlar va kompleks argumentli funktsiyalar, elementar funktsiyalar va ular yordamida bajariladigan konform akslantirishlar, kompleks argumentli funktsiyaning integrali va chegirmalar nazariyasi mavzularini o'z ichiga oladi.

Ma'sul muharrir: dots. H.Norjigitov.
Taqrizchi: dots. G.Gaymnazarov.

So’z boshi

O’zbekiston Respublikasining Ta’lim to’g’risidagi Qonuni va Kadrlar tayyorlash Milliy dasturi talablarini amalga oshirishda Guliston Davlat Universiteti fizika-matematika fakulteti Umumiy matematika kafedrasi jamoasi mas’uliyatini his etgan holda ilmiy-tadqiqot ishlari va ilmiy pedagogik kadrlar tayyorlash samaradorligini oshirish maqsadlarini ko’zlab o’z oldiga qator vazifalarni belgiladi.

Ilm-fan jadal taraqqiy etayotgan, zamonaviy axborot-kommunikatsiya tizimlari vositalari keng joriy etilayotgan jamiyatda turli fan sohalarida bilimlarning tez yangilanib borishi, ta’lim oluvchilar oldiga ularni jadal egallash bilan bir katorda, muntazam va mustaqil ravishda bilim izlash vazifasini ko’ymokda.

Bu vazifani hal qilish maqsadida o’quv rejalariga matematik va kompleks analiz fanlaridan mustaqil ta’lim olish hamda laboratoriya kiritildi. O’z navbatida o’quv dasturlarida rejaga mos ravishda o’zgartirishlar amalga oshirildi.

Hozirgi vaqtda matematik va kompleks analizning uslublari fan, texnika va iqtisodiyotning turli-tuman masalalarini hal qilishda keng qo’llanilmoqda. Xalq xo’jaligining barcha sohalarida kompyuterlarning va matematik usullarning yalpi qo’llanilishi munoabati bilan bu usullarning ahamiyati yanada ortdi.

Yuqorida qayd etib belgilangan vazifalar bajarilishining isboti sifatida yuzaga kelgan ushbu qo’llanma kompleks o’zgaruvchili funktsiyalar nazariyasi fanidan mustaqil ishlarni bajarishga mo’ljallangan bo’lib, o’quv adabiyoti Davlat ta’lim standartining bakalavr mutaxassisligi “Matematika” va “Fizika” yunalishlariga mos keladi.

Qo’llanmada “Kompleks sonlar va kompleks argumentli funktsiyalar”, “Elementar funktsiyalar va ular yordamida bajariladigan konform akslantirishlar” va “Kompleks argumentli funktsiyaning integrali va chegirmalar nazariyasi’’ mavzulari bayon etilgan.

Qo’llanmani yozishda mualliflar tomonidan mavzularning oddiy va sodda tilda, tushunarli va ravon bayon etilishiga harakat qilindi. Shu munosabat bilan mualliflar qo’llanma talabalarda bilim olishga intilish hissi, mustaqil fikrlash malakalarining shakllanishiga xizmat qiladi deb umid bildiradilar hamda u talabalarga kompleks o’zgaruvchili funktsiyalar nazariyasi fanining aytib o’tilgan mavzulari bo’yicha bilimlarini oshirishda yordam beradi deb ishonadilar.

1-Ma’ruza.

MAVZU: KOMPLEKS SONLAR

1. Kompleks son tushunchasi.

Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi berilgan bo’lsin. Abstsissalar o’qida joylashgan nuqtalar to’plamini R_x, ordinatalar o’qida joylashgan nuqtalar to’plamini R_y orqali belgilaylik.

Ixtiyoriy $x\in R_x$, $y\in R_y$ haqiqiy sonlardan (x,y) juftlikni hosil qilamiz. Bunda, agar y=0 bo’lsa, (x,0)=x deb qaraymiz. Bunday juftliklardan tashkil topgan

$$\mathbf{C}=\{(x,y):\ x\in R_x,\ y\in R_y\}$$

to’plamda arifmetik amallar kiritilishi mumkin.

Agar $(x_1,y_1)\in C$, $(x_2,y_2)\in C$ juftliklar uchun $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ bo’lsa, bu juftliklar o’zaro teng deyiladi va $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ kabi belgilanadi.

$(x_1,y_1)\in C$ va $(x_2,y_2)\in C$ juftliklarning yig’indisi quyidagicha aniqlanadi:

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$

$(x_1,y_1)\in C$ va $(x_2,y_2)\in C$ juftliklarning ayirmasi ham quyidagicha aniqlanadi:

$$(x_1,y_1)-(x_2,y_2)=(x_1-x_2,\ y_1-y_2)$$

Ko’paytirish va bo’lish amallari ham mos ravishda quyidagicha aniqlanadi.

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$$

Shunday qilib, C to’plam elementlari ustida to’rt amal qo’shish, ayirish, ko’paytirish va bo’lish amallari kiritildi. Bu amallar quyidagi xossalarga ega:

1°.Kommutativlik

2°.Assotsiativlik

3°.Distributivlik

Yuqorida keltirilgan

$$\mathbf{C}=\{(x,y):\ x\in R_x,\ y\in R_y\}$$

to’plam elementlari ustida arifmetik amallarning bajarilishi va ularning 1°-3° xossalarga ega ekanligi, tabiiy ravishda C to’plam elementlarini son deb qarash imkonini yuzaga keltiradi.

Odatda, C to’plam elementi (x,y) juftlik *kompleks son* deyiladi va u bitta harf bilan belgilnadi.

$$z=(x,y)$$

Demak, c to’plam kompleks sonlar to’plamini ifodalar ekan.

Ma’lumki, $x\in R_x$ uchun (x,0)=x

Bu esa haqiqiy son kompleks sonning xususiy holi ekanini bildiradi. Demak, $R_x\in C$

2. Kompleks sonning ko’rinishlari.

1°. *Algebraik ko’rinishi.*

(0,1) juftlikni olib, uni i bilan belgilaymiz va bu belgini mavhum birlik deb ataymiz.

$i\cdot i=i^2=-1$ bo’ladi. Haqiqatan ham

$$i^2=(0,1)(0,1)=(0,-1)=-1$$

i belgisi yordamida z=(x,y) kompleks sonni algebraik shaklda

$$z=x+iy \tag{1}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Chunki

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)(y,0)=x+iy$$

z=x+iy bo'lsa , x – z kompleks sonning haqiqiy qismi deyiladi va xqRe z kabi belgilanadi. y – z kompleks soninig mavhum qismi deyiladi va uqIm z kabi belgilanadi. Z=x+iy kompleks son berilgan bo'lsa, x-iy kompleks son uni qo'shmasi deyiladi va $\bar{z}$ orqali belgilanadi:

$$\bar{z} = x - iy.$$

Quyidagi tengliklar o'rinlidir:

1) $z + \bar{z} = 2x$

2) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ $\qquad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ $\qquad (\bar{z}_2 \neq 0)$

5) $\overline{(\bar{z})} = z$

Eslatma: n ta $z_1, z_2, \ldots, z_n$ kompleks sonlarning yig'indisi hamda ko'paytmasi yuqoridagidek kirtiladi va ular uchun mos xossalar hamda tengliklar o'rinli bo'ladi. Jumladan,

$$\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \ldots + \bar{z}_n,$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{z}_n,$$

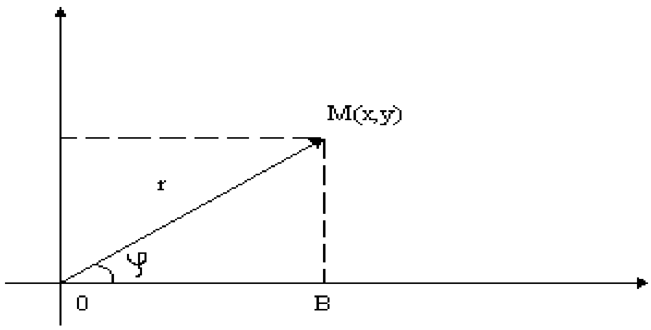
bo'ladi.

2°. *Trigonometrik ko'rinishi*.

Ixtiyoriy

$$z = x + i y \qquad (1)$$

kompleks sonni olaylik. Tekislikda, koordinatalari x va y bo'lgan M(x,y) nuqtani qaraymiz.



Ma'lumki, $\overrightarrow{OM}$ shu *M* nuqtaning radius-vektori deyiladi. Bu radius-vektorning uzunligi r, uning O*x* o'qi bilan tashkil etgan burchagi φ bo'lsin.

Chizmada tasvirlangan *OMB* to'g'ri burchakli uchburchakdan quyidagilarni topamiz:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi \qquad (0 \le \varphi < 2\pi)$$

Unda (1) ko'rinishdagi kompleks son quyidagicha

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (2)$$

ifodalanadi.

Odatda kompleks sonning bu ifodasi uning trigonometrik ko’rinishi deyiladi. Bunda r musbat son z kompleks sonning moduli deb ataladi va |z| kabi belgilanadi: r=|z|. φ burchak esa z kompleks sonning argumenti deb ataladi va argz kabi belgilanadi: φ=argz. Yana ΔOMB dan, Pifagor teoremasiga ko’ra

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (0 \le r < +\infty) \tag{3}$$

hamda

$$tg\varphi = \frac{y}{x}, \quad \text{ya'ni} \quad \varphi = arctg\,\frac{y}{x} \tag{4}$$

bo’lishini topamiz.

Demak, z = x + iy kompleks sonning moduli (3) formula, argumenti esa (4) formula yordamida topiladi.

Misol.

1. $z = -1 + \sqrt{3}i$ kompleks sonning moduli hamda argumentini toping.

Bunda $x = -1, \quad y = \sqrt{3}$ bo’ladi. (3) va (4) ga ko’ra

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$tg\varphi = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}, \text{ ya'ni } \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

bo’ladi.

2. Ushbu

$$z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

kompleks sonni trigonometrik ko’rinishda ifodalang.

Bunda $x = \frac{1}{2}, \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ bo’lib,

$$r = |z| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$$

$$\varphi = \arg z = arctg\,\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = arctg(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$$

U holda (2) formulaga ko’ra berilgan kompleks son quyidagi

$$z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

trigonometrik ko’rinishga ega bo’ladi.

3^0. *Ko'rsatkichli ko'rinishi.*

Faraz qilaylik, $z \in C$ sonning moduli $r\ (0 \le r < +\infty)$ argumenti esa $\varphi\ \ (0 \le \varphi < 2\pi)$ bo'lsin. Unda bu kompleks son

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Trigonometrik ko'rinishga ega bo'ladi. Kompleks analiz kursida muhim bo'lgan quyidagi

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (5)$$

Eyler formulasidan (Bu formulani keyingi ma'ruzada isbotlaymiz) foydalansak, z kompleks sonning ushbu

$$z = re^{i\varphi}$$

ifodasiga kelamiz. Bu kompleks sonning ko'rsatkichli ifodasi deyiladi.

$z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$ bo'lsa, u holda

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \qquad (6)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \qquad (7)$$

(6) va (7) munosabatlardan quyidagi munosabatlar kelib chiqadi:

1^0. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ va $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

2^0. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ $(z_2 \ne 0)$ va $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$.

3. Kompleks sonni darajaga ko'tarish va undan ildiz chiqarish.

Aytaylik $z_1, z_2, \ldots z_n$ kompleks sonlar berilgan bo'lsin. Ikkita kompleks sonlar ko'paytmasi singari bu n ta kompleks sonlar ko'paytmasi

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)} \qquad (1)$$

bo'ladi. Bunda $z_k = r_k \cdot e^{i\varphi_k}$, $k = 1,2,\ldots,n$. Xususan, $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$ bo'lsa, (1) tenglik ushbu

$$z^n = r^n e^{in\varphi} \qquad (2)$$

ko'rinishga ega bo'lib, bu z kompleks sonning n-darajasi deyiladi.

Ravshanki,

$$r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Demak,

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\ . \qquad (3)$$

Odatda (3) formula Muavr formulasi deyiladi.

Aytaylik, $z \in C$ kompleks son va tayinlangan $n \in N$ sonlar berilgan bo'lsin. Ushbu

$$\xi^n = z\ . \qquad (4)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi ξ kompleks son z kompleks sondan olingan n-darajali ildiz deyiladi va u $\sqrt[n]{z}$ kabi belgilanadi:

$$\xi = \sqrt[n]{z}\,.$$

Berilgan kompleks son quyidagi

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (5)$$

trigonometrik ko'rinishda bo'lsin. ξ kompleks sonni ushbu

$$\xi = \rho(\cos\psi + i\sin\psi) \qquad (6)$$

ko'rinishda izlaymiz.
Unda (4), (5), va (6) munosabatlarga ko'ra

$$[\rho(cos\,\psi + i\sin\psi)]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

bo'ladi.
Endi

$$[\rho(cos\,\psi + i\sin\psi)]^n = \rho^n(\cos\psi + i\sin\psi)$$

formulani e'tiborga olib, quyidagi

$$\rho^n(\cos\psi + i\sin\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

tenglikka kelamiz. Unda

$$\rho^n \cos n\psi = r\cos\varphi \qquad (7)$$

$$\rho^n \sin n\psi = r\sin\varphi$$

bo'lishi kelib chiqadi.
Bu tengliklarni kvadratga ko'tarib, so'ng ularni hadlab qo'shib topamiz:

$$\rho^{2n}(\cos^2 n\psi + \sin^2 n\psi) = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$$

$$\Rightarrow\ \rho^{2n} = r^2 \ \Rightarrow\ \rho = \sqrt[n]{r}$$

Topilgan ρ ning qiymatini (7) tengliklardagi ρ ning o'rniga qo'ysak, ushbu

$$\cos n\psi = \cos\varphi$$

$$\sin n\psi = \sin\varphi$$

tenglamalar hosil bo'ladi.
Agar ma'lum bo'lgan

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$$

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$$

tengliklarni e'tiborga olsak, unda

$$n\psi = \varphi + 2k\pi$$

ya'ni

$$\psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \qquad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$$

bo'lishini topamiz.

Demak, izlanayotgan $\xi = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ kompleks sonning moduli

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

argumenti esa

$$\psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

bo'lar ekan. Demak,

$$\xi = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \quad (8)$$

$k = \overline{0, n-1}$ bo'ladi.

Tayanch iboralar. Kompleks son, kompleks sonning ko'rinishlari, kompleks sonning moduli va argumenti, Eyler formulasi, kompleks sonning haqiqiy qismi, kompleks sonning mavhum qismi, qo'shma kompleks son. Kompleks sonni darajasi, kompleks sonning ildizi, Muavr formulasi.

O'z-shzini tekshirish uchun savollar:

1. Kompleks son ta'rifini ayting.
2. Kompleks sonning algebraik ko'rinishini ayting.
3. Kompleks sonning trigonometrik ko'rinishini ayting.
4. Kompleks sonning ko'rsatkichli ko'rinishini ayting.
5. Kompleks sonni darajaga ko'tarish deganda nimani tushunasiz?
6. Kompleks sondan ildiz chiqarish deganda nimani tushunasiz?

Adabiyotlar: [1] 5-14 betlar, [2] 13-15 betlar, [3] 3-8 betlar, [4] 15-24 betlar, [5] 7-17 betlar.

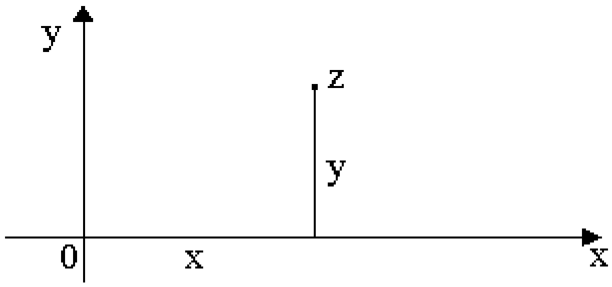
2 - Ma'ruza.

KOMPLEKS SONNING GEOMETRIK TASVIRI. KOMPLEKS TEKISLIK. RIMAN SFERASI.

Ixtiyoriy $z \in C$ kompleks sonni olaylik. Bu (x,y) juftlik bilan aniqlansin:

$$z = (x, y) \qquad (x \in R_x, y \in R_y)$$

Tekislikda absissasi x ga, ordinatasi esa y ga teng bo'lgan nuqta z kompleks sonning geometrik tasviri deyiladi.



Xususan, (x,0)=x ko'rinishdagi kompleks sonning geometrik tasviri absissalar o'qida joylashgan nuqta bo'ladi. (0,y)=iy ko'rinishdagi kompleks sonning geometrik tasviri esa ordinatalar o'qida joylashgan nuqta bo'ladi.

Absissalar o'qi haqiqiy o'q, ordinatalar o'qi esa mavhum o'q deb yuritiladi.

Demak, C to'plamdan olingan har bir kompleks songa tekislikda, bu sonni geometrik tasvirlovchi bitta nuqta mos kelar ekan.

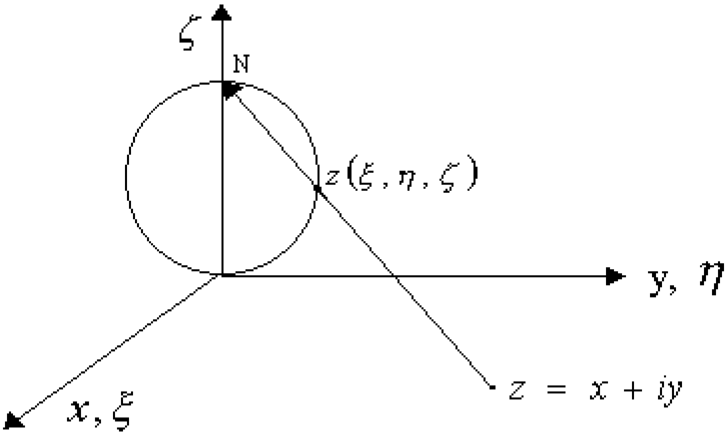
Endi tekislikda ixtiyoriy nuqta olaylik. Uning absissasi x, ordinatasi y bo'lsin. Bu sonlardan tuzilgan (x,y) juftlik bitta kompleks sonni aniqlaydi. Olingan nuqtaga shu kompleks sonni mos qo'yish bilan tekislikdagi har bir nuqtaga bitta kompleks son mos kelishini aniqlaymiz.

Shunday qilib, C bilan tekislikdagi barcha nuqtalar to'plami orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatildi. Bu esa C to'plamning geometrik tasvirini tekislik deb qarash imkonini beradi. Bunday tekislik kompleks sonlar tekisligi deb ataladi va u ham C kabi belgilanadi.

Kompleks sonni boshqacha ham tasvirlash mumkin. Buning uchun R^3 fazoda Dekart koordinatalar sistemasini olib, unda markazi $(0,0,\frac{1}{2})$ nuqtada, radiusi $\frac{1}{2}$ ga teng bo'lganushbu

$$S = \left\{ (\xi, \eta, \zeta) \in R^3; \quad \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \right\} \qquad (9)$$

sferani qaraymiz. Ravshanki, bu sfera $O\xi$ o'qni (0,0,0) hamda N(0,0,1) nuqtalarda kesadi. N(0,0,1) nuqtani shimoliy qutb deb ataymiz. x va y uqlarni mos ravishda ξ va η o'qlariga ustma-ust kuyamiz.



xOy kompleks tekislikdagi $\forall z = x + iy$ nuqta bilan shimoliy N qutbni nur yordamida tutashtiramiz. Natijada Nz nur S sferani qandaydir Z nuqta da kesadi. Biz $z \longleftrightarrow Z$ moslikka ega bo'lamiz.

Shunday qilib, kompleks tekislikdagi barcha nuqtalar to'plami bilan sferaning $S \setminus \{N\}$ nuqtalari to'plami o'zaro bir qiymatli moslikda bo'lar ekan.

Kompleks tekislikdagi z nuqta koordinata boshidan uzoqlasha borgan sari uning sferadagi tasviri N nuqtaga yaqinlasha boradi.

Agar kompleks tekislikda $z = \infty$ nuqta olinsa va uni sferadagi N ga mos keluvchi nuqta deb qaralsa, unda

$$\overline{C} = C \cup \{z = \infty\}$$

to'plam bilan S sfera nuqta laridan iborat to'plam uzoro bir kiymali moslikda bo'ladi.

$$S \sim \overline{C}$$

Bu moslik kompleks tekislikdaning *stereografik proeksiyasi* deyiladi.

Odatda $\overline{C}$ to'plam kengaytirilgan kompleks tekislik, S sirt esa Riman sferasi deb ataladi.Sferadagi nuqta koordinatalari bilan kompleks tekislikdagi mos nuqtalar koordinatalari orasidagi bog'lanishni topaylik.

Ravshanki, N(0,0,1) hamda $z = x + iy \in C$ nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagicha

$$\begin{cases} \xi = tx \\ \eta = ty \\ \zeta = 1 - t \end{cases} \qquad (10)$$

bo'ladi, bunda t=0 da N nuqta , t=1 da z nuqta hosil bo'ladi.

Kompleks tekislikdagi z nuqta koordinatalari ma'lum bo'lganda Z nuqta koordinatalari ξ, η, ζ lar quyidagicha aniqlanadi.

Ma'lumki $z(\xi, \eta, \zeta)$ nuqta ham S sferada yotadi. Shuni e'tiborga olib, $\xi = tx,\ \eta = ty, \zeta = 1 - t$ larni sfera tenglamasi

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

dagi ξ, η, ζ larning o'rniga qo'yib topamiz.

$$t^2x^2 + t^2y^2 + \frac{1}{4} - t + t^2 = \frac{1}{4}$$

$$t\left(x^2 + y^2 + 1\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad t\left(|z|^2 + 1\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{1+|z|^2}$$

Demak, $$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \; \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \qquad (11)$$

bo'ladi.

Agar ξ, η, ζ lar ma'lum bo'lsa x va y lar quyidagicha aniqlanadi: (10) to'g'ri chiziq tenglamasidan

$$t = 1 - \zeta$$

bo'lishini topib, uni (10) ning birinchi ikkita tenglamasidagi t o'rniga quyamiz:

$$\xi = (1-\zeta)x$$

$$\eta = (1-\zeta)y$$

bulardan

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \qquad y = \frac{\eta}{1-\zeta}$$

Bo'lishi kelib chiqadi.

Biz C da 2 ta metrika kiritamiz.

1) Oddiy Evklid metrikasi: $z_1, z_2 \in C$ nuqtalar orasidagi masofa deyiladi.

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

2) Sferik metrika: $z_1, z_2 \in C$ uchun

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{|z_2 - z_1|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}$$

Bu formulani $\overline{C}$ ga yoyish mumkin.

$$\rho(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

Kompleks tekislikda chiziqlar va sohalar. Kompleks sonlar ketma-ketligi va uning limiti. Qatorlar.

1°. *Kompleks tekislikda chiziqlar.*

Egri chiziqni tekislikda nuqtaning uzluksiz harakati natijasida qoldirgan izi deb qarash mumkin. Harakatdagi nuqtaning koordinatalarini x va y deyilsa, ravshanki ular biror t o'zgaruvchining uzluksiz funksiyalari bo'ladi:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

Ayni paytda (x,y) juftlik kompleks sonni ifodalagani sababli, uni z=x + iy ko'rinishda yozish mumkin. Natijada, z = x + iy = x(t) + iy(t) = z(t) bo'ladi.

Demak,

$$z = z(t) \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

funksiya $[\alpha,\beta]$ segmentni kompleks tekislik nuqtalariga akslantiradi va bu nuqtalar to'plami esa kompleks tekislikda egri chiziqni ifodalar ekan. Bunda $z_0=z(\alpha)$ egri chiziqning boshlang'ich nuqtasi , $z_1=z(\beta)$ esa egri chiziqning oxirgi nuqtasi bo'ladi.

Agar $z(\alpha) = z(\beta)$ bo'lsa, bunday egri chiziq yopiq deyiladi.

Agar z=z(t) egri chiziqda t o'zgaruvchining ikkita turli t_1 va t_2 ($t_1 \ne t_2$) qiymatlariga mos keladigan $z(t_1)$ va $z(t_2)$ nuqtalar ham turlicha bo'lsa, u holda egri chiziq Jordan chizig'i deyiladi .

Agar x(t) va y(t) funksiyalar [a,b] cegmentda uzluksiz differentsiallanuvchi bo'lib, $z'(t) = x'(t) + iy'(t) \ne 0$ shartni qanoatlantirsa, z(t) = x(t) + iy(t) egri chiziq silliq egri chiziq deyiladi.

2°. *Kompleks tekislikda ochiq va yopiq to'plamlar. Sohalar.*

Biror $z_0 \in \mathbf{C}$ nuqta va $\varepsilon > 0$ son berilgan bo'lsin.

1-ta'rif: Ushbu $U(z_0, \varepsilon)$q$\{ z \in \mathbf{C} : |z - z_0| < \varepsilon \}$ to'plamga $z_0 \in \mathbf{C}$ nuqta ning ε - atrofi deyiladi.

Shunga uxshash $z_0 \in \overline{C}$ nuqtaning ε - atrofi tushunchasi kiritiladi:

$$\overline{U}(z_0,\varepsilon)=\{z\in \overline{C} : \rho(z,z_0)<\varepsilon\}$$

Ushbu

$$\{ z \in \mathbf{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon \}$$
$$(\{ z \in \overline{C} : 0 < \rho(z, z_0) < \varepsilon \})$$

to'plam $z_0 \in \mathbf{C}$ ($z_0 \in \overline{C}$) nuqtaning o'yilgan atrofi deyiladi.

Faraz qilaylik, **C** da biror D to'plam berilgan bo'lsin.

2-ta'rif: Agar $z_0 \in D$ nuqta uzining biror atrofi bilan shu D to'plamga tegishli bo'lsa, z_0 nuqta D to'plamning ichki nuqtasi deyiladi.

3-ta'rif: Barcha nuqtalari ichki nuqtalardan iborat to'plam ochiq to'plam deyiladi.

Agar $z_0 \in \mathbf{C}$ ($z_0 \in \overline{C}$) nuqtaning ixtiyoriy o'yilgan atrofida $D \subset \mathbf{C}$ ($D \subset \overline{D}$) to'plamning kamida bitta nuqtasi bo'lsa, z_0 nuqta D to'plamning limit nuqtasi deyiladi.

4-ta'rif: Agar D to'plamning barcha limit nuqtalari shu D to'plamga tegishli bo'lsa, D to'plam yopiq to'plam deyiladi.

Misollar:

1. Ushbu

$$D = \{ z \in \mathbf{C} : |z - z_0| < r \}$$

to'plamni qaraylik . Bunda $z_0 = a + ib$ berilgan nuqta , r esa musbat son.

Ma'lumki $z = x + iy$; $z - z_0 = (x - a) + i(y - b)$

Demak,

$$|z - z_0| = |(x-a)+i(y-b)| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$$

Bu esa, markazi (a, b) nuqta da bo'lgan r radiusli aylananing barcha ichki nuqta laridan iboratdir. Shunday qilib, bu tengsizlikning geometrik ma'nosi markazi z_0 nuqta da bo'lgan r radiusli doiradan iborat ekan.

2. Ushbu

$$D \text{ q}\{ z \in \mathbf{C} : r_0 < |z - z_0| < r_1 \}$$

To'plamni karaylik. Bunda $z_0 \in \mathbf{C}$ berilgan nuqta, r_0 va r_1 lar musbat sonlar. Bu to'plam ochiq to'plam bo'ladi. D to'plam markazi z_0 nuqtada, radiuslari r_0 va r_1 ($r_0 < r_1$) bo'lgan aylanalar bilan chegaralangan halkani ifodalaydi.

Haqiqatan ham, $z = x + iy$; $z_0 = a + ib$ bo'lsa,

$$r_0 < |z - z_0| < r_1 \Rightarrow r_0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r_1 \Rightarrow r_0^2 < (x-a)^2 \text{Q} (y-b)^2 < r_1^2$$

bo'ladi.

