O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika – matematika fakulteti

Matematika kafedrasi

5130100-matematika ta’lim yo‘nalishi bo‘yicha bakalavr
darajasini olish uchun

Tog‘ayev Sardor Abdug‘affor o‘g‘lining
KOMBINATORIK MUNOSABATLARNI ISBOTLASH METODI
mavzusida tayyorlagan

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Rahbar: __________ M. Tajiyev, pedagogika fanlari doktori.

BMI “Matematika” kafedrasining 2018 yil _______ №____ sonli yig‘ilishida ko‘rib chiqildi va himoyaga tavsiya etildi.

Kafedra mudiri __________ H.Norjigitov, fizika-matematika fanlari nomzodi.

BMI fizika-matematika fakulteti dekanati tomonidan himoyaga ruxsat berildi.

Fakultet dekani __________ Tashtemirov D.E. pedagogika fanlari nomzodi.

Guliston – 2018

Mundarija

KIRISH

Har qanday millatning ravnaqi,
umumbashariyat tarixidatutgan
o‘rni, mavqei va shuhrati bevosita
o‘z farzandlarining aqliy va jismoniy
yetukligiga bog‘liqdir.

I.A.Karimov.

Bugungi kunda ta’lim – tarbiya sohasidagi islohotlarning yo‘nalishlari va prinsiplari O‘zbekiston Respublikasining “Ta’lim to‘g‘risida” gi Qonuni, “Kadrlash tayyorlash milliy dasturi” va Davlat ta’lim standart talablarga ko‘rsatib berilgan. “Kadrlar tayyorlash milliy dastur” ning talablaridan biri yoshlarni umuminsoniy qadriyatlarga asoslangan shaxsiy va kasbiy fazilatlarni shakllantirish, fanlarga qiziqishni oshirish, rivojlantirish, izlanish, tadbirkorlik, ishbilarmonlik ko‘nikmalarni tarkib toptirishdan iboratdir.

Bitiruv malakaviy ishning dolzarbligi. “Algebra va matematik analiz asoslari” faniga “Kombinatika elementlari” bobi yangi kiritilgan bo‘lib, undagi materiallarni o‘zlashtirish, masalalarni yechish uchun ko‘rsatmalar zarur. Bundan tashqari kalendar rejaga kiritilgan ayrim mavzular darslikda yoritilmagan. Shuning uchun ham bu mavzu dolzarb.

Shuning uchun ham kombinatorik munosabatlarni traektoriyalar mrtodi (usuli) yordamida ko‘rgazmali geometric talqinda isbotlash talabalarga yanada tushunarli bo‘ladi hamda mavzu yanada qiziqarli tus oladi.

Biz bu mavzuni o‘rganish jarayonida kundalik hayotimizda uchrab turadigan qiziqarli voqea hodisalarni o‘rganib, ularni trarektoriya metodi yordamida bajardik.

Bitiruv malakaviy ishning maqsad va vazifalari. Bitiruv malakaviy ishining asosiy maqsadi bu – Ayrim muhum kombinatorik munosabatlarni o‘rganish, traektoriyalar metodini ko‘rgazmaliligini namoyish qilishdan iborat.

Shuni ta’kidlash joizki, biz qarayotgan kombinatorikaning ayrim muhim masalalarini ko‘rgazmaliligini namoyish qilish, geometrik talqinini beradi.

Bitiruv malakaviy ishining asosiy maqsadi ham aynan shuning uchunkombinatorik ayrim masalalarni traektoriya usuli yordamida bajarilishidan iborat.

Bitiruv malakaviy ishning obyekti va predmeti. Bitiruv malakaviy ishining ob'ekti va predmeti bu kombinatorika elementlari nazariyasi, kombinatorik munosabatlar, unga doir misol va masalalar, ehtimollar nazariyasidan tasodifiy miqdor, tasodifiy protseslar, ixtiyoriy 2 ta nuqta (ya'ni koordinata o'qida) orasidagi qisqa yo'llar sonidir.

Bu mavzulardan foydalanish jarayonida ham turli xil oddiy ta'riflar va oddiy tushunchalardan foydalanildi.Bitiruv malakaviy ishini tayyorlash jarayonida ayrim muhim kombinatorik munosabatlarni traektoriya metodi yordamida bajarildi.Bunda umumiy natijalar va xulosalar olindi.

Bitiruv malakaviy ishning tadqiqot usuli va uslubiyoti. Adabiyotlar tahlili, kuzatish, exspriment, yangi pedagogik texnoligiya va kompyuter texnalogiyalar usuli.

Bitiruv malakaviy ishida Kombinatorika metodlari, traektoriyalar metodi yordamida osonroq bajarilishi ko'rsatiladi, jumladan kombinatorik masalalardan "shaxmat shaharchasi" da shaxmat doskasi 5x5 kataklardan iborat kvadratda boshlang'ich nuqtadan oxirgi nuqtagacha bo'lgan qisqa yo'llar soni chizmada oson ko'rsatib berildi.Qiziqarli masalalardan yana biri "kassa oldida navbat kutmaslik" masalasi ham traektoriya metodi yordamida bajarildi.

Bu kabi masalalarni yechishda geometric jihatdan uning chizmalarini (grafiklarini) chizish (yasash) yordamida uning yechimlarini ko'rsatib beramiz, analitik usulda to'g'ri -xatoligini tekshirib ko'ramiz.

Bitiruv malakaviy ishning olingan asosiy natijalar. Ayrim kombinatorik munosabatlar o'rganilgan, ularning traektoriyalar metodi bilan isbotlar, kerakli nazariy materiallar o'rganilgan va qisqa yo'llar soni ko'rgazmaliligi aniqlangan.

Demak, asosiy natija shundan iboratki, ayrim kombinatorika munosabatlar o'rganilgan, ularning traektoriyalar metodi bilan isbotlari keltirildi.

Natija olishda turli-xil ko‘rgazmalardan foydalanilib, masalalarning geometrik talqini berildi. Bu mavzu ehtimollar nazariyasi hamda matematik statistika fanlari hamjihatligida o‘rganiladi.

Bitiruv malakaviy ishning ilmiy yangiligi va ahamiyati. Bu bitiruv malakaviy ishi ilmiy hisoblanadi. Bitiruv malakaviy ishida asosan kombinatorik ayrim munosabatlarning ko‘rgazmali islohotlari haqida so‘z yurutiladi. Ish uslubiy xarakterga ega , kombinatorik munosabatlar isbotining ikki xil usullari bilan tanishib chiqamiz. Bitiruv malakaviy ishining amaliy ahamiyati shundaki,”shaxmat shaharchasi” kabi masalalarni o‘rganishda traektoriya metodi qo‘l keladi.

Bitiruv malakaviy ishning amaliy mohiyati. Ish uslubiy xarakterga ega bo‘lib, undan konstruktor mexanizmning yangi modulini yaratishda, olim – ogronom qishloq xo‘jalik ekinlarini bir necha yer maydoniga ekishni rivojlantirishda, kimyogar berilgan atom tarkibli oranik molekulalar tuzilishini o‘rganishda foydalanishdi.

Bitiruv malakaviy ishning strukturasi va hajmi. Bitiruv malakaviy ish mundarija, kirish qismi, 2 ta bob, 6 ta paragraf, xulosa, xotima va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat.

Kombinatorik deb atalgan masalalarga odamlar juda qadimdan yo‘liqqanlar. Bir necha ming yil burun Qadimgi Xitoyda sehrli kvadratga sonlar shunday joylanadiki, natijada har gorizontal, vertikal va diogonaldagi sonlar yig‘indisi bir xil bo‘ladi. Qadimgi Yunonistonda sher o‘lchovidagi uzun va qisqa bo‘g‘inlara har xil kombinatsiyalarni figurali sonlar nazaroyasini, kvadratni maxsus usulda qirqqanda hosil bo‘ladigan bo‘laklardan tuziladigan figuralarni o‘rganishgan.

Kombinatorik masalalar shashka, shaxmat, domino, karta, shoshqol kabi o‘yinlar tufayli ham vujuda kelgan.

Kombinatorik XVII asrga kelib fanga aylandi. Turli masalalarni yetish uchun u yoki bu shartga bo‘ysunuvchi har xil kombinatsiyalar sonini sanay bilish kerak bo‘lgan. XVII asr Italyan olimlari J.Kardano, N.Tartalyava, G.Galileyning dastlabki ishlaridan so‘ng ajratilgan masalalar bilan fransuz matematiklari B.Paskal va P.Ferma shug‘unlandilar. Kombinatorikani mustaqil fan tarmog‘i sifatida birinchi bo‘lib G.Leybnis o‘rgandi. U 1666 – yil “Kombinatorika san’ati haqida” asarini yaratadi. Unda birinchi bo‘lib “Kombinatorik” so‘zi qo‘llaniladi.

Kombinatorik sohasida ajoyib yutuqlar L.Eylerga ham tegishli. Shifrlarning sirini ochish, ko‘hna qo‘lyozmalarni o‘rganish bilan shug‘ullanuvchi matematiklar ham kombinatorik masalalarga qiziqqanlar.

Kombinatorikaning rivojlanishi borasida shu narsa ma’lum bo‘ldiku, u o‘rganadigan ko‘p masalalar tafovitiga qaramasdan bir xil matematik mazmunga ega va chekli to‘plam va ularning qism to‘plamlariga oid masalalarga keltiriladi.

1970 – 1980 yillarda kombinatorika yangi – yangi yutuqlarni qo‘lga kiritdi. EHM yordamida “to‘rt bo‘yoq muammosi” hal qilindi: har bir xaritani umumiy chegarali davlatlardan hech bir jufti bir xil rangda bo‘lmaydigan qilib, to‘rt xil rangdagi bo‘yoq bilan bo‘yash mumkin ekanligi isbotlandi.

1 BOB. AYRIM MUHIM KOMBINATORIK MUNOSABATLAR VA TUSHUNCHALAR HAQIDA.

1.1-§. Berilgan to‘plamning to‘plam ostilari.

Berilgan to‘plamning k -elementli qism to‘plami miqdori.

1.1-Tarif: Agar B to‘plamning har bir elementi A to‘plamga tegishli bo‘lsa, u holda B A to‘plamning qism to‘plami deyiladi va quyidagicha ifodalanadi: $A \supset B$ yoki $B \subset A$ (A B ni o‘z ichiga oladi, B A ga kiradi deb o‘qiladi) .

Har qanday narsalardan tuzilgan va bir – biridan shu narsalarning tartibi yoki o‘zi bilan farq qiluvchi gruppalar (to‘plamlar) birlashmalar (kombinatsiya) deyiladi.

Oldingi mavzulardan biz to‘plam tushunchasini bilamiz. Yana eslatib o‘tamiz.

