**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI**
**OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI**

**GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI**

**Fizika – matematika fakulteti**

**Matematika** kafedrasi

5130100-matematika ta’lim yo‘nalishi bo‘yicha bakalavr darajasini olish uchun

**Olimov Baxriddin Jalol o‘lining**
**KO‘PXILLIK VA UNING XOSSALARINI O‘RGANISH mavzusida tayyorlagan**

# BITIRUV MALAKAVIY ISHI

**Rahbar: __________ O.G.Gaimnazarov, kata o‘qituvchi**

**BMI “Matematika” kafedrasining 2018 yil _______ №____ sonli yig‘ilishida ko‘rib chiqildi va himoyaga tavsiya etildi.**

**Kafedra mudiri __________ H.Norjigitov, fizika-matematika fanlari nomzodi.**

**BMI fizika-matematika fakulteti dekanati tomonidan himoyaga ruxsat berildi.**

**Fakultet dekani __________ Tashtemirov D.E. pedagogika fanlari nomzodi.**

**Guliston – 2018**

# MUNDARIJA

# KIRISH

Hozirgi kunda ta’lim tizimida katta o‘zgarishlar olib borilmoqda. Ayniqsa matematika fanida ilmiy kashfiyotlar yuksak taraqqiy etib, fan rivojlanib olimlar yaxshi natijalarga erishmoqda. Shunday ekan matematikani yaxshi o‘rganish va o‘rgatish bugungi kun talabidir. Buning uchun fanni o‘qitishni maktab kursida, yaxshi o‘qitilishiga e’tibor qaratilishi lozim.

“Ta’lim tizimini isloh qilmay turib ongni, tafakkurni o‘zgartirib bo‘lmaydi, ongni, tafakkurni o‘zgartirmay esa biz ko‘zlagan ozod va obod vatanni barpo etib bo‘lmaydi” deb ta’kidlagan O‘zbekiston Respublikasi birinchi Prezzidenti I.A.Karimov.

O‘zbekiston Respublikasi birinchi Prezidenti I.A. Karimovning yoshlar tafakkurini shakllantirish yo‘nalishidagi “Har bir insonning, ayniqsa, endigina qadam qo‘yib kelayotgan yoshlarning ongiga shunday fikrni singdirish kerakki, ular o‘rtaga qo‘yilgan maqsadlarga erishish o‘zlariga bog‘liq ekanligini, ya’ni bu narsa ularning sobit qadam g‘ayrat – shijoatiga, to‘la to‘kis fidokorligiga va cheksiz mehnatsevarligiga bog‘liq ekanligini anglab yetishlari kerak. Xuddi shu narsa davlatimiz va xalqimiz ravnaq topishining asosiy shartidir,” degan fikrlarini keltirish maqsadga muvofiqdir.

Ushbu BMI matematik analiz va geometriya fanlarda muhim hamda dolzarb mavzulardan biri bo‘lib, u “Ko‘pxillik va uning xossalarini o‘rganish” deb nomlanadi.

Topologiya fani umumiylik nuqtai nazaridan geometriya va matematik analiz fanlarining asosiy tushunchalarini qayta ko‘rib chiqish natijasida vujudga kelgan. Topologiya fani matematikaning deyarli yosh, lekin muhim qismidir. Topologiyaga quyidagicha ta’rif berish mumkin: topologiya ─ matematikaning geometrik bo‘limi bo‘lib, uzluksizlikni tadqiq qiluvchi, ya’ni uzluksiz akslantirishlarni o‘rganuvchi sohasi hisoblanadi. Qisqacha qilib aytganda, funksiyaning uzluksizligi tushunchasiga ko‘ra, metrik fazo va topologik fazolar hamda ularning uzluksiz akslantirishlarni anglatadi. Geometrik nuqtai nazardan ikki sonning ayirmasi moduli uni sonlar o‘qi $R$ da nuqtalar orasidagi masofadan iborat ekanligini bildiradi.

Birinchi bobda topologik va metrik fazolarning ta’riflari va xossalarini keltirib, topologik fazolar o‘lchami to‘g‘risida ham bayon qildim.

Ikkinchi bobda ko‘pxilliklar, topologik ko‘pxilliklar, ikki o‘lchamli ko‘pxilliklar va ularning xossalarini bayon qildim.

**BMI ning dolzarbligi:** Topologiya elementlari bilan tanishgandan keyin oddiy topologik tushunchalar bizni o‘rab turgan olamga nazar tashlaganda paydo bo‘la boshlaydi. O‘z-o‘zidan tushunarliki, figuralarning geometrik xossalariga figura o‘lchamlari, ularning joylashishi, burchaklarining ko‘rinishi va hokazolar kiradi. Bu geometrik xususiyatlardan tashqari yana nimadir nazarimizdan chetda qolayotgandek tuyuladi. Masalan, geometrik chiziqlarning yopiq yoki yopiq emasligi, figuralarning “teshikli” yoki “teshiksiz”, cho‘ziluvchan yoki cho‘ziluvchan emasligi, figuralarni qirqmasdan cho‘zish yoki cho‘zish mumkin emasligi kabi xossalarini inobatga oladigan bo‘lsak, Evklid geometriyasidan tashqariga chiqishga to‘g‘ri keladi. Aynan shu o‘rganish natijasida va shu kabi geometrik figuralarning xossalarini o‘rganuvchi topologiya fani elementlari kirib kela boshlaydi.