2. Ushbu

$$D \text{ q}\{ z \in \mathbf{C} : |z - z_0| \le r \}$$

Yopiq to'plam bo'ladi.

$D \subset C$ to'plam bilan bu to'plamning barcha limit nuqtalarining yig'indisidan iborat to'plamga D to'plamning yopig'i deyiladi va $\overline{D}$ kabi belgilanadi.

5-ta'rif: $D \subset C$ ($D \subset \overline{C}$) to'plam berilgan bo'lsin. Agar $D_1 U D_2 = D$, $\overline{D_1} \cap D_2 = \varnothing$, $D_1 \cap \overline{D_2} = \varnothing$ shartlarni qanoatlantiruvchi, bo'sh bo'lmagan D_1 va D_2 to'plamlar mavjud bo'lmasa, D to'plam bog'lamli to'plam deyiladi.

6-ta'rif: Agar $D \subset C$ ($D \subset \overline{C}$) to'plamning ixtiyoriy ikkita z_1 va z_2 nuqtalarini D to'plamda to'lik yotuvchi chiziq bilan tutashtirish mumkin bo'lsa, D to'plam chiziqli bog'lamli deyiladi.

7-ta'rif: Agar $D \subset C$ ($D \subset \overline{C}$)to'plam ham ochiq, ham bog'lamli bo'lsa, u soha deb ataladi.

Ochiq to'plamlar uchun bog'lamlilik tushunchasi bilan chiziqli bog'lamlilik tushunchasi ustma-ust tushadi.

8-ta'rif: $D \subset C$ ($D \subset \overline{C}$) sohaning o'ziga tegishli bo'lmagan limit nuqtasi uning chegaraviy nuqtasi deyiladi. D sohaning barcha chegaraviy nuqta lari to'plamiga uning chegarasi deyiladi va ∂D ko'rinishda belgilanadi.

Agar D sohaning chegarasi bog'lamli to'plam bo'lsa, D soha bir bog'lamli deyiladi, aks holda u ko'p bog'lamli deyiladi.

3. Kompleks sonli ketma–ketliklar va qatorlar.

Bizga

$$z_1, z_2, \ \ldots \ , z_n, \ \ldots$$

Kompleks sonlar ketma-ketligi va $a\in S$ son berilgan bo'lsin.

9-ta'rif: Agar shunday $M>0$ son mavjud bo'lsaki, $\forall n\in N$ uchun $|z_n|\le M$ bo'lsa, $\{z_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan deyiladi.

10-ta'rif: Agar $\forall\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $n_0(\varepsilon) \in N$ topilsaki, $\forall n>n_0$ uchun $|z_n-a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $a\in C$ son $\{z_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a$$

ko'rinishda belgilanadi.

Chekli limitga ega ketma-ketlik yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Yaqinlashuvchi ketma–ketliklarni xossalari.

1°. $\{z_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda u chegaralangan bo'ladi.

2°. Agar $\{z_n\}$ va $\{z_n'\}$ketma-ketlik yaqinlahuvchi bo'lsa, u holda $\{ z_n \pm z_n' \}$, $\{ z_n \cdot z_n' \}$, $\left\{\frac{z_n}{z_n'}\right\}$ $(z_n' \neq 0)$ ketma-ketliklar ham yaqinlashuvchi bo'ladi va

$$\lim_{n\to\infty}(z_n \pm z_n') = \lim_{n\to\infty} z_n \pm \lim_{n\to\infty} z_n'$$

$$\lim_{n\to\infty}(z_n \cdot z_n') = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} z_n'$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{z_n}{z_n'}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty} z_n'}$$ bo'ladi.

Bu xossalar haqiqiy sonlar ketma-ketligi uchun qanday isbotlansa, xuddi shunday isbotlanadi.

11-ta'rif: Agar $\forall\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $n_0(\varepsilon) \in N$ topilsaki, $\forall n>n_0$ uchun va $\forall p \in N$ sonlar uchun $|z_n - z_{n+p}| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{z_n\}$ fundametal ketma-ketlik deyiladi.

Teorema: (*Koshi kriteriyasi*) $\{z_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning fundamental bo'lishi zarur va etarli.

Isboti: (*mustaqil*).

Ushbu

$$z_1 + z_2 + \ \ldots \ + z_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \qquad (1)$$

ifodaga sonli qator deyiladi, bu erda $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$lar berilgan chekli sonlar.

(1) qatorning birinchi n ta hadining yig'indisini S_n deb belgilaylik, ya'ni

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

Agar $\{S_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, (1) qator yaqinlashuvchi deyiladi, aks holda bu qator uzoqlashuvchi deyiladi. Agar $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ bo'lsa, S soni (1) qatorning yig'indisi deyiladi.

(1) qator bilan birga $\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|$ qatorni qaraymiz. Agar $\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (1) qator absolyut yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar (1) qator yaqinlashuvchi bo'lib, $\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|$ qator uzoqlashuvchi bo'lsa, (1) qator shartli yaqinlashuvchi deyiladi.

***Tayanch iboralar**:* kompleks sonning geometrik tasviri, kompleks tekislik, Riman sferasi, stereografik proeksiya, Evklid metrikasi, sferik metrika, Egri chiziq, Jordan chizigi, silliq chiziq, limit nuqta , ichki nuqta , yopiq to'plam, ochiq to'plam, bog'lamli to'plam, soha, sohaning chegarasi, nuqtaning atrofi, nuqtani o'yilgan atrofi, bir bog'lamli soha, ko'p bog'lamli soha, sonlar ketma-ketligi, ketma-ketlik limiti, yaqinlashuvchi ketma-ketlik, uzoqlashuvchi ketma-ketlik, fundamental ketma-ketlik, sonli qator.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Kompleks sonning geometrik tasvirini tushuntiring.
2. Riman sferasini tushuntiring.
3. Egri chiziq ta'rifini ayting
4. Jordan chizig'i deb niimaga aytiladi.
5. Silliq chiziq deb nimaga aytiladi
6. Ichki nuqta ta'rifini ayting
7. Limit nuqta ta'rifini ayting.
8. Soha ta'rifini ayting.
9. Bog'lamli soha ta'rifini ayting.

Adabiyotlar:[1]. 14-33 betlar, [2]. 13-26 betlar, [3]. 9-34 betlar, [4]. 7-35 betlar. [5]. 18-34 betlar.

3 -Ma'ruza.

KOMPLEKS ARGUMENTLI FUNKSIYALAR, ULARNING LIMITI VA UZLIKSIZLIGI.

1^0. *Kompleks argumentli funksiya tushanchasi*. C da biror E to'plam berilgan bo'lsin: $E \subset C$.

1-ta'rif. Agar E to'plamdagi har bir z kompleks songa biror f qoida yoki qonunga ko'ra bitta W kompleks son mos qo'yilgan bo'lsa E to'plamda funksiya berilgan deb ataladi va u

$$f : z \to W \quad \text{yoki} \quad W = f(z)$$

kabi belgilanadi. Bunda E funksiyaning aniqlanish to'plami, z-erkli o'zgaruvchi yoki funksiya argumenti, f esa z o'zgaruvchining funksiyasi deyiladi.

Aytaylik,

$$W = f(z)$$

funksiya biror E ($E \subset C$) to'plamda berilgan bo'lsin, ya'ni f qoidaga ko'ra har bir

$$z = x + iy \in E$$

songa bitta

$$W = u + iv \qquad (u \in R,\ v \in R)$$

son mos qo'yilgan bo'lsin. Demak,

$$W = u + iv = f(x + iy)$$

Keyingi tenglikdan

$$u = u(x, y)\ , \qquad v = v(x, y)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, E to'plamda $W = f(z)$ funksiyaning berilishi shu to'plamda x va y haqiqiy o'zgaruvchilarning

$$u = u(x, y)\ ,$$
$$v = v(x, y),$$

funksiyaning berilishidek ekan.

Odatda, $u = u(x, y)$, funksiya $f(z)$ funksiyaning haqiqiy qismi, $v = v(x, y)$, esa $f(z)$ ning mavxum qismi deyiladi:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$$
$$v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$$

Misol. Ushbu

$$f(z) = \frac{z+3}{z+5}$$

funksiyaning haqiqiy va mavxum qismlarini toping.

$$z = x + iy, \qquad f(z) = u + iv$$

$$u+iv=\frac{z+3}{z+5}=\frac{x+iy+3}{x+iy+5}=\frac{[(x+3)+iy][(x+5)+iy]}{(x+5)^2+y^2}=$$

$$\frac{x^2+y^2+8x+15}{x^2+y^2+10+25}+i\frac{2y}{x^2+y^2+10x+25}$$

Demak,

$$u=u(x,y)=\frac{x^2+y^2+8x+15}{x^2+y^2+10+25}$$

$$v=v(x,y)=\frac{2y}{x^2+y^2+10x+25}$$

Erkli z o’zgaruvchi E to’plamda o’zgarganda $w=f(z)$ funksiyaning mos qiymatlaridan iborat to’plam

$$F=\{f(z)=u+iv: z=x+iy\in E\}$$

bo’lsin.Odatda, bu to’plam funksiya qiymatlari to’plami deyiladi.
Demak, E to’plamda $w=f(z)$ funksiyaning berilishi Oxy-kompleks tekislikdagi F to’plamga aks ettirishdan iborat ekan.
Shu sababli $w=f(z)$ funksiyani E to’plamning F to’plamga akslantirish deb ham yuritiladi.
Faraz qilaylik, $W=f(z)$ funksiya $E\subset C$ to’plamda berilgan bo’lib,

$$F=\{f(z): z\in E\}$$

bo’lsin. So’ngra $F\subset C$ to’plamda o’z navbatida biror

$$\zeta=\varphi(W)$$

funksiya berilgan bo’lsin. Natijada, E to’plamdan olingan har bir z ga F to’plamda bitta W son ($f: z\to W$) va F to’plamdan olingan bunday W songa bitta ζ son $\varphi: W\to\zeta$ mos qo’yiladi:

$$z\xrightarrow{f}W\xrightarrow{\varphi}\zeta$$

Demak, E to’plamdan olingan har bir z ga bitta $\zeta\in C$ son mos qo’yilib, $z\to\zeta$ funksiya hosil bo’ladi.Bunday funksiya murakkab funksiya deyiladi va

$$\zeta=\varphi(f(z))$$

kabi belgilanadi.
$W=f(z)$ funksiya E to’plamda berigan bo’lib, F esa shu funksiya qiymatlaridan iborat to’plam bo’lsin: $F=\{f(z): z\in E\}$
F to’plamdan olingan har bir W songa E to’plam bitta z son mos qo’yilishini ifodalovchi funksiya $W=f(z)$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya deyiladi va $z=f^{-1}(W)$ kabi belgilanadi.

Faraz qilaylik $W=f(z)$ funksiya $E\subset C$ to’plamda berilgan bo’lsin.

2-ta'rif. Agar z argumentning E to'plamdan olingan turli qiymatlarida $f(z)$ funksiyaning mos qiymatlari ham turlicha bo'lsa, ya'ni $f(z_1) = f(z_2)$ tenglikdan $z_1 = z_2$ tenglik $(z_1, z_2 \in E)$ kelib chiqsa, $f(z)$ funksiya E to'plamda bir yaproqli funksiya deyiladi.

Misol. Ushbu

$$f(z) = \frac{1}{z-1}$$

funksiyaning $E = \{z \in C : |z| < 1\}$ to'plamda bir yaproqli bo'lishini ko'rsating.

Aytaylik, $(z_1, z_2 \in E)$ uchun

$$f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow \frac{1}{z_1 - 1} = \frac{1}{z_2 - 1} \Rightarrow z_1 - 1 = z_2 - 1 \Rightarrow z_1 = z_2$$

Demak, $f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$

Bu esa berilgan funksiyaning E da bir yaproqli ekanini bildiradi.

$\mathbf{2^0}$.*Funksiya limiti.* Faraz qilaylik $W = f(z)$ funksiya $E \subset C$ to'plamda berilgan bo'lib, z_0 nuqta E to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

3-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topilsaki, z argumentning 0<|z - z_0 |<δ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha z∈E qiymatlarida

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A kompleks son $f(z)$ funksiyaning $z \to z_0$ dagi limiti deb ataladi va $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ kabi belgilanadi.

$A = \alpha + i\beta,\quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ va $z_0 = x_0 + iy_0$ bo'lsin.

1-teorema: $W = f(z)$ fuktsiyaning $z \to z_0$ da A limitga,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$

ega bo'lishi uchun

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = \alpha \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = \beta$$

bo'lishi zaur va etarli.

Isbot. *Zarurligi*. Aytaylik,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$

bo'lsin. Limit ta'rifiga binoan $\forall \varepsilon > 0$, olinganda ham $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ki, z argumentning 0<|z- z_0 |<δ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha z∈E qiymatlarida

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Ravshanki,

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$
$$f(z) - A = [u(x,y) - \alpha] + i[v(x,y) - \beta]$$

bo'lib,

$$|z - z_0| < \delta$$

bo'lishidan

$$|x - x_0| < \delta, \qquad |y - y_0| < \delta$$

bo'lishi kelib chiqadi.
Ikkinchi tomondan quyidagi

$$|u(x,y) - \alpha| = |\mathrm{Re}(f(z) - A| \leq |f(z) - A| < \varepsilon$$
$$|v(x,y) - \beta| = |\mathrm{Im}(f(z) - A| \leq |f(z) - A| < \varepsilon$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Demak, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ ki, $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ bo'lganda

$$|u(x,y) - \alpha| < \varepsilon$$
$$|v(x,y) - \beta| < \varepsilon$$

tengsizliklar bujariladi. Bu esa

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = \alpha, \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = \beta$$

ekanligini bildiradi.
Etarliligi, Aytaylik,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = \alpha, \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = \beta$$

bo'lsin. Limit ta'rifiga asosan, $\forall \varepsilon > 0$, olinganda ham, $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ ga ko'ra $\exists \delta > 0$ ki, $|x - x_0| < \delta_0$, $|y - y_0| < \delta_0$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi $\forall x, y$ da

$$|u(x,y) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$
$$|v(x,y) - \beta| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

tengsizliklar bajariladi. Bulardan foydalanib topamiz:

$$|f(z) - A| = |u(x,y) + iv(x,y) - (\alpha + i\beta)| = |(u(x,y) - \alpha) + i(v(x,y) - \beta)| =$$
$$\sqrt{(u(x,y) - \alpha)^2 + (v(x,y) - \beta)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon$$

Demak, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$. Terema isbot bo'ldi.

Aytaylik, $f(z)$ hamda $g(z)$ funksiyalar $E \subset C$ to'plamda berilgan bo'lib, z_0 nuqta E to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Agar $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$, $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = B$

bo'lsa, u holda

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) \pm g(z)] = A \pm B$$

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) \cdot g(z)] = A \cdot B$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B} \qquad (B \neq 0)$$

bo'ladi.

3⁰. *Funksiyaning uzluksizligi.* Faraz qilaylik, $W = f(z)$ funksiya $E \subset C$ to'plamda berilgan bo'lib, $z_0 \in E$ nuqta shu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

4-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$, son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topilsaki, z arumentning $|z - z_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha z∈E qiymatlarida

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(z)$ funksiya z_0 nuqta da uzluksiz deb atalada va quyidagicha belgilanadi

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0),$$

Odatda, z-z_0 ayirma funksiya argumentning orttirmasi deyiladi va $\Delta z = z - z_0$ kabi belgilanadi.

Ushbu $f(z) - f(z_0)$ ayirma esa, funksiya orttirmasi deyiladi va

$$\Delta f = f(z) - f(z_0)$$

kabi belgilanadi.

5-ta'rif. Agar $\Delta z \to 0$ da Δf ham nolga intilsa, yani

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta f = 0$$

bo'lsa, $f(z)$ funksiya z_0 nuqta da uzluksiz deyiladi.

6-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya E to'plamning har bir nuqta sida uzluksiz bo'lsa, $f(z)$ funksiya E to'plamda uzluksiz deyiladi.

Misol. Ushbu

$$f(z) = \frac{1}{z} \qquad (z \neq 0)$$

funksiyaning ixtiyoriy $z_0 \in C$ $(z_0 \neq 0)$ nuqta da uzluksiz bo'lishini kursating.

$\forall z_0 \in C$ $(z_0 \neq 0)$ nuqtani olaylik.

$$\Delta f = f(z_0+\Delta z) - f(z_0) = \frac{1}{z_0+\Delta z} - \frac{1}{z_0} = \frac{-\Delta z}{z_0(z_0+\Delta z)}$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-\Delta z}{z_0(z_0+\Delta z)} = 0$$

Demak, berilgan funksiya $\forall z_0 \in C \quad (z_0 \neq 0)$ nuqtada uzluksiz.

2-teorema. $W = f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x,y)$$
$$\operatorname{Im} f(z) = v(x,y)$$

funksiyaning (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz bo'lishi zarur va etarli.

Bu teorema ham 1-teoremaga o'xshash isbotlanadi.

Xossalari:

1) Agar $f(z)$ va $g(z)$ funksiyalar z_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa,

$$f(z) \pm g(z), \quad f(z)\cdot g(z), \quad \frac{f(z)}{g(z)} \quad (g(z) \neq 0)$$

funksiyalar ham z_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

2) Agar $f(z)$ funksiya yopiq D to'plamda uzluksiz bo'lsa, funksiya D da chegaralangan bo'ladi, ya'ni shunday o'zgarmas M $(M \neq \infty)$ son mavjudki, $\forall z \in$ D uchun

$$|f(z)| \leq M$$

bo'ladi.

3) Agar $f(z)$ funksiya yopiq D to'plamda uzluksiz bo'lsa, funksiya moduli D da o'zining aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralariga erishadi, ya'ni shunday $z_1, z_2 \in$D nuqtalar topiladiki, $z \in$ D uchun

$$|f(z)| \leq |f(z_1)|$$
$$|f(z)| \geq |f(z_2)|$$

bo'ladi.

4) Agar $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, | $f(z)$ | funksiya ham shu z_0 nuqta da uzluksiz bo'ladi.

$W = f(z)$ funksiya $E \subset C$ to'plamda berilgan bo'lsin.

7-ta'rif: Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topiladiki, E to'plamning 0<|z' - z_0 "|<δ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ∀ z',z"∈E nuqtalari uchun

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(z)$ funksiya E to'plamda tekis uzluksiz deyiladi.

3-teorema: (*Kantor teoramasi*) Agar $f(z)$ funksiya chegaralangan yopiq to'plamda uzluksiz bo'lsa, funksiya shu to'plamda tekis uzluksiz bo'ladi.

Isboti: *(Mustaqil).*

Tayanch iboralar: Funksiya tushunchasi, murakkab funksiya, teskari funksiya, bir yaproqli funksiya, funksiya limiti, funksiya uzluksizligi, funksiya tekis uzluksizligi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Kompleks argumentli funksiya ta'rifini ayting.
2. Murakkab funksiya ta'rifini ayting.
3. Teskari funksiya ta'rifini ayting.
4. Bir yaproqli funksiya ta'rifini ayting.
5. Funksiya limitini ta'rifini ayting.
6. Funksiya limitini mavjudligi xakidagi teoremasini ayting.
7. Funksiya uzluksizligi ta'rifini ayting.
8. Uzluksiz funksiyalarning xossalarini ayting.
9. Tekis uzluksizlik ta'rifini ayting.

Adabiyotlar: [1].34-45 betlar, [2].26-31 betlar, [3]. 36-47 betlar,[4]. 35-42 betlar, [5]. 44-53 betlar.

4 - Ma'ruza.

FUNKSIYANING DIFFERENTSIALLANUVCHANLIGI. KOSHI- RIMAN SHARTLARI.

$W = f(z)$ funksiya $E \subset C$ to'plamda berilgan bo'lsin. Bu E to'plamda z_0 nuqtani olib unga shunday Δz orttirma beraylikki, $z_0 + \Delta z \in E$ bo'lsin. Natijada $f(z)$ funksiya ham z_0 nuqtada

$$\Delta W = \Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

orttirmaga ega bo'ladi.

1-ta'rif. Aagar $\Delta z \to 0$ da $\dfrac{\Delta W}{\Delta z}$ nisbatning limiti

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

mavjud va chekli bo'lsa, bu limit kompleks o'zgaruvchili $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtadagi hosilasi deb aytiladi va $f'(z_0)$ kabi belgilanadi:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

2-ta'rif: Agar $f(z)$ funksiya $z_0 \in E$ nuqta $f'(z_0)$ hosilaga ega bo'lsa, funksiya z_0 nuqtada differensiallanuvchi deyiladi.

Agar $f(z)$ funksiya E to'plamning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, funksiya E to'plamda differensiallanuvchi deyiladi.

Aytaylik, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada $f'(z_0)$ hosilaga ega bo'lsin. Unda

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}=f'(z_0)$$

bo'lib,

$$\Delta f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+\alpha(z_0,\Delta z)\cdot\Delta z$$

bo'ladi. Bu yerda $\Delta z\to 0$ da $\alpha(z_0,\Delta z)$ ham nolga intiladi: $\alpha(z_0,\Delta z)\to 0$

1-teorema. $f(z)$ funksiyaning $z_0\in E$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun uning orttirmasi $\Delta f(z_0)$ ni ushbu

$$\Delta f(z_0)=A\Delta z+\alpha(z_0,\Delta z)\cdot\Delta z$$

Ko'rinishda ifodalanishi zarur va etarli.

Bunda A miqdor Δz hamda $\alpha(z_0,\Delta z)$ larga bog'liq bo'lmagan miqdordir.

Misol. 1) $f(z)=x-iy=\bar z$

$\lim\limits_{z-z_0}\dfrac{x-iy}{x+iy}$ – mavjud emas

2) $z=x+iy.$ $f(z)=z=x+iy$

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{z-z_0}{z-z_0}=1$$

2-teorema. Agar $f(z)$ va $g(z)$ funksiya z_0 nuqtada hosilaga ega bo'lsalar, u holda $f(z)\pm g(z),$ $f(z)\cdot g(z),$ $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ $(g(z_0)\neq 0)$ funksiyalar ham hosilaga ega bo'ladi. Bu hosilalar analizda o'tilgan formula orqali topiladi. Isboti ham xuddi shunday bo'ladi

Natija. 1) Ixtiyoriy $P(z)=a_0z^n+...+a_nz$ ko'pxad kompleks tekislikni ixtiyoriy nuqtasida hosilaga egadir.

2) Ixtiyoriy $R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ ratsional funksiya $Q(z)=0$ nuqtadan tashqarida hosilaga egadir.

Faraz qilaylik,

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

funksiya biror D sohada (D⊂S) berilgan bo'lib, $z_0=x_0+iy_0\in$ D bo'lsin.

3- ta'rif: Agar haqiqiy o'zgaruvchili $u(x,y)$ va $v(x,y)$ funksiyalar (x_0,y_0) nuqta da $((x_0,y_0)\in R^2)$ diferensiallanuvchi bo'lsa, $f(z)$ funksiya z_0 nuqta da haqiqiy analiz ma'nosida (kiskacha R^2 ma'noda) diferensiallanuvchi deyiladi.

3-teorema. $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqta da $f'(z_0)$ hosilaga ega bo'lishi uchun
1) $f(z)$ ning z_0 nuqta da haqiqiy analiz ma'nosida diferensiallanuvchi bo'lishi va
2) ushbu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1}$$

Koshi-Riman shartlarining bajarilishi zarur va etarli.

Misol. $f(z) = x - iy$

$$u = x, \quad v = -y \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$$

Teorema isboti. *Zarurligi*.

$f(z)$ funksiya $z_0 \in$D nuqtada $f'(z_0)$ hosilaga ega bo’lsin. Hosila ta’rifiga ko’ra

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0),$$

ya’ni

$$\Delta f(z_0) = f'(z_0) \cdot \Delta z + \alpha\, \Delta z \tag{2}$$

bo’ladi. Bu erda

$$\Delta z = z - z_0 = (x + iy) - (x_0 + iy_0) = (x - x_0) + i(y - y_0) = \Delta x + i\Delta y.$$

$$\Delta f(z_0) = f(z) - f(z_0) = \left[u(x,y) + iv(x,y)\right] - \left[u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0)\right] =$$

$$= \left[u(x,y) + u(x_0,y_0)\right] + i\left[v(x,y) + iv(x_0,y_0)\right] = \Delta u + i\Delta v$$

bo’lib, α esa Δx va Δy larga boglik va ular nolga intilganda nolga intiladi

$$\lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \alpha = 0.$$

Endi $f'(z_0)$ hamda α larni

$$f'(z_0) = a + i\text{в}, \quad \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \qquad \left(\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha_1 = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha_2 = 0 \right)$$

deb, (2) tenglikni quyidagiga yozamiz:

$$\Delta u + i\Delta v = (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha_1 + i\alpha_2)(\Delta x + i\Delta y)$$

Bu tenglikdan, haqiqiy hamda mavhum qismlarini tenglab topamiz:

$$\begin{aligned} \Delta u &= a\Delta x - b\Delta y + \alpha_1\Delta x - \alpha_2\Delta y \\ \Delta v &= b\Delta x - a\Delta y + \alpha_2\Delta x - \alpha_1\Delta y \end{aligned} \tag{3}$$

Demak, $u(x,y)$ va $v(x,y)$ funksiyalar (x_0, y_0) nuqtada differensiallanuvchi. Ayni paytda $f(z)$ funksiya z_0 nuqta da R^2 ma’noda differensiallanuvchi bo’ladi.

Modomiki, $f(z)$ funksiya z_0 nuqta da $f'(z_0)$ hosilaga ega ekan, unda $\Delta z \to 0$, jumladan $\Delta z = \Delta x \to 0 \quad (\Delta y = 0)$, $\qquad \Delta z = \Delta y \to 0 \quad (\Delta x = 0)$,
bo’lganda ham

$$\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}$$

nisbatning limiti har doim $f'(z_0)$ ga teng bo’laveradi. (3) tengliklar $\Delta z = \Delta x \quad (\Delta y = 0)$, bo’lganda

$$\begin{aligned} \Delta u &= a\Delta x + \alpha_1\Delta x \\ \Delta v &= b\Delta x + \alpha_2\Delta x \end{aligned} \tag{4}$$

$\Delta z = \Delta y \quad (\Delta x = 0)$, bo’lganda esa

$$\begin{aligned}\Delta u &= -в\Delta y - \alpha_2 \Delta y \\ \Delta v &= a\Delta y + \alpha_1 \Delta y\end{aligned} \qquad (5)$$

tengliklarga keladi. (4) munosabatdan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = в$$

(5) munosabatdan esa

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -в, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = a$$

bo’lishini topamiz. Bu tengliklardan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

bo’lishi kelib chiqadi.

Etarliligi. Aytaylik $f(z)$ funksiya z_0 nuqta da R^2 ma’noda differentsiallanuvchi bo’lib, teoremada keltirilgan ikkinchi shart bajarilsin. $u(x,y)$ va $v(x,y)$ funksiyalar (x_0, y_0) nuqtada differentsiallanuvchi bo’lgani uchun

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x - \alpha_2 \Delta y$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta_1 \Delta x - \beta_2 \Delta y$$

bo’ladi. Bu erda $\Delta x \to 0, \quad \Delta y \to 0$ da $\alpha_1, \alpha_2 \quad \beta_1, \beta_2$ larning har biri nolga intiladi. U holda

$$\Delta f(z_0) = \Delta u + i\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x - \alpha_2 \Delta y + i\left[\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta_1 \Delta x - \beta_2 \Delta y\right]$$

bo’ladi. Teoremani ikkinchi sharti

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

dan foydalanib topamiz:

$$\Delta f(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha_1 + i\beta_1)\Delta x + (\alpha_2 + i\beta_2)\Delta y =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta z + \left[(\alpha_1 + i\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z}\right]\Delta z$$

Bu tenglikdan esa

$$\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} + (\alpha_1 + i\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z} \qquad (6)$$

bo’lishi kelib chiqadi.