To‘plam – to‘plam tushunchasi matematikaning boshlang‘ich tushunchalaridan biridir. U chekli yoki cheksiz obyektlar (narsalar, buyumlar, shaxslar) ni birgalikda bir butun deb qarash natijasida vujudga keladi. Masalan; O‘zbekistondagi viloyatlar to‘plami; Viloyatdagi akademik litseylar to‘plami; butun sonlar to‘plami; to‘g‘ri chiziq kesmasidagi nuqtalar to‘plami; sinfdagi o‘quvchilar to‘plami.

To‘plamni tashkil qilgan obyektlar uning elementlari deyiladi. To‘plamlar odatda lotin alifbosini bosh harflari bilan, uning elementlari esa shu alifboning kichik harflari bilan belgilanadi.

A=$\{1,2,3\}$va B=$\{a,b\}$ to‘plamlar elementlaridan shunday juftliklar tuzaylikki,ulardagi birinchi o‘rinda A ning tartib bilan olingan element, ikkinchi o‘rinda B ning tartib bo‘yicha olingan elementi yoziladigan bo‘lsin. Hosil bo‘ladigan juftliklar to‘plamini AxB orqali belgilasak:

$$AxB = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

Agar birinchi o‘rinda B elementlari qo‘yiladigan bo‘lsa, yozilish tartibi bilan oldingisidan farq qiladigan

$BxA = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$ to‘plam hosil bo‘ladi.

(1,a), (1,b)…..juftliklar (ikkitaliklar) tarkibidagi elementlar shu juftlikning komponentalari yoki koordinatalari deyiladi (lotincha componentis – tashkil etuvchi).

Shu kabi berilgan A,B,C to‘plamlar elementlaridan tartiblangan uchtaliklar, umuman, k ta to‘lab elementlaridan tartiblangan k taliklar to‘plami tuziladi.

K ta har xil elementli to‘plam uzunligi n=k ga teng deyiladi. Masalan, (1,9,25) va $\left(\sqrt{1},\sqrt{81},\sqrt{625},\right)$ uchliklar teng va bir xil uzunlikda (n=3), komponentalari: $1=\sqrt{1},\quad 9=\sqrt{81},\quad 25=\sqrt{625}.$ Lekin (a,b,c) va (c,a,b) uchliklarning uzunliklari va koordinatalari bir xil bo‘lsada, lekin ular teng emas, chunki koordinatalar turli tartibda joylashgan. (1,2,3) va (1,2,3,4) lar uzunligi har xil, demak o‘zlari ham teng emas.

k talikda kompanentalar to‘plamlardan va boshqa narsalardan iborat bo‘lishi ham mumkin. Shunga ko‘ra ({a,b},c) va ({b,a},c) ikkitaliklar teng, chunki {a,b} va {b,a} bitta to‘plam. Lekin ((a,b),c) va ((b,a),c) ikkitaliklar teng emas chunki (a,b) juftlik (b,a) juftlikka teng emas. (a,b,c), ((a,b),c), (a,(b,c)) lar ham har xil: birinchisi uchtalik, ikkinchisi va uchinchisi har xil ikkitaliklar.

Birorta ham kompanentlar ega bo‘lmagan (ya’ni 0 uzunlikdagi) k talik bo‘sh k talik deyiladi. To‘plamda elementlarning tartibi rol o‘ynamaydi, k talikda rol o‘ynaydi, to‘plamda elementlar takrormasligi kerak, k talik koordinatalar takrorlanishi mumkin.

1.2 - Tarif:Bo‘sh to‘plam ixtiyoriy to‘plamning qism to‘plamidir.Uni quyidagicha yozamiz: $\varnothing \subset A$.

1.3- Tarif:Har qanday A to‘plam o‘z-o‘ziga qism to‘plam hisoblanadi va $A \subset A$ ko‘rinishida yoziladi.

1.4 -Tarif:Agar $A \subset B$ va $B \subset A$ bo‘lsa , uholda $A = B$ deyiladi . A to‘plamning B qism to‘plami qarashli deyiladi , agarda $B \neq A$ va $B \neq \varnothing$ bo‘lsa .

Agar qandaydir A to‘plam berilgan bo‘lsa, $M(A)$ bilan uning barcha qism to‘plamlari to‘plamini belgilaymiz .

$M_k(A)$ bilan A to‘plamning barcha k elementli qism to‘plamlarini belgilaymiz, bu qism to‘plamlar k ta elementga ega :

Agar B to‘plam $M(A)$ to‘plamning qism to‘plami va $N(B)=k$ bo‘lsa, u holda B to‘plam $M_k(A)$ to‘plamning ham qism to‘plami deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$B \subset M_k(A)$, agar $B \subset M(A)$ va $N(B)=k$ bo‘lsa .

Buni quyidagi misolda qaraymiz:

1.1 Misol : $A=\{a,b,c\}$ to‘plam berilgan bo‘lsin . U holda

$M(A)=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\{a,b,c\},\varnothing\}$; $M_2(A)=\{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$.

$M_2(A)$ - bu to‘plam M to‘plamning ikki elementli qism to‘plami.

Demak *N(M(A))=8=2*^{3}. Chunki *M(A)*- 8 ta elementdan iborat . $N(M_2(A))=3$ ga teng , chunki $M_2(A)$ to‘plam uchta elementdan iborat .

Shu o‘rinda shunday savol tug‘iladi: n elementli to‘plam nechita turli k elementli qism to‘plamga ega?

$n!$ bilan (n-faktarial deb o‘qiladi) 1 dan n gacha bo‘lgan barcha natural sonlar ko‘paytmasini ifodalaymiz :

$n!=1*2*........*n$ $\quad 0!=1$ ekani ko‘rinib turibdi , chunki natural sonlar to‘plami 1 raqamidan boshlanadi.

1.5- Ta’rif. Gruppalash deb n ta elementdan k tadan tuzilgan va bir–biridan eng kamida 1 ta elementi bilan farq qiladigan o‘rinlashtirishlarga aytiladi.

Ularning sonini C_n^k orqali belgilaymiz.

1.1- Teorema : n elementdan iborat to‘plamning barcha k- elementli qism to‘plamlari soni teng :

$$N(M_k(A))=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1*2*....*k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (1)$$

Isbot:

$N(M_k(A))=C_n^k$ ni ifodalaymiz.

A to‘plamning k- elementli qism to‘plamini tuzish uchun $(k-1)$- elementli qism to‘plamga $n-k+1$ elementlardan birini qo‘shish kerak , bu element qism to‘plamga kirmaydi .$(k-1)$ - elementli qism to‘plam C_n^{k-1} bo‘lar ekan va ularning har birini $n-k+1$ yo‘li bilan k - elementli qilish mumkin ekan, u holda shu yo‘l bilan biz $(n\text{-}k+1)C_n^{k-1}$ qism to‘plamni hosil qilamiz . Lekin ularning hammasi ham turlicha bo‘la olmaydi.

Har bir *k*- elementli to‘plamni *k* usul bilan tuzish mumkin: har bir *k* dan uning elementlarini qo‘shish bilan.

Shuning uchun biz *k* da hisoblangan son *k* elementli qism to‘plamning C_n^k sonidan bir marta ortiq.

Bundan kelib chiqadiki :

$$kC_n^k = (n\text{-}k+1)C_n^{k-1}$$

Bu tenglikdan C_n^k ni topib olsak :

$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k}C_n^{k-1} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{k(k-1)}C_n^{k-2} = ...= \frac{(n-k+1)......(n-1)}{k(k-1)......2}C_n^1$$

A to‘plamning bir elementli qism to‘plamlar soni *n* elementlar miqdoriga teng .C_n^1 o‘rniga *n* sonini qo‘yib , (1) ni hosil qilamiz.

n elementli to‘plamning ixtiyoriy *k* – elementli qism to‘plami *n* ta elementdan *k* tadan tuzilgan birikma deyiladi .

Qism to‘plamda elementlarning tartibi ahamiyatga ega emas . Ba’zida “birikma” so‘zi o‘rniga kombinatsiya termini qo‘llaniladi -*n* ta elementdan *k* tadan .

Biz aniqladikki , *n* ta elementdan *k* tadan birikma soni

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ga teng.

1.2-misol:Necha usul bilan o‘quvchi 5 kitobdan 3 tasini tanlashi mumkin ?

Yechish: Usullarning izlangan sonibesh elementli to‘plamning uch elementli qism to‘plamning soniga teng :

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!*2!} = 10$$

1.3-misol:Necha usul bilan 7 kishidan 3 kishilik komissiya tanlash mumkin ?
Yechish: Kamissiyaning barcha imkoniyatlarini ko‘rib chiqish uchun 7 kishidan tuzilgan to‘plamning 3 elementli qism to‘plamining barcha elementlarini ko‘rib chiqish kerak .
Usullarning izlangan soni quyidagiga teng :

$$C_7^3 = \frac{7*6*5}{1*2*3} = 35$$

1.4-misol:Turnirda *n* shaxmatchi ishtirok etdi va har ikki shaxmatchi bir martadan uchrashishdi . Turnirda necha partiya o‘yin o‘ynaldi ?
Yechish: *n* ta elementli to‘plamda nechita ikki elementli qism to‘plam ajratish mumkin bo‘lsa , shuncha partiya o‘ynalgan .

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1*2}$$

1.5–Masala. Ixtiyoriy uchtasi bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan 6 ta nuqta berilgan. Shu 6 ta nuqtalar orqali nechta turlcha to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin?

Yechish. Berilgan 6 ta nuqtani 6 elementli to‘plam deb qarash mumkin. Har 2 ta nuqta orqali bitta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin. Demak, 6 elementli to‘plamdan ikki elementli qism to‘plamlar ajratishimiz kerak. Bu berilgan 6 ta nuqta orqali C_6^2 ta turlicha to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin”

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$$

1.6–Masala. 20 kishi ichidan 4 vakilni necha usul bilan saylash mumkin?

Yechish. Berilgan 20 kishini 20 elementli to‘plam deb qarash mumkin. 20 elementli to‘plamdan 4 elementli qism to‘plamlar ajratishimiz kerak.

$$C_{20}^{4}=\frac{20!}{4!(20-4)!}=\frac{20!}{4!16!}=\frac{17*18*19*20}{1*2*3*4}=4845$$

1.7–Masala. Bir aylanada yotgan 5 ta nuqta ustidan nechta vatar o‘tkazish mumkin.

Yechish. Berilgan 5 ta nuqtani 5 elementli to‘plam deb qarash mumkin. Aylanada har ikki nuqta orqali vatar o‘tkazish mumkin. Demak, 5 elementli to‘plamdan ikki elementli qism to‘plamlar ajratishimiz kerak.

$$C_{5}^{2}=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{4*5}{2}=10$$

1.8–Masala. Bir kishida 10 ta kitob, ikkinchisida 12 ta kitob bor. Almashtirish uchun ularning har biri necha usul bilan 3 tadan kitob tashlashlari mumkin.