**BMI ning maqsadi**: Ikki o‘lchamli topologik fazolarni, ikki o‘lchamli Evklid fazosi va shu fazodagi figuralarning geometrik, topologik xossalarini aniqlash va o‘rganish, hamda ikki o‘lchamli ko‘pxilliklarning ba’zi xossalarini o‘rganish va tatbiq qilish .

**BMI ning obyekti**: ikki o‘lchamli topologik fazolar, ikki o‘lchamli geometrik figuralar, chiziqlar, ikki o‘lchamli ko‘pxilliklar.

**BMI ning predmeti**: Topologik fazolar, ko‘pxilliklar va ularning o‘lchamlari.

**BMI ning vazifalari**:

- Berilgan to‘plamda metrika kiritish;
- Metrik fazolarning ba’zi xossalarini o‘rganish;
- Topologiya kiritish usullarini o‘rganish;

- Topologik fazolarning ba’zi xossalarini o‘rganish;
- Topologik fazolarda o‘lcham tushunchasini o‘rganish;
- Ko‘pxilliklarga turli ta’riflarini keltirish va ularga doir misollar ko‘rish;
- Ko‘pxilliklarda o‘lcham tushunchalarini o‘rganish;
- O‘lchamli ko‘pxilliklarning ba’zi xossalarini o‘rganish;
- Ikki o‘lchamli ko‘pxilliklarning ba’zi xossalarini o‘rganish va misollarda tekshirish.

# I bob. Topologik fazolar va unda o‘lchamlar

## 1.1 Topologik fazolar va unga doir misollar

To‘plam tushunchasi matematikaning boshlang‘ich (ta’riflanmaydigan) tushunchalaridan biri bo‘lib, topologik fazolarni o‘rganishimizda katta ahamiyat kasb etadi. U chekli yoki cheksiz ko‘p obyektlar (narsalar, buyumlar obyektlar, shaxslar va h.k) ni birgalikda bir butun deb qarash natijasida vujudga keladi.

To‘plamni tashkil etgan obyektlar uning elementlari deyiladi. To‘plamlar odatda lotin alifbosining bosh harflari bilan belgilanadi. Masalan, $A = \{a, b, c, d\}$ yozuvi $A$ to‘plam $a, b, c, d$ elementlardan tashkil topganligini bildiradi. $x$ element $X$ to‘plamga tegishli ekanligi $x \in X$ ko‘rinishda, tegishli emasligi esa $x \notin X$ ko‘rinishda belgilanadi. Masalan, barcha natural sonlar to‘plami $N$ va $4, 5, \frac{3}{4}, \pi$ sonlari uchun $4 \in N,\ 5 \in N,$ $\frac{3}{4} \notin N,\ \pi \notin N$ munosabatlar o‘rinli.

Barcha $x$ elementlari biror $b$ xossaga ega bo‘lgan to‘plam $X = \{x | b(x)\}$ kabi yoziladi. Masalan, ratsional sonlar to‘plamini $Q = \{r | r = \frac{p}{q}, p \in Z, q \in N\}$ ko‘rinishda, $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat tenglama ildizlari to‘plamini esa $X = \{x | ax^2 + bx + c = 0\}$ ko‘rinishda yozish mumkin. Elementlari soniga bog‘liq holda to‘plamlar chekli va cheksiz to‘plamlarga ajratiladi. Elementlari soni chekli bo‘lgan to‘plam chekli to‘plam, elementlari soni cheksiz bo‘lgan to‘plam *cheksiz to‘plam* deyiladi. Birorta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam bo‘sh to‘plam deyiladi. Bo‘sh to‘plam $\emptyset$ orqali belgilanadi. Bo‘sh to‘plam ham *chekli to‘plam* hisoblanadi. Ayni bir xil elementlardan tuzilgan to‘plamlar *teng to‘plamlar* deyiladi. Agar $B$ to‘plamning har bir elementi $A$ to‘plamning ham elementi bo‘lsa, $B$ to‘plam $A$ to‘plamning *qism-to‘plami* deyiladi va $B \subset A$ ko‘rinishda belgilanadi. Bunda $\emptyset \subset A$ va $A \subset A$ hisoblanadi. Bu qism-to‘plamlar *xosmas qism-to‘plamlar* deyiladi. $A$ to‘plamning qolgan barcha qism-to‘plamlari *xos qism-to‘plamlar* deyiladi. Masalan: $N \subset Z \subset Q \subset R$. Agar $A = \{3,4,5\}$, $B = \{x|x^2 - 7x + 12 = 0\}$ bo‘lsa, $B \subset A$ bo‘ladi. $X$ chekli to‘plam elementlari sonini $n(X)$ orqali belgilaymiz. $k$ ta elementli $X$ to‘plamni *k elementli to‘plam* deb ataymiz.