Keyingi tenglikdagi

$$(\alpha_1 + i\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z}$$

ifoda uchun

$$\left|(\alpha_1+i\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta z}+(\alpha_2+i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z}\right|\le|(\alpha_1+i\beta_1)|\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right|+|(\alpha_2+i\beta_2)|\left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right|\le$$
$$\le|(\alpha_1+i\beta_1)|+|(\alpha_2+i\beta_2)|\le|\alpha_1|+|\beta_1|+|\alpha_2|+|\beta_2|<\varepsilon$$
bo'ladi, chunki $\Delta z\to 0$ da ya'ni $\Delta x\to 0,\ \ \Delta y\to 0$ da $\alpha_1\to 0,\ \beta\to 0\ \ ,\alpha_2\to 0,\ \beta_2\to 0,$
Shuni e'tiborga olib (6) tenglikda $\Delta z\to 0$ da limitga utib
$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$
bo'lishini topamiz. Demak., $f(z)$ funksiya z_0 nuqta da $f'(z_0)$ hosilaga ega va
$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$
bo'ladi. *Teorema isbot bo'ldi.*

Eslatma. Yuqorida keltirilgan teorema $f(z)$ funksiya hosilasining mavjudligini tasdiqlabgina qolmasdan, uni hisoblash yo'lini ko'rsatadi:
$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial v}{\partial x}$$
Misol. $f(z)=z^2$ funksiya ixtiyoriy $z\in C$ nuqtada hosilaga ega bo'ladimi?
$$f(z)=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i2xy$$
$$u=x^2-y^2,\qquad v=2xy$$
bu funksiyalar $\forall(x,y)\in R^2$ nuqtada differensiallanuvchi.
Ikkinchi tomondan
$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y.$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=2y,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=2x.$$
bo'lib,
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$
Demak, $f(z)=z^2$ funksiya $\forall z\in C$ nuqtada hosilaga ega.

Faraz qilaylik, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ funksiya $z_0=x_0+iy_0\in$D, D$\subset$S nuqta da R^2 ma'noda differensiallanuvchi bo'lsin. Ushbu
$$du(x_0,y_0)+idv(x_0,y_0)$$
ifoda $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtadagi differensiallanuvchi deyiladi va $df(z_0)$ kabi belgilanadi:
$$df(z_0)=du(x_0,y_0)+idv(x_0,y_0)$$
Ravshanki,
$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx-\frac{\partial u}{\partial y}dy,$$
$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx-\frac{\partial v}{\partial y}dy,$$

Shuni etiborga olib topamiz:

$$df = \left[\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right] + i\left[\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right] = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Demak,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad (7)$$

Quyidagi $z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$

o’zgaruvchilarni olaylik. Ravshanki,

$dz = dx + idy,$

$d\bar{z} = dx - idy.$

Bu tengliklardan

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}), \qquad dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) \qquad (8)$$

bo’lishini topamiz.

(7) va (8) tengliklardan

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\bar{z}$$

bo’lishi kelib chiqadi.

Agar

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (9)$$

ko’rinishda belgilansa unda $f(z)$ funksiya differesiyali uchun ushbu

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$$

tenglikka kelamiz.

Aytaylik, $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar biror nuqtada Koshi-Riman shartlarini bajarsin:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

Unda (9) tenglikka ko’ra, shu nuqtada $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Aksincha, $f(z)$ funksiya uchun biror nuqtada $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

bo’lsin. Ravshanki (9) tenglikka ko’ra shu nuqtada

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

bo’ladi.

Demak, biror nuqta da Koshi-Riman shartlarining bajarilishi shu nuqta da $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ tenglikning o’rinli bo’lishiga ekivalent ekan.

Agar $W = f(z)$ funksiya z_0 nuqtada hosilaga ega bo'lsa, shu nuqtada $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ bo'lib, funksiyaning hosilasi $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}$ differensiyali esa

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz = f'(z_0)dz$$

ko'rinishda bo'ladi.

Kompleks analizda hosilaga ega bo'lgan funksiyalar C-differensiyallanuvchi funksiyalar deyiladi.

Faraz qilaylik, $W = f(z)$ funksiya biror $D \subset$S sohada berilgan bo'lsin.

4-ta'rif: Agar $f(z)$ funksiya $z_0 \in D$ nuqtaning biror $U(z_0, \varepsilon) \subset D$ atrofida C-differensiyalanuvchi bo'lsa, $f(z)$ nuqtada gollomorf (yoki analitik) deb ataladi.

5-ta'rif: Agar $f(z)$ funksiya D soxoning har bir nuqtasida golomorf bo'lsa, funksiya D sohada golomorf deyiladi.

Odatda D sohada golomorf bo'lgan funksiyalar sinfi $\vartheta(D)$ kabi belgilanadi.

6-ta'rif: Agar $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ funksiya z=0 nuqtada golomorf bo'lsa, $f(z)$ funksiya ∞ nuqtada golomorf deyiladi.

7-ta'rif: Agar $\overline{f(z)}$ funksiya $z_0 \in$D nuqtada golomorf bo'lsa, $f(z)$ funksiya z_0 nuqta da antigolomorf deyiladi.

Aytaylik, R^2 fazodagi $E \subset R^2$ sohada $F = F(x, y)$ funksiya berilgan bo'lib, u shu sohada ikkinchi tartibli uzluksiz hususiy hosilalarga

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}$$

ega bo'lsin.

8-ta'rif: Agar E sohaning har bir nuqtasida

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \tag{10}$$

tenglik bajarilsa, $F(x, y)$ funksiya E sohada garmonik funksiya deyiladi.
Odatda (10) Laplas tenglamasi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta F = 0,$$

bunda $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Loplas operatori uchun

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

bo'lishini etiborga olsak, unda (10) tenglikni quyidagicha yozish mumkin.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

4-teorema. D$\subset$S sohaga golomorf bo'lgan har qanday $f(z)$ funksiyaning haqiqiy hamda mavhum qismlari shu sohada garmonik bo'ladi.

Isbot. Aytaylik, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiya D sohada golomorf bo'lsin. Unda $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, tengliklar bajariladi.

Bu tengliklardan foydalanib topamiz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

Agar

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

bo'lishini e'tiborga olsak, u holda yuqoridagi tengliklardan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $u(x, y)$ funksiyaning garmonik ekanini bildiradi.

Xuddi shunga o'xshash $v(x, y)$ funksiyaning garmonikligi ko'rsatiladi. *Teorema isbot bo'ldi.*

Tayanch iboralar: Funksiya orttirmasi, funksiya hosilasi, funksiya differensiallanuvchanligi, Koshi-Riman shartlari, C-differentsiallanuvchi funksiyalar, golomorf funksiyalar, antigolomorf funksiyalar, garmonik funksiyalar.

O'z-o'zini teukshirish uchun savollar:

1. Hosila ta'rifini ayting?
2. Funksiya differensiallanuvchanligini tushuntiring?
3. Kosh-Riman shartlarini ayting?
4. Qachon funksiya haqiqiy analiz ma'nosida differensiallanuvchi deyiladi?
5. Funksiya differensiallash tushuchasini ayting?
6. C-differensiallanuvchi funksiya ta'rifini ayting?
7. Nuqtada golomorf funksiya ta'rifini ayting?
8. Sohada golomorf funksiya ta'rifini ayting?
9. Antigolomorf funksiya ta'rifini ayting?
10. Garmonik funksiya ta'rifini ayting?

Adabiyotlar: [1] 45-57 betlar, [2] 31-38 betlar, [3] 48-60 betlar, [4] 60-68 betlar, [5] 69-76 betlar.

5 - Ma’ruza.

HOSILA MODULI VA ARGUMENTINING GEOMERTIK MA’NOSI. KONFORM AKSLANTIRIShLAR

Faraz qilaylik, $W = f(z)$

Funksiya biror $D \subset C_z$ sohada berilgan bo’lsin. Uni (z) tekislikning nuqtalarini (w) tekislik nuqtalariga akslantirish deb qaraymiz.

Bu $W = f(z)$ funksiya $z_0 \in D$ nuqtada $f'(z_0)$ $(f'(z_0) \neq 0)$ hosilaga ega bo’lsin. Hosila ta’rifidan foydalanib, topamiz:

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = \lim_{z \to z_0} \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|}$$

$(w_0 = f(z_0))$ Ravshanki, bu tenglikdan

$$|w - w_0| = |f'(z_0)||z - z_0| + o(|z - z_0|)$$

bo’lishi kelib chiqadi.

Demak, $|z - z_0|$ yetarlicha kichik bo’lganda $|z - z_0|$ hamda $|w - w_0|$ miqdorlar proporsional bo’lib, $|f'(z_0)|$ esa shu proporsionallikning koeffisientini ifodalaydi.

$W = f(z)$ akslantirish yordamida $|z - z_0| = r$ aylana, cheksiz kichik miqdor $0(|z - z_0|)$ aniqligida

$$|w - w_0| = |f'(z_0)| \cdot r$$

aylana akslanadi. Agar $|f'(z_0)| < 1$ bo’lsa, unda $|z - z_0| = r$ aylana siqiladi $|f'(z_0)| > 1$ bo’lganda esa cho’ziladi.

Demak, funksiya hosilasining moduli $W = f(z)$ akslantirishda cho’zilish koeffisientini bildirar ekan.

Endi hosila argumentining geometrik ma’nosiga to’xtalamiz.

Faraz qilaylik, $W = f(z)$ akslantirish z_0 nuqtaning biror atrofida hosilaga ega bo’lib $f'(z_0) \neq 0$ bo’lsin.

z_0 nuqtadan o’tuvchi silliq

$$\gamma = \{z \in C_z : z = z(t),\ \alpha \leq t \leq \beta\}$$

egri chiziqni olib, uning yo’nalishi bo’yicha shu egri chiziqqa z_0 nuqtada urinma o’tkazamiz Bu urinmaning haqiqiy o’kning musbat qismi bilan tashkil etgan burchagi φ bo’lsin.

$$\varphi = \arg z'(t_0)$$

$W = f(z)$ akslantirish esa γ egri chiziqni C_w tekislikda G egri chiziqqa o’tkazsin.

$$\Gamma = \{w \in C_w :\ w = w(t) = f(z(t)),\ \alpha \leq t \leq \beta\}$$

Murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasiga binoan

$$w'(t) = f'(z) \cdot z'(t)$$

bo’lib, $t=t_0$ da

$$w'(t_0) = f'(z_0)\cdot z'(t_0)\ \left(z_0 = z(t_0), \quad \alpha \le t_0 \le \beta\right)$$

bo'ladi. Shartga ko'ra $f'(z_0) \neq 0$ va $z'(t_0) \neq 0$ (γ ning silliqligidan) bo'lgani uchun $w'(t_0) \neq 0$ bo'ladi. Binobarin, $W_0 = f(z_0)$ nuqtada Γ egri chiziqning urinmasi mavjud. Bu urinmaning burchak koeffitsentini φ bilan belgilaymiz:

$$\varphi = \arg w'(t_0) \tag{1}$$

tenglikdan

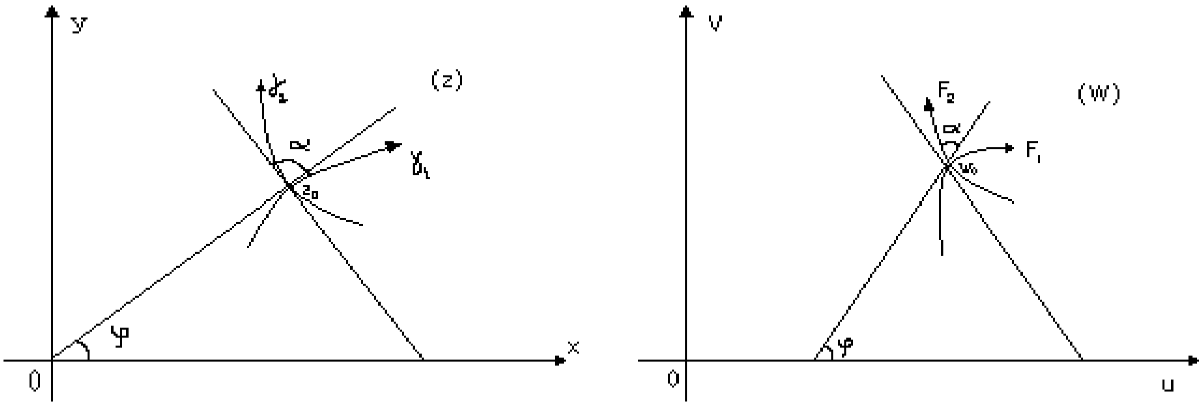
$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0)$$

ya'ni

$$\varphi = \arg f'(z_0) + \varphi \tag{2}$$

kelib chiqadi.

Agar $Q = \psi - \varphi$ mikdorning $W = f(z)$ akslantirish natijasida γ egri chiziqning z_0 nuqtadagi burilishi burchagi ekanligini e'tiborga olsak, u holda (2) tenglikdan z_0 nuqtadan o'tuvchi barcha silliq egri chiziqlar bir xil $Q = \arg f'(z_0)$ burchakka burilishini ko'ramiz (burchakning saqlanishi).



Ta'rif: Agar $W = f(z)$ akslantirish z_0 nuqtada cho'zilish va burchak saqlanish xossalariga ega bo'lsa, bunday akslantirishga z_0 nuqtada konform akslantirish deyiladi.

Yuqoridagilardan ko'rinadiki, agar $W = f(z)$ funksiya $z_0$nuqtaning biror atrofida golomorf bo'lib, $f'(z_0) \neq 0$ bo'lsa, $W = f(z)$ akslantirish z_0 nuqtada konform bo'ladi.

Agar $W = f(z)$ akslantirish D sohada bir yaproqli bo'lib, sohaning har bir nuqtasida konform bo'lsa, u D sohada konform akslantirish deyiladi.

Konform akslantirishlar nazariyasida asosan quyidagi ikki masala o'rganiladi:

1) $E \subset C_z$ sohada $W = f(z)$ akslantrish berilgan holda $f(E)$ ni topish:

2) ikkita $E \subset C_z$ va $F \subset C_w$ sohalar berilgan holda E ni F ga konform akslantiradigan $W = f(z)$ ni topish:

Bu masalalarni hal qilishda quyidagi teoremalardan foydalaniladi.

Teorema. (*Riman*) Agar $E \subset C_z$ va $F \subset C_w$ sohalar chegarasi 2 ta nuqtada kam bo'lmagan bir bog'lamli sohalar bo'lsa, E sohani F sohaga konform akslantiruvchi $W = f(z)$ funksiya mavjud.

Teorema. (*Sohaning saqlanishi prinsipi*) Agar $f(z)$ funksiya E sohada golomorf bo'lib, $f'(z_0) \neq const$ bo'lsa, $f(E)$ ham soha bo'ladi.

Tayanch iboralar: Hosila modulining geometrik ma'nosi, hosila argumentining geometrik ma'nosi, Konform akslantirsh, Riman teoremasi, sohaning saqlanish prinsipi.

6 -7 Ma'ruza.

CHIZIQLI VA KASR CHIZIQLI FUNKSIYALAR

1.Chiziqli funksiya.

$$W=az+b \tag{1}$$

ko'rinishdagi funksiya *chiziqli funksiya* deyiladi, bunda a va b lar o'zgarmas kompleks sonlar va $a \neq 0$.

Bu funksiya $\overline{C}_z$ to'plamda aniqlangan, unga teskari funksiya ham chiziqli funksiya bo'lib, u quyidagi

$$z = \frac{1}{a}w - \frac{в}{a} \tag{2}$$

ko'rinishga ega.

(1) va (2) akslantirishlardan $\overline{C}_z$ va $\overline{C}_w$ tekislik nuqtalari o'zaro bir qiymatli moslikda ekanligi kelib chiqadi. Bunda $z=\infty$ da $w=\infty$ bo'ladi va aksincha.

Ravshanki,

$$w'=(az+b)'=a$$

Demak,

$$w=az+b$$

akslantirish $\overline{C}_z$ tekislikni $\overline{C}_w$ tekislikka konform akslantiradi.

$w=az+b$ chiziqli funksiyani quyidagi 3 ta akslantirishlarni kompozitsiyasi shaklida tasvirlash mumkin.

1. $z_1=e^{i\varphi}z$ (φ *burchakka burish*)
2. $z_2=mz_1$ (*m marta cho'zish*)
3. $w=z_2+b$ (*b vektorga parallel siljitish*)

$w=f(z)$ funksiya biror E sohada ($E\subset\overline{C}$) berilgan bo'lsin.

Agar $a \in E$ nuqtada

$$f(a)=a$$

tenglik bajarilsa, $z=a$ nuqtada $w=f(a)$ akslantirishning qo'zgalmas nuqtasi deyiladi.

$w=az+b$ akslantirish

1) $a=1$ da $z=\infty$ qo'zg'almas nuqtaga,
2) $a\neq1$ da ikkita $z_1=\infty$, $z_2=\dfrac{b}{1-a}$ qo'zg'almas nuqtalarga ega bo'ladi.

2. Kasr - chiziqli funksiya

$$w=\frac{az+b}{Cz+d} \tag{3}$$

ko'rinishdagi funksiya kasr-chiziqli funksiya deyiladi, bunda a,b,c,d lar o'zgarmas kompleks sonlar, z-kompleks o'zgaruvchi. $ad-bc=0$ bo'lgan hol biz uchun qiziqarli emas.

$c\neq0$ bo'lganda

$$w(\infty)=\frac{a}{c}, \qquad w\left(-\frac{d}{c}\right)=\infty, \tag{4}$$

C=0 bo'lganda w(∞)=∞ deb qaraymiz.

(3) munosabatni z ga nisbatan echish natijasida berilgan kasr-chiziqli funksiyaga nisbatan teskari bo'lgan

$$z=\frac{-dw+b}{Cw-a} \tag{5}$$

funksiyaga kelamiz, bu yerda ham

c≠0 da, $\quad z(\infty)=-\frac{d}{c}, \quad z\left(\frac{a}{c}\right)=\infty$

c=0 da $\quad z(\infty)=\infty$

deb qaraymiz.

Demak,

$$w=\frac{az+b}{Cz+d}$$

funksiya $\overline{C}_z$ to'plamda

$$z=\frac{-dw+b}{Cw-a}$$

funksiya esa $\overline{C}_w$ to'plamda aniqlangan. (3) funksiya $\overline{C}_z$ to'plam nuqtalarini $\overline{C}_w$ to'plam nuqtalariga o'zaro bir qiymatli akslantiradi.

Ravshanki,

$$w'=\left(\frac{az+b}{Cz+d}\right)'=\frac{(Cz+d)a-(az+b)c}{(Cz+d)^2}=\frac{ad-bc}{(Cz+d)^2}$$

bo'lib, bu hosila

$$\overline{C}_z \setminus \left\{z\in \overline{C}_z : z=-\frac{d}{c}, \quad z=\infty\right\}$$

to'plamda chekli hamda (4) shartga binoan *w'≠0.*

Demak,

$$w=\frac{az+b}{Cz+d}$$

akslantirish

$$\overline{C}_z \setminus \left\{z\in \overline{C}_z : z=-\frac{d}{c}, \quad z=\infty\right\}$$

to'plamda konform akslantirish bo'ladi.

Endi

$$w=\frac{az+в}{Cz+d} \tag{3}$$

akslantirishning $z=-\frac{d}{c}$ va $z=\infty$ nuqtalarda konform bo'lishini ko'rsatamiz.

1)c≠0 bo'lsin. Bu (3) ning $z=-\frac{d}{c}$ nuqtada konform bo'lishini ko'rsatish uchun

$$w=\frac{1}{w_1}$$

ni qaraymiz.

Ravshanki,

$$w_1=\frac{cz+d}{az+b},$$

$$w_1'=\frac{bc-ad}{(az+b)^2},$$

bo'lib,

$$w_1'\left(-\frac{d}{c}\right)=\frac{c^2}{bc-ad}\neq 0$$

bo'ladi. Demak, qaralayotgan akslantirish $z=-\frac{d}{c}$ nuqtada konform bo'ladi.

(3) ning $z=\infty$ nuqtada konform bo'lishini ko'rsatish uchun

$$z=\frac{1}{z_1}$$

ni qaraymiz. Unda

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a+bz_1}{c+dz_1}$$

$$w'=\frac{bc-ad}{(c-dz_1)^2}$$

bo'lib, $z_1=0$ bo'lganda

$$w'=\frac{bc-ad}{(c-dz_1)^2}$$

bo'ladi. Demak, (3) akslantirish z=∞ nuqtada konform bo'ladi.

2) c=0 bo'lsin. Bu holda

$$w=\frac{a}{d}z+\frac{в}{d}$$

bo'lib, z=∞ nuqta w=∞ nuqtaga akslanadi.

Agar $z=\frac{1}{z_1}$, $w=\frac{1}{w_1}$ deyilsa, unda

$$w_1=\frac{dz_1}{a+вz_1}$$

$$w'_1=\frac{ad}{(a+вz_1)^2}$$

bo'lib, $z_1=0$ nuqtada

$$w'_1 = \frac{d}{c} \neq 0$$

bo'ladi. Demak, (3) akslantirish z=∞ nuqtada konform akslantirish bo'ladi.
Shunday qilib,

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

akslantirish $\overline{C}_z$ tekislik nuqtalarini $\overline{C}_w$ tekislik nuqtalariga konform akslantirar ekan.

3. Doiraviylik xossasi

Teorema-1. Ixtiyoriy kasr-chiziqli akslantirish $\overline{C}_z$ dagi ixtiyoriy aylana yoki to'g'ri chiziqni $\overline{C}_w$ dagi aylana yoki to'g'ri chiziqqa akslantiradi.

Isbot: ***c***=0 bo'lganda chiziqli akslantirish uchun teorema isbot. Agar c≠0 bo'lsa u holda

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}\,\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c}\,\frac{z+\frac{d}{c}+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{z+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\,\frac{1}{z+\frac{d}{c}} = A + \frac{B}{z+C} \qquad (4)$$

kasr-chiziqli funksiyaning unga ekvivalent bo'lgan bir nechta funksiya bilan almashtiramiz

$$\zeta = z + C, \qquad \eta = \frac{1}{\zeta}, \qquad w = B\eta + A \qquad (*)$$

chunki

$$w = B\eta + A = B\frac{1}{\zeta} + A = \frac{B}{z+C} + A$$

bunda

$$A = \frac{bc-ad}{c^2}, \quad B = \frac{a}{c}$$

(*) da birinchi, uchinchi hollarda aylana yoki to'g'ri chiziq, aylana yoki to'g'ri chiziqqa o'tadi.

$$\eta = \frac{1}{\zeta}$$

uchun isbotlaymiz
Soddalik uchun

$$w = \frac{1}{z} \qquad (5)$$

deb belgilaymiz.

Ma'lumki, $\mathbf{R}^2$ tekislikda

$$E(x^2+y^2)+2Bx+2Cy+D=0 \qquad (6)$$

tenglama aylanani, agar E=0 bo'lsa, to'g'ri chiziqni ifodalaydi.

Agar

$$z = x+iy, \quad \bar{z} = x-iy, \quad x = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z-\bar{z}}{2i}, \quad z\bar{z} = x^2+y^2$$

bo’lishini e’tiborga olsak, u holda (6) tenglik

$$Ez\,\overline{z} + \overline{F}z + F\overline{z} + D = 0 \qquad (7)$$

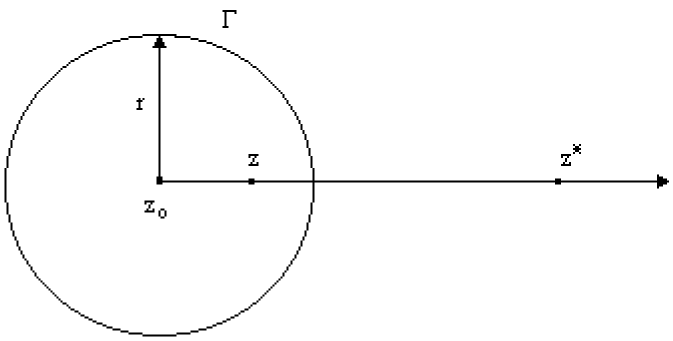
ko’rinishga keladi, bunda $F=B+iC$

(7) aylananing obrazini hosil qilish uchun (5)da $z = \frac{1}{w}$ deb (7) ga qo’ysak,

$$E + Fw + \overline{F}\overline{w} + Dw\overline{w} = 0 \qquad (8)$$

Bu (8) tenglama ham $\overline{C}_w$ da aylana yoki to’g’ri chiziqni ifodalaydi.

Ta’rif: Agar z va z^* nuqta lar $G=\{z\in \boldsymbol{C_z}: |z-z_0|=r\}$ aylana markazidan chiqqan bitta nurda yotib, bu nuqtalardan aylana markazigacha bo’lgan masofalar ko’paytmasi aylana radiusi kvadratiga teng bo’lsa, z va z^* nuqtalar *G* aylanaga nisbatan simmetrik nuqtalar deyiladi.



Ravshanki, bu holda

$$arg(z^*-z_0)=arg(z-z_0)$$
$$|z^*-z_0|\,|z-z_0|=r^2$$

bo’lib,

$$z^* - z_0 = \frac{r^2}{\overline{z - z_0}}$$

bo’ladi.

Teorema-2: Ixtiyoriy kasr-chiziqli akslantirish $\overline{C}_z$ dagi ixtiyoriy *G* aylanaga nisbatan simmetrik z va z^* nuqtalarni shu aylananing obraziga nisbatan simmetrik bo’lgan w va w^* nuqtalarga akslantiradi.

Isboti: ***(mustaqil).***

$w = \frac{az+b}{cz+d}$ akslantirishda $a\neq 0$ bo’lsin. U holda

$$w = \frac{z + \frac{b}{a}}{\frac{c}{a}z + \frac{d}{a}} = \frac{z + b_1}{c_1 z + d_1}$$

deb yozish mumkin.

Soddalik uchun

$$w = \frac{z+b}{cz+d} \qquad (9)$$

deb yozib olamiz.

Quyidagi masalani qaraymiz. $\overline{C}_z$ tekislikdagi $\forall z_1, z_2, z_3$ nuqtalarni $\overline{C}_w$ tekislikdagi $\forall$ w_1, w_2, w_3 nuqtalarga mos qo'yuvchi kasr-chiziqli akslantirish topilsin.

$$w_1 = \frac{z_1 + b}{cz_1 + d}, \quad w_2 = \frac{z_2 + b}{cz_2 + d}, \quad w_3 = \frac{z_3 + b}{cz_3 + d},$$

tengliklardan b,c,d larni topib (9) ga qo'ysak, izlanayotgan funksiya aniqlanadi. Lekin bu yo'l uzoq bo'lgani uchun boshqacha ish ko'ramiz.

$$w - w_1 = \frac{z+b}{cz+d} - \frac{z_1+b}{cz_1+d} = \frac{(z+b)(cz_1+d)-(z_1+b)(cz+d)}{(cz+d)(cz_1+d)} = \frac{z(d-bc)-(d-bc)z_1}{(cz+d)(cz_1+d)} =$$

$$= \frac{(d-bc)(z-z_1)}{(cz+d)(cz_1+d)}$$

$$w - w_2 = \frac{(d-bc)(z-z_2)}{(cz+d)(cz_2+d)}; \quad w_3 - w_1 = \frac{(d-bc)(z_3-z_1)}{(cz_3+d)(cz_1+d)}; \quad w_3 - w_2 = \frac{(d-bc)(z_3-z_2)}{(cz_3+d)(cz_2+d)}$$

munosabatlarga ega bo'lamiz. Bu munosabatlardan foydalanib,

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

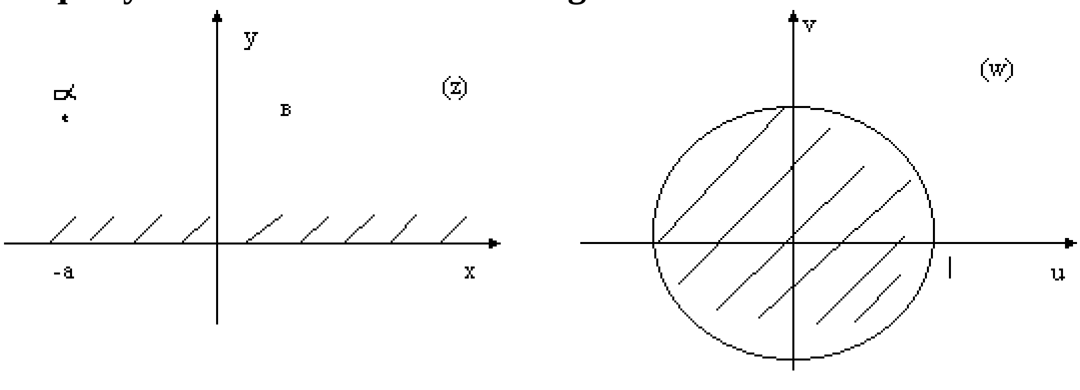
munosabatni hosil kilamiz. Bu munosabatga *angarmonik munosabat* deyiladi.