Yechish. Bu masalamizda 2 ta to‘plam bo‘ladi. 10 elementli va 12 elementli to‘plam deb qaraymiz. Ularning har biridan 3 elementli qism to‘plamlar ajratib ko‘paytiramiz.:

$$C_{10}^{3}C_{12}^{3}=\frac{10!}{3!(10-3)!}*\frac{12!}{3!(12-3)!}=\frac{8*9*10*11*12}{2*2*3*3}=26400$$

1.9–Masala. Latereya biletidagi 49 nomerdan 5 tasini nech xil usul bilan o‘chirish mumkin.

Yechish. Berilgan 49 nomerni 49 elementli to‘plam deb qaraymiz. Shu to‘plamdan 5 to‘plam qism to‘plamlar ajratamiz.

$$C_{49}^{5}=\frac{49!}{5!44!}=\frac{45*46*47*48*49}{1*2*3*4*5*}=1906884$$

1.10-misol: *n*- qavariq burchaklikning diaganallari nechita nuqtada kesishadi ? agarda ularning uchtasidan hech qaysisi bir nuqtada kesishmasa ?

Yechish:Ikki diaganal kesishmasining har bir nuqtasiga *n* –burchaklikning 4 cho‘qqisi mos bo‘ladi . *n* –burchaklikning har bir 4 cho‘qqisiga esa kesishmaning bir nuqtasi mos keladi .(to‘rtburchak diaganalining kesishma nuqtasi cho‘qqilari bilan to‘rt nuqtada berilgan). Shuning uchun kesishmaning barcha nuqtalar soni shunday usullar soniga tengki, ular bilan *n* cho‘qqilar orasidan 4 cho‘qqini tanlash mumkin :

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1*2*3*4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

Biz C_n^k soni uchun qiziqarli geometric talqinini beradigan quyidagi masalani qaraymiz :

1.11-misol : (Shaxmat shaharchasi)

$m\times n$ o‘lchamli to‘g‘ri burchakli to‘rni qaraymiz .Bu to‘r $m\times n$ to‘g‘ri burchakli kvartallardan iborat bo‘lib , u *n-1* ta “gorizontal” va *m-1* ta “vertikal ko‘chalar ” ga bo‘lingan.(3-rasm).

Chap quyi burchaklardan va *((0;0)* nuqtalar *)* o‘ng yuqori burchakka ((*m;n*) nuqtaga) olib boruvchi turli qisqa yo‘lning soni qanday ?

Yechish (*0;0*) nuqtadan (*m;n*) nuqtagacha har bir qisqa yo‘l *m+n* kesmalardan iborat bo‘lib , jumladan ularning *m* tasi gorizontal, *n* tasi vertikal kesmalar bo‘ladi.

Turli yo‘llar faqat gorizontal va vertical kesmalarning o‘rni almashishi bilangina farqlanadi . Shuning uchun ham umumiy yo‘llar soni *n+m* kesmalardan *n* ta vertical kesmalarni tanlash usuliga bog‘liq bo‘ladi va bu ajratib olishlar soni ya’ni

$$C_{m+n}^n .$$

Xuddi shunday bu tanlash usullarini *m* ta gorizontal olishimiz mumkin , ya’ni

$$C_{m+n}^m .$$

Quyidagi tenglikning o‘rinli ekanligini kombinatsiyalar sonini faktariallar orqali ham ifodalash mumkin .

$$C_{m+n}^m = C_{m+n}^n .$$

Shunday qilib (*0;0*) nuqtadan (*m;n*) nuqtagacha qisqa yo‘llarning soni

$$C_{m+n}^{m} = C_{m+n}^{n}$$

ga teng .

1.2- Teorema: $$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \qquad (2)$$

tenglama o‘rinlidir.

Isbot1: $$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Formulani qo‘llagan holda (2) tenglikning to‘g‘riligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

Demak

$$C_k^{n-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!},$$

$$C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

tengliklarni yozib oldik. Endi (*2*) tenglikka etib qo‘yamiz :

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$[k! = k(k-1)!; (n-k)! = (n-k)(n-k-1)!]$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!k-1}! = \frac{(n-1)!}{k(k-1)!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k)(n-k-1)!(k-1)!} =$$

$$\frac{(n-k)(n-1)! + k(n-1)!}{k(n-k)(n-k-1)!(k-1)!} = \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Yana isbotning boshqa usullarini keltiramiz :

Isbot2: n –elementdan tashkil topgan A to‘plamning ayrim a elementini va barcha A to‘plamning k –elementli qism to‘plamni ko‘rib chiqamiz (Bunday qism to‘plam soni C_n^k ga teng).

A to‘plamning barcha k –elementli qism to‘plamlarini ikki guruhga ajratamiz:

1) tarkibiga a kiruvchi qism to‘plam ,

2) tarkibiga a kirmaydigan qism to‘plam;

Birinchi gruppadagi qism to‘plam soni C_{n-1}^{k-1} ga teng . Har bir qism to‘plam *a* ga *A* to‘plamning ayrim *(k-1)*–elementli qism to‘plamning qo‘yilishidan hosil bo‘ladi.

Ikkinchi gruppadagi qism to‘plamning soni C_{n-1}^{k} gat eng . Har bir shunday qism to‘plam A -$\{a\}$ to‘plamning *k* –elementli qism to‘plamidir . Bundan

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

tenglik o‘rinli ekanligi kelib chiqadi .

Isbot3: *O(0;0)* nuqtadan *A(k;n-k)* nuqtaga qisqacha yo‘l soni $C_{k+(n-k)}^{k} = C_n^k$ ga teng.(4-rasm)

Barcha bunday yo‘llarni ikki gruppaga bo‘lish mukin :

A_1*(k-1;n-1)* nuqta orqali o‘tuvchi yo‘llar (ular soni $C_{(k-1)+(n-k)}^{k-1} = C_{n-1}^{k-1}$ ga teng) va

$A_2(k; n-k-1)$ nuqta orqali o‘tuvchi yo‘llar (ular soni $C_{k+(n-k-1)}^{k} = C_{n-1}^{k}$ ga teng).

Bundan

$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ tenglik o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

1.12-Masala. 2 n ta elementdan n+1 tadan tuzilgan kombinatsiyalar soninig 2n+1 elementdan n-1 tadan tuzilgan kombinatsiyalar soniga nisbati 3:5 kabi. n ni toping.

Yechish. Masalani shartiga ko‘ra ushbu tenglamani tuzamiz.

$$\frac{C_{2n}^{n+1}}{C_{2n+1}^{n-1}} = \frac{3}{5}$$

$$C_{2n}^{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(2n-n-1)!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$$

$$C_{2n+1}^{n+1} = \frac{(2n+1)!}{(n-1)!(2n+1-n+1)!} = \frac{(2n+1)!}{(n-1)!(n+2)!}$$

$$\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(n-1)!(n-2)!}{(2n+1)!} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{(n+2)}{(2n+1)} = \frac{3}{5}$$

5(n+2)=3(2n+1)

$$5n+10=6n+3$$

$$n=7$$

1.13-misol :

$$C_{2n}^{n}=(C_{n}^{0})^2+(C_{n}^{1})^2+...+(C_{n}^{n})^2 \qquad (3)$$

ayniyatni isbotlang.

Yechish: *O(0;0)* nuqtadan *A(n;n)* nuqtaga qisqacha yo‘l soni C_{2n}^{n} gat eng . Har bir bunday yo‘l *BD* diaganalga yotuvchi A_k *(k;n-k)* bo‘lgan bitta va faqat bitta nuqta orqali o‘tadi .(5-rasm)

O nuqtadan A_k nuqtaga yo‘llar soni $C_{k+(n-k)}^{k}=C_{n}^{k}$ gat eng . A_k nuqtadan *A* nuqtaga yo‘l esa $C_{n-k+k}^{k}=C_{n}^{k}$ ga teng, shuning uchun A_k orqali o‘tuvchi *O* dan *A* ga yo‘l soni $C_{n}^{k}*C_{n}^{k}=(C_{n}^{k})^2$ ga teng (ko‘paytirish jadvali).

Har bir A_k (k=0,1,…,n) nuqtadan o‘tuvchi yo‘llar miqdorini qo‘shib ,*O* dan *A* gacha yo‘lning umumiy miqdorini hosil qilamiz, tabiiyki C_{2n}^{n} . Bu mulohaza (3) tenglikni isbotlaydi .

Berilgan to‘plamning qism to‘plamlari miqdori.

Endi *n* elementdan tuzilgan *A* to‘plam nechita qism to‘plamga ega ekanini aniqlaymiz (bo‘sh to‘plam ham *A* ning qissm to‘plami hisoblanadi).

1.3- Teorema : *n* elementli to‘plamning barcha qism to‘plamlari soni 2^n ga teng .

Ikkita turli isbotni keltiramiz.

Isbot1: M_a -*A* to‘plamning barcha qism to‘plamlari to‘plami bo‘lsin , bu esa *a* elementni o‘z ichiga oladi .

Ko‘rinadiki , har bir bunday qism to‘plam to‘liq aniqlangan ,agarda uning barcha (*a* dan boshqa) qolgan elementlari ko‘rsatilgan bo‘lsa. Shuning uchun bunday qism to‘plamlar a dan tashqari A ning barcha elementlarini o‘z ichiga oluvchi $A' = A - \{a\}$ to‘plamida nechita qism to‘plam bo‘lsa , shuncha bo‘ladi.

Bu to‘plam $n-1$ elementga ega .

Shuning uchun agar q_n -n ta element to‘plamining qism to‘plam soni bo‘lsa , u holda $N(M_a) = q_{n-1}$.

Agar $\tilde{M}_a$ - a ni o‘z ichiga olmaydigan A to‘plamning barcha qism to‘plamlari to‘plami bo‘lsa . U holda $N(\tilde{M}_a)$ ham q_{n-1} gat eng bo‘ladi. $M(A) = M_a + \tilde{M}_a$ ekan , u holda $N(M(A)) = 2q_{n-1}$. Bu yerdan $q_n = 2q_{n-1}$ ni topamiz. Shunday qilib, $q_n = 2q_{n-1} = 2^2 q_{n-2} = ... = 2^{n-1} q_1$ 1 elementdan iborat bo‘lgan to‘plam 2 qism to‘plamga ega. (barcha to‘plam va bo‘sh to‘plam). Shuning uchun $q_1 = 2$. Bundan kelib chiqadi $q_n = 2^n$.

Isbot2: A to‘plam elementlarini qayta nomerlaymiz va A to‘plamning har bir qism to‘plami uchun n uzunlik ketma-ketligini noldan va birlikdan quyidagi qoida bo‘yicha tuzamiz:

k o‘rniga 1 yozamiz, agar k nomerli element qism to‘plamga kirsa va 0 yozamiz , agar k nomerli element qism to‘plamga kirmasa. Shunday qilib , har qaysi qism to‘plamga o‘zining nol va birlik ketma-ketligi mos keladi .Masalan ,bo‘sh to‘plamga faqat nollardan iborat ketma-ketlik mos keladi.

Nol va birlikdan tashkil topgan n uzunlikning barcha mumkin bo‘lgan ketma – ketliklari ko‘paytirish jadvaliga mos ravishda $2*2*....*2=2^n$ ga teng. Bundan kelib chiqadiki, A to‘plamning barcha qism to‘plamlari soni 2^n ga teng.