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} \qquad (10)$$

(10) 3 ta nuqtani 3 ta nuqtaga akslantiradigan formula. Demak, quyidagi teorema isbot bo'ldi.

Teorema: $\overline{C}_z$ tekislikdagi $\forall z_1, z_2, z_3$ nuqtalarni $\overline{C}_w$ tekislikdagi W_1, W_2, W_3 nuqtalarga akslantiruvchi kasr-chiziqli akslantirish mavjud va yagonadir.

5.Yuqori yarim tekislikni birlik doiraga akslantirish.



Yuqori yarim tekislikdagi biror α sonni obrazi $W=0$ bo'lsin. Ox o'qiga nisbatan α va $\overline{\alpha}$ sonlar simmetrik bo'lganligi uchun kasr–chiziqli akslantirish natijasida $\overline{\alpha}$ ni obrazi $w=0$ ga $|w|=1$ aylanaga nisbatan simmetrik bo'lgan $w=\infty$ nuqtaga o'tishi kerak. Shuning uchun kasr–chiziqli akslantirish quyidagi shaklda bo'lishi kerak.

$$w = k\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}$$

bu erda k o'zgarmas koeffitsientni topamiz. *Ox* o'qi |w|=1 aylanaga akslanadi deb qaralsa, $z=x$, $z-\alpha=x-\alpha=x-(a+ib)=(x-a)-bi$

$z-\bar{\alpha}=(x-a)+bi$ bo'ladi.

Bu yerdan ko'rinadiki,

$$1=|w|=\left|k\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}\right|=|k|\left|\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}\right|=|k|$$

ya'ni |k|=1ekan. Shuning uchun k ni quyidagicha yozish mumkin: $k=e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, bunda φ–o'zgarmas son. Shunday qilib, Yuqori yarim tekislikni birlik doiraga akslantiruvchi kasr–chiziqli funksiya ushbu

$$w=e^{i\varphi}\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}} \tag{11}$$

ko'rinishga egadir.

6.Yuqori yarim tekislikni o'z-o'ziga akslantirish

Ox o'qidan ∀ 3 ta $z_1=\alpha$, $z_2=\beta$, $z_3=\gamma$ nuqtalarni olib, ularni mos ravishda $w_1=0$, $w_2=1$, $w_3=\infty$ nuqtalarga mos qo'yamiz.

$$w=\frac{z+b}{cz+d},\qquad \frac{\alpha+b}{c\alpha+d}=0,\qquad b=-\alpha$$

$$\frac{\beta+b}{c\beta+d}=1,\qquad \beta-\alpha=c\beta+d \tag{*}$$

$d=-c\gamma$ da $\frac{\gamma-\alpha}{c\gamma+d}=\infty$ bo'ladi.

$d=-c\gamma$ ni (*) ga olib borib kuysak,

$$\beta-\alpha=c(\beta-\gamma)$$

$$c=\frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma},\qquad d=-\gamma\frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma}$$

formulaga olib borib qo'yamiz. Demak,

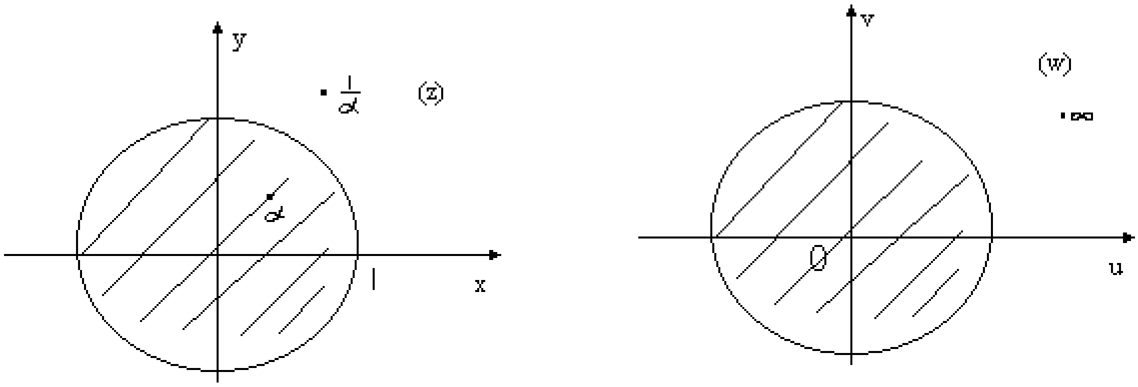
$$w=\frac{z+b}{cz+d}=\frac{z-\alpha}{\frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma}z-\gamma\frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma}}=\frac{(z-\alpha)(\beta-\gamma)}{(z-\gamma)(\beta-\alpha)}$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak, yuqori yarim tekislikni yuqori yarim tekislikka akslantiruvchi kasr chiziqli akslantirish

$$w=\frac{Az+B}{Cz+D}$$

shaklda bo'lib, (bunda A,B,C,D lar – haqiqiy sonlar) bu akslantirish Yuqori yarim tekislikni Yuqori yarim tekislikka akslantirar ekan.

7. Doirani o'z-o'ziga aks ettirish.



$|z| \le 1$ doiradagi birorta α nuqta w=*0* nuqtaga o'tsin. |z|=1 aylanaga nisbatan α nuqta ga simmetrik bo'lgan nuqta $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ bo'lganligi uchun $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ nuqta *W*=∞ nuqtaga o'tishi kerak. Shuning uchun kasr chiziqli akslantirish quyidagi shaklda bo'lishi kerak.

$$w = k\frac{z-\alpha}{z-\frac{1}{\bar{\alpha}}} = -k\bar{\alpha}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} = k'\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}, \quad \text{bunda } k' = -k\bar{a}$$

$|z|=1$ aylana $|w|=1$ aylanaga o'tadi deb hisoblasak,

$$1 = |w| = \left|k'\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right| = |k'|\cdot\frac{|z-\alpha|}{|1-\bar{\alpha}z|} \qquad \text{bo'ladi.}$$

$|\bar{z}| = 1$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$|1-\bar{\alpha}z| = |1-\bar{\alpha}z|\cdot|\bar{z}| = |\bar{z}-\bar{\alpha}z\bar{z}| = |\bar{z}-\bar{\alpha}| = |\overline{z-\alpha}| = |z-\alpha|$$

bundan, $|k'|=1$ ekanini hosil qilamiz. Shuning uchun $k' = e^{i\varphi}$, bunda φ o'zgarmas son. Demak,

$$w = e^{i\varphi}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} \qquad \text{ekan.}$$

Tayanch iboralar: chiziqli funksiya, kasr-chiziqli funksiya, simmetrik nuqtalar, angarmonik munosabat, doiraviylik xossasi, Yuqori yarim tekislikni birlik doiraga akslantirish, Yuqori yarim tekislikni o'z-o'ziga akslantirish, doirani o'z-o'ziga akslantirish.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Qanday funksiyaga chiziqli funksiya deyiladi?
2. Qanday funksiyaga kasr-chiziqli funksiya deyiladi?
3. Kasr-chiziqli akslantirish xossalarini ayting.
4. Kasr-chiziqli akslantirishning doiraviylik xossasini ayting.

5. Qanday nuqtalar simmetrik nuqtalar deyiladi?
6. Yuqori yarim tekislikni birlik doiraga akslantirishni tushuntiring.
7. Yuqori yarim tekislikni o'z-o'ziga akslantirishni tushuntiring.
8. Doirani o'z-o'ziga akslantirishni tushuntiring.

Adabiyotlar:[1]. 60-78 betlar, [2]. 42-54 betlar, [3]. 61-76 betlar, [4]. 289-298 betlar.

8-ma'ruza.

DARAJALI FUNKSIYA. JUKOVSKIY FUNKSIYASI.

Ushbu

$$W = z^n \tag{1}$$

ko'rinishdagi funksiya darajali funksiya deyiladi, bunda n – natural son.

Bu funksiya butun kompleks tekislikda golomorf. $W' = nz^{n-1} \neq 0$ shart $z \neq 0$ nuqtalarda bajariladi. Demak $W = z^n$ funksiya $C \setminus \{0\}$ sohadagi har bir z nuqtada konform ekan. Z=0 nuqtada konformlikning buzilishini shu nuqtada burchak kattaliklarining saqlamasligi ham ko'rsatadi.

C_z *ва* C_W tekisliklarda qutb koordanatalarini kiritamiz:

$$z = re^{i\varphi} \quad (z = |z|, \varphi = \arg z)$$

$$W = \rho e^{i\psi} \quad (\rho = |W|, \psi = \arg W)$$

Natijada **(1**) akslantirih ushbu

$$\rho e^{i\psi} = r^n e^{i\varphi n}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Undan esa,

$$\rho = r^n, \psi = n\varphi$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak,

$$W = z^n$$

akslantirish qutb koordinatalar sistemasida ushbu

$$\left.\begin{array}{l} \rho = r^n \\ \psi = n\varphi \end{array}\right\} \tag{2}$$

akslantirishga o'tadi. Binobarin (1) akslantirishni o'rganish (2) akslantirishni o'rganishga keladi.

(2) akslantirishda topamiz:

1) r=const bo'lganda ρ=const bo'ladi. Demak, (1) C_z tekislikdagi markazi z=0 nuqta da bo'lgan aylanalarni C_W tekislikdagi markazi W=0 nuqtada bo'lgan aylanalarga akslantiradi.

2) $\varphi = const$ bo'lganda $\psi = const$ bo'ladi. Demak, (1) akslantirish C_z tekislikdagi z0 nuqtadan chiqqan nurlarni, C_W tekislikka W=0 nuqtadan chiqqan nurlarga akslantiradi.

Ayni paytda (1) akslantirish $\varphi = 0$ nurni (haqiqiy musbat yo'nalish bo'yicha olingan nurni) $\psi = 0$ nurga, C_z tekisdagi $\psi = n \cdot \alpha$ nurga akslantiradi.

Yuqorida keltirilgan tasdiqlardan

$$W = z^n$$

akslantirish C_z tekislikdagi

$$D=\{z\in C_z : 0<\arg z<\alpha\} \ \ (\alpha<\frac{2\pi}{n})$$

sohani (uchi z=0 nuqtada bo’lgan burchakni sektorni) C_W tekisligidagi

$$W(D)=\{W\in C_W : 0<\arg W<n\alpha\}$$

sohaga (uchi W=0 nuqtada bo’lgan burchakka – sektorga) akslantirishi kelib chiqadi.

Darajali funksiya yordamida bajariladigan akalantirishda z=0 nuqtada burchak n marta oshganligi sababli z=0 nuqta da $W=z^n$ (1) akslantirish (n>1) konform bo’lmaydi.

Xususan,

$$W=z^n$$

akslantirish yordamida C_z tekislikdagi

$$\{z\in C_z : 0<\arg z<\frac{\pi}{n}\} \tag{3}$$

soha (burchak-sektor), C_W tekislikdagi

$$\{W\in C_W : 0<\arg W<\pi\} \tag{4}$$

sohaga (yuqori yarim tekislikka) o’tadi.

Demak, $W=z^n$ funksiya (3) sohaning (4) sohaga konform akslantiradi.

Endi C_z tekislikda ushbu

$$D=\{z\in C_z : 0<\arg z<\alpha\} \ \ (\alpha<\frac{2\pi}{n}) \tag{5}$$

sohani (uchi z=0 nuqtada, tomonlari argz=0,argz=2π/n nurlardan iborat burchakli-sektorni) olamiz.

Ravshanki,

$$W=z^n$$

funksiya yordamida bu soha C tekislikdagi

$$\{W\in C_W : 0<\arg W<\pi\} \tag{6}$$

sohaga akslanadi.

Xulosa. $W=z^n$ (1) -funksiyamtz butun tekislikda golomorf funksiya, bir yaproqli emas. Lekin C_z tekislikni n ta bo’lakka bo’lsak orasidagi burchak $\frac{2\pi}{n}$ ga teng bo’lgan. Funksiyamiz har bir bo’lakni konform $C_W \setminus R^+$ sohaga akslantiradi.

Praktikada bu funksiyadan burchak sohalarni yuqori yarim tekislikk akslantirishda foydalaniladi. Agar sohani buchagi $\frac{\pi}{n}$ ga teng bo’lsa, bizning funksiyamiz bunday sohani Yuqori yarim tekislikka akslantiradi.

Misol. Ushbu

$$W = z^3$$

darajali funksiya yordamida C_z tekislikdagi

$$E = \{z \in C_z : 0 < \arg z = \frac{\pi}{4}\}$$

to'plamning C_W tekislikdagi aksini toping. Berilgan E to'plamni

$$E = \{z \in C_z : 0 < \arg z = \frac{\pi}{4}\} = \left\{\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad 0 < r < +\infty\right\}$$

deb

$$W(E) = \{z \in C_z : \psi = 3 \cdot \frac{\pi}{4}, 0 < \rho < +\infty\} = \{W \in C_W : \arg W = \frac{3\pi}{4}\}$$

Jukovskiy funksiyasi.

Ushbu

$$W = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \qquad (1)$$

funksiyaga Jukovskiy funksiyasi deyiladi.

Funksiyamiz kasr–chiziqli funksiya emas. Faqat 2 ta kasr-chiziqli funksiya yig'indisidan iborat.

Bu funksiya $z = 0$ va $z = \infty$ nuqtalardan tashqari butun tekislikda golomorf. Uning hosilasi $W = \frac{1}{2}(z - \frac{1}{z^2}) \neq 0$, agar $z \neq \pm 1$ bo'lsa.

Bu yerdan ko'rinib turibdiki, ixtiyoriy chekli $z \neq 0; \pm 1$ nuqtada Jukovskiy funksiyasi konform bo'lar ekan. Bu funksiyaning $z = 0$ nuqtada konformligini konformlikning ta'rifidan foydalanib isbotlash mumkin. $f(z) = f(\frac{1}{z})$ tenglikdan esa funksiyaning $z = \infty$ nuqtada ham konformligi kelib chiqadi.

Shunday qilib Jukovskiy funksiyasi $z = \pm 1$ nuqtalardan tashqari hamma yerda konform ekan.

Endi bu funksiyasi 2 ta $z_1 \neq z_2$ nuqtalarni bitta nuqtaga o'tkazsin. U holda $W(z_1) = W(z_2)$

$$\frac{1}{2}(z_1 + \frac{1}{z_1}) = \frac{1}{2}(z_2 + \frac{1}{z_2})$$

$$(z_1 - z_2) - \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2} = 0$$

$$(z_1 - z_2)(1 - \frac{1}{z_1 z_2}) = 0$$

bo'ladi. $z_1 \neq z_2$ ekanligidan $z_1 \cdot z_2 = 1$ tenglikni hosil qilamiz.

Shunday qilib, Jukovsikiy funksiyasining birorta D sohada bir varaqli bo'lishi uchun bu sohaning

$$z_1 \cdot z_2 = 1 \tag{2}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi z_1 va z_2 nuqtalarni saqlamasligi zarur va etarlidir. (1)-funksiya quyidagi sohalarda bir yaproqli

a) $|z| > 1$

b) $|z| < 1$

c) $\operatorname{Im} z > 0$

d) $\operatorname{Im} z < 0$

Endi (1) funksiyaning geometrik ma'nosini tekshirish uchun quyidagicha yozib olamiz:

$$z = re^{i\varphi} \;, W = u + iv \;.$$

U holda

$$u + iv = \frac{1}{2}(re^{i\varphi} + \frac{1}{re^{i\varphi}}) = \frac{1}{2}(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}re^{-i\varphi}) = \frac{1}{2}\left[\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi\right]$$

Bundan

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi; \;\; v = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\sin\varphi \tag{3}$$

tenglamalarga ega bo'lamiz.

Endi Jukovskiy funksiyasi yordami bilan C_z tekislikdagi $|z| = r$ aylananing C_w tekislikdagi qanday chiziqdan iborat ekanini tekshiramiz. Bunda ikki hol bo'ladi: $0 < r < 1$ va $r > 1$. a) $0 < r < 1$ bo'lsin. Quyidagicha belgilab olaylik.

$a_r = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ va $b_r = -\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)$ bunda $b_r > 0$. U holda (3) ning ko'rinishi

$$u = a_r \cos\varphi \qquad v = -b_r \sin\varphi \qquad\qquad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad (3')$$

bo'lib,

$$\frac{u^2}{a_r^2} + \frac{v^2}{b_r^2} = 1 \tag{4}$$

bo'ladi.

Bu C_w tekislikda fokuslari ± 1 nuqtada, yarim o'qlari a_r va b_r bo'lgan ellipsni ifodalaydi. Endi ellipsdagi musbat yo'nalishni aniqlaylik. Agar aylana ustidagi ixtiyoriy z nuqta musbat yo'nalish bo'yicha bir marta aylanib chiqsa, φ burchak 0 dan 2π gacha o'zgaradi. (3') ellipsda $-b_r < 0$ bo'lgani uchun φ burchak 0 dan 2π gacha o'zgaradi: $-2\pi \le \varphi \le 0$. Buning uchun ellips ustidagi ixtiyoriy W nuqta soat strelkasi bo'yicha harakat qilishga majbur.

Agar biz aylananing r radiusini nolga yaqinlashtirsak $a_r \to \infty; b_r \to \infty$ *ва* $a_r - b_r = r \to 0$ ya'ni, ellips kattalasha borib, aylana shakliga yaqinlasha boradi.

Agar $r \to 1 \;\; (r < 1)$ bo'lsa, u holda $a_r \to 1; b_r \to 0$ ya'ni ellips Oy o'qidagi

[-1;1] kesmaga tortiladi.

Shunday qilib (1) funksiya bilan $|z|<1$ doira Oq o'qining [-1;1] kesmadan iborat bo'ladi. Shu bilan birga $|z|=1$ aylananing yuqori qismiga [-1;1] kesmaning quyi qirg'og'i va aylananing pastki qismiga esa kesmaning Yuqori qirg'og'i mos keladi.

b) $r>1$bo'lsin.

Bu holda (3) ellips tenglamalaridagi koeffisientlar

$$\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)>0 \quad \textit{ва} \quad \frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)>0$$

bo'lgani uchun $|z|=r$ aylana bilan ellipsning yo'nalishlari bir xil bo'ladi. Agar $r\to 1\ (r>1)$ bo'lsa, u holda:

$a_r\to 1, b_r\to 0$ ya'ni, ellips [-1;1] kesmaga tortiladi. Agar $r\to\infty$ bo'lsa, u holda: $a_r\to\infty;\ b_r\to\infty \quad \textit{ва} \quad a_r-b_r=\frac{1}{r}\to 0$ ya'ni, ellips kattalasha borib, aylana shakliga yaqinlashadi.

Yuqoridagi mulohazalarimizdan $|z|=1$ aylananing ichiga ham tashqariga ham [-1;1] kesmaning tashqarisi mos kelishi ochiq ko'rinib turibdi.

Endi

$$z=re^{i\varphi},\ 0<r<+\infty \tag{5}$$

($\varphi-$fiksirlangan) nurni qaraylik. Jukovskiy funksiya bilan akslantirishda bu nurning obrazi

$$u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\phi, \quad \nu=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\phi \quad 0<r<+\infty \tag{6}$$

egri chiziq bo'ladi. (6) tenglikdan topamiz:

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi}-\frac{v^2}{\sin^2\varphi}=1 \qquad (\varphi\neq\frac{k\pi}{2},\ k-\textit{бутун сон}) \tag{7}$$

(7)-chiziq fokuslari $W=\pm 1$ va asimptotasi $v=\pm arctg\phi$ bo'lgan giperboladir.

Xulosa: praktikada Jukovskiy funksiyasidan kesma yoki ellips bilan chegaralangan sohalarni birlik doiraga akslantirishda foydalaniladi.

Tayanch iboralar: golomorf funksiya, konform akslantirishlar, bir varaqli funksiyalar. darajali funksiya, darajali funksiya golomorfligi, konformlik sohasi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Darajali funksiyani umumiy ko'rinishi qanday?
2. Darajali funksiyani qutb koordinatalaridagi ko'rinishi qanday?
3. Darajali funksiyani konformlik sohasini ayting.
4. Jukovskiy funksiya nima?
5. Jukovskiy funksiyaning konformligi va geometrik ma'nosi.

Adabiyotlar: [1]. 78-90 betlar. [2] 54-69 betlar. [3] 93-99 betlar. [4] 306-338 betlar.

9 - Ma'ruza
KO'RSATKICHLI FUNKSIYA. TRIGONOMETRIK VA GIPERBOLIK FUNKSIYALAR.

Ushbu

$$e^{z}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}$$

ko'rinishdagi funksiyaga ko'rsatkichli funksiya deyiladi ,bunda $z\in C$ son uchun limitni mavjudligini isbot qilamiz .

$$\left|(1+\frac{z}{n})^{n}\right|=\left|\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^{n}\right|=\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)+i\frac{y}{n}\right|^{n}=\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{2}+\left(\frac{y}{n}\right)^{2}\right]^{\frac{n}{2}}=\left[1+\frac{2x}{n}+\frac{x^{2}+y^{2}}{n^{2}}\right]^{\frac{n}{2}}$$

Shuning uchun

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2xn+x^{2}+y^{2}}{n^{2}}\right)^{\frac{n^{2}}{2nx+x^{2}+y^{2}}}\right]^{\frac{2nx+x^{2}+y^{2}}{2n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2nx+x^{2}+y^{2}}{2n}}=e^{x}$$

$$\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}=n\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)=n\operatorname{arctg}\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}n\operatorname{arctg}\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}}{\frac{1}{n}}$$

Lapital koidasiga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{2}}}{-\dfrac{1}{n^{2}}}\cdot\frac{-\dfrac{y}{n^{2}}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)-\dfrac{y}{n}\left(-\dfrac{x}{n^{2}}\right)}{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{y\left(1+\dfrac{x}{n}\right)-\dfrac{xy}{n}}{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{2}}=y$$

Demak,

$$\lim_{n\to\infty} \arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = y$$

Shunday qilib, $\lim\limits_{n\to\infty} \arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ mavjud ekan .

Demak,

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^x(Cosy + iSiny)$$

ya'ni, $e^{x+iy} = e^x(Cosy + iSiny)$ formula o'rinli ekan. $x = 0$ desak $e^{iy} = Cosy + iSiny$ Eyler formulasini hosil qilamiz .

Xossalari.

1) $\forall z \in C$ nuqtada $W = e^z$ funksiya hosilaga ega, chunki

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = e^x Cosy$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y} = e^x Siny$$

Koshi-Riman shartlari bajariladi. (U, V lar differensiallanuvchi).

$$\left(e^z\right)' = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^z\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\left(Cosy + iSiny\right)\right) = e^x\left(Cosy + iSiny\right) = e^x$$

$$\left|e^z\right| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}$$

bo'lganligi uchun hamda $e^x > 0$ ekanligidan

$$\left|\left(e^z\right)'\right| = \left|e^z\right| = e^x > 0$$

ekanligi kelib chiqadi.

2) $W = e^z$ akslantirish barcha $z \in C$ nuqtalarda konformdir.

3) $\forall z_1, z_2$ nuqtalar uchun

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

haqiqatan ham

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}\left(Cosy_1 + iSiny_1\right)\cdot e^{x_2}\left(Cosy_2 + iSiny_2\right) = e^{x_1+x_2}\left(Cos(y_1+y_2) + iSin(y_1+y_2)\right)$$

$$= e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}$$

4) e^z funksiya mavhum davrga ega bo'lib, uni asosiy davri $2\pi i$ ga teng.

Haqiqatan ham

$$e^{2k\pi i} = Cos(2k\pi) + iSin\,(2k\pi) = 1$$

bo'lgani uchun

(3) xossaga ko'ra

$$e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z$$

Ikkinchi tomondan, agarda $e^{z+T} = e^z$ bo'lsa, bu tenglikning ikkala tomonini e^{-z} ga ko'paytirsak $e^T = 1$ni hosil qilamiz. $T = T_1 + iT_2$ bo'lsa,

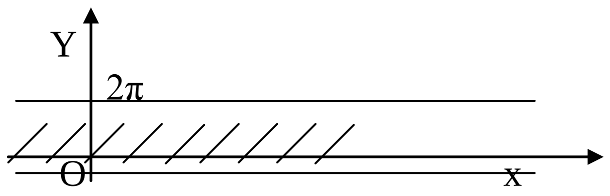
$$e^{T_1}\left(CosT_2 + iSinT_2\right) = 1$$

Bundan $CosT_2 = 1$, $SinT_2 = 0$ ekani kelib chiqadi. Bu tenglikni yechsak $T_1 = 0, T_2 = 2k\pi$ larni hosil qilamiz. Shuning uchun

$$T = T_1 + iT_2 = 0 + i2k\pi = 2k\pi i$$

Agar qandaydir D soha $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ tenglikni qanoatlantiradigan z_1, z_2 juftliklarni saqlamasa $W = e^z$ akslantirish bu D sohada bir varaqli bo'ladi.

Chunki $W = e^z$ tenglama z ga nisbatan bir qiymatli aniqlanadi. Bunday sohaga misol sifatida $D = \{z : 0 < Jmz < 2\pi\}$ polosani olish mumkin .



Bu polosadagi $\{y = y_0, 0 < y_0 < 2\pi\}$ to'g'ri chiziq $W = e^z$ yoki

$$\begin{cases} \rho = e^x \\ \psi = y \end{cases} \qquad W = \rho e^{i\psi}, \qquad z = x + iy$$

desak akslantirish natijasida $\{\psi = y_0\}$ nurga o'tadi. Xuddi shuningdek $\{x = x_0, 0 < y < 2\pi\}$ interval $W = e^z$ akslantirish natijasida $\{\rho = e^{x_0}, 0 < \psi < 2\pi\}$ bitta nuqtada kesilgan aylanaga o'tadi.

Xulosa. Demak $D = \{z : 0 < Jmz < 2\pi\}$ polosa musbat yarim o'q chiqarib tashlangan (W) tekislikka akslanar ekan. $\{z : 0 < Jmz < \pi\}$ polosa esa yuqori yarim tekislikka akslanadi.

Trigonometrik va giperbolik funksiyalar

Trigonometrik hamda giperbolik funksiyalar ko'rsatkichli funksiyalar orqali kiritiladi.

Ta'rif 1.

Ushbu

$$Cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad , \quad Sinz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$tgz = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \quad , \quad ctgz = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

ko'rinishdagi funksiyalar trigonometrik funksiyalar deyiladi. $W = Sinz$ va W=Cosz funksiyalar butun ko'mpleks tekislik C da aniqlangan, W=tgz funksiya

$$C\setminus\left\{z\in C: z=k\pi+\frac{\pi}{2}; k=0,\pm1,\pm2,...\right\}$$

to'plamda W=ctgz funksiya esa $C\setminus\{z\in C: z=k\pi; k=0,\pm1,\pm2,...\}$ to'plamda aniqlangan.

Quyidagiga $Chz=\dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}$, $Shz=\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}$

$$thz=\frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}} \qquad cthz=\frac{e^{z}+e^{-z}}{e^{z}-e^{-z}}$$

aniqlangan funksiyalar giperbolik funksiyalar deyiladi.Trigonometrik hamda giperbolik funksiyalar o'zaro quyidagi cosz=chz , sinz=–ish *iz* , thz=–itgiz, chz=cosiz, shz=–isin iz, cthz=ictg iz munosabatlar bilan bog'langan. Biz ulardan birini, masalan

shz=–isin iz

bo'lishini ko'rsatamiz:

(1) va(2) munosabatlardan foydalanib topamiz:

$$Siniz=\frac{1}{2i}\left(e^{i(iz)}-e^{-i(iz)}\right)=\frac{1}{2i}\left(e^{-z}-e^{z}\right)=-\frac{1}{i}\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}=-\frac{1}{i}Shz$$

Demak,

shz=–isin iz.

Biz quyida trigonometrik funksiyalarning ba'zi xossalarini keltiramiz

1. Ushbu

$$1)\ \sin^2 z+\cos^2 z=1$$

$$2)\ Sin(z_1+z_2)=Sinz_1\cdot Cosz_2+Cosz_1\cdot Sinz_2$$

$$3)\ Cos(z_1+z_2)=Cosz_1\cdot Cosz_2-Sinz_1\cdot Sinz_2$$

$$4)\ Sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=Cosz, \qquad Cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=-Sinz$$

$$5)\ Sin(z+\pi)=-Sinz \qquad Cos(z+\pi)=-Cosz,$$

Bu formulalarning o'rinli bo'lishini ko'rsatish qiyin emas. W=Sinz va W=Cosz funksiyalarning ta'riflaridan foydalanib topamiz:

$$Sin^2z+Cos^2z=\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2+\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2=\frac{e^{2iz}-2+e^{-2iz}}{-4}+\frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4}=1$$

qolgan tengliklar ham shunga o'xshash isbotlanadi.

2.W=Sinz toq funksiya ,W=Cosz esa juft funksiya bo'ladi .

Bu xossaning o'rinli bo'lishini W=Sinz,W=Cosz funksiyalarning ta'riflaridan bevosita kelib chiqadi .

Trigonometrik funksiyalar davriy bo'lib, W=Sinz, W=Cosz funksiyalarning davri 2π ga, W=tgz, W=Ctgz funksiyalarning davri esa π ga teng .

Haqiqatan , W=Sinz, funksiya ta'rifi hamda $e^{2\pi i}=1$ bo'lishini etiborga olib topamiz:

$$W(z+2\pi)=\mathrm{Sin}(z+2\pi)=\frac{1}{2i}\left(e^{i(z+2\pi)}-e^{-i(z+2\pi)}\right)=\frac{1}{2i}\left(e^{iz}e^{2\pi i}-e^{-iz}\frac{1}{e^{2\pi i}}\right)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\mathrm{Sin}z=W(z)$$

Demak,

$$\mathrm{Sin}(z+2\pi)=\mathrm{Sin}z$$

Bu esa W=Sinz davriy funksiya va uning davri 2π ga teng bo'lishini bildiradi .
W=tgz funksiya ta'rifidan foydalanib ,ushbu

$$\mathrm{tg}(z+\pi)=-i\frac{e^{i(z+\pi)}-e^{-i(z+\pi)}}{e^{i(z+\pi)}+e^{-i(z+\pi)}}=-i\frac{e^{i\pi}\left(e^{iz}-e^{-iz}e^{-2\pi i}\right)}{e^{i\pi}\left(e^{iz}+e^{-iz}e^{-2\pi i}\right)}=-i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}=\mathrm{tg}z$$

tenglikka kelamiz.
Demak, tg(z+π)=tgz .
Shunga o'xshash W=Cosz, W=Ctgz funksiyalarning davriy funksiya ekanligi ko'rsatiladi.

1. W=Sinz va W=Cosz funksiyalar $\forall z\in C$ da hosilaga ega bo'lib (Sinz)′=Cosz, (Cosz)′=–Sinz, bo'ladi .

W=tgz funksiya $\forall z\in C\setminus\left\{z\in C: z=k\pi+\frac{\pi}{2}: k=0,\pm1,...\right\}$ da hosilaga ega bo'lib

$$(\mathrm{tgz})'=\frac{1}{\mathrm{Cos}^2 z} \qquad (3)$$

bo'ladi.
W=ctgz funksiya $\forall z\in C\setminus\{z\in C: z=k\pi: k=0,\pm1,...\}$ da hosilaga ega bo'lib,

$$(ctgz)'=-\frac{1}{\sin^2 z} \qquad (4)$$

bo'ladi.

Haqiqatan ham,

$$(\sin z)'=\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)'=\frac{1}{2i}\left(e^{iz}\cdot i+e^{-iz}\cdot i\right)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z$$

$$(\cos z)'=\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)'=\frac{1}{2}\left(e^{iz}\cdot i-e^{-iz}\cdot i\right)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}=-\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=-\sin z$$

Xuddi shunga o'xshash (3) va (4) formulalarning to'g'riligi ko'rsatiladi .
Izoh. Haqiqiy argumentli $y=\sin x$, $y=\cos x$ funksiyalarning qiymatlari [–1,1] kesmada bo'lishini bilamiz.
Kompleks argumentli $\sin z$, $\cos z$ funksiyalarning qiymatlari modul jihatdan birdan katta bo'lishi ham mumkin:

$$|\cos i|=\frac{1}{2e}+\frac{e}{2}>1$$

Tayanch iboralar: ko'rsatkichli funksiya, ko'rsatkichli funksiya davri, ko'rsatkichli funksiya bir varaqlilik sohasi, trigonometrik funksiya, giperbolik funksiya, trigonometrik funksiyalarning davriyligi .

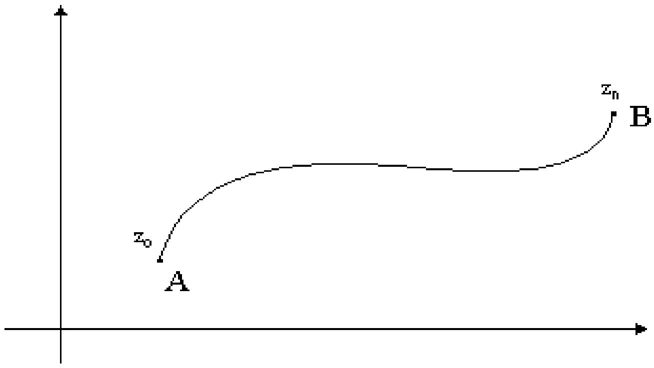
O'z-o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Ko'rsatkichli funksiya deb nimaga aytamiz?
2. Ko'rsatkichli funksiya xossalarini aytining.
3. Qanday sohalarda bu funksiya bir varaqli bo'ladi?
4. Trigonometrik funksiyalar ta'rifini ayting .
5. Giperbolik fuektsiyalar ta'rifini ayting .
6. Trigonometrik funksiya va giperbolik funksiyalar orasidagi bog'lanishlarni ayting.
7. Trigonometrik funksiyalarning xossalarini ayting .

Adabiyotlar: [1]. 91-100 betlar. [2] 69-76 betlar.

10-Ma'ruza
KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING INTEGRALI VA UNING XOSSALARI. KOSHI TEOREMASI

1°. Integral ta'rifi. Kompleks sonlar tekisligi C da biror silliq (bo'lakli silliq) γ=AB egri chiziq olaylik.



γ=AB egri chiziqni $A = z_0, z_1, \ldots, z_n = B$ nuqtalar yordamida n ta $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ bo'laklarga ajratamiz .

γ_k lar (k=1,2,...,n) uzunliklari l_k larning (k=1,2,...,n) eng kattasini λ bilan belgilaymiz:

$$\lambda = \max_{1 \le k \le n} l_k$$

Aytaylik, γ egri chiziqda $f(z)$ funksiya berilgan bo'lsin. Har bir γ_k da ixtiyoriy ξ_k nuqta olib, so'ng $f(z)$ funksiyaning shu nuqtadagi $f(\xi_k)$ qiymatini $z_k - z_{k-1}$ ga ko'paytirib, ushbu

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$$

yig'indini tuzamiz . bu yig'indi $f(z)$ funksiyaning integral yig'indisi deyiladi .

Ravshanki, $f(z)$ funksiyaning integral yig'indisi γ egri chiziqning bo'linishiga hamda har bir γ_k dan olingan ξ_k nuqtalarga bog'lik bo'ladi.

Ta'rif 1. Agar $\lambda \to 0$ da $f(z)$ funksiyaning integral yig'indisi γ egri chiziqning bo'linishiga hamda γ_k bo'lakda ξ_k nuqtaning tanlab olinishiga bog'lik bo'lmagan holda chekli limitga ega bo'lsa, bu limit $f(z)$ funksiyaning γ egri chiziq bo'yicha integrali deb ataladi va

$$\int_\gamma f(z)dz$$

kabi belgilanadi . Demak

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) \qquad \textbf{(1)}$$

2°. Integralning mavjudligi.

Yuqorida keltirilgan ta'rifdan ko'rinadiki, (1) integral γ egri chiziqqa hamda unda berilgan $f(z)$ funksiyaga bog'liq bo'ladi.

Faraz qilaylik, $\gamma = AB$ $(\gamma \in C)$ egri chiziq

$$z = z(t) = x(t) + iy(t)$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin. Bunda $x(t), y(t)$ funksiyalar $[\alpha, \beta]$ segmentda aniqlangan, uzluksiz hamda, uzluksiz $x'(t)$, $y'(t)$ hosilalarga ega$\left(x'^2(t) + y'^2(t) > 0\right)$. t parametr α dan β ga qarab o'zgarganda $z=z(t)$ nuqta A dan B ga qarab $\gamma = AB$ ni chiza boradi.

γ egri chiziqda $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiya aniqlangan va uzluksiz bo'lsin $[\alpha, \beta]$ segmentni $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = \beta$ nuqtalar yordamida n ta bo'lakka ajratamiz. $z=z(t)$ funksiya bu nuqtalarni γ egri chiziq nuqtalariga aylantiradi. t_k $(k = \overline{1, n})$ nuqtalarning γ dagi akslarini

$$A = z_0, z_1, ..., z_n = B$$

deylik.

Natijada bu nuqtalar yordamida γ egri chiziq γ_k bo'laklarga ajraladi, har bir γ_k da ixtiyoriy ξ_k $(\xi_k = \zeta_k + i\eta_k)$ nuqtani olamiz . Ravshanki,

$$\xi_k = z(\tau_k) \quad (t_{k-1} \le \tau_k \le t_k)$$

bo'ladi . Endi ushbu

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$$

yig'indini qaraymiz . Bu yig'indida

$$f(\xi_k) = u(\zeta_k, \eta_k) + iv(\zeta_k, \eta_k)$$

$$z_k - z_{k-1} = (x_k + iy_k) - (x_{k-1} + iy_{k-1}) = (x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k$$

bo'lishini e'tiborga olib quyidagini topamiz:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n}\left[u(\zeta_k, \eta_k) + iv(\zeta_k, \eta_k)\right] \cdot (\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[u(\zeta_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\zeta_k, \eta_k)\Delta y_k\right] + i\sum_{k=1}^{n}\left[v(\zeta_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\zeta_k, \eta_k)\Delta y_k\right]. \qquad \mathbf{(3)}$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi har bir yig'indi $u(x,y)$ va $v(x,y)$ funksiyalarning egri chiziqni integrallari uchun integral yig'indilaridir.

Qaralayotgan $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiya γ egri chiziqda uzluksiz. Binobarin, $u(x,y)$ va $v(x,y)$ funksiyalar ham γ da uzluksiz. Demak, bu funksiyalarning γ egri chiziq bo'yicha integrallari mavjud va

$$\lim_{\lambda \to 0}\sum_{k=1}^{n}\left[u(\zeta_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\zeta_k, \eta_k)\Delta y_k\right] = \int_\gamma u(x, y)dx - v(x, y)dy$$

$$\lim_{\lambda \to 0}\sum_{k=1}^{n}\left[v(\zeta_k, \eta_k)\Delta x_k - u(\zeta_k, \eta_k)\Delta y_k\right] = \int_\gamma v(x, y)dx - u(x, y)dy$$

bo'ladi.

(3) da $\lambda \to 0$ da limitga o'tib topamiz:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) = \int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

Bunda esa $\lambda \to 0$ da σ yig'indi chekli limitga ega va

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Natijada quyidagi teoremaga kelamiz.

Teorema 1: Agar *f(z)* funksiya γ egri chiziqda uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiyaning γ egri chiziq bo'yicha integrali mavjud va

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

bo'ladi.

3^o. Integralning xossalari.

Yuqorida ko'rdikki, uzluksiz *f(z)* kompleks o'zgaruvchili funksiyaning γ egri chiziq bo'yicha integrali egri chiziqli integralga kelar ekan.

Shuning uchun *f(z)* funksiya integrali ham egri chiziqli integrallar xossalari kabi xossalarga ega bo'ladi.

1) $\int_\gamma af(z)dz = a\int_\gamma f(z)dz$, $a \in C$, $a = const$

o'ng tomondagi integralni mavjudligidan chap tomondagi integralni mavjudligi kelib chiqadi.

2) $\int_\gamma (f(z) \pm g(z))dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\gamma g(z)dz$

o'ng tomondagi integralni mavjudligidan chap tomondagi integralni mavjudligi kelib chiqadi.

3) Agar *f(z)* funskiya γ egri chiziq bo'yicha integrallanuvchi bo'lib

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \quad (\gamma_1 \cap \gamma_2 = \varnothing)$$

bo'lsa, u holda

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma 1} f(z)dz + \int_{\gamma 2} f(z)dz$$

bo'ladi.

4) Agar *f(z)* fukntsiya γ egri chiziq bo'yicha integrallanuvchi bo'lib bo'lsa, u holda

$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$$

bo'ladi.

5) Agar *f(z)* funksiya γ egri chiziqda uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|\cdot|dz|$$

bo'ladi, bunda $|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

Agar $M = \max\limits_{\gamma} |f(z)|$ bo'lsa

$$\left| \int\limits_{\gamma} f(z)dz \right| \le M \cdot l(\gamma)$$

bo'ladi, bunda $l(\gamma)$ – γ egri chiziq uzunligi.

6) Faraz qilaylik, *f(z)* $D \subset C$ sohada uzluksiz bo'lib, $\gamma \subset D$ bo'lakli silliq egri chiziq bo'lsin. U holda $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham *D* sohaga tegishli bo'lgan shunday P sinikq chiziq topiladiki,

$$\left| \int\limits_{\gamma} f(z)dz - \int\limits_{P} f(z)dz \right| < \varepsilon$$

bo'ladi.

4^{o}. Integralni xisoblash.

Aytaylik, C da γ egri chiziq ushbu

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

tenglama bilan berilgan bo'lib, *x(t), y(t)* funksiyailar $[\alpha, \beta]$ segmenda aniqlangan, uzluksiz hamda uzluksiz $x'(t),\ y'(t)$ hosilarga ega bo'lsin. Bu egri chiziqda *f(z)* funksiya berilgan va uzluksiz bo'lsin, u holda

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt \qquad \textbf{(*)}$$

bo'ladi. Bu formula integralni hisoblash formulasi.

Izoh. (*) tenglik bilan berilgan integralni kompleks argumentli funksiya integrali ta'rifi sifatida qarash mumkin.

Misol.

$$J_n = \int\limits_{\gamma} (z-a)^n dz \quad , \qquad n \in Z$$

intengralni hisoblang, bu yerda $\gamma = \{z \in C : |z-a| = \rho,\ \rho > 0\}$.

Yechish. γ – aylananing tenglamasi quyidagicha

$$z = z(t) = a + \rho e^{it} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

$$dz = d\left(a + \rho e^{it}\right) = i\rho e^{it} dt$$

$$J_n = \int\limits_{\gamma} (z-a)^n dz = i\rho^{n+1} \int\limits_{0}^{2\pi} e^{it(n+1)} dt$$

Agar $n \ne -1$ bo'lsa

$$J_n = i\rho^{n+1} \int\limits_{0}^{2\pi} e^{it(n+1)} dt = i\rho^{n+1} \frac{e^{it(n+1)}}{i(n+1)}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Agar $n = -1$

$$J_n = i\int\limits_{0}^{2\pi} e^{it\cdot 0} dt = 2\pi i$$

Demak,

$$\int_{\gamma}(z-a)^n dz = \int_{|z-a|=\rho}(z-a)^n dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

Koshi teoremasi.

Demak, biz bilamiz: $\oint_{\Gamma} P(z)dz = 0$ $P(z)-$ polinom. Savol tug'iladi– "Golomorf funksiyadan olingan integral nolga tengmi yoki yo'q?".

Bunga Koshi teoremasi javob beradi.

Javob salbiy. Agar f faqat Γ ni ustida golomorf bo'lsa.

Masalan:

$$\int_{|z-a|=2}\frac{dz}{z-a} = 2\pi i \neq 0 \text{ demak yuk.}$$

1). Koshi teoremasi.

Teorema: Agar $f(z)$ funksiya bir bog'lamli D sohada $(D \subset C)$ golomorf bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiyaning D sohada yotuvchi har qanday silliq, (bo'lakli silliq) Γ yopiq chiziq bo'yicha integrali nolga teng bo'ladi:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

Isbot: 1-hol. $\Gamma = \partial\Delta -$uchburchak chegarasi bo'lgan xol. Bu uchburchakni perimetri P ga teng bo'lsin. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni teorema shartlari bajarilsinu, lekin

$$\left|\oint_{\partial\Delta} f(z)dz\right| = M > 0$$

bo'lsin.

Δ-uchburchakni, uning tomonlari o'rtalarini birlashtiruvchi to'g'ri chiziq kesmalari yordamida 4 ta

$$\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \Delta^{(3)}, \Delta^{(4)}$$

uchburchaklarga ajratamiz.

Natijada quyidagi munosabatga kelamiz

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta^1} f(z)dz + \int_{\partial\Delta^2} f(z)dz + \int_{\partial\Delta^3} f(z)dz + \int_{\partial\Delta^4} f(z)dz$$

Ravshanki,

$$M = \left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| \leq \left|\int_{\partial\Delta^1} f(z)dz\right| + \left|\int_{\partial\Delta^2} f(z)dz\right| + \left|\int_{\partial\Delta^3} f(z)dz\right| + \left|\int_{\partial\Delta^4} f(z)dz\right|$$

bu tengsizlikning o'ng tomonidagi qo'shiluvchilardan kamida bittasi $\frac{M}{4}$ dan kichik bo'lmaydi, shu uchburchakni Δ_1 deb belgilaymiz, ya'ni

$$\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)dz\right| \geq \frac{M}{4}$$

Δ_1 - uchburchakning perimetri $\frac{P}{2}$ ga teng.

Endi Δ_1 uchburchakka yuqoridagi usul bilan yana 4 ta $\Delta_1^{(1)}, \Delta_1^{(2)}, \Delta_1^{(3)}, \Delta_1^{(4)}$ uchburchaklarga ajratamiz. Bu uchburchaklar orasida shunday Δ_2 uchburchakning perimetri $\frac{P}{2^2}$ ga teng.

Bu jarayonni cheksiz davom ettira boramiz.

Natijada: $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, ..., \Delta_n, ...$ uchburchaklar ketma-ketligi hosil bo'ladi. Bu uchburchaklar ketma-ketligi uchun:

1) $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset ... \supset \Delta_n \supset ...$

2) Δ_n uchburchakning perimetri $\frac{P}{2^n}$ ga teng va $n \to \infty$ da $\frac{1}{2^n} \to 0$;

3) har bir Δ_n (n=1,2,…) uchburchak uchun

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right| \geq \frac{M}{4^4} \qquad (1)$$

bo'ladi.

1) va 2) tasdiqlardan barcha $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, ..., \Delta_n, ...$ uchburchaklarga tegishli bo'lgan yagona z_0 nuqta $(z_0 \in D)$ mavjud bo'lishi kelib chiqadi.

Shartlarga ko'ra f(z) funksiya z_0 nuqtada golomorf. Demak, $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon)$ son topiladiki,

$$|z - z_0| < \delta$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha z lar uchun

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon,$$

ya'ni

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|$$

bo'ladi.

Endi biz bilamizki,

$$\int_{\partial\Delta_n} dz = 0, \quad \int_{\partial\Delta_n} zdz = 0$$

va n ning etarli katta qiymatlarida

$$\Delta_n \subset \{z \in C : |z - z_0| < S\} \qquad \text{bo'ladi.}$$

Demak,

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta_n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)]dz \right| \leq$$

$$\leq \int_{\partial\Delta_n} | f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) || dz | < \varepsilon \int_{\partial\Delta_n} | z - z_0 || dz | = \varepsilon \frac{p}{2^n} \cdot \frac{p}{2^n} = \varepsilon \cdot \frac{p^2}{4^n} \quad (2)$$

(1) va (2) dan

$$\frac{M}{4^n} \le \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right| \le \varepsilon \cdot \frac{p^2}{4^n}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak ,

$$M < \varepsilon \cdot p^2 .$$

Bu tengsizlik M>0 deb qilingan farazga zid. (chunki $\varepsilon -$ixtiyoriy musbat son). Ziddiyatlik bo'lmasligi uchun M=0 bo'lishi kerak.

Shunday qilib M=0, ya'ni

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0 \text{ bo'ladi.}$$

2) Γ egri chiziq ko'pburchak konturidan iborat bo'lsin: Γ=P

Ravshanki, ko'pburchak chekli sondagi uchburchaklarga ajraladi va

$$\int_P f(z)dz$$

integral esa bu uchburchaklar bo'yicha olingan integrallar yig'indisiga teng bo'ladi. Uchburchaklar bo'yicha olingan integrallarning har biri 1) holga binoan nolga teng bo'ladi.

Binobarin,

$$\int_P f(z)dz = 0$$

bo'ladi.

3) Γ egri chiziq ixtiyoriy silliq (bo'lakli silliq) yopiq egri chiziq bo'lsin. Integralning 6-xossasiga ko'ra D sohaga tegishli bo'lgan shunday P ko'pburchak topiladiki,

$\left| \int_P f(z)dz - \int_P f(z)dz \right| < \varepsilon$ bo'ladi, bunda $\varepsilon -$ ixtiyoriy musbat son 2) holga binoan

$$\int_P f(z)dz = 0$$

demak,

$$\left| \int_\Gamma f(z)dz \right| < \varepsilon$$

bundan esa

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. *Teorema to'liq isbot bo'ldi.*

Natija 1. Agar f(z) funksiya bir bog'lamli D sohada $(D \subset C)$ golomorf bo'lsa, u holda f(z) funksiyaning integrali integrallash egri chizig'iga bog'liq bo'lmaydi, ya'ni boshlang'ich va oxirgi nuqtalari umumiy hamda D sohada yotuvchi γ_1 va $\gamma_2$egri chiziqlar uchun

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

bo'ladi.

2. Koshi teoremasini umumlashtirish.

Aytaylik, D $(D \subset C)$chegarlangan bir bog'lamli soha bo'lib, uning chegarasi ∂D silliq (bo'lakli silliq) yopiq egri chiziqdan iborat bo'lsin.

Teorema: Agar $f(z) \in \sigma(D) \cap C(\partial D)$ bo'lsa, u holda

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0$$

bo'ladi. Bu erda ∂Dni yo'nalishi musbat yo'nalish.

$D \subset C$ soha berilgan bo'lsin. D soha chegarasi ∂Dni orientirlangan yo'nalish deb shunday yo'nalishga aytiladiki, bu yo'nalish bo'yicha chegarada harakat qilganda soha har doim chap tomonda qoladi.

Teorema: (Ko'p bog'lamli soha uchun Koshi teoremasi)

Agar f(z) funksiya ko'p bog'lamli D sohada golomorf va $\overline{D}$da uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0$$

bo'ladi.

Bu erda integral chegarani orientirlangan yo'nalishi bo'yicha olinyapti.

Tayanch iboralar: integral ta'rifi, integralning mavjudligi, integralni xossalari, integralni hisoblash, golomorf funksiya, bir bog'lamli soha, silliq chiziq, yopiq chiziq, integral, orientirlangan yo'nalish.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Koshi teoremasini ayting.
2. Umumlashgan Koshi teoremasini ayting.
3. Ko'p bog'lamli soha uchun Koshi teoremasini ayting.

Adabiyotlar: [1] 101-117 betlar, [2] 68-75 betlar, [3] 111-134 betlar, [4] 81-87 betlar, [5] 143-155 betlar.

11-Ma'ruza.

BOSHLANG'ICH FUNKSIYA TUSHUNCHASI. KOSHINING INTEGRAL FORMULASI

Faraz qilaylik $f(x)$ funksiya D sohada ($D \subset C$) aniqlangan bo'lsin.

Ta'rif. Agar D sohada $f(z)$ funksiya shu sohada golomorf bo'lgan *F(z)* funksiyaning hosilasiga teng bo'lsa, ya'ni

$$F'(z) = f(z) \qquad (z \in D)$$

bo'lsa, u holda $F(z)$ funksiya D sohada $f(z)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deyiladi.

Agar D sohada $F(z)$ funksiya $f(z)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, $F(z)$+c. (c-ixtiyoriy o'zgarmas son) $f(z)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi.

Haqiqatan ham

$$\left(F(z)+c\right)' = F'(z) = f(z).$$

Teorema: Agar *f(z)* funksiya bir bog'lamli D sohada ($D \subset S_z$) golomorf bo'lsa, u holda *f(z)* funksiya shu sohada boshlang'ich funksiyaga ega bo'ladi.

Isbot: D sohada z_0 ixtiyoriy z nuqtalarni olib, ularni shu sohada yotuvchi silliq (bo'lakli silliq) chiziq bilan birlashtiramiz.

Unda

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$$

integral z ga bog'liq bo'ladi. Uni *F(z)* orqali belgilaymiz:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta. \qquad (1)$$

Koshi teoremasining natijasiga ko'ra bu integral integrallash yo'liga bog'liq bo'lmaydi. Binobarin, *F(z)*funksiya D sohada bir qiymatli aniqlanadi.

Endi (1) funksiya D sohada berilgan *f(z)* funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lishini ko'rsatamiz.

z nuqtaga shunday Δz orttirma beraylikki, $z+\Delta z$ nuqta z nuqtaning D sohaga tegishli etarlicha kichiq atrofida yotsin. U holda *F(z)* funksiya ortirmasi uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta \qquad \left(\zeta \in D\right)$$

Bu tenglikning har ikki tomonini Δz ga bo'lamiz:

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta \qquad (2)$$

Ravshanki

$$\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z)\,d\zeta = f(z)\cdot\Delta z$$

ya'ni

$$\frac{1}{\Delta z}\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z)\,d\zeta = f(z) \qquad (3)$$

bo'ladi.

(2) va (3) dan foydalanib

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta - \frac{1}{\Delta z}\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z)\,d\zeta = \frac{1}{\Delta z}\int_{z_0}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]\,d\zeta$$

ifodani topamiz.