Yuqorida ko‘rsatilganidek $0!=1$ deb hisoblash qulay .

Bunday farazda

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

formula o‘rinli bo‘ladi va $k=n$ va $k=0$ holatda .

Xulosa: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ tenglik o‘rinli .

Aksini olganda , C_n^k - n ta elementli to‘plamning k- elementli qism to‘plami soni ekan, uholda chap qismdagi yig‘indi barcha qism to‘plamning soni bo‘ladi .

1.14-misol: Nechita usul bilan 30 ta o‘quvchidan 3 o‘quvchidan iborat guruh tanlash mumkin?

Yechish: O‘quvchilarning barcha imkoniyatlarini ko‘rib chiqish uchun 30 ta o‘quvchidan tuzilgan to‘plamning 3 elementli qism to‘plamning barcha elementlarini ko‘rib chiqish kerak .

Usullarning izlangan soni

$$C_{30}^3 = \frac{30*29*28}{1*2*3} = 10*29*14 = 4060$$

ga teng.

1.15-misol: Xonada n ta lampochka bor.Xonani yoritishning nechita turli usuli bor, bunda k ga teng lampochka yonmoqda?

Xonani yoritishning nechta turli xil usuli bo‘lishi mumkin?

Yechish: Izlanayotgan xonani yoritishning usuli n ta elementli to‘plamdan k elementli qism to‘plamlar soniga teng:

$$C_n^k = \frac{n!(n-k+1)!}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1.16-misol: 20 ta talabadan 3 kishilik qo‘mitani necha usul bilan tanlash mumkin?

Yechish: Izlanayotgan usullar soni 20 elementli to‘plamdan 3 elementli qism to‘plamlar soniga teng :

$$C_{20}^{3}=\frac{20!}{3!(20-3)!}=\frac{20!}{3!*17!}=\frac{18*19*20}{1*2*3}=140$$

ta.

1.17-misol: *n* ta nuqta berilgan .Ulardan hech qanday 3 tasi bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydi. Nuqtalarni juft-juft qilib birlashtirib , nechita to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin?

Yechish:Izlanayotgan to‘g‘ri chiziq o‘tkazishlar soni *n* ta elementli to‘plamdan 2 elementli qism to‘plamlar soniga teng:

$$C_{n}^{2}=\frac{n(n-1)}{2!}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

1.2-§. Tartiblangan to‘plamlar .O‘rin almashtirish va joylashtirish .

Berilgan to‘plamning o‘rin almashishi.

2.1-Ta’rif: Berilgan to‘plam tartiblangan deyiladi ,agarda bu to‘plamning har bir elementiga mos ravishda 1 dan *n* gacha bo‘lgan ayrim sonlar qo‘yilgan bo‘lsa, bunda *n* – to‘plamning elementlari soni.

Shunday qilib turli elementlarga turli sonlar mos keladi.Har qanday chekli to‘plamni tartiblash mumkin, masalan to‘plamning barcha elementini ayrim ro‘yxatga qayta yozilsa *(a,b,c….)* , keyin esa har bir elementga mos ravishda tartib raqami qo‘yish kerak , ro‘yxatda turgan o‘rniga qarab . *A* to‘plamdan hosil qilingan tartiblangan to‘plamni $\vec{A}$ bilan ifodalaymiz.Ko‘rinadiki , birdan ortiq elementni o‘z ichiga olgan har bir to‘plamni birdan ortiq usulda tartiblash mumkin.

2.2- Ta’rif:Tartiblangan to‘plamlarni har xil deb hisoblash mumkin, agar ular yo o‘zlarining elementlari bilan , yo tartibi bilan farqlansa.Faqat elementlar tartibi bilan farqlanadigan turlicha tartiblangan to‘plamlar (elementlar o‘sha to‘plamning o‘zidan olingan bo‘lishi mumkin) bu to‘plamning o‘rin almashishi deyiladi.

2.1-Misol: 3 ta elementli *A(a,b,c)* to‘plamning o‘rin almashishi quyidagiga ega:
(*a,b,c*) ,(*a,c,b*) ,*(b,a,c)*
(b,c,a), (c,a,b), (c,b,a).
Berilgan to‘plamni tartiblash mumkin bo‘lgan turli usullari sonini topamiz.

2.3-Tarif: Faqat elementlarining tartibi bilangina farq qiluvchi (yani k = m) o‘rinlashtirishlar o‘rin almashtirish deyiladi.

Ularning soni P_m orqali belgilanadi. (fransuzcha permutation – o‘rin almashtirish). Tarif bo‘yicha

$$P_m = m(m-1)....(m-m+1) = m(m-1)...1 = m! \quad \text{yoki} \quad P_m = m! \qquad (2.1.2)$$

A to‘plamning o‘rin almashish sonini ham *A* to‘plam *m* ta elementga ega deylik. Uning o‘rin almashish sonini P_m orqali ifodalaymiz.

2.1- Teorema:

$$P_m = m!$$

Isbot1: *A* to‘plamdan ayrim *a* elementni tanlaymiz. *a* element 1nomerga ega bo‘lgan barcha o‘rin almashishni ko‘rib chiqamiz. Bunday o‘rin almashishlar soni *A* to‘plamning *m-1* elementidan o‘rin almashish soniga teng, ular to‘plamdan *a* elementni chiqarib tashlagandan keyin qoladigan o‘rin almashishlar.

Shuning uchun o‘rin almashishlar soni , ular uchun *a* 1 nomerga ega bo‘ladi va P_{m-1} ga teng.

M orqali *A* to‘plamning barcha o‘rin almashishlar to‘plamini ifodalaymiz, M_m orqali esa *a* 1 nomerga egabo‘lgan o‘rin almashishlar to‘plamini ifodalaymiz. U holda

$$M = M_a \cup M_b \cup .... \cup M_f \;,$$

Bunda *a,b,…,f* - *A* to‘plamning barcha elementlari. $M_a, M_b, ..., M_f$ to‘plamdan hech qanaqa ikki to‘plam umumiy elementga ega bo‘lmas ekan ,(eslatamizki , bu to‘plam elementlari - o‘rin almashishlar , turli to‘plamlarda birinchi o‘rinda har xil elementlar turadi , kelib chiqadiki , mos keladigan o‘rin almashishlar ham har xildir) , uholda

$$N(M) = N(M_a) + N(M_b) + ... + N(M_f).$$

Kelib chiqadiki,

$$P_m = m \times P_{m-1} = m \times f \; .$$

Isbot2: *A* to‘plamning elementlarini ketma –ket tanlaymiz va ularni aniq tartibda *m* o‘rinda joylashtiramiz.Birinchi o‘ringa istalgan *m* ta elementni qo‘yish mumkin. Ikkinchi o‘ringa esa istalgan *m-1* elementning qolganiniqo‘yishimiz mumkin.

Ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra barcha *m* o‘rinni quyidagi usulda to‘ldirish mumkin:

$$N(m-1)(m-2)....2\times 1=m!$$

Bundan ko‘rinadiki *m* ta elementli *A* to‘plamni *m!* usul bilan tartiblash mumkin . 2.2 – Misol. 3 detalni 3 qutiga necha xil tartibda joylashtirish mumkin.

Yechish. Detallarni x_1,x_2,x_3 orqali, qutilarni 1,2,3 orqali belgilaymiz. Natijada (x_1,x_2,x_3), (x_1,x_3,x_2), (x_2,x_1,x_3), (x_2,x_3,x_1), (x_3,x_1,x_2), (x_3,x_2,x_1) o‘rin almashtirishlar olinadi. Ularning soni $P_3 = 3! = 1*2*3 = 6$

Javob. 6 ta

2.3 – Misol: 8 kishini necha xil usulda o‘tkazish (joylashtirish) mumkin.

Yechish. Izlanayotgan usullar 8 elementdan tuzilgan tartiblangan to‘plamlar soniga teng.

$$P_8 = 8! = 1*2*3*4*5*6*7*8 = 40320$$

Javob: 40320.

2.4 – Misol. A to‘plam berilgan bo‘lsin. A = {1,2,3,4} A to‘plamning o‘rin almashtirishlari sonini toping.

Yechish. $P_m = m!$ formuladan foydalanamiz:

$$P_4 = 4! = 1*2*3*4 = 24$$

A to‘plamning hamma o‘rin almashtirishlari soni 24 ta ekan. Bu o‘rin almashtirishlar quyudagilar:

{1,2,3,4}, {2,1,3,4}, {3,1,2,4}, {4,1,2,3}, {1,3,2,4},
{2,1,4,3}, {3,1,4,2}, {4,1,2,3}, {1,3,4,2}, {2,3,1,4},
{3,2,4,1}, {4,2,1,3}, {1,4,3,2}, {2,3,4,1}, {3,4,1,2},
{4,2,3,1}, {1,4,2,3}, {2,4,3,1}, {3,4,2,1}, {4,3,1,2},
{1,2,4,3}, {2,4,1,3}, {3,2,1,4}, {4,3,2,1}.

2.4 – Misol. 1,2,3,4,5 raqamlardan shu raqamlar takrorlanmaydigan qilib nechta besh xonali son tuzish mumkin.

Yechish. Izlanayotgan sonlar soni 5 elementdan tuzilgan tartiblangan to‘plamlar soniga teng. $P_m = m!$ formula yordamida hisoblaymiz:

$$P_5 = 5! = 1*2*3*4*5 = 120$$

ushbu tenglikning to‘g‘riligini tekshirish oson:

$$P_{k+1} = P_k * (k + 1) = 1*2*3\ldots*k*k+1 = (k + 1)!$$

2.5 – Misol. 7 xil kitobni 7 o‘quvchiga necha usul bilan tarqatish mumkin. Yechish. Izlanayotgan usullar soni 7 elementdan tuzilgan tartiblangan to‘plarlar soniga teng. Bu misolga m = k.

$$P_7 = 7! = 1*2*3*4*5*6*7 = 5040.$$

2.6 – Misol. $\frac{P_{20}}{P_4 * P_{16}}$ ni hisoblang.

Yechish. Bu ifodani yechish uchun $P_m = m!$ formuladan foydalanamiz. Avval har bir takrorsiz o‘rin almashtirishlarni hisoblaymiz:

$P_{20} = 20! = 1*2*…*18*19*20$

$P_4 = 4! = 1*2*3*4$

$P_{16} = 1*2*3….*15*16$

O‘rin almashtirishlarni etib kasrga qo‘yamiz va kasrni qisqartiramiz:

$$\frac{P_{20}}{P_4 P_{16}} = \frac{1*2*3...18*19*20}{1*2*3*4*1*2*3*...*15*16} = \frac{17*18*19*20}{1*2*3*4} = 4845$$

2.7-misol:Javonga 4 kitobni necha usul bilan joylash mumkin?(Ularni *A,B,C,D* bilan ifodalaymiz).