Keyingi tengsizlikdan

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| \le \frac{1}{|\Delta z|}\int_{z_0}^{z+\Delta z} |f(\zeta)-f(z)||\,d\zeta| \qquad (4)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Yana Koshi teoremasining natijasidan foydalanib, z va $z+\Delta z$ nuqtalarini birlashtiruvchi va D sohada yotuvchi chiziq sifatida shu nuqtalarni birlashtiruvchi kesmani olamiz. Unda ζ ning $[z, z+\Delta z]$ kesmaga tegishli bo'lishidan ushbu

$$|z-\zeta| \le |\Delta z|$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

$f(z)$ funksiya z nuqtada uzluksiz. Demak, $\forall\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $|\Delta z| < \delta$ bo'lganda

$$|f(\zeta)-f(z)| < \varepsilon$$

bo'ladi. Shuni e'tiborga olib (4) dan topamiz:

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| \le \frac{1}{|\Delta z|}\int_{z_0}^{z+\Delta z} |f(\zeta)-f(z)||\,d\zeta| < \frac{1}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon\int_{z_0}^{z+\Delta z}|d\zeta| = \frac{\varepsilon}{|\Delta z|}\cdot|\Delta z| = \varepsilon\,.$$

Demak,

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| < \varepsilon\,.$$

Bundan esa

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = f(z)\,,$$

ya'ni

$$F'(z) = f(z)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Aytaylik $F_1(z)$ va $F_2(z)$ funksiyalarning har biri D sohaga bitta $f(z)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'lsin. Unda $F_1(z)$ va $F_2(z)$ funksiyalar D sohada bir-biridan o'zgarmas songa farq qiladi. Haqiqatan ham,

$$F_1'(z) = f(z), \qquad F_2'(z) = f(z),$$

bo'lganligidan

$$\Phi'(z) = F_1'(z) - F_2'(z)$$

funksiya uchun

$$\Phi'(z)=0 \qquad (z\in D)$$

bo'ladi. Agar $\Phi(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ deyilsa, unda

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

bo'lib, F(z) funksiyaning o'zgarmas ekanligi kelib chiqadi.

Demak,

$$\Phi(z)=F_1'(z)-F_2'(z)=C \qquad (C=const)$$

ya'ni

$$F_1'(z)=F_2'(z)+C$$

bo'ladi.

N a t i j a: Faraz qilaylik, *f(z)* funksiya bir bog'lamli D sohada ($D\subset C_z$) golomorf bo'lsin. U holda

$$\Phi(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta+C \qquad (5)$$

funksiya D sohada, *f(z)* ning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi, bunda C- ixtiyoriy kompleks son. (5) boshlang'ich funksiyaning umumiy ko'rinishini ifodalaydi.
(5) dan, avval $z=z_0$ deb

$$\Phi(z_0)=C\,,$$

so'ngra $z=z_1$ deb

$$\Phi(z_1)=\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)\,d\zeta+C=\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)\,d\zeta+\Phi(z_0)$$

tengliklarni topamiz. Oxirgi tenglikdan esa

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)\,d\zeta=\Phi(z_1)-\Phi(z_0) \qquad (6)$$

bo'lishi kelib chiqadi.
Odatda (6) formula Nyuton–Leybnits formulasi deyiladi.

Aytaylik, *f(z)* va *g(z)* funksiyalar D sohada golomorf bo'lsin.
Ma'lumki,

$$[f(z)\cdot g(z)]'=f'(z)\cdot g(z)+f(z)\cdot g'(z)$$

Bu tenglikni integrallab topamiz:

$$\int_{z_0}^{z_1}[f'(z)\cdot g(z)]dz=\int_{z_0}^{z_1} f'(z)\cdot g(z)dz+\int_{z_0}^{z_1} f(z)\cdot g'(z)dz \qquad (7)$$

Agar

$$\int_{z_0}^{z_1}[f'(z)\cdot g(z)]dz=f'(z_1)\cdot g(z_1)-f'(z_0)\cdot g(z_0)=[f'(\zeta)\cdot g(\zeta)]\Big|_{z_0}^{z_1}$$

bo'lishini etiborga olsak, unda (7) tenglik ushbu

$$\int_{z_0}^{z_1} f'(z)\cdot g'(z)dz=f(z)\cdot g(z)\Big|_{z_0}^{z_z}-\int_{z_0}^{z_1} f'(z)\cdot g(z)dz$$

tenglikka keladi. Bu bo'laklab integrallash formulasidir.

Koshining integral formulasi.

Kompleks sonlar tekisligi C da D sohani qaraylik. Uning chegarasi ∂D silliq (bo'lakli silliq) chiziqdan iborat. Bu yopiq egri chiziq musbat yo'nalishda olingan bo'lsin. Aytaylik, $\overline{D}$ da f(z) funksiya aniqlangan bo'lsin.

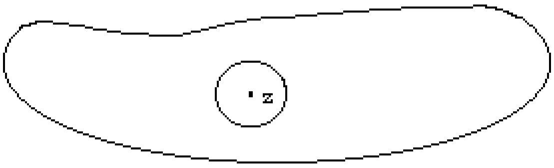
Teorema: Agar $f(z) \in V(D) \cap C(\overline{D})$ bo'lsa, u holda $\forall z \in D$ nuqta uchun

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \quad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

O'ng tomonda f(z) funksiyamizni faqat chegaradagi qiymatlar ishtirok qilyapti. Demak golomorf funksiya o'zini chegaradagi qiymatlari bilan to'la aniqlanadi.

Isbot:



Etarlicha kichiq ρ son uchun $U_\rho = \{z : |z' - z| < \rho\}$ doirani qaraymiz $(U_\rho \subseteq D)$, u holda $D_\rho = D \setminus \overline{U_\rho}$ sohada $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ funksiya 2 ta golomorf funksiyaning nisbati sifatida (maxraji nolga teng emas) golomorfdir (hattoki $\overline{D_\rho}$ da ham). Ko'p bog'lamli soha uchun Koshi teoremasiga ko'ra

$$\int_{\partial D_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0$$

yoki bundan

$$\int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{\partial U_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \qquad (2)$$

Endi $\rho \to 0$ da o'ng tomon $2\pi i f(z)$ ga intilsa bas. Shuni ko'rsatamiz. f(z) funksiya z nuqtada uzluksiz bo'lganligi uchun $\forall \varepsilon > 0$ songa ko'ra, $\exists \delta > 0$ ni $|\xi - z| = \rho < \delta$ bo'lganda $|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

$$2\pi i f(z) - \int_{\partial U_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z) \int_{\partial U_\rho} \frac{d\xi}{\xi - z} - \int_{\partial U_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi =$$

$$= \int_{\partial U_\rho} \frac{f(z) - f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \qquad (3)$$

Bundan

$$\left|2\pi i f(z)-\int\limits_{\partial U_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi\right|=\left|\int\limits_{\partial U_\rho}\frac{f(z)-f(\xi)}{\xi-z}d\xi\right|\le\int\limits_{\partial U_\rho}\frac{|f(z)-f(\xi)|}{|\xi-z|}|d\xi|\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{\rho}\int\limits_{\partial U_\rho}|d\xi|=\frac{\varepsilon}{\rho}2\pi\rho=2\pi\varepsilon\to 0.$$

$\rho\to 0$ da (3) ning chap tomoni nolga intilishi kelib chiqdi. (2) ni chap tomoni ρ ga bog'lik emasligini hisobga olsak

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

ni hosil qilamiz. Shartga ko'ra

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

ekan.

Odatda (1) formulaga Koshining integral formulasi deyiladi.

Endi Koshining integral formulasini xususiy holda, chegarasi aylanadan iborat soha uchun keltiramiz. Kompleks tekislik C da ushbu $D=\{z\in C:|z-z_0|<r, r>0\}$ doirani qaraylik $(z_0\in C)$. Ravshanki bu doiraning chegarasi $\partial D=\{z\in C:|z-z_0|=r, r>0\}$ aylana bo'ladi.

Aytaylik f(z) funksiya $\overline{D}$ to'plamda berilgan bo'lsin.

Teorema: (O'rta qiymat haqidagi teorema)

Agar $f(z)\in V(D)\cap C(\overline{D})$ bo'lsa, u holda

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\varphi})d\varphi \qquad (4)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isbot: Koshining integral formulasiga ko'ra

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \qquad (5)$$

formula o'rinli.

Ravshanki, markazi $z_0\in C$ nuqtada radiusi r bo'lgan ∂D aylanada $\xi=z_0+re^{i\varphi}$ $(0\le\varphi\le 2\pi)$ bo'lib $d\xi=ire^{i\varphi}d\varphi$ bo'ladi.

Unda

$$\int\limits_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{i\varphi})\cdot ire^{i\varphi}}{re^{i\varphi}}d\varphi=i\int\limits_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\varphi})d\varphi \qquad (6)$$

bo'ladi. (5) va (6) tenglikdan (4) tenglik kelib chiqadi.

Tayanch iboralar: boshlang'ich funksiya, Nyuton-Leybnits formulasi, bo'laklab integrallash formulasi. Soha, soha chegarasi, sohani yopig'i, golomorf funksiya, Koshining integral formulasi, o'rta qiymat haqidagi teorema.

O’z-o’zini tekshirish uchun savollar:

1. Boshlang’ich funksiya ta’rifini ayting?
2. Qachon $f(z)$ funksiya boshlang’ich funksiyaga ega bo’ladi?
3. Boshlang’ich funksiyaning yagonaligini tushuntiring?
4. Boshlang’ich funksiyaning umumiy ko’rinishini ayting?
5. Nyuton-Leybnits formulasini kursating.
6. Soha ta’rifini ayting.
7. Golomorf funksiya ta’rifini ayting.
8. Koshining integral formulasini ayting.
9. O’rta qiymat haqidagi teoremani ayting.

Adabiyotlar: [1] 17-127 betlar, [2] 90-93 betlar, [3] 135-149 betlar, [4] 87-94 betlar, [5] 166-169 betlar.

12-Ma'ruza.

DARAJALI QATORLAR.

1. *Darajali qator*

Tarif 1: Ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad \textbf{(1)}$$

yoki

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \textbf{(2)}$$

ko'rinishdagi qatorga darajali qator deyiladi.

$c_\kappa \ (\kappa = 0,1,2,...)$ kompleks sonlar darajali qatorning koeffitsientlari deyiladi.

Agar (2) da $z - a = \xi$ desak, u holda (2) ko'rinishdagi qator (1) ko'rinishdagi qatorga keladi. Demak (1) ko'rinishdagi qatorni o'rganish yetarli.

Teorema 1: (Abel). Agar

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \qquad (1)$$

darajali qator z ning $z = z_0 \ (z_0 \neq 0)$ qiymatida yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu qator

$$\{z \in C : |z| < |z_0|\}$$

doirada absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isbot. Shartga ko'ra

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^{\ n}$$

sonli qator yaqinlashuvchi. Qator yaqinlashishning zaruriy shartiga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$$

bo'ladi.

Madomiki, $\{c_n z_0^n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega ekan, unda bu ketma-ketlik chegaralangan, ya'ni shunday o'zgarmas M>0 son mavjudki, $\forall n \in N$ uchun

$$|c_n z_0^n| \leq M$$

bundan
$$|c_n z^n| = |c_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \qquad \textbf{(3)}$$

Endi ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n z^n|$$

qator bilan birga quyidagi

$$\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

qatorni qaraymiz.

Ravshanki, $\sum_{n=o}^{\infty} M\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ qator yaqinlashuvchi bo'ladi, chunki $\left|\frac{z}{z_0}\right| = q < 1$ geometrik qator (3) ga ko'ra $\sum_{n=0}^{\infty}\left|C_n z^n\right|$ qator $\{z \in C : |z| < |z_0|\}$ doirada yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, berilgan $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ qator $\{z \in C : |z| < |z_0|\}$ doirada absolyut yaqinlashuvchi. *Teorema isbot bo'ldi.*

Natija 1: Agar

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

darajali qator $z=z_1$ nuqtada uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda qator $\{z \in C : |z| > |z_1|\}$ sohada uzoqlashuvchi bo'ladi.

Isbot: Berilgan darajali qator $z=z_1$ nuqtada uzoqlashuvchi bo'lsin. Unda bu qator z ning $\{|z| > |z_1|\}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida ham uzoqlashuvchi bo'ladi, chunki $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ qator z ning $\{|z| > |z_1|\}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi biror $z=z^*$qiymatida yaqinlashuvchi bo'ladigan bo'lsa, Abel teoremasiga binoan bu qator $z=z_1$ nuqtada $\left(|z_1| < |z^*|\right)$ ham yaqinlashuvchi bo'lib qoladi. Bu esa $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ qatorning $z=z_1$ nuqtada uzoqlashuvchi deyilishiga ziddir. Demak, berilgan qator $\{z \in C : |z| > |z_1|\}$ da uzoqlashuvchi. Natija isbot bo'ldi.

2. Darajali qatorning yaqinlashish radiusi va yaqinlashish doirasi.

Teorema 2. Agar (1) darajali qator z ning ba'zi $(z \neq 0)$ qiymatlarida yaqinlashuvchi, ba'zi qiymatlarida uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda shunday yagona R (R>0) son topiladiki (1) qator

$$\{z \in C : |z| < R\}$$

doirada yaqinlashuvchi,

$$\{z \in C : |z| > R\}$$

sohada esa uzoqlashuvchi bo'ladi.

Isbot: (Mustaqil)

Ta'rif 2. Agar (1) darajali qator $\{z \in C: \ |z| < R\}$ da yaqinlashuvchi, $\{z \in C: |z| > R\}$ da uzoqlashuvchi bo'lsa, R son (1) darajali qatorning yaqinlashish radiusi, $\{z \in C: \ |z| < R\}$ doira esa (1) darajali qatorning yaqinlashish doirasi deyiladi.

E s l a t m a. (1) darajali qator

$$\{z \in C_z : |z| = R\}$$

aylana nuqta arida yaqinlashuvchi ham bo'lishi mumkin, uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin.

Teorema 3. (Koshi–Adamar teoremasi)

Berilgan

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusi

$$R = \frac{1}{l} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|}} \qquad (4)$$

bo'ladi.

(4) da $l=0$ bo'lganda R=$+\infty$, $l=+\infty$ bo'lganda esa R=0 deb olinadi.

3. X o s s a l a r i:

1^0. Agar (1) darajali qatorning yaqinlashish radiusi R (R>0) bo'lsa, u holda bu qator

$$\{z \in C: |z| \le R_1; R_1 < R\}$$

doirada tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isbot. Berilgan darajali qatorning yaqinlashish radiusi R ga teng bo'lganligi sababli, qator

$$\{z \in C: |z| < R\}$$

doirada yaqinlashuvchi bo'ladi.

$z_0 \in \{z \in C: |z| < R_1 < R\}$ nuqtalarni olaylik. Ravshanki, bu nuqtada darajali qator absolyut yaqinlashuvchi, ya'ni

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n z_0^n|$$

qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

$$\forall z \in \{z \in C: |z| \le |z_0|\}$$

uchun har doim

$$|C_n z^n| \le |C_n||z_0^n| = |C_n z_0^n|$$

bo'lganligidan Veyershtrass alomatiga ko'ra

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

qator $\{z \in C: |z| \le R_1 < R\}$ da tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

N a t i j a.2. (1) darajali qator yig'indisi
$$\{z \in C : |z| \le R_1; R_1 < R\}$$
da uzluksiz funksiya bo'ladi.

2^o. Agar (1) darajasi qatorning yaqinlashish radiusi R(R>0) bo'lsa, u holda bu qatorni $\{z \in C : |z| \le R_1; R_1 < R\}$ da hadlab differensiallash mumkin.

4. T e y l o r k a t o r i.

Aytaylik,
$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$
darajali qator berigan bo'lib, uning yaqinlashish radiusi R(R>0) bo'lsin. Ravshanki, bu qator
$$\{z \in C : |z - z_0| < R\}$$
doirada yaqinlashuvchi bo'ladi. Berilgan darajali qatorni yig'indisini f (z) deylik:
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \quad . \qquad (5)$$
Yuqorida keltirilgan darajali qatorning 2^0 xossasidan foydalanib (5) qatorni ketma–ket differensiallaimiz:
$$f'(z) = C_1 + C_2 \cdot 2(z - z_0) + ...$$
$$f''(z) = C_2 \cdot 3 \cdot 2(z - z_0) + ...$$
Bu tengliklarda $z = z_0$ deb olsak, u holda
$$f(z_0) = C_0,$$
$$f'(z_0) = C_1,$$
$$f''(z_0) = 2C_2,$$
$$f'''(z_0) = 3 \cdot 2C_3,$$
$$-----------$$
$$f^{(n)}(z_0) = n!C_n$$
ga ega bo'lamiz.

Demak,
$$C_0 = f(z_0),\ C_1 = f'(z_0),\ C_2 = \frac{f''(z_0)}{2!},\ C_3 = \frac{f'''(z_0)}{3!}, ..., C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$
bo'ladi.

Koefitsientlarning bu qiymatlarini (5) ga qo'ysak
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \qquad (6)$$
bo'ladi. Odatda (6) darajali qator Teylor qator deyiladi.

Xulosa: Darajali qator o'zining yaqinlashish sohasida absolyut yaqinlashadi, ichida esa tekis yaqinlashadi.Yaqinlashish sohasini chegarasida har xil hollar ro'y berishi mumkin.

M i s o l l a r:

1. $\dfrac{1}{1-z}=S(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}z^k$ R=1. $|Z|=1$

qator doira ichida tekis yaqinlashadi, chegarada uzoqlashadi.

2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{k^2}$ $|z|>1$ R=1. $\dfrac{|z|^k}{k^2}\to\infty$ $D=\{|z|\le 1\}$

3. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{k}$ z=1 da uzoqlashuvchi, z= –1 da yaqinlashuvchi. **R=1**

Tayanch iboralar: darajali qator, Abel teoremasi, yaqinlashish radiusi, yaqinlashish doirasi, Koshi-Adalar teoremasi, Teylor qatori.

O’z-o’zini tekshirish uchun savollar:

1. Darajali qator ta’rifini ayting.
2. Abel teoremasini ayting.
3. Darajali qator yaqinlashish radiusi va yaqinlashish doirasi deb nimaga aytiladi ?
4. Koshi-Adalar teoremasini ayting.
5. Darajali qator xossalarini ayting.
6. Teylor qatorini ayting.

Adabiyotlar: [1].135-145 betlar, [2].94-100 betlar, [3].203-218 betlar, [4]. 94 –99 betlar, [5]. 57-69 betlar.

13 - Ma'ruza
GOLOMORF FUNKSIYALARNING XOSSALARI

1^0. Koshi teoremasi. Agar $f(z)$ funksiya bir bog'lamli D sohada $(D \subset C_z)$ golomorf bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiyaning D sohada yqtuvchi har Qanday silliq (bo'lakli silliq) γ yopiq chiziq (yopiq kontur) bo'yicha integral nolga teng bo'ladi:

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

2^0. Koshining integral formulasi.

Agar $f(z) \in \vartheta(D)$ $(D \subset C_z)$ va $\overline{D}$ da uzluksiz bo'lsa, u holda $\forall z \in D$ uchun

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

3^0. Golomorf funksiyaning istalgan tartibli hosilaga ega bo'lishi.

Agar $f(z) \in \vartheta(D)$ $(D \subset C_z)$ bo'lsa, u holda $f(z)$ D sohada istalgan tartibdagi hosilaga ega bo'lib ,

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \quad (n = 1, 2, 3...) \quad (1)$$

bo'ladi.

Bu yerda $\gamma - D$ sohada yotuvchi (bo'lakli silliq) yopiq chiziq bo'lib, z esa γ chiziq bilan chegaralangan sohaga tegishli nuqta .

Isbot. Koshining integral formulasiga ko'ra

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

bo'ladi.

z nuqtaga Δz orttirma berib, $f(z)$ funksiya orttirmasini topamiz:

$$f(z + \Delta z) - f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z - \Delta z} - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi =$$

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f(\xi)\left(\frac{1}{\xi - z - \Delta z} - \frac{1}{\xi - z}\right) d\xi = \frac{\Delta z}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z - \Delta z)(\xi - z)} .$$

Unda

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z-\Delta z)(\xi-z)}d\xi$$

bo’ladi. Keyingi tenglikni quyidagicha yozib olamiz:

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi+\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z-\Delta z)(\xi-z)}d\xi-$$

$$-\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi+\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{\Delta z f(\xi)d\xi}{(\xi-z-\Delta)(\xi-z)^2}. \qquad (2)$$

Endi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\Delta z f(\xi)}{(\xi-z-\Delta z)(\xi-z)^2}d\xi$$

integralni baholaymiz. Ravshanki,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\Delta z f(\xi)}{(\xi-z-\Delta z)(\xi-z)^2}d\xi\right|<\frac{|\Delta z|}{2\pi}M\int_{\gamma}\frac{|d\xi|}{|\xi-z-\Delta z||\xi-z|^2}$$

bunda

$$M=\max_{\gamma}\left|f(t)\right|.$$

Agar z nuqtadan γ chiziqgacha bo’lgan masofani $2d\ (d>0)$ desak, unda

$$|\xi-z|>d,\ |\xi-z-\Delta z|>d$$

bo’lib, (agarda $|\Delta z|$ etarlicha kichiq bo’lsa)

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\Delta z f(\xi)}{(\xi-z-\Delta z)(\xi-z)^2}d\xi\right|<\frac{|\Delta z|Ml}{2\pi d^2} \qquad (3)$$

bo’ladi. Bu erda $l-\gamma$ chiziq uzunligi.
(2) ni e’tiborga olib, $\Delta z\to 0$ da (2) da limitga o’tib

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi$$

bo’lishini topamiz.

Endi $f'(z)$ funksiyani olib uning uchun yuqoridagi mulohazalarni takrorlasak

$$f''(z)=\frac{2!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^3}d\xi \qquad (4)$$

tenglik hosil bo’ladi.

Xuddi shu yo’l bilan uchinchi, to’rtinchi va hakozo tartibdagi hosilalarni mavjudligi ko’rsatiladi. $f(z)$ funksiyaning n–tartibli $(n=3,4,5,...)$ hosilasi uchun (1) ni o’rinli bo’lishi matematik induksiya usuli yordamida isbotlanadi.

Natija 1. Agar $f(z)\in\vartheta(D)$ $(D\subset \mathbf{C}_Z)$ bo'lsa, $f'(z)\in\vartheta(D)$ bo'ladi.
Natija 2. Agar $f(z)$ funksiya D sohada$(D\subset \mathrm{C}_z)$ boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsa, u holda $f(z)$ D sohada golomorf bo'ladi.

4^0. Funksiyani Teylor qatoriga yoyish.

Agar $f(z)\in\vartheta(D)$ $(D\subset \mathbf{C}_Z)$ bo'lsa, u holda $a\in D$ nuqtada (a nuqtaning

$$\bigcup\nolimits_\rho(a)=\{z\in\mathbf{C}_Z : |z-a|<\rho, \rho>0\}\subset D$$

atrofida) Teylor qatoriga yoyiladi:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n$$

Isbot. $\bigcup\nolimits_\rho(a)$ ning chegarasini γ deylik.

$$\gamma=\{z\in\mathbf{C}_Z : |z-a|=\rho,\ \ \rho>0\}$$

bo'ladi.

Avvalo $\dfrac{1}{\xi-z}$ funksiyani quyidagicha

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-a-(z-a)}=\frac{1}{(\xi-z)\left(1-\dfrac{z-a}{\xi-a}\right)}$$

yozib, so'ng

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\xi-a}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n$$

bo'lishini e'tiborga olib topamiz:

$$\frac{1}{\xi-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n. \tag{6}$$

Bu geometrik qator bo'lib, uning maxraji $\dfrac{z-a}{\xi-a}$ ga teng.

Ravshanki, $\xi\in\gamma$ uchun quyidagi tengsizlik

$$\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right|=\frac{|z-a|}{\rho}=q<1$$

o'rinli. Demak, (4) qator yaqinlashuvchi.

(6) tenglikning har ikki tomonini $\dfrac{1}{2\pi i}f(\xi)$ ga ko`paytirib, so'ng γ chiziq bo'yicha integrallab, ushbu

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}(z-a)^{n}d\xi$$

tenglikka kelamiz.

(5) va (6) munosabatlardan

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}(z-a)^{n}d\xi \tag{7}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Integral ostidagi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}(z-a)^{n}$$

qatorning hadlari uchun

$$\left|\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}(z-a)^{n}\right|<\frac{1}{\rho}Mq^{n} \quad (n=1,2,...) \quad \left(M=\max_{\gamma}|f(\xi)|\right)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Ravshanki,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{\rho}q^{n} \qquad (q<1)$$

qator yaqinlashuvchi. Unda Veyershtrass alomatiga ko'ra

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}(z-a)^{n}$$

funktsional qator γ da tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. Binobarin, bu qatorni hadlab integrallash mumkin. Unda (7) tenglik ushbu

$$f(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi\right](z-a)^{n} \tag{8}$$

ko'rinishga keladi. Yuqorida keltirilgan ma'lum teoremaga ko'ra

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi=\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{9}$$

bo'lishini topamiz. Natijada (8) va (9) tengliklardan

$$f(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^{n}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $f(z)$ funksiyani Teylor qatoriga yoyilganini bildiradi.

Natija 3. Agar $f(z)$ funksiya yopiq doirada golomorf bo'lib, bu doiraning chegarasi $\gamma=\partial U_{\rho}(a)$ aylanada

$$|f(z)|\le M \quad (M-const)$$

bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiya Teylor qatorining C_n koeffitsentlari uchun

$$|C_n| \le \frac{M}{\rho^n} \quad (n = 0,1,2,...) \qquad (10)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Haqiqatan ham, (9) formuladan

$$|C_n| \le \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt \right| \le \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(t)|}{|t-a|^{n+1}} \cdot dt \le \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{\rho^{n+1}} \cdot 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Odatda (10) tengsizllik Koshi tengsizligi deyiladi.

5°. Liuvil teoremasi.

Agar $f(z) \in \vartheta(C)$ bo'lib, u chegaralangan bo'lsa, $f(z)$ funksiya C da o'zgarmas bo'ladi.

Isbot. Golomorf funksiyaning xossasiga ko'ra, $f(z)$ funksiya $|z-a| < \rho$ doirada $z-a$ ning darajalari bo'yicha Teylor qatoriga yoyiladi:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n, \text{ bunda } C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi .$$

Koshi tengsizligi (10) ga binoan $|f(z)| \le M$ bo'ladi. $f(z) \in \vartheta(C)$ bo'lgani uchun bu tengsizlikda ρ ni istalgancha katta qilib olish mumkin. Shuning uchun $n = 1,2,3,...$ bo'lganda

$$\lim_{\rho \to \infty} \frac{\mathrm{M}}{\rho^n} = 0 \quad (n = 1,2,3,..)$$

bo'ladi. Ayni paytda (10) tengsizlikning chap tomoni ρ ga boglik emas. Binobarin $n = 1,2,3,...$ bo'lganda

$$C_n = 0 \quad (n = 1,2,3,...)$$

bo'ladi. Demak, C da $f(z) = c_0 \quad (c_0 = const)$.

6°. Morera teoremasi. Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya bir bog'lamli D sohada $D \subset C_z$ aniqlangan va uzluksiz bo'lib, γ esa shu D sohada yotuvchi ixtiyoriy silliq (bo'lakli silliq) yopiq chiziq bo'lsin. Agar $\int_\gamma f(z) dz = 0$ bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiya D sohada golomorf bo'ladi.

Isbot. Teoremada keltirilgan shart bajarilganda funksiya D sohada boshlang'ich $F(z)$ funksiyaga ega bo'lib, $F(z)$ funksiya D da C differensiallanuvchi, ya'ni golomorf bo'ladi.

3^0-xossaning 1-natijasiga ko'ra $F'(z)$ ham D sohada golomorf bo'ladi. Ayni paytda

$$F'(z) = f(z)$$

bo'lganligi sababli $f(z) \in \vartheta(D)$ bo'ladi.

14-Ma'ruza.