Yechish :Izlanayotgan usullar soni 4 ta elementdan tashkil topgan to‘plamni tartiblzsh usuli soniga teng .

$$P_4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

2.8-misol:{*1,2,…..,2n*} to‘plamni nechita shunday usul bilan tartiblash mumkinki, har bir juft son juft nomerga ega bo‘lsin ?

Yechish : Juft sonni juft nomerlar bilan (bunday o‘rin *n*) *n!* usulda o‘ringa qo‘yish mukin , juft nomerlar bilan o‘rinlarga juft sonlarni joylashtirishning har bir usuliga toq nomerlar bilan o‘rinlarga toq sonlarni *n!* usul bilan joylashtirish mos keladi . Shuning uchun ko‘paytirish qoidasiga asosan ko‘rsatilgan tipning o‘rin almashishi umumiy soni $n! \times n! = (n!)^2$ ga teng .

2.9-misol:Nechita *n* ta elementli o‘rin almashishi tuzish mukin , qaysi unda berilgan 2 element bir qatorda turmasa?

Yechish: Berilgan 2 elementi *a* va *b* qatorda turgan o‘rin almashishlarning sonini aniqlaymiz. Quyidagi holat yuzaga kelishi mumkin : *a* birinchi o‘rinda turadi , *a* ikkinchi o‘rinda turadi,……, *a* *(n-1)* o‘rinda turadi , *b* esa *a* dan o‘ngroqda , bunday holatlar soni *(n-1)* gateng. Bundan tashqari *a* va *b* o‘rin almashishi mumkin va kelib chiqadiki, *a* va *b*qator bilan joylashishning *2(n-1)* usuli mavjud.Bu usullarning har biriga boshqa elementlarning *(n-2)!* O‘rin almashish mos keladi .

Kelib chiqadiki , *a* va *b* yonma –yon turadigan o‘rin almashish soni

$2(n-1)(n-2)! = 2(n-1)!$ ga teng .

Shuning uchun izlangan o‘rin almashish soni

$n!-2(n-1)!=(n-1)!(n-2).$

2.10-misol:Shaxmat doskasida 8 ta ruhni necha usul bilan shunday joylashtirish mumkinki , ular bir –birini ura olmasin?

Yechish:Ruhlarning ko‘rsatilgan joylashishiga har –bir vertikalda va har bir gorizontalda faqat bitta ruh turibdi.

Ruhlarning shunday joylashishidan birini ko‘rib chiqamiz . a_1 -vertikal nomeri , unda ruh birinchi gorizontaldan turadi, a_2 - vertikal nomeri, unda ruh ikkinchi gorizontalda turadi,………………, a_8 - vertikal nomeri unda oxiri , sakkizinchi gorizontaldagi ruh turadi.

U holda $(a_1,....,a_n)$ *1,…..,8* sonlari o‘rin almashishining o‘zidir. $a_1......a_8$ sonlari orasida bironta teng juftlik yo‘q, aks holda *2* ruh bitta vertikalga tushib qolar edi . Kelib chiqadiki ruhlarning har bir joylashishiga *1……8* sonlarining ma’lum o‘rin almashishi mos keladi.

Aksincha , *1,……,8* sonlarning har bir o‘rin almashishiga ruhlarning shunday joylashishi mos keladiki , bu holatda ular bir birini urmaydi .

Bundan ruhlarning izlangan joylashish soni

$$P_8 = 8! = 40320$$

ga tengligi kelib chiqadi.

Berilgan to‘plamning tartiblangan qism to‘plami (joylashishi) .

Endi berilgan *A* to‘plamning tartiblangan qism to‘plamini ko‘rib chiqamiz. *A* to‘plamning o‘zini tartiblangan deb hisoblaymiz , shuning uchun uning har bir qism to‘plami qandaydir mumkin bo‘lgan yo‘l bilan tartiblangan bo‘lishi mumkin.

A to‘plamning barcha *k* –elementli qism to‘plami soni C_n^k ga teng. Har bir bunday qism to‘plamni *n!* usul bilan tartiblash mumkin .

Shunday yo‘l bilan *A* to‘plamning barcha tartiblangan *k* –elementli qism to‘plamlarini hosil qilamiz. Kelib chiqadiki ularning soni

$$k!C_n^k$$

bo‘ladi.

2.2-Teorema: *n* ta elementdan tashkil topgan to‘plamning tartiblangan *k* – elementli qism to‘plami son teng:

$$A_n^k = k!C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)......(n-k+1)$$

n ta elementli to‘plamning tartiblangan *k* –elementli qism to‘plamini *n* elementdan *k* gacha turlicha joylashish elementlar miqdori bilan yoki tartibi bilan farqlanadi.

Kelib chiqadiki , *n* dan *k* gacha turlicha joylashish soni

$$A_n^k = n(n-1).....(n-k+1)$$

ga teng.

2.11-misol:Nechita usul bilan 4 o‘quvchini 25 o‘ringa otkazish mumkin ?

Yechish: Izlangan usul soni 25 ni 4 tadan joylashish soniga teng:

$$A_{25}^4 = 25\times 24\times 23\times 22 = 303600$$

2.12-misol:O‘quvchilar 8 kun mobaynida 4 ta imtixon topshirishlari zarur . Buni nechita usul bilan bajarish mukin?

Yechish : Izlangan usul soni 8 ta elementli to‘plamning 4 elementli tartiblangan qism to‘plamlar (imtihon topshirish kunlari) soniga teng :

$$A_8^4 = 8\times7\times6\times5 = 1680$$

usul. Agar oxirgi imtihonning 8- kunda bo‘lishi aniq bo‘lsa, u holda usullar soni :

$$4\times A_7^3 = 7\times6\times5\times4 = 840$$

ga teng.

1.3-§.Takrorlanadigan o‘rin almashtirishlar.

Biz *n* elementli *A* to‘plamni

$$N(B_1)=k_1, N(B_2)=k_2, ..., N(B_m)=k_m,$$

bo‘ladigan qilib

$$A = B_1 \cup B_2 \cup .....\cup B_m$$

$$\text{(bu yerda } k_1, k_2, ..., k_m \text{ lar berilgan sonlar va } k_i \geq 0, k_1 + k_2 + ...+ k_m = n \text{ ga teng)}$$

m ta qism to‘plamning yig‘indisi ko‘rinishida necha usul bilan tasvirlash mumkunligini qarab chiqamiz.

$B_1, B_2, ..., B_m$ to‘plamlar umumiy elementlarga ega bo‘lmasligi kerak. *A* to‘plamni *m* ta $B_1, B_2, ..., B_m$ guruhlarga ajratishning yuqoriga talab qilingan bo‘linishlarini quyidagicha olish mumkin:

$A = k_1$ elementli B_1 qism to‘plamini olamiz.Bizga ma’lumki bularning soni $C_n^{k_1}$ ga teng bo‘ladi. Qolgan $n-k_1$ elementlar orasidan k_2 elementli B_2 qism to‘plamni olamiz, buni $C_{n-k_1}^{k_2}$ usul bilan qilish mumkin , ... $B_1, B_2, ..., B_m$ turli to‘plamlarni talab qilingan shartlarda tanlashning umumiy usullari soni kombinatorikaning asosiy qoidasiga asosan

$$C_n^{k_1}\times C_{n-k_1}^{k_2}\times C_{n-k_1-k_2}^{k_3}....C_{n-k_1-....-k_{m-1}}=\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\times\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}\times\frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!(n-k_1-k_2-k_3)!}\times..$$
$$.....\times\frac{(n-k_1-.......-k_{m-1})!}{k_m!(n-k_1-....-k_m)!}=\frac{n!}{k_1!k_2!........k_m!}$$

Shunday qilib quyidagi teoremaga kelamiz. $k_1,k_2,k_3,.....,k_m$ lar nomanfiy sonlar bo‘lsin, jumladan $k_1+k_2+k_3+....+k_m=n$.

n elementli *A* to‘plamni *m* ta $B_1,B_2,.....,B_m$ to‘plamlarni yig‘indisi ko‘rinishda tasvirlash soni quyidagicha:

$$C_n(k_1,......,k_m)=\frac{n!}{k_1!......k_m!}.$$

$C_n(k_1,.....,k_m)$ ga polinomial koyfisent deyiladi .Bu kayfisent quyidagi muhim kombinatorik talqinga ega:

3.1-masala: *n* ta harf bo‘lib, a_1 - harf k_1 ta , a_2 - harf k_2 ta ,........, a_m harf k_m ta bo‘lsin, $k_1+k_2+k_3+....+k_m=n$. Bu harflardan nechita turli so‘zlar tuzish mumkin?

2 BOB. TRAEKTORIYALAR METODI.

2.1-§. Traektoriyalar usuli haqida .

Ko‘pgina kombinatorika topshiriqlar uchun shunday geometrik talqinni ko‘rsatish mumkinki, aniq xossaga ega bo‘lgan yo‘llarning (traektoriyaning) sonini hisoblashga oid masalaga keltiriladi .

Bu metoddan ayrim binomial ayniyatlarni isbotida foydalanish mumkin.

Bu metodning ustunligi favqulodda ko‘rgazmalilik hisoblanadi .

Tiraektoriya metodi atamasini B.V.Gnedenko kiritgan . 1951-1954 yillarda B.V.Gnedenko va uning shogirdlari V.S.Korolyuk, V.S.Mixalevich bu metodni matematik sitatistikaning ayrim muhim masalalarni yechishda qo‘llaganlar .

1.1-masala: Kassa oldida $m+n$ ta kishi to‘plandilar .Ulardan n tasida 500 so‘mlik pul bor, qolgan m tasida 1000 so‘mlik pul bor .

Boshlang‘ich holatda chipta xonada pul yo‘q. Chipta 500 so‘m turadi.

$m \leq n$ dan bo‘lganda birorta chipta oluvchi ham qaytim kutmasligi uchun $m+n$ ta chipta oluvchilarni joylashtirishning barcha usullari nechita .

Faraz qilaylik chipta oluvchilar qandaydir tartibda navbatga joylashgan bo‘lsin .

ε_i miqdorni quyidagicha aniqlaymiz :

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, \\ -1, \end{cases} \text{agar } i\text{- chipta oluvchida } \begin{matrix} 500 \\ 1000 \end{matrix} \text{ so‘mliklar bo‘lsa.}$$

Quyidagi yig‘indini qaraymiz:

$$S_k = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_k$$

Yuqoridagidan ko‘rinadiki S_k - birinchi k- ta chipta xonaga berilgan 500 so‘mliklar va 1000 so‘mliklar sonlari orasidagi farqni bildiradi .

Biz XOY dekart koordinata sistemasini qaraymiz va unda

$$A_k = (k; S_k)(k = 1,..., m+n)$$

nuqtalarning o‘rnini aniqlaymiz.

$A_1,........, A_{m+n-1}$ nuqtalardan o‘tuvchi va koordinata boshi *O(0;0)* nuqtani $A_{n+m} = (m+n, n-m)$ nuqtani tutashtiruvchi siniq chiziqni qaraymiz.

Bunday siniq chiziqni chipta oluvchilarni navbatga joylashtirishniberilgan usulga mos traektoriya deb ataymiz.

Har-bir traektoriya *m+n* kesmalardan tashkil topadi. Ulardan *n* tasi yuqoriga , *m* tasi pastga yo‘nalgan.

Agar yuqoriga yo‘naltirilgan kesmalar tartib raqamlarini ko‘rsatsak, u holda traektoriya to‘la aniqlangan bo‘ladi . Umumiy traektoriyalar soni C_{m+n}^{n} shunday ekanligi shaxmat shaharchasi masalasidan kelib chiqadi .

Birorta chipta oluvchi ham navbat kutmaydigan joylashtirishlarga mos traektoriya *y=-1* to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydi .

Haqiqatdan ham agar qandaydir *k* lar uchun $S_{k-1`} = 0, S_k = -1$ bo‘lsa , bu *1* *k-1* ta chipta oluvchi xonaga bir xil sondagi 500 so‘mliklar va 1000 so‘mliklar berilganligini bildiradi .

k- chipta oluvchi 1000 so‘mlik berib , u qaytim kutishga majbur bo‘ladi .

y=-1 to‘g‘ri chiziqni kesuvchi traektoriyalar sonini aniqlaymiz.

y=-1 to‘g‘ri chiziqni kesuvchi yoki u bilan umumiy nuqtaga ega bo‘lgan har bir *T* traektoriyaga yangi T' traektoriyani quyidagi qoida bilan mos qo‘yamiz:

y=-1 chiziq bilan dastlabki kesishguncha T' traektoriya *T* bilan ustma –ust tushadi .

Bundan keyin esa T' *T* traektoriyaning *y=-1* chiziqqa nisbatan simmetrik aksi bo‘ladi . Chizmada T' traektoriya shtrix chiziqlar bilan belgilangan .

Barcha T' traektoriyalar A_{m+n} nuqtadan *y=-1* to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik aksi bo‘lgan $A'_{m+n} = (m+n; m-n-2)$ nuqtalarda tugaydi.

Shunday qilib , bunday o‘rnatilgan moslik o‘zaro bir qiymatli . Shuning uchun ham *y=-1* chiziqni kesuvchi traektoriyalar soni koordinata boshi *O* va A'_{m+n} nuqtalarni birlashtiruvchi siniq chiziqlar soniga teng bo‘ladi.

Agar siniq chiziq *y* ta pastga yo‘naltirilgan kesmalardan *x* ta yuqoriga yo‘naltirilgan kesmalardan iborat bo‘lsa , u holda *x+y=m+n*, *y-x=n+2-m*, bu yerda *y=n+1* . Shunday qilib *y=-1* chiziqni kesuvchi traektoriyalar soni

$$C_{m+n}^{n+1}$$

ga teng bo‘ladi. Izlanayotgan traektoriyalar soni

$$C_{m+n}^{n} - C_{m+n}^{n+1} = C_{m+n}^{m} \frac{n+1-m}{n+1} \qquad (2)$$

Bu ko‘rilgan masala matematik statistikada muhim ahamiyatga ega. Jumladan mahsulot sifatini nazorat qilishning statistik nazariyasida .

Quyidagi masala bilan 1887 – yilda mashhur fransuz matematigi Bertirant tomonidan qaralgan.

1.2-masala: *A* nomzod saylovda *a* ovoz to‘pladi, *B* nomzod *b* ovoz to‘pladi (*a*>*b*) saylovchilar ketma- ket ovoz berdilar .

Hamma vaqt *A* nomzod berilgan ovozlar bo‘yicha *B* nomzoddan oldinda bo‘lishini ta’minlovchi ovoz berish hollari nechita?

Yechish: Agar *i*- ovoz *A* nomzodga berilgan bo‘lsa, $\varepsilon_i = 1$ .Agar *i*- ovoz *B* nomzodga berilgan bo‘lsa, $\varepsilon_i = -1$ deb olamiz.

$S_k = \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_k$ ni qaraymiz va *XOY* kordinata sistemasida

$O, (1; S), ..., (k; S_k), ..., (a+b; S_{a+b})$

nuqtalarini tutashtiruvchi siniq chiziqni qaraymiz.(9-rqsm).

$S_{a+b} = a - b$. Har bir ovoz berish usuliga *O* nuqta va *(a+b;a-b)* nuqtalarni tutashtiruvchi aniq siniq chiziq (traektoriya) mos keladi .

Traektoriya *a*+*b* ta kesmadan iborat bo‘lib, ulardan *a* tasi yuqoriga yo‘nalgan .Shuning uchun ham umumiy traektoriyalar soni C_{a+b}^{a} gateng bo‘ladi.

Agar mos traektoriyalar (1;1) nuqtadan (birinchi ovoz *A* nomzodga berilishi kerak) o‘tib va *OX* o‘qi bilan kesishmasa , u holda *A* nomzod *B* nomzoddan hamma vaqt oldinda bo‘ladi .

Bunday traektoriyalar soni *n=a-1, m=b* bo‘lgan holda

$$C_{m+n}^{n} - C_{m+n}^{n+1} = C_{m+n}^{n} \frac{n+1-m}{n+1}$$

formula bilan hisoblanishi mumkin.

Demak, izlanayotgan ovoz berishlar usuli

$$C_{a+b-1}^{a-1}\frac{a-1+1-b}{a-1+1}=\frac{a-b}{a+b}C_{a+b}^{a}$$

ga teng bo‘ladi.

Bu masala ko‘rsatadiki masalaning traektoriyalar tilidagi talqini qanchalik foydaligini ko‘rsatadi.

x>0, y- butun son bo‘lsin . Kordinata boshidan (*x;y*) nuqtaga traektoriya deb $O,(1;S_1),....,(k;S_k),....,(x;S_x)$, nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi. Bu yerda

$$S_i-S_{i-1}=\varepsilon_i=\begin{cases}+1,\\-1,\end{cases} S_x=y\,.$$

$N_{x,y}$- *(0;0)* nuqtani *(x;y)* nuqta bilan tutashtiruvchi barcha traektoriyalar soni bo‘lsin. U holda quyidagi teorema o‘rinli bo‘ladi.

2.2-§. Traektoriyalar usuli yordamida ayrim kombinatorik munosabatlarni isbotlash.

2.1- Teorema:

$$N_{x,y}=\frac{x!}{(\frac{x+y}{2})!(\frac{x-y}{2})!}$$

agar *x,y* –lar bir xil juftlikka ega bo‘lsa , $N_{x,y}$ =0 ga , agar *x,y* –lar har xil juftlikka ega bo‘lsa.

Isbot: Faraz qilaylik traektoriya *p* ta yuqoriga , *q* ta pastga yo‘nalgan kesmalardan iborat bo‘lsin.

Bu degani $\varepsilon_1,\varepsilon_2,....,\varepsilon_x$ larning *p* ta son +1 ga *q* ta son -1 ga teng degani.

U holda *p+q=x*, *p-q=y* ga teng bo‘ladi .

Bundan $p=\frac{x+y}{2}, q=\frac{x-y}{2}$ topiladi.

p va *q* lar butun son bo‘lganligi uchun *x,y* – lar bir xil juftlikdagi sonlar bo‘lishi mumkin .

Agar qanday kesmalar yuqoriga yo‘nalganligi ko‘rsatilsa , u holda traektoriya to‘liq aniqlangan bo‘ladi.

O nuqtadan *(x;y)* nuqtaga umumiy traektoriyalar soni quyidagiga teng bo‘ladi:

$$N_{x,y}=C_x^{\frac{x+y}{2}}=\frac{x!}{(\frac{x+y}{2})!(\frac{x-y}{2})!}$$

2.2-teorema : (oynada akslantirish prinsipi)

$A=(a;\alpha), B=(b;\beta)$ butun kordinatali nuqtalar bo‘lsin va

$b>a\geq 0, \alpha>0, \beta>0, A^{'}=(a;-\alpha)$ bu *A* nuqtaga *OX* o‘qiga nisbatan simmetrik nuqta. U holda *OX* o‘qi bilan kesishuvchi yoki u bilan umumiy nuqtaga ega bo‘lgan *A+B* ga traektoriyalar soni $A^{'}$ dan *B* ga traektoriyalar soniga teng bo‘ladi.

Isbot: *A+B* ga boruvchi har bir *T* traektoriyaga (*OX* o‘qi bilan kesishuvchi yoki u bilan umumiy nuqtaga ega bo‘lgan) $A^{'}+B$ ga mos traektoriyalarni quyidagi qoida bo‘yicha mos qo‘yamiz:(10-rasm)

T traektoriyalardan *OX* o‘qi bilan birinchi marta uchrashguncha bo‘lganlarini olamiz va ularni *OX* o‘qiga nisbatan simmetrik akslantiramiz.

Bundan keyin esa T va $T^{'}$ ustma –ust tushadi. Shunday qilib *A+B* ga *OX* o‘qi bilan kesishuvchi yoki u bilan umumiy nuqtaga ega bo‘lgan traektoriyalar to‘plami va $A^{'}$ dan *B* ga barcha traektoriyalar to‘plami bilan bir qiymatli moslik o‘rnatildi. Teorema isbotlandi.

2.3-teorema:Agar *x>0,y>0* bo‘lsa, u holda koordinata boshi *(0;0)* nuqtadan *(x;y)* nuqtaga *OX* o‘qida (*O* nuqtadan boshqa) uchga ega bo‘lmagan traektoriyalar soni

$\frac{y}{x}N_{x,y}$ ga teng.

Isbot: *O* nuqtani *(x;y)* nuqta bilan birlashtiruvchi *ox* o‘qi bilan kesishmaydigan barcha traektoriyalar *A(1;1)* nuqtadan o‘tadi. (11-rasm).

A nuqtadan *B* nuqtaga olib boruvchi umumiy traektoriyalar soni $N_{x-1,y-1}$ ga teng.

A nuqtadan ***B*** nuqtaga olib boruvchi *OX* o‘qi bilan kesuvchi traektoriyalar soni $N_{x-1,y+1}$ ga teng.

Shunday qilib izlanayotgan traektoriyalar soni

$$N_{x-1,y-1}-N_{x-1,y+1}=\frac{(x-1)!}{(\frac{x+y}{2}-1)!(\frac{x-y}{2})!}-\frac{(x-1)!}{(\frac{x+y}{2})!(\frac{x-y}{2}-1)!}=\frac{y}{x}\frac{x!}{(\frac{x+y}{2})!(\frac{x-y}{2})!}=\frac{y}{x}N_{x,y}$$

ga teng.

Teorema isbotlandi.

Endi *O* nuqtani *OX* o‘qidagi (*2n;0*) nuqta bilan tutashtiruvchi traektoriyaning ayrim xossalarini qarab chiqamiz. Quyidagicha belgilash kiritamiz.

$$L_{2n}=\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}.$$

1°. C_{2n}^{n} traektoriyalar orasida *O* nuqtani *(2n;o)* nuqta bilan birlashtiruvchilari mavjud.