YaGONALIK TEOREMASI

Faraz qilaylik, f(z) va g(z) funksiyalar D sohada $D \subset C_z$ golomorf bo'lsin. Agar bu funksiyalar D sohaga tegishli va hech bo'lmaganda bitta limit nuqta $z_0\,(z_0 \in D)$ ga ega bo'lgan E to'plamda $(E \subset D)$ bir-biriga teng

$$f(z) = g(z),\ (z \in D)$$

bo'lsa, u holda f(z) va g(z) funksiyalar D sohada aynan bir-biriga teng bo'ladi:

$$f(z) \equiv g(z)\ (z \in D).$$

Isbot. Modomiki, z_0 nuqta E to'plamning limit nuqtasi ekan, unda E to'plamga tegishli turli $z_1, z_2, ..., z_n \in E,\ n = 1,2,3,4,...$ nuqtalardan tuzilgan va z_0 ga intiluvchi $\forall z \in E$ da f(z)=g(z) bo'lgani uchun $f(z_n) = g(z_n),\ (n = 1,2,3,...)$ bo'ladi.

Endi f(z) va g(z) funksiyalarni z_0 nuqtaning

$$B = \{z \in C_z : |z - z_0| < \rho, \rho > 0\}$$

atrofida (bunda $\rho < d$, d esa z_0 nuqtadan ∂D gacha bo'lgan masofa) Teylor qatoriga yoyamiz:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(z - z_0\right)^k$$
$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(z - z_0\right)^k \qquad (1)$$

$z_k \to z_0$ bo'lganligi sababli k ning biror qiymatidan boshlab keyingi z_k lar

$$B = \{z \in C_z : |z - z_0| < \rho,\}$$

doiraga tegishli bo'ladi. Shuning uchun $f(z_n) = g(z_n), (n = 1,2,3,...)$ bo'lib, (1) dan

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_k - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z_k - z_0)^k \qquad (2)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu tenglikda $z_k \to z_0$ da limitga o'tib

$$a_0 = b_0 \qquad (3)$$

bo'lishini topamiz.

Bu (3) tenglikni e'tiborga olib (2) ni har ikkala tomonini $z_k - z_0$ ga bo'lsak, unda

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (z_k - z_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z_k - z_0)^{k-1} \qquad (4)$$

hosil bo'ladi.

Keyingi tenglikda $z_k \to z_0$ da limitga o'tib

$$a_1 = b_1 \qquad (5)$$

bo'lishini topamiz. Bu (5) tenglikni e'tiborga olib, (4) ning har ikkala tomonini $z_k - z_0$ ga bo'lsak, unda

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k (z_k - z_0)^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} b_k (z_k - z_0)^{k-2}$$

hosil bo'ladi. So'ng $z_k \to z_0$ da limitga o'tib, $a_2 = b_2$ bo'lishini topamiz.
Bu jarayoni davom ettira borib,

$$a_m = b_m \ , \ \ m = 1, 2, 3, ..$$

bo'lishini topamiz. Shunday qilib

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(z_k - z_0 \right)^k$$

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(z_k - z_0 \right)^k$$

lar uchun

$$a_k = b_k, \ \ k = 1, 2, 3, ...$$

bo'ladi. Demak, $B = \{ z \in C_z : |z - z_0| < \rho, \}$ doirada f(z)=g(z) bo'ladi.

D sohada ixtiyoriy z^* nuqtani olib, z_0 va z^* nuqtalarni D soha yotuvchi uzluksiz L chiziq bilan birlashtiramiz. B doirada L egri chiziq qismida biror α $(\alpha \in L)$ nuqtani olamiz. So'ng B da α ga intiluvchi $t_1, t_2, ..., t_k, ...$ $\left(\lim t_k = \alpha \right)$ ketma-ketlikni qaraymiz. Ravshanki, $f\left(t_k\right) = g\left(t_k\right)$, $\left(k = 1, 2, 3, ...\right)$ bo'ladi.

Endi f(z) va g(z) funksiyalarni α nuqtaning

$$B_1 = \left\{ z \in C_z : |z - \alpha| < \rho_1, \rho_1 > 0 \right\}$$

atrofida (bunda $\rho_1 < d_1$ bo'lib, d_1- esa L va ∂D chiziqlar orasidagi masofa) Teylor qatoriga yoyamiz:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k' \left(z - \alpha \right)^k$$

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k' \left(z - \alpha \right)^k$$

Yuqorida keltirilgan mulohazani takrorlab, $a_k' = b_k'$, $\left(k = 1, 2, 3, ...\right)$ va demak, B_1 doirada

f(z)=g(z)

bo'lishini topamiz.

α nuqtani L chiziq bo'ylab z^* nuqta tomon siljita borib va yana yuqorida keltirilgan mulohazalarni takrorlab

$$f\left(z^*\right) = g\left(z^*\right)$$

bo'lishini topamiz.

z^* nuqta D sohaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lganligi sababli, D sohada f(z)=g(z) bo'ladi.

Veyershtrass teoremasi. Agar

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + ... + f_n(z) + ... \qquad (6)$$

funksional qatorning har bir $f_n(z),\ (n=1,2,3,...)$ hadi D $(D \subset C_z)$ sohada golomorf bo'lib, bu qator D sohada yotuvchi ixtiyoriy F yopiq to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda qator yig'indisi

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \qquad (7)$$

funksiya D sohada golomorf bo'ladi.

Isbot. D sohada ixtiyoriy z_0 nuqtani olib, uning shunday $U_\delta(z_0) = \{z \in C_z : |z - z_0| < \delta,\ \delta > 0\}$ atrofini qaraymizki, $\overline{U_\delta}(z_0) \subset D$ bo'lsin.

Shartga ko'ra (6) qator $\overline{U_\delta}(z_0) \subset I$ da tekis yaqinlashuvchi. Demak, qator $U_\delta(z_0)$ da ham tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

$f_n(z),\ (n=1,2,3,...)$ funksiya D sohada golomorf bo'lgani uchun u (6) qatorning har bir hadi $U_\delta(z_0)$ da ham golomorf bo'ladi. Binobarin, $f_n(z),\ (n=1,2,3,...)$ da funksiya $U_\delta(z_0)$ uzluksiz. Unda qator yig'indisi f(z) funksiya ham $U_\delta(z_0)$da uzluksiz bo'ladi.

Endi $U_\delta(z_0)$ da yotuvchi yopiq silliq γ chiziqni olaylik$(\gamma \subset U_\delta(z_0))$. (7) qatorni γ chiziq bo'yicha hadlab integrallab, topamiz:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right]dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)dz. \qquad (8)$$

Koshi teoremasiga ko'ra

$$\int_\gamma f_n(z)dz = 0,\ (n=1,2,...) \qquad (9)$$

bo'ladi.

(8) va (9) dan $\int_\gamma f(z)dz = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Morera teoremasidan foydalanib f(z) funksiyani $U_\delta(z_0)$ da va, demak, z_0 nuqtada golomorf bo'lishini topamiz. Qaralayotgan z_0 nuqta D sohaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lganligidan f(z) funksiyani D sohada golomorf bo'lishi kelib chiqadi.

Natija: Yuqorida keltirilgan Veyershtrass teoremasining sharti bajarilganda

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

qatorni istalgan marta hadlab differensiallash mumkin bo'lib,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \quad (k=1,2,3,...)$$

bo'ladi.

Golomorf funksiyaning nollari.

Faraz qilaylik, biror $f(z)$ funksiyaning kengaytirilgan kompleks tekislikda $\overline{C}$ da, berilgan bo'lib, $a \in \overline{C}$ bo'lsin.

Agar

$$f(a)=0$$

bo'lsa, a kompleks son $f(z)$ funksiyaning noli deyiladi.

Aytaylik, $f(z)$ funksiya $z=a$ nuqtada golomorf bo'lsin. Bu funksiyani a nuqta atrofida darajali qatorga yoyamiz:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{10}$$

Agar $z=a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning noli bo'lsa, u holda

$$f(a)=c_0=0$$

bo'lib, (10) formula ushbu

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

ko'rinishga keladi.

Aytaylik, (10) da

$$c_1=c_2=...=c_{m-1}=0 \quad (11)$$

bo'lib,

$$c_m \neq 0$$

bo'lsin. U holda (10) tenglikdan

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_m (z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + c_{m+2}(z-a)^{m+2} + ... =$$

$$=(z-a)^m \left[c_m + c_{m+1}(z-a)+...\right]$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ma'lumki,

$$c_i = \frac{f^{(i)}(z)}{i!}.$$

Yuqoridagi (11) munosabatni e'tiborga olib,

$$f^{(i)}(a)=0, \left(i=1,2,...,m-1\right)$$

bo'lishini topamiz.

Bu holda $z=a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning m karrali noli deyiladi. Shunday qilib, $z=a$ funksiyaning m karrali noli bo'lsa, u holda

$$f(z)=(z-a)^m g(z)$$

bo'lib,

$$g(z)=c_m + c_{m+1}(z-a)+c_{m+2}(z-a)^2+...$$

$\left(g(a)\neq 0\right)$ funksiya $z=a$ nuqtada golomorf bo'ladi.

Aksincha, agar $f(z)$ funksiya quyidagicha

$$f(z)=(z-a)^m g(z)$$

ifodalanib, $g(z)$ funksiya $z=a$ nuqtada golomorf bo'lsa, $z=a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning m karrali noli bo'ladi.

$f(z)$ funksiya $z=\infty$ nuqtada golomorf bo'lsin. Bu holda $z=\infty$ nuqta atrofida $f(z)$ funksiya ushbu

$$f(z)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{1}{z^n} \qquad (12)$$

qatorga yoyiladi.

$z=\infty$ nuqta $f(z)$ funksiyaning noli bo'lsin.

Ravshanki, u holda

$$c_0=f(\infty)=0$$

bo'lib, (12) formula ushbu

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{1}{z^n} \qquad (13)$$

ko'rinishga keladi.

Aytaylik, (13) formulada

$$c_1=c_2=\ldots=c_{m-1}=0 \quad (11)$$

bo'lib,

$$c_m \neq 0$$

bo'lsin. Bu holda $z=\infty$ nuqta $f(z)$ funksiyaning m karrali noli bo'ladi. U holda (13) formuladan

$$f(z)=\sum_{n=m}^{\infty} c_n \frac{1}{z^n}=c_m \frac{1}{z^m}+c_{m+1}\frac{1}{z^{m+1}}+c_{m+2}\frac{1}{z^{m+2}}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{z^m}\left(c_m+c_{m+1}\frac{1}{z}+c_{m+2}\frac{1}{z^2}+\ldots\right)=\frac{1}{z^m}\phi(z)$$

bo'lishini topamiz. Bu erda

$$\phi(z)=c_m+c_{m+1}\frac{1}{z}+c_{m+2}\frac{1}{z^2}+\ldots$$

funksiya uchun

$$\phi(\infty)=c_m\neq 0$$

bo'lib, $\varphi(z)$ funksiya $z=\infty$ nuqtada golomorf bo'ladi.

Aksincha, agar $f(z)$ funksiya quyidagicha

$$f(z)=\frac{1}{z^m}\phi(z)$$

ifodalanib, $\phi(z)$ funksiya $z=\infty$ nuqtada golomorf bo'lsa, u holda $z=\infty$ nuqta $f(z)$ funksiyaning m karrali noli bo'ladi.

Teorema. Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya z=a nuqtada golomorf bo'lib, shu z=a nuqta $f(z)$ funksiyaning noli bo'lsin: *f(a)=0*. U holda yo f(z) funksiya a nuqtaning biror atrofida aynan nolga teng $f(z)\equiv 0$ yoki a nuqtaning shunday atrofi topiladiki, bu atrofda f(z) funksiyaning z=a nuqtadan boshqa noli bo'lmaydi.

Isbot. Shartga ko'ra, f(z) funksiya z=a nuqtada golomorf. Unda funksiya z=a nuqta atrofida qatorga yoyiladi:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(z-a\right)^n . \qquad (14)$$

Aytaylik, (14) da barcha c_n lar nolga teng bo'lsin:

$$c_0=c_1=c_3=...=0 .$$

Ravshanki, bu holda funksiya z=a nuqta atrofida f(z)=0 bo'ladi.

Endi (14) da

$$c_0=c_1=c_3=...=c_{m-1}=0$$

bo'lib,

$$c_{\mathrm{m}}\neq 0$$

bo'lsin. Bu holda z=a nuqta f(z) funksiyaning m karrali noli bo'lib, u quyidagicha

$$f(z)=(z-a)^m g(z)$$

ifodalanadi. Bu erda g(z) funksiya z=a nuqtada golomorf va $g(a)\neq 0$. Ayni paytda g(z) funksiya z=a nuqtada uzluksiz ham bo'ladi. Unda $g(a)\neq 0$ bo'lganligi sababli z=a nuqtaning shunday atrofi topiladiki, bu atrofda $g(z)\neq 0$ bo'ladi. Binobarin shu atrofda f(z) funksiyaning z=a nuqtadan boshqa nollari bo'lmaydi.

Tayanch iboralar: limit nuqta, funksiya noli, m karrali noli, funksional qator tekis yaqinlashuvchiligi, ketma–ketlik.

O'z –o'zini tekshirish uchun savollar:

1) Yagonalik teoremasi.
2) Veyershtrass teoremasi.
3) Funksiya noli ta'rifi.
4) Funksiyaning m karrali noli ta'rifi.

15- Ma’ruza.
LORAN QATORI.

$V=\{z\in \mathrm{C}_z : r<|z-a|<R\}$ halqada golomorf bo’lgan $f(z)$ funksiyani qatorga yoyish masalasi bilan shug’ullanamiz. Bunda $r\geq 0,\ R\leq +\infty$.

1°. Loran qatori tushunchasi.

Teorema 1. (***Loran teoremasi***) Ushbu $V=\{z\in C_z : r<|z-a|<R\}$ sohada (halqada) golomorf bo’lgan ixtiyoriy $f(z)$ funksiyani shu sohada yaqinlashuvchi

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \qquad (1)$$

qatorning yig’indisi sifatida tasvirlanadi:

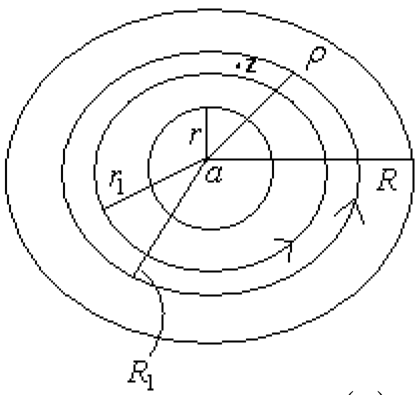
$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n .$$

Bu yerda qatorning koeffisientlari

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(|z-a|=\rho)=\gamma_p}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi, \qquad (n=\pm 0,\pm 1,\pm 2,...) \qquad (2)$$

bo’lib, $r<\rho<R$ bo’ladi.

Isbot:



$V'=\{r'<|z-a|<R'\}\subset V$ halqani olamiz. Bunda $r'>r,\ R'<R.$ $f(z)\in \vartheta(V')$ bo’lganligi sababli Koshining integral formulasiga ko’ra, $\forall z\in V'$ uchun

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial V'}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

ifoda o’rinli. $\partial V'=\Gamma'\bigcup\gamma'$ bo’lgani uchun

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial V'}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma'}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \qquad (3)$$

bunda $\Gamma'=\{|\xi-a|=R'\},\ \gamma'=\{|\xi-a|=r'\}.$ $\forall\xi\in\Gamma'$ uchun tekis yaqinlashuvchi $\left(\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right|<1\right)$ ushbu

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-a+a-z}=\frac{1}{(\xi-a)\left(1-\dfrac{z-a}{\xi-a}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}$$

qatorni ikkala tomonini $\frac{1}{2\pi}f(\xi)$ chegaralangan funksiyaga ko’paytirib, so`ng Γ' bo’yicha hadlab integrallasak,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \qquad (4)$$

hosil bo'ladi. Bu yerda

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi \ \ (n=0,1,2,...). \qquad (5)$$

(3) dagi ikkinchi integralda esa yoyilma boshqacharoq bo'ladi. Barcha $\xi\in\gamma'$ lar uchun

$$\left|\frac{\xi-a}{z-a}\right|=q_1<1.$$

Shuning uchun

$$-\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(z-a)\left(1-\frac{\xi-a}{z-a}\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\xi-a)^{n-1}}{(z-a)^n}.$$

Bunda qator $\xi\in\gamma'$ uchun tekis yaqinlashuvchidir. $\xi\in\gamma'$ bo'yicha tenglikni ikkala tomonini $\frac{1}{2\pi i}f(\xi)$ ga ko'paytirib, so'ng γ' bo'yicha hadlab integrallasak

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{(z-a)^n} \qquad (6)$$

bo'lishini topamiz, bunda

$$d_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'}f(\xi)(\xi-a)^{n-1}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{-n+1}}d\xi \quad (n=0,1,2,...). \qquad (7)$$

Natijada (3), (4) va (6) munosabatlardan

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}d_n\cdot(z-a)^{-n} \qquad (8)$$

(7) formulada n ni $-n$ bilan almashtirsak, u holda formula quyidagi ko'rinishga keladi:

$$d_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi \ \ (n=-1,-2,-3,...) \qquad (9)$$

Bundan esa (6) ifoda quyidagi ko'rinishga keladi:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}=\sum_{n=-1}^{-\infty}c_n(z-a)^n.$$

Agar z nuqta V sohadagi ixtiyoriy nuqta ekanini, $f(z)$ funksiya shu sohada golomorf bo'lishini hamda γ' va Γ' chiziqlar V sohaga tegishli ekanligini e'tiborga olsak, Koshi teoremasiga ko'ra

$$\int_{\gamma'}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{n+1}}=\int_{\Gamma'}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{n+1}},$$

umuman,

$$\int\limits_{\gamma'} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{n+1}} = \int\limits_{\Gamma'} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{n+1}} = \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}$$

bo'lishini topamiz. Bu yerda

$$\gamma_\rho = \{z \in C_z : |z-a| = \rho; r' < \rho < R'\}.$$

Endi (5) va (9) tengliklarni solishtirib

$$d_{-n} = c_n \quad (n = 0,1,2,...)$$

ya'ni

$$d_n = c_{-n}$$

bo'lishini topamiz. Bu hol

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \text{ va } \sum_{n=1}^{\infty} d_n (z-a)^{-n}$$

yig'indilarni birlashtirib, ushbu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

ko'rinishda yozish imkonini beradi:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n}.$$

Demak,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-\infty} c_n (z-a)^n$$

bo'lib, bunda

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi \qquad (n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

bo'ladi.

Ta'rif. Koeffitsientlari (2) formula bilan aniqlangan (1) qator $f(z)$ funksiyaning V sohadagi (halqadagi) Loran qatori deyiladi.

$f(z)$ funksiya V sohada (halqada) golomorf bo'lsa, teoremaga binoan

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-\infty} c_n (z-a)^n$$

bo'lishini e'tiborga olib, bu holda $f(z)$ funksiya V sohada (halqada) Loran qatoriga yoyiladi deb aytamiz.

Ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (10)$$

qatorga Loran qatorining to'g'ri qismi,

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n \qquad (11)$$

qatorga esa Loran qatorining bosh qismi deyiladi.

Loran qatorining to'g'ri qismi

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

darajali qatordir. Uning yaqinlashish sohasi Abel teoremasiga ko'ra $\{|z-a|<R\}$ doiradan iborat bo'lib, yaqinlashish radiusi Koshi–Adamar formulasi

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}$$

ga ko'ra topiladi. (10) qator $|z-a|<R'$ $(R'<R)$da tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Loran qatorini bosh qismi

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n$$

da $w=\dfrac{1}{z-a}$ o'zgartirish kiritsak, unda

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n$$

Ko'rinishga keladi. Bu qator Abel teoremasiga ko'ra

$$|w|<\frac{1}{r}$$

da yaqinlashadi, yaqinlashish radiusi Koshi –Adamar formulasiga ko'ra

$$r=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_{-n}|}$$

bo'ladi.
Demak,

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n$$

qator doiraning tashqi qism bo'lgan $|z-a|>r$ sohada yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar $r\geq R$ bo'lsa, Loran qatorini yaqinlashish sohasi bo'sh to'plamdan iborat bo'ladi.

Agar $r\leq R$ bo'lsa, Loran qatori

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

ning yaqinlashish sohasi $\{z\in C_z : r<|z-a|<R\}$ halqadan iborat bo'ladi. $r=0$ bo'lsa, bitta $z=a$ nuqtada o'yilgan doiradan iborat bo'ladi.

Teorema 2. $f(z)$ funksiya $V=\{r<|z-a|<R\}$ halqada golomorf bo'lsin. Bu funksiyaning Loran qatoriga yoyilmasi

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

yagonadir.

Isbot: Teskarisi faraz qilaylik. V sohada golomorf bo'lgan $f(z)$ funksiyaning Loran qatori ikkita

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \qquad (12)$$

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n (z-a)^n \qquad (13)$$

Bo'lib, $c_n \neq c'_n$ bo'lsin. Ushbu

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n (z-a)^n$$

tenglikning ikkala tomonini $\dfrac{1}{(z-a)^{m+1}}$ ga ko'paytib, $\{z\in C_z :|z-a|=\rho\}$, $(r<\rho<R)$ aylanada hadma–had integrallaymiz:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int\limits_{|z-a|=\rho} (z-a)^{n-m-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n \int\limits_{|z-a|=\rho} (z-a)^{n-m-1} dz \ . \qquad (14)$$

Bizga ma'lumki, ixtiyoriy m soni uchun

$$\int\limits_{|z-a|=\rho} (z-a)^m dz = \begin{cases} 0 & m\neq -1 \\ 2\pi i & m=-1 \end{cases}$$

edi. Bu tenglikdan foydalanib, (14) munosabatdan

$$c_n = c'_n$$

bo'lishini topamiz. Bu esa teoremani isbotlaydi.

Odatda, bu yagonalik teoremasi deyiladi.

Misol. Ushbu

$$f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

funksiyani $V=\{1<|z|<2\}$ halqada Loran qatoriga yoying.

Berilgan funksiya $V=\{1<|z|<2\}$ halqada golomorf. Binobarin, 1-teoremaga ko'ra funksiya shu sohada Loran qatoriga yoyiladi. Bu yoyilmani topish uchun qaralayotgan funksiyani quyidagicha yozib olamiz:

$$f(z)=\frac{2}{(z-2)}-\frac{1}{z-1}. \qquad (15)$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi $\dfrac{2}{z-2}$ bo'lganligidan $\{|z|<2\}$ doirada golomorf.

Ravshanki,

$$\frac{2}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{2}{1-\frac{z}{2}}$$

bo'lib,

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z}{2}\right)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

bo'ladi. Demak,

$$\frac{2}{z-2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n .$$

Bu qator $|z|<2$ doirada yaqinlashuvchi.

Endi o'ng tomondagi $-\frac{1}{z-1}$ funksiyani olib, uni quyidagicha yozib olamiz:

$$-\frac{1}{z-1}=\frac{-1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} .$$

Bu funksiya $\{|z|>1\}$ da golomorf bo'lib, u yaqinlashuvchi

$$-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots\right)$$

qatorga yoyiladi. Demak,

$$\frac{1}{z-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

bo'lib, u $\{|z|>1\}$ da yaqinlashuvchi bo'ladi.

Natijada $V=\{1<|z|<2\}$ sohada (15) tenglikka ko'ra

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}=-\sum_{n=-1}^{-\infty}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

bo'ladi. Demak,

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)}=-\left(\sum_{n=-1}^{-\infty}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right).$$

Tayanch iboralar: chegaralanmagan funksiya, Koshining integral teoremasi, darajali qator, darajali qator radiusi, Koshi –Adamar formulasi.

O'z –o'zini tekshirish uchun savollar:
1) Loran qatori.
2) Loran qatori koeffisienlari ko'rinishi.
3) Loran qatori bosh qismi deb qaysi qatorga aytiladi?
4) To'g'ri qism deb qaysi qatorga aytiladi?

16- Ma'ruza.

YAKKALANGAN MAXSUS NUQTA LAR. SOXOTSKIY TEOREMASI

Biror $f(z)$ funksiyani qaraylik. Bu funksiya uchun *a* nuqtada $(a \in \overline{C})$ golomorflik sharti bajarilmasa *a* nuqta $f(z)$ funksiyaning *maxsus nuqtasi* deyiladi.

Ta'rif. *Agar a maxsus nuqtaning shunday*

$$\overset{\circ}{U}(a) = \{z \in C : 0 < |z - a| < \varepsilon\}$$

o'yilgan atrofi topilsaki, $f(z)$ *funksiya* $\overset{\circ}{U}(a)$ *da golomorf bo'lsa, a nuqta* $f(z)$ *funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi deyiladi.*

Faraz qilaylik, *a* nuqta $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi bo'lsin.

1) Agar

$$\lim_{z \to a} f(z) = A$$

(A-chekli son) bo'lsa, *a* nuqta $f(z)$ funksiyaning *bartaraf qilinadigan maxsus nuqtasi* deyiladi.

2) Agar

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty$$

bo'lsa, *a* nuqta $f(z)$ funksiyaning *qutb nuqtasi* deyiladi.

3) Agar $z \to a$ da $f(z)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lmasa, *a* nuqta $f(z)$ *funksiyaning o'ta maxsus nuqtasi* deyiladi.

Eslatma. *A* nuqta $f(z)$ funksiyaning bartaraf qilinadigan maxsus nuqtasi bo'lsa,

$$f(a) = \lim_{z \to a} f(z)$$

deb olinishi natijasida maxsuslik bartaraf etiladi.

Agar *a* nuqta $f(z)$ funksiyaning qutb nuqtasi bo'lsa, u holda shu nuqta $\dfrac{1}{f(z)}$ funksiyaning noli bo'ladi. $\dfrac{1}{f(z)}$ funksiya nolining tartibiga $f(z)$ *funksiya qutbining tartibi* deyiladi.

Misol.

1. $f(x) = \dfrac{\sin z}{z}$ funksiya uchun $z = 0$ nuqta qutilib bo'ladigan maxsus nuqtadir. Chunki,

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\left(1-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...\right)=\lim_{z\to 0}\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-...\right)=1.$$

2. $f(z)=\dfrac{1}{z^n}$ $n\in N$ funksiya uchun $z=0$ nuqta qutb maxsus nuqta: $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{z^n}=\infty$.

3. $f(x)=e^{\frac{1}{z}}$ funksiya uchun $z=0$ nuqta muhim maxsus nuqtadir.
Chunki, ushbu

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z=iy}} e^{\frac{1}{iy}}=\lim_{\substack{z\to 0\\ z=iy}}\left(cos\frac{1}{y}-i\sin\frac{1}{y}\right)- \text{ mavjud emas,} \qquad \lim_{\substack{z\to 0\\ z=x,x>0}} e^{\frac{1}{x}}=\infty \ , \quad \lim_{\substack{z\to 0\\ z=x,x<0}} e^{\frac{1}{x}}=0$$

Munosabatlarni e'tiborga olib, $f(x)=e^{\frac{1}{z}}$ funksiyaning $z=iy\to 0$ va $z=x\to 0$ limiti mavjud emasligini topamiz.

4. $f(z)=\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{z}}$ funksiya uchun $z=0$ va $z_n=\dfrac{1}{n}$ $(n=\pm1,\pm2,...)$ nuqtalar maxsus nuqtalaridir. Bunda $z=0$ maxsus nuqta $f(z)$ funksiya uchun yakkalangan maxsus nuqta bo'lmaydi.

Darhaqiqat,

$$\lim_{n\to\infty} z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

bo'lganligi sababli, $z=0$ nuqtaning har qanday o'yilgan atrofi

$$U_\delta(0)=\{0<|z|<\delta\}$$

da funksiyaning maxsus nuqtalari bo'ladi. Demak, $z=0$ berilgan funksiyaning yakkalanmagan maxsus nuqtasi ekan.

Endi funksiyaning maxsus nuqtalari bilan uning Loran qatori orasidagi bog'lanishini ifodalaydigan tasdiqlarni keltiramiz.