2°. *OX* o‘qidan yuqorida *OX* o‘qi bilan *O* nuqtadan va *(2n;0)* nuqtadan boshqa umumiy nuqtaga ega bo‘lmagan traektoriyalar soni L_{2n-2} ga teng.

3°. *OX* o‘qidan pastda uchga ega bo‘lmagan traektoriyalar soni L_{2n} ga teng.

2.3-§. Ayrim kombinatorik masalalarni yechishda traektoriya metodining tadbiqlari.

3.1-misol: (Shaxmat shaharchasi)

$m \times n$ o‘lchamli to‘g‘ri burchakli to‘rni qaraymiz .Bu to‘r $m \times n$ to‘g‘ri burchakli kvartallardan iborat bo‘lib , u *n-1* ta “gorizontal” va *m-1* ta “vertikal ko‘chalar ” ga bo‘lingan.(3-rasm).

Chap quyi burchaklardan va *((0;0)* nuqtalar *)* o‘ng yuqori burchakka ((*m;n*) nuqtaga) olib boruvchi turli qisqa yo‘lning soni qanday ?

Yechish (*0;0*) nuqtadan (*m;n*) nuqtagacha har bir qisqa yo‘l *m+n* kesmalardan iborat bo‘lib , jumladan ularning *m* tasi gorizontal, *n* tasi vertikal kesmalar bo‘ladi.

Turli yo‘llar faqat gorizontal va vertical kesmalarning o‘rni almashishi bilangina farqlanadi . Shuning uchun ham umumiy yo‘llar soni *n+m* kesmalardan *n* ta vertical kesmalarni tanlash usuliga bog‘liq bo‘ladi va bu ajratib olishlar soni ya’ni

$$C_{m+n}^{n}.$$

Xuddi shunday bu tanlash usullarini *m* ta gorizontal olishimiz mumkin , ya’ni

$$C_{m+n}^{m}.$$

Quyidagi tenglikning o‘rinli ekanligini kombinatsiyalar sonini faktariallar orqali ham ifodalash mumkin .

$$C_{m+n}^{m} = C_{m+n}^{n}.$$

Shunday qilib (*0;0*) nuqtadan (*m;n*) nuqtagacha qisqa yo‘llarning soni

$$C_{m+n}^{m} = C_{m+n}^{n}$$

ga teng .

3.1-teorema: $$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \qquad (3.1)$$

tenglama o‘rinlidir.

Isbot: *O(0;0)* nuqtadan *A(k;n-k)* nuqtaga qisqacha yo‘l soni $C_{k+(n-k)}^{k} = C_n^k$ ga teng.(4-rasm)

Barcha bunday yo‘llarni ikki gruppaga bo‘lish mukin :

A_1*(k-1;n-1)* nuqta orqali o‘tuvchi yo‘llar (ular soni $C^{k-1}_{(k-1)+(n-k)} = C^{k-1}_{n-1}$ ga teng) va $A_2(k;n-k-1)$ nuqta orqali o‘tuvchi yo‘llar (ular soni $C^{k}_{k+(n-k-1)} = C^{k}_{n-1}$ ga teng).

Bundan

$C^k_n = C^k_{n-1} + C^{k-1}_{n-1}$ tenglik o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

3.2-misol: Bizta chipta sotish bilan bog‘liq bo‘lgan masalaning yechimini isbotlangan teorema yordamida keltiramiz. Tushnarli bo‘lishi uchun masala shartini keltiramiz:

A nomzod saylovda *a* ovoz to‘pladi, *B* nomzod *b* ovoz to‘pladi (*a>b*) saylovchilar ketma- ket ovoz berdilar .

Hamma vaqt *A* nomzod berilgan ovozlar bo‘yicha *B* nomzoddan oldinda bo‘lishini ta’minlovchi ovoz berish hollari nechita?

Yechish:Masalaning berilishidan ko‘rinadiki, masalani yechish O nuqtadan (*m+n;n-m*) nuqtaga

$$y=-(p+1)$$

To‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydigan traektoriyalar sonini hisoblashga olib kelinadi.2.2-teoremaga asosan *y=-(p+1)* to‘g‘ri chiziq bilan kesishadigan traektoriyalar soni (0;-2(p+1)) nuqtadan *(n+m;n-m)* nuqtaga traektoriyalar soniga, ya’ni

$$C^{p+n+1}_{m+n} = C^{m-p-1}_{m+n}$$

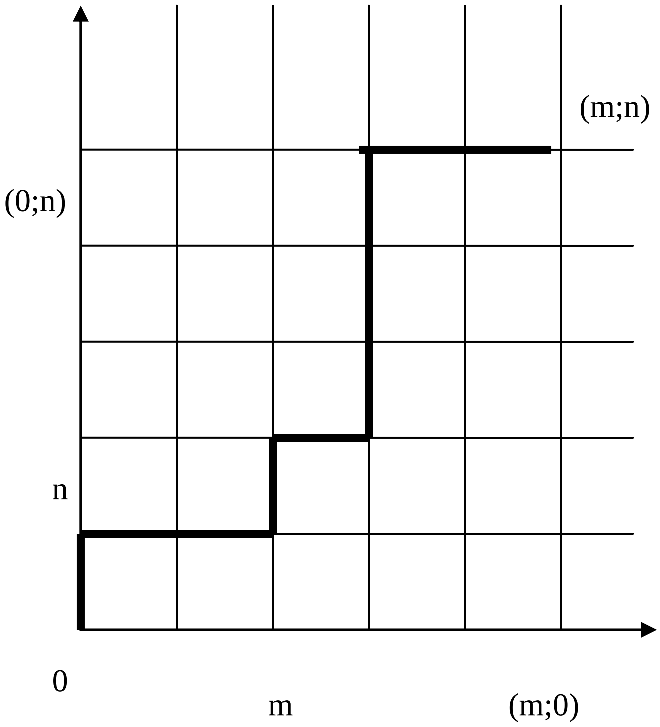
ga teng bo‘ladi.

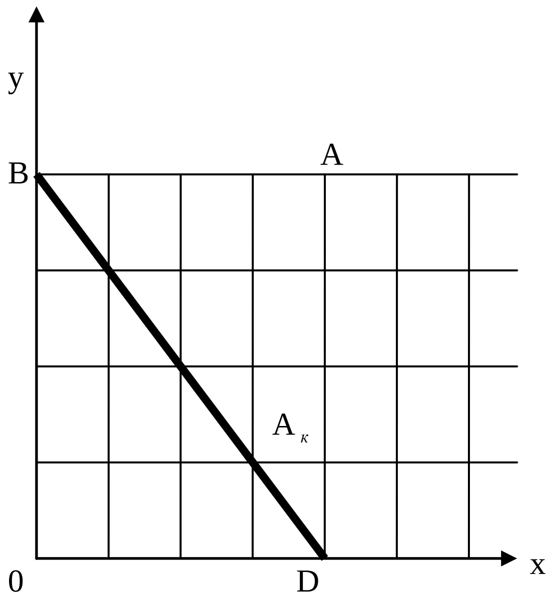
Demak , izlanayotgan traektoriyalar soni

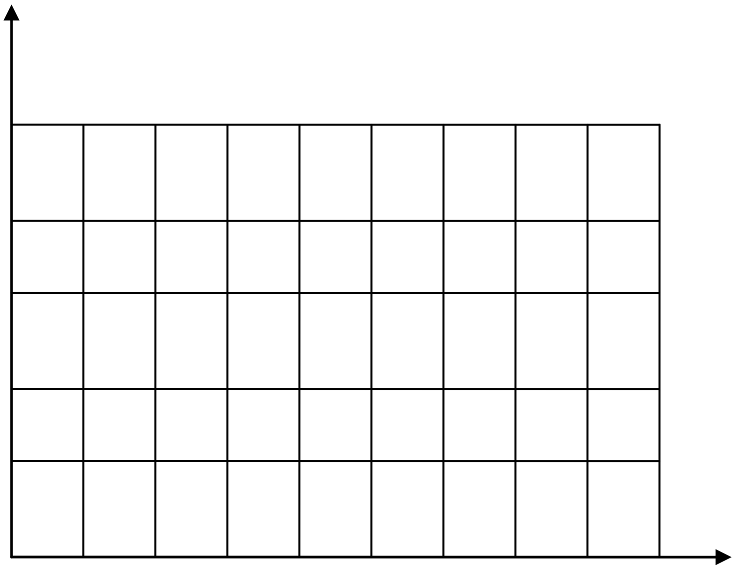
$$C^{m}_{m+n} = C^{m-p-1}_{m+n}$$

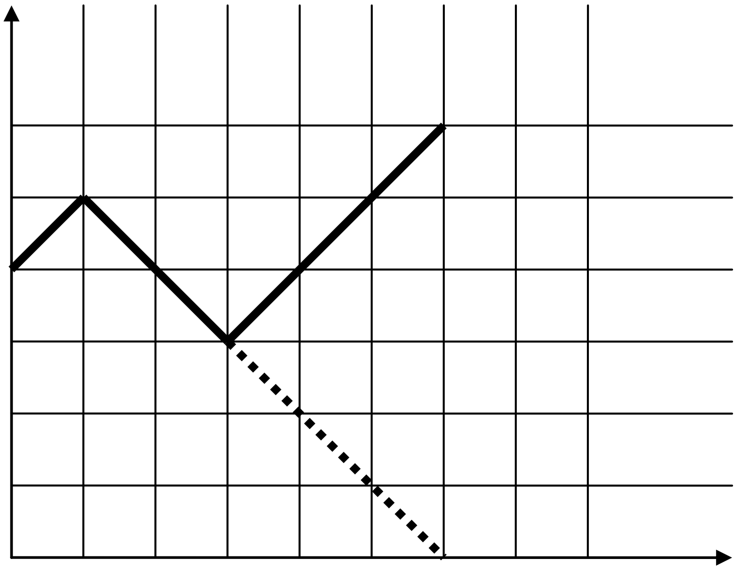
ga teng bo‘ladi.