1-Teorema. *$f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus a nuqtasi uning bartaraf qilish mumkin bo'lgan maxsus nuqtasi bo'lishi uchun $f(z)$ funksiyaning a nuqta atrofida Loran qatoriga yoyilmasida bosh qismining bo'lmasligi, ya'ni*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad (16)$$

bo'lishi zarur va etarli.

Isbot. Zarurligi. a qutilib bo'ladigan maxsus nuqta bo'lsin. U holda

$$\lim_{z\to a} f(z)=A$$

chekli limit mavjud. Shuning uchun $f(z)$ funksiya qaralayotgan $\{0<|z-a|<r\}$ atrofda chegaralangan, ya'ni shunday o'zgarnas $M>0$ topiladiki,

$$|f(z)|\le M$$

tengsizlik bajariladi. Koshi tengsizligiga ko'ra

$$|c_n|\le\frac{M}{\rho^n}\quad(n=0,\pm1,\pm2,...)\quad(17)$$

tengsizlik o'rinli, bu yerda $0<\rho<r$.
Agar $n=-1,-2,-3,...$ bo'lib, $\rho\to0$ da

$$\lim_{\rho\to0}\frac{M}{\rho^n}=0$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda (17) munosabatdan

$$c_{-1}=c_{-2}=c_{-3}=...=c_{-m}=...=0$$

bo'lishini topamiz. Demak, (16) Loran qatorining bosh qismi aynan nolga teng.

Etarliligi. $f(z)$ funksiya a nuqta atrofidagi (16) Loran qatoriga yoyilmasining bosh qismi aynan nolga teng bo'lsin. Bu holda $f(z)$ funksiyaning Loran qatori ushbu

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+...$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu tengsizlikdan $\lim_{z\to a}f(z)=c_0$, c_0–chekli son, kelib chiqadi. Demak, $z=a$ bartaraf etiladigan maxsus nuqta.

2-Teorema. $f(z)$ *funksiyaning yakkalangan a nuqtasi uning bartaraf etiladigan maxsus nuqtasi bo'lishi uchun* $f(z)$ *funksiyaning a nuqtaning o'yilgan atrofi*

$$\overset{\circ}{U}(a)=\{z\in C:0<|z-a|<\varepsilon\}$$

da $f(z)$funksiyaning chegaralangan bo'lishi zarur va etarli.

Bu teoremaning isboti yuqorida keltirilgan 2-teoremaning isboti kabidir.

3-Teorema. $f(z)$ *funksiyaning yakkalangan a nuqtasi uning qutb nuqtasi bo'lishi uchun* $f(z)$ *funksiyaning a nuqta atrofida Loran qatoriga yoyilmasida bosh qism tarkibida chekli sondagi noldan farqli hadlarning bo'lishi, ya'ni*

$$f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty}c_n\cdot(z-a)^n\qquad(m>0)$$

bo'lishi zarur va etarli.

4-Teorema. $f(z)$ *funksiyaning yakkalangan maxsus a nuqtasi uning o'ta maxsus nuqtasi bo'lishi uchun* $f(z)$ *funksiyaning a nuqta atrofida Loran qatoriga yoyilmasida bosh qism tarkibida cheksiz ko'p sondagi noldan farqli hadlarning bo'lishi zarur va etarli.*

Soxodskiy teoremasi. Agar $a\in C$ nuqta $f(z)$ funksiya uchun muhim maxsus nuqta bo'lsa, u holda shunday bir $z_n\to a$ ketma – ketlik topiladiki unda $\lim_{n\to\infty}f(z_n)=A$ o'rinli bo'ladi.
($A\in\overline{C}$ chekli yoki cheksiz)

Isbot. $A=\infty$ bo’lsin. a - muhim maxsus nuqta bo’lganligi uchun $\{0<|z-a|<r\}$ $f(z)$ funksiya chegaralangan bo’lmaydi. Shuning uchun $z_1 \in \{0<|z-a|<r\}$ nuqta topiladiki, $|f(z_1)|>1$ o’rinli bo’ladi. Xuddi shuningdek, $\left\{0<|z-a|<\frac{|z_1-a|}{2}\right\}$ atrofdan z_2 nuqta topiladiki, unda $|f(z_2)|>2$ bo’ladi va xakozo $\left\{0<|z-a|<\frac{|z_1-a|}{2^{n-1}}\right\}$ z_n nuqta topiladiki, $|f(z_n)|>n$ o’rinli bo’ladi.

Shunday qilib biz $z_n \to a$ ketma – ketlikga ega bo’ldik va $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=\infty$

A – chekli kompleks son bo’lsin.

Agar $f(z)=A$ tenglama echimga ega bo’lib, bu echimlarini limit nuqta si a nuqta bo’lsa, u holda limit nuqta a bo’ladigan A nuqta larni z_n ketma –ketligini ko’ramiz. Bunda $f(z_n)=A \quad n=1,2,...$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=A$

yoki a nuqta ni biror $\{0<|z-a|<r\}$ atrofida $f(z)=A$ tenglama echimga ega emas. U holda quyidagi yordamchi funksiyani tuzamiz $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)-A}$. Bu $\varphi(z)$ funksiya uchun ham a nuqta muhim maxsus nuqta dir. Chunki agarda $\lim\limits_{z\to a}\varphi(z)$ - chekli yoki cheksiz limit mavjud bo’lsa, $f(z)=A+\dfrac{1}{\varphi(z)}$ funksiya uchun ham $\lim\limits_{z\to a}\varphi(z)$ chekli yoki cheksiz limit mavjud bo’lar edi. Bunday bo’lishi mumkin emas.

Teoremani birinchi qismida isbot kilinganga ko’ra $z_n \to a$ ketma – ketlik topiladiki, bunda $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(z)=\infty$ bo’ladi.

Shuning uchun $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[A+\dfrac{1}{\varphi(z_n)}\right]=A+0=A.$

Har xil $z_n \to a$ gi ketma–ketlik uchun barcha $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$ limitik nuqta lar to’plamiga $f(z)$ funksiyani a nuqta dagi anikmasligi deyiladi.

Agar a nuqta qutilib bo’ladigan yoki qutb maxsus nuqta bo’lsa, funksiyani a nuqta dagi anikmasligi bitta nuqta dan iborat bo’ladi. Qutilib bo’ladigan bo’lsa, chekli qutb maxsus nuqta bo’lsa, ∞ nuqta dan iborat bo’ladi.

Agar a nuqta muhim maxsus nuqta bo’lsa Soxodskiy teoremasiga ko’ra $f(z)$ funksiyani a nuqta dagi anikmasligi ε dan iborat bo’ladi.

$a\to\infty$ da ham yakkalangan maxsus nuqta larni sinfi Yuqoridagi kabi bo’ladi.

Yuqorida isbot kilingan teoremalar ham $a\to\infty$ bo’lgan xoll uchun o’rinlidir. Bu natijalar $z=\dfrac{1}{w}$ almashtirish bilan hosil bo’ladi. $z=\dfrac{1}{w}$ almashtirishni kullasak $f(z)=f\left(\dfrac{1}{w}\right)=\varphi(w)$ bo’lib, $w=0$ nuqta $\varphi(w)$ funksiya uchun maxsus nuqta dir. $w=0$ nuqta $\varphi(w)$ funksiya uchun qutb maxsus nuqta bo’lsin. U holda $\{0<|w|<r\}$

atrofda $\varphi(w)$ funksiya quyidagi Loran qatoriga yoyiladi.
$$\varphi(w)=\frac{b_{-N}}{w^N}+...+\frac{b_{-1}}{w}+\sum_{n=0}^{\infty}b_n w^n$$
$b_{-N}\neq 0$.

$w=\frac{1}{z}$ almashtirishga ko'ra,
$$f(z)=b_{-N}z^N+...+b_{-1}z+\sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{1}{z^n}=\sum_{n=-1}^{-\infty}C_n z^n+C_0+C_1+...+C_N z^N$$
$C_n=b_{-n},\ C_N\neq 0$

$a=\infty$ uchun $\sum_{n=0}^{+\infty}C_n z^n$ ga bosh qism $\sum_{n=-1}^{-\infty}C_n z^n$ ga esa to'g'ri qism deyiladi.

Ta'rif B. C kompleks tekislikda golomorf bo'lgan $f(z)$ funksiyaga butun funksiya deyiladi.

Agar $a=\infty$ nuqta butun funksiya uchun qutilib bo'ladigan maxsus nuqta bo'lsa, u holda Liuvil teoremasiga ko'ra, bunday funksiya o'zgarmasdir. Agar $a=\infty$ nuqta $f(z)$ funksiya uchun qutb maxsus nuqta bo'lsa, u holda bunday funksiya (kupxad) poligondan iboratdir.

Haqiqatan ham $f(z)$ funksiyaning $a=\infty$ nuqta atrofidagi Loran qatorini bosh qismi $g(z)=C_0+C_1z+...+C_N z^N$ deb olsak, $f(z)-g(z)$ funksiya butun tekislikda golomorf bo'lib, $a=\infty$ nuqta qutilib bo'ladigan, maxsus nuqta dir.

Liuvil teoremasiga ko'ra $f(z)-g(z)=const=C_0$ bo'ladi. Shuning uchun $f(z)=C_0+g(z)=C_0+C_1z+...+C_N z^N$ kelib chiqadi.

Agar $a=\infty$ nuqta $f(z)$ butun funksiya uchun muhim maxsus nuqta bo'lsa, bunday $f(z)$ funksiyaga butun transendent funksiya deyiladi.

Masalan: $f(z)=e^z$, $f(z)=\sin z$, $f(z)=\cos z$ transendent funksiyalardir.

Ta'rif. Ochiq C tekislikda qutbdan boshka maxsus nuqta ga ega bo'lmagan $f(z)$ funksiyaga meromorf funksiya deyiladi.

Butun funksiyalar sinfi meromorf funksiyalar sinfining qism to'plamini tashkil kiladi.

Har bir qutb maxsus nuqta $f(z)$ funksiya uchun yakkalangan maxsus nuqta bo'lganligi sababli $\{|z|<n\}$ sohada maxsus nuqta larning soni cheklidir. Boshkacha qilib aytganda qutblar chekli limitga ega emas.

Shu meromorf funksiyalarni qutblarini sanab chiqish mumkin. Cheksizta qutblarga ega bo'lgan meromorf funksiyalarga misol sifatida $f(z)=tgz$, $f(z)=ctgz$.

4–Teorema. Agar $f(z)$ funksiya uchun ∞ lik qutilib bo'ladigan yoki qutb maxsus nuqta dan iborat bo'lsa, u holda bunday funksiya ratsional funksiyadan iborat bo'ladi ($f(z)$–meromorf funksiya)

Isbot. $f(z)$ funksiyani barcha qutblari soni cheklidir. Chunki, aks holda $a=\infty$ yakkalangan maxsus nuqta bo'lar edi. Bu qutblarning a_V $\left(V=\overline{1,n}\right)$ orkali belgilaymiz.

$f(z)$ funksiyaning Loran qatoriga yoysak, Loran qatorini bosh qismi $g_V(z)=\frac{C_{-N_V}}{(z-a_V)^{N_V}}+\frac{C_{-1}^{(V)}}{z-a_V}$

$a=\infty$ nuqta $f(z)$ funksiya uchun qutilib bo'ladigan yoki qutb maxsus nuqta bo'lganligi uchun $a=\infty$ nuqta atrofida $f(z)$ funksiyaning Loran qatoriga yoyilmasi $g(z)=C_1z+C_2z^2+...+C_{-N}z^N$ shaklda tasvirlanadi. Agar $a=\infty$ nuqta larni qutilib bo'ladigan nuqtasi bo'lsa, $g\equiv 0$ deymiz. Quyidagi $\varphi(z)=f(z)-g(z)-\sum_{V=1}^{n}g_V(z)$ funksiyani tuzamiz. Bu funksiya C golomorf funksiya. Shuning uchun $\varphi(z)=const=C_0$ bo'ladi. Bunda $f(z)=C_0+g(z)+\sum_{V=1}^{n}g_V(z)$ bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

17-18 - Ma'ruza.

CHEGIRMALAR NAZARIYaSI VA UNING BA'ZI TATBIQLARI

1.Chegirmalar va ularni hisoblash.

Faraz kilaylik, $f(z)$ funksiya $\{0<|z-a|<\delta\}$ da golomorf bo'lib, a nuqta bu funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi bo'lsin.

1-Ta'rif. *Ushbu*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\rho} f(z)dz \qquad (0<\rho<\delta)$$

integral $f(z)$ *funksiyaning* a *nuqtadagi chegirmasi deyiladi va* $\underset{z=a}{res}\, f(z)$ *kabi belgilanadi:*

$$\underset{z=a}{res}\, f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\rho} f(z)dz.$$

Ravshanki, $f(z)$ funksiya a nuqtada golomorf bo'lsa, $\underset{z=a}{res}\, f(z)=0$ bo'ladi.

Aytaylik, $f(z)$ funksiya $\{r<|z|<\infty\}$ da golomorf bo'lsin.

2-Ta'rif. *Ushbu*

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\rho} f(z)dz \qquad (\rho>r)$$

integral $f(z)$ *funksiyaning* $z=\infty$ *nuqtadagi chegirmasi deyiladi va* $\underset{z=\infty}{res}\, f(z)$ *kabi belgilanadi:*

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} f(z)dz \quad .$$

1-Teorema. *Agar* $f(z)$ *funksiya* $\{0 < |z-a| < r\}$ *xalqada Loran qatori*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

ga yoyilgan bo'lsa, u holda

$$\underset{z=a}{res}\, f(z) = c_{-1} \qquad \textit{(18)}$$

bo'ladi. Agar $f(z)$ funksiya $\{r < |z| < \infty\}$ xalqada Loran qatori

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

ga yoyilgan bo'lsa, u holda

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z) = -c_{-1} \qquad (19)$$

2-Teorema. (Chegirmalarning yigindisi haqidagi teorema). *Agar* $f(z)$ *funksiya* $C \setminus \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ *to'plamda golomorf bo'lsa, u holda*

$$\sum_{k=1}^{n} \underset{z=a_k}{res}\, f(z) + \underset{z=\infty}{res}\, f(z) = 0 \qquad \textit{(20)}$$

bo'ladi.

Endi funksiya chegirmalarini hisoblashda foydalanadigan formulalarni keltiramiz.

1) Agar $z = a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning *birinchi tartibli qutb nuqtasi* bo'lsa,

$$\underset{z=a}{res}\, f(z) = \lim_{z\to a} (z-a)\cdot f(z) \qquad (21)$$

bo'ladi.

2) Agar $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ uchun $\varphi(z)$ *ва* $\psi(z)$ funksiyalar a nuqtaga golomorf bo'lib, $\psi(a) = 0, \quad \psi'(a) \neq 0$ bo'lsa , u holda

$$\underset{z=a}{res}\, f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \qquad (22)$$

bo'ladi.

3) Agar $z = a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning *n-tartibli qutb nuqtasi* bo'lsa,

$$\underset{z=a}{res}\, f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}[(z-a)^n f(z)]}{dz^{n-1}} \qquad (23)$$

bo'ladi.

4) Agar $z=\infty$ nuqtada $f(z)$ funksiya golomorf bo'lsa,

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=\lim_{z\to\infty} z[f(\infty)-f(z)] \qquad (24)$$

bo'ladi.

5) Agar $f(z)=\varphi(\frac{1}{z})$ bo'lib, $\varphi(z)$ funksiya $z=0$ nuqtada golomorf bo'lsa,

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=-\varphi'(0) \qquad (25)$$

bo'ladi.

2. **Integrallarni chegirmalar yordamida hisoblash**.

Chegirmalar yordamida turli integrallarni hisoblash mumkin. Bunda quyidagi teorema muhim rol o'ynaydi.

Teorema (Koshi teoremasi). *Faraz qilaylik ,*

1) $f(z)$ funksiya $D\setminus\{a_1,a_2,...a_n\}$ sohada golomorf $(D\subset C,\ \ a_1,a_2,...,a_n\in D)$,

2) $f(z)$ funksiya sohaning chegarasigacha aniqlangan va $\overline{D}\setminus\{a_1,a_2,...a_n\}$ da uzluksiz,

3) ∂D - to'g'rilanuvchi yopiq kontur bo'lsin. U holda

$$\int_{\partial D} f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{z=a_k}{res}\, f(z) \qquad (26)$$

formula o'rinlidir.

Izoh. (26)-formula $\infty\in D$ bo'lgan hol uchun ham o'rinlidir. Faqat bu holda $z=\infty$ ni $f(z)$ uchun maxsus nuqta deb hisoblash hamda ∂D chiziq orientatsiyasini soat strelkasi yo'nalishida olish kifoyadir.
Yuqorida keltirilgan Koshi teoremasidan amaliyotda yopik kontur bo'yicha olingan integrallarni hisoblashda foydalaniladi.

3. Aniq integrallarni chegirmalar yordamida hisoblash.

Aniq integrallarni ham chegirmalar yordamida hisoblash mumkin. Bunda aniq integral kompleks o'zgaruvchili funksiyaning kontur bo'yicha olingan integraliga keltirilib hisoblanadi.

a) $\int_0^{2\pi} R(\cos x,\sin x)dx$ **ko'rinishdagi integrallarni hisoblash.**

Ushbu

$$I=\int_0^{2\pi} R(\cos x,\sin x)dx \qquad (27)$$

integral berilgan bo'lib, uni hisoblash talab etilsin, bunda $R(\cos x, \sin x) - \cos x$ *ва* $\sin x$ larning ratsional funksiyasi va u $[0,2\pi]$ da uzluksiz.

Eyler formulasiga ko'ra

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \ , \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

bo'lishini e'tiborga olib, so'ng

$$z = e^{ix}$$

deb belgilash kiritsak, unda

$$x \in [0,2\pi] \Rightarrow z \in \{\ z \in C : |z| = 1\},$$

$$\cos x = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \ , \quad \sin x = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}),\ dx = \frac{1}{iz}dz$$

bo'lib, berilgan (28)-integral quyidagicha

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx = \oint_{|z|=1} \tilde{R}(z)dz$$

bo'ladi, bunda

$$\tilde{R}(z) = \frac{1}{iz} R(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})).$$

Hosil bo'lgan integral oldingi punktdagi (26)-formula yordamida hisoblanadi.

b) Xosmas integrallarni hisoblash.

Chegirmalar nazariyasidan foydalanib xosmas integrallarni ham hisoblash mumkin. Bu kuyidagi teoremaga asoslangan.

Teorema. *$f(z)$ funksiya $\{z \in C : \operatorname{Im} z > 0\}$ sohaning chekli sondagi maxsus nuqtalaridan tashqari barcha nuqtalarida golomorf bo'lib, uning chegarasida uzluksiz bo'lsin. Agar*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)dz = 0 \qquad (\gamma_r = \{|z| = r\ ,\ \ 0 \le \arg z \le \pi\}) \qquad \textit{(28)}$$

bo'lsa, u holda $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *yaqinlashuvchi bo'lib,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k \succ 0} \underset{z=z_k}{res}\ f(z) \qquad \textit{(29)}$$

bo'ladi.

Bu teoremadagi (28)-shartning bajarilishini ko'rsatishda quyidagi lemmalardan foydaniladi.

1-Lemma (Jordan lemmasi). *Agar*

$$\lim_{r\to\infty} r \max_{z\in\gamma_r}|f(z)| = 0 \qquad \textit{(30)}$$

bo'lsa,

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)dz = 0 \qquad \textit{(31)}$$

bo'ladi.

2-Lemma.(Jordan lemmasi). *Agar*

$$\lim_{r\to\infty}\max_{z\in\gamma_r}|f(z)| = 0 \qquad \textit{(32)}$$

bo'lsa, u holda $\forall\lambda > 0$ *uchun*

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)e^{i\lambda z}dz = 0 \qquad \textit{(33)}$$

bo'ladi.

Endi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}R(x)dx$$

ko'rinishdagi xosmas integrallarni qaraylik.

Agar $\lim\limits_{r\to\infty}\max\limits_{z\in\gamma}|R(z)| = 0$ bo'lsa, u holda bu integralga 2-lemmani va yuqoridagi teoremani qo'llash natijasida quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x dx = -2\pi\cdot\operatorname{Im}\left\{\sum_{\operatorname{Im} z_k \succ 0} \underset{z=z_k}{res}[e^{i\lambda z}\cdot R(z)]\right\}, \qquad (34)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\lambda x dx = 2\pi\cdot\operatorname{Re}\left\{\sum_{\operatorname{Im} z_k \succ 0} \underset{z=z_k}{res}[e^{i\lambda z}\cdot R(z)]\right\}, \qquad (35)$$

1-misol. Ushbu

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2-2x+2}dx$$

integralni hisoblang.

$\triangleleft$ $f(z)$ funksiya deb

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2-2z+2} = \frac{e^{iz}}{[z-(1+i)]\cdot[z-(1-i)]}$$

ni olamiz. Bu funksiyaning 2ta $z_1 = 1+i$ va $z_2 = 1-i$ qutb nuqtalari bo'lib, ulardan $z_1 = 1+i \in \{\operatorname{Im} z > 0\}$ bo'ladi.

$R(z) = \dfrac{1}{z^2-2z+2}$ funksiya uchun $z\to\infty$ da $R(z)\sim\dfrac{1}{z^2}$ bo'lganidan 2-lemma shartining bajarilishi ta'minlanadi. Unda (36)-formulaga ko'ra

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 2x + 2} dx = 2\pi \cdot \mathrm{Re}[\underset{z=z_1}{res} f(z)]$$

bo’ladi.

(23)-formuladan foydalanib $\underset{z=z_1}{res} f(z)$ ni hisoblaymiz:

$$\underset{z=z_1}{res} f(z) = \lim_{z \to 1+i} \left\{ \frac{e^{iz}}{[z-(1+i)] \cdot [z-(1-i)]} \cdot [z-(1+i)] \right\} =$$

$$= \frac{e^{i(1+i)}}{2i} = \frac{e^{-1}}{2} (\sin 1 - i \cos 1).$$

Demak,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 2x + 2} dx = 2\pi \cdot \mathrm{Re}\left[\frac{e^{-1}}{2} (\sin 1 - i \cos 1) \right] = \pi e^{-1} \sin 1. \qquad \triangleright$$

2–**Misol.** $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{1 - 2a\cos\phi + a^2}$, $\left(|a| < 1 \right)$ hisoblansin.

$z = e^{i\phi}$ bo’lsin. U holda

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \quad d\varphi = \frac{dz}{iz} = -i\frac{dz}{z}, \quad I = \int_{|z|=1} \frac{1}{1 - 2a\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) + a^2} (-i) \frac{dz}{z} = i \int_{|z|=1} \frac{dz}{az^2 - (a^2+1)z + a}.$$

Maxsus nuqtalarni topib olamiz:

$$az^2 - (a^2+1)z + a = 0 \qquad R_1(z) = \frac{i}{az^2 - (a^2+1)z + a}$$

$$z_{1,2} = \frac{(a^2+1) \pm \sqrt{(a^2+1)^2 - 4a^2}}{2a} = \frac{+(a^2+1) \pm (a^2-1)}{2a},$$

$$z_1 = \frac{(a^2+1) + (a^2-1)}{2a}, \quad z_2 = \frac{(a^2+1) - (a^2-1)}{2a}$$

$|a| < 1$ bo’ganligi uchun birinchi aylana ichida $z_1 = a$ maxsus nuqta bor. Bu maxsus nuqta birinchi tartibli qutbdir. Shunga asosan

$$I = 2\pi i \underset{z=a}{res} R_1(z) = 2\pi i \left[\frac{i}{2az - (a^2+1)} \right]_{z=a} = 2\pi i \frac{i}{a^2 - 1} = \frac{2\pi}{1 - a^2}$$

Demak, $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{1 - 2a\cos\phi + a^2} = \frac{2\pi}{1 - a^2}, \ |a| < 1.$

3–**Misol.** $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^4}$ hisoblansin.

$$R(z)=\frac{1}{(z^2+1)^4}=\frac{1}{(z-i)^4(z+i)^4}$$

bu funksiya $z_1=i, z_2=-i$ maxsus nuqtalarga ega bo'lib, bu maxsus nuqtalar to'rtinchi tartibli qutbdir. Yuqori yarim tekislikda faqat $z_1=i$ nuqta yotadi.
n-chi tartibli qutb bo'lsa,

$$I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^4}=2\pi i\,\underset{z=i}{resf}(z)=2\pi i\,\underset{z=i}{res}\frac{1}{(x^2+1)^4}=\frac{2\pi i}{3!}\left[\frac{1}{(z+i)^4}\right]^{(III)}_{z=i}=$$

$$=\frac{2\pi i}{6}(-4)(-5)(-6)\frac{1}{2^z i^z}=\frac{2\pi i20}{2^7}=\frac{5\pi}{16},\quad I=\frac{5\pi}{16}$$

4–**Misol.** $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-1)\cos 5x}{x^2-2x+5}dx$ hisoblansin.

$$I=-2\pi\,\mathrm{Im}\left(\sum_{\mathrm{Im}\,z_k>0}\underset{z=z_k}{res}\left(e^{i\lambda z}R(z)\right)\right).\text{ Bunda, } R(z)=\frac{z-1}{z^2-2z+5}\,.$$

$$z^2-2z+5=0\,,\ z_{1,2}=1\pm 2i.\ z_1=1+2i, \mathrm{Im}\,z_1=2>0.\,z_2=1-2i, \mathrm{Im}\,z_2=-2<0$$

$$I=2\pi\,\mathrm{Im}\left(\underset{z=1+2i}{res}\frac{e^{5iz}(z-1)}{z^2-2z+5}\right)=\underset{z=1+2i}{res}\left[\frac{e^{5iz}(z-1)}{(z^2-2z+5)'}\right]_{z=1+2i}=\underset{z=1+2i}{res}\left[\frac{e^{5iz}(z-1)}{2z-2}\right]_{z=1+2i}=$$

$$=\frac{e^{-10}}{2}\mathrm{Im}(\cos 5+i\sin 5)=-\pi e^{-10}\sin 5$$

Tayan iboralar: maxsus nuqta, yakkalangan maxsus nuqta, qutilib bo'ladigan maxsus nuqta, muhim maxsus nuqta .

O'z –o'zini tekshirish uchun savollar:

1) Funksiyaning $z=a$ nuqtadagi qoldig'i deb nimaga aytiladi?
2) Koshi teoremasi.
3) Qutilib bo'ladigan maxsus nuqtadagi funksiya qoldig'i nimaga teng?
4) To'la qoldiq haqidagi teorema.
5) $z=\infty$ nuqtadagi funksiya qoldig'i ta'rifi qanday?
6) Jordan limiti.

ADABIYOTLAR

1. **Шабат Б.В**. Введение в комплексный анализ. 2-nashri, 1-ч.-М.,”Наука”, 1976.

2. **Xudoyberganov G**., **Vorisov A**., **Mansurov X**. Kompleks analiz. (ma’ruzalar). – T.,”Universitet”,1998.

3. **Sadullaev A**., **Xudoybergangov G**., **Mansurov X**., **Vorisov A**., **Tuychiev T**. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to’plami. 3-qism (kompleks analiz).- T., “O’zbekiston”,2000.

4. **Волковыский Л.И**., **Лунц Г.Л.**, **Араманович И.Г**. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. 3- nashri. – M. “Наука”, 1975.

5. **Евграфов М.А**., **Бежанов К.А**., **Сидоров Ю.В**., **Федорюк М.В., Шабунин М.И**. Сборник задач по теории аналитических функций, 2- nashri. –М., “Наука” 1972.

6. **Лаврентьев М.А**., **Шабат Б.В**. Методы теории функций комплексного переменного. 4-нашри. –М., ”Наука”, 1973.

7. **Сидоров Ю.В**., **Федорюк М.В**., **Шабунин М.И**. Лекции по теории функций комплексного переменного. – M. “Наука”, 1976.

8. **Маркушевич А.И.**, **Маркушевич Л.А**. Введение в теорию аналитических функций. -М., “Просвещение”, 1977.