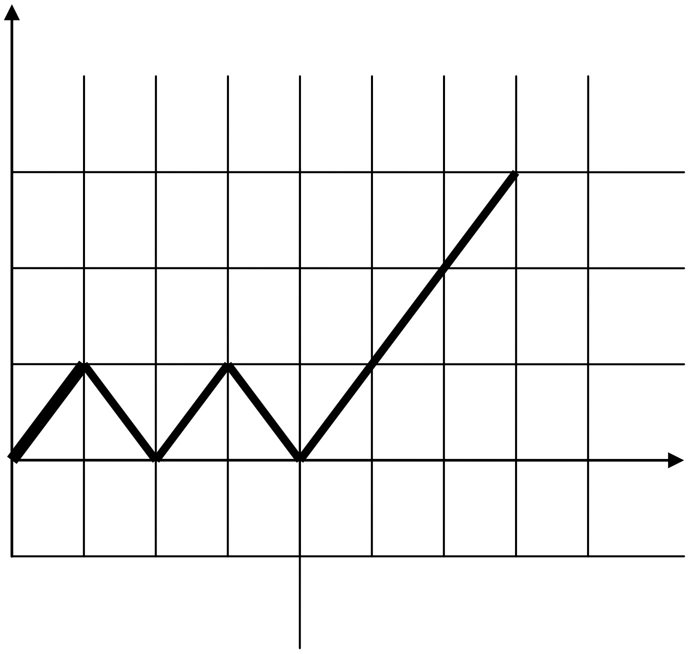
2.bobning xulosasi: Bu bobda asosan biz traektoriyalar metodi deb ataluvchi usul haqida tushunchalar berib, u bilan bog‘liq bo‘lgan teoremalar keltirildi. Ayrim kombinatorik munosabatlarni shu usul bilan keltirildi. Bu usulning muhim tomoni ,uning ko‘rgazmaligidir.Bitiruv malakaviy ishida keltirilgan ma’lumotlardan akademik litsey va kollejlarda algebra va analiz darsini o‘tish jarayonida va oliy o‘quv yurtlarida algebra , ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanlarini o‘qitishda foydalanish mumkin. Bu bobda uchta paragraf bor. 1- traektoriyalar usuli haqida .2-traektoriyalar usuli yordamida ayrim kombinatorik munosabatlarni isbotlash. 3- Ayrim kombinatorik masalalarni yechishda tadbiqlari.

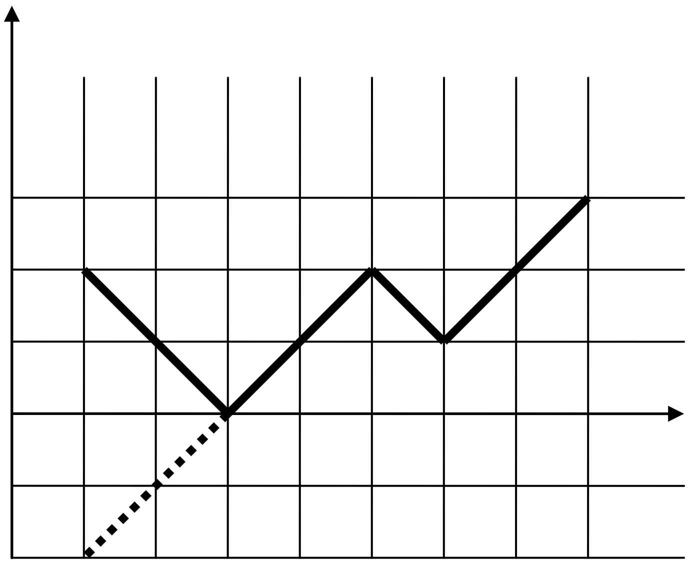


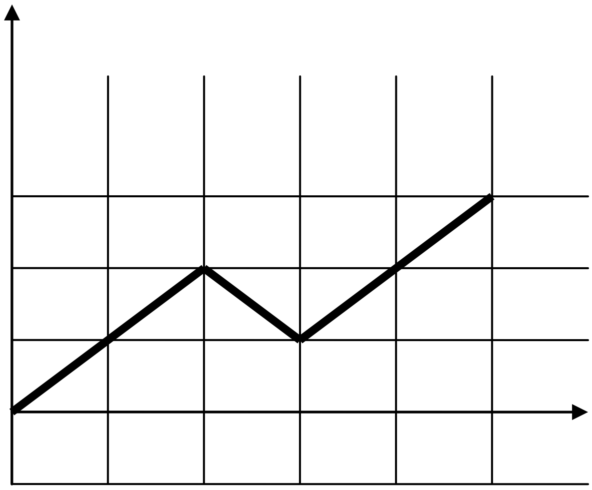


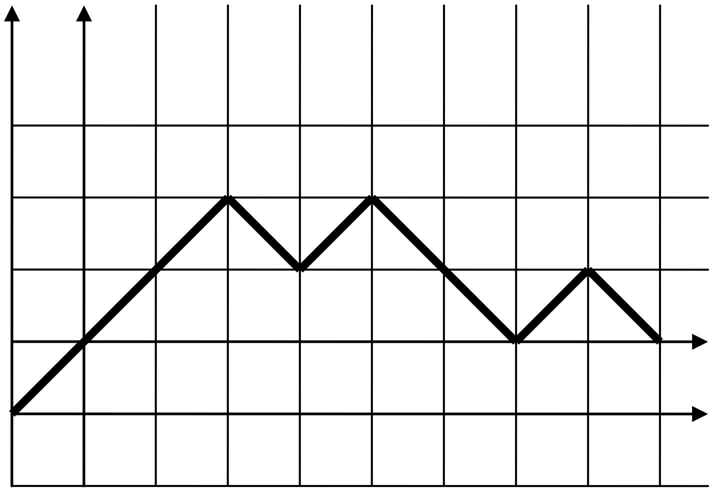












XULOSA

Bitiruv malakaviy ishida ayrim kombinatorik munosabatlar, ularning isbotlari hamda bu munosabatlarni traektoriya metodi yordamida ko‘rgazmali isboti haqida ma’lumotlar berilgan.

Bitiruv malakaviy ishining birinchi qismi bu ayrim muhim kombinatorik munosabatlar va tushunchalar haqida. Bu qismda to‘plamning to‘plam ostilari ta’rifi, shu mavzuga doir teoremalar, har- xil misollarning yechimi keltirilgan.Bundan tashqari 2 ta natija ham bor. Bu bitiruv malakaviy ishining asosiy boshlang‘ich masalalaridan hisoblanadi.

Bitiruv malakaviy ishining ikkinchi qismi bu Tartiblangan to‘plamlar. O‘rin almashtirish va joylashtirish.Bu qismda tartiblangan to‘plamlar haqida ta’rif, teoremalar keltirilgan.Hamma shu mavzuga doir misollar yechimlari bilan keltirilgan.

1 bobning 3 qismi Takrorlanadigan o‘rin almashtirishlar. Bu qismda ham teoremalar isboti, misollar yechimlari bilan keltirilgan.

2 bobda ham 3 ta paragraf mavjud bo‘lib, 1-qismi traektoriyalar usuli haqida.2- qismi traektoriyalar usuli yordamida ayrim kominatorik munosabatlarni isbotlash.3- qismi.Ayrim kombinatorik masalalarni yechishda traektoriya metodining tadbiqlari.

Ko‘pgina kombinatorika topshiriqlar uchun shunday geometrik talqinni ko‘rsatish mumkinki, aniq xossaga ega bo‘lgan yo‘llarning (traektoriyaning) sonini hisoblashga oid masalaga keltiriladi. Bu metoddan ayrim binomial ayniyatlarni isbotida foydalanish mumkin. Bu metodning ustunligi favqulodda ko‘rgazmalilik hisoblanadi.

Traektoriya metodi atamasini B.V .Gnedenko kiritgan.1951-1954 yillarda B.V.Gnedenko va uning shogirdlari V.S.Korolyuk,V.S.Mixalevich bu metodni matematik statistikaning ayrim muhim masalalarni yechishda qo‘llaganlar.

Ishning asosiy qismi shu kombinatorik masalalarning traektoriya metodi yordamida isbotini, ya’ni geometriktalqini berishdan iborat.

Adabiyotlar ro'yxati.

1. Karimov.I.A ”Yuksak ma’naviyat yengilmas kuch”.Toshkent..”Ma’naviyat” 2008. 60-64 betlar.
2. Мирзиёев Ш.М. Эркин ва фаровон, демократик Ўзбекистон давлатини биргаликда барпо этамиз. Ўзбекистон Республикаси Президенти лавозимига киришиш тантанали маросимига бағишланган Олий Мажлис палаталарининг қўшма мажлисидаги нутқ, Тошкент, 2016. 56-б.
3. Мирзиёев Ш.М. Танқидий таҳлил, қатъий тартиб-интизом ва шахсий жавобгарлик – ҳар бир раҳбар фаолиятининг кундалик қоидаси бўлиши керак. Мамлакатимизни 2016 йилда ижтимоий-иқтисодий ривожлантиришнинг асосий якунлари ва 2017 йилга мўлжалланган иқтисодий дастурнинг энг муҳим устувор йўналишларига бағишланган Вазирлар Маҳкамасининг кенгайтирилганмажлисидаги маъруза, 2017 йил 14 январъ –Тошкент, Ўзбекистон, 2017. 104-б.
4. Мирзиёев Ш.М. Қонун устуворлиги ва инсон манфаатларини таъминлаш-юрт тараққиёти ва халқ фаровонлигининг гарови. Ўзбекистон Республикаси Конституцияси қабул қилинганининг 24 йиллигига бағишланган тантанали маросимдаги маъруза. 2016 йил 7 декабрь- Тошкент, Ўзбекистон, 2017. 48-б.
5. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб халқимиз билан бирга қурамиз. Мазкур китобдан Ўзбекистон Республикаси Президенти Шавкат Мирзиёевнинг 2016 йил 1 ноябрдан 24 ноябрга қадар Қорақалпоғистон Республикаси,вилоятлар ва Тошкент шахри сайловчилари вакиллари билан ўтказилган сайловолди учрашувларида сўзлаган нутқлари ўрин олган.-Тошкент, Ўзбекистон, 2017. 488-б.
6. Тожиев М. ва бошқ. Педагогик технология-замонавий илмий-назарий асоси. -Тошкент: “Ishonch M.S.” , 2008. -186 б.
7. Тожиев М., Зиёмухаммедов Б. Миллий таълим тарбия жараёнига татбиғи ва уни ёшлар интелектуал салоҳиятини юксалтиришдаги ўрни технологиялари Тошкент: “MUMTOZ SO`Z” 2001. -268 б.
8. Тожиев М., Салахутдинов Р. ва бошқ. Таълим жараёнида замонавий ахборот технологиялари Т., 2001,-148 б.
9. To‘raqulov D.D,NasimovH.A,J.H.Husanov ”Matematikadan praktikum”.Toshkent.”Ilm Ziyo”.2004. 102-111,172-176 betlar.
10. Abdulhamidov A.U va boshqalar Algebra va matematik analiz asoslari 2-qism.Toshkent.2008.
11. Р.И Искандаров Р.Назаров Алгебра ва сонлар назарияси 1-кисм. Тошкент.1997
12. G‘aymnazarov G., Gaimnazarov O.G. Kombinatorika va uning tatbiqlari.// O‘quv-uslubiy qo‘llanma. – Toshkent: Fan va texnologiya, 2014. – 84 b.
13. G‘aymnazarov G., Gaimnazarov O.G. Algebra va sonlar nazariyasidan masalalar yechish. O‘quv qo‘llanma. –Toshkent: Fan va texnalogiya,2015. –180 b.
14. http://www.nitolsalar.com/ru.tech nolgtesi
15. http://toshkent.uz/uz/news/antide/4073.
16. http://uzbek.irib.ir/iyrillik/.512-orbital-mat.stansiya.htm.