$A$ va $B$ to‘plamlarning ikkalasida ham mavjud bo‘lgan $x$ elementga shu to‘plamlarning *umumiy* elementi deyiladi. $A$ va $B$ to‘plamlarning *kesishmasi* (yoki *ko‘paytmasi*) deb, ularning barcha umumiy elementlaridan tuzilgan to‘plamga aytiladi. $A$ va $B$ to‘plamlarning kesishmasi $A \cap B$ ko‘rinishda belgilanadi: $A \cap B = \{x|x \in A \ va \ x \in B\}$.

$A$ va $B$ to‘plamlarning *birlashmasi* (yoki *yig‘indisi*) deb, ularning kamida bittasida mavjud bo‘lgan barcha elementlardan tuzilgan to‘plamga aytiladi. $A$ va $B$ to‘plamlarning birlashmasi $A \cup B$ ko‘rinishda belgilanadi:$A \cup B = \{x|x \in A \ yoki \ x \in B\}$.

$A$ va $B$ to‘plamlarning *ayirmasi* deb, $A$ ning $B$ da mavjud bo‘lmagan barcha elementlardan tuzilgan to‘plamga aytiladi. $A$ va $B$ to‘plamlarning ayirmasi $A\backslash B$ ko‘rinishda belgilanadi: $A\backslash B = \{x|x \in A \ va \ x \notin B\}$.

Ixtiyoriy “tabiatli” bo‘sh bo‘lmagan $X$ to‘plam va $\tau = \{U_\alpha : U_\alpha \subseteq X, \alpha \in A\}$ sistema (shu $X$ to‘plamning qism to‘plamlaridan tashkil topgan) berilgan bo‘lsin.

**1-Ta’rif.** Agar $\tau$ sistema (qism to‘plamlari oilasi) quyidagi:

1) $\emptyset$, $X \in \tau$;

2) $\tau$ sistemaning ixtiyoriy sondagi elementlarining birlashmasi $\tau$ ga tegishli bo‘lsa, ya’ni $\forall\ A` \subset A$ uchun $\bigcup\limits_{\alpha^1 \in A^1} U_{\alpha`} \in \tau;\ \alpha^1 A^1$;

3) $\tau$ sistemaning ixtiyoriy chekli sondagi elementlari kesishmasi $\tau$ ga tegishli bo‘lsa, ya’ni $\forall \alpha_i \in A$, $i=\overline{1,S}$ $\bigcap_{i=1}^{S} U_{\alpha_i} \in \tau$ shartlarni qanoatlantirsa, $\tau$ sistema $X$ to‘plamdagi topologiya, $(X;\tau)$ juftlik esa, birgalikda **topologik fazo** deyiladi. $(X;\tau)$ topologik fazo tashkil qilsa, $\tau$ sistemaning elementlari ochiq to‘plamlar deb ataladi. Bu ta’rifdagi 1–3-shartlar topologiyaning yoki topologik fazoning aksiomalari deb yuritiladi. Ta’rifdan ma’lumki, $X$ to‘plam qanday bo‘lishidan qat’i nazar, topologik fazodagi ochiq to‘plamlar turlicha bo‘lishi mumkin ekan. Ko‘p hollarda, agar $(X;\tau)$ topologik fazo bo‘lsa, $\tau$ sistema topologik struktura, $X$ to‘plam esa, $(X;\tau)$ topologik fazoning yoki topologiyaning ifodalovchisi – eltuvchisi deb ataladi.

$F - X$ topologik fazoning qismi bo‘lsin, ya’ni $F \subset X$. Agar $F$ ning to‘ldiruvchisi ochiq bo‘lsa, u holda $F$ ga yopiq to‘plam deyiladi.

Topologik fazo aksiomalaridan yopiq to‘plamlar uchun quyidagi xossalar kelib chiqadi:

1) $X$ yopiq to‘plamdi;
2) Bo‘sh to‘plam yopiq to‘plamdir;
3) Chekli sondagi yopiq to‘plamlarning yig‘indisi yopiq to‘plamdir;
4) Ixtiyoriy yopiq to‘plamlar oilasi uchun bu to‘plamlar kesishmasi (umumiy qismi) yopiq to‘plamdir.

**1-Misol.** Ikki – $a$ va $b$ elementlardan iborat $X$ to‘plam berilgan deylik. $\tau$ sistema sifatida bo‘sh to‘plam, $X$ to‘plamning o‘zini va $\{a\}$ dan tashkil topgan to‘plamlar oilasini olamiz, ya’ni $\tau = \{\varnothing; \{a, b\}; \{a\}\}$. Bu $\tau$ sistema ta’rifdagi 1–3-shartlarni qanoatlantirishi ravshan. Demak, $(X;\tau)$ juftlik topologik fazodir. Bu fazo topologik sodda qurilganiga qaramasdan, muhim va qiziqarli jihatlarga ega bo‘lganligi uchun maxsus nom bilan “bog‘lamli ikki nuqta” deb yuritiladi.

1-misolda, agar $\tau$ ni $\{-\varnothing:\{a;b\},\{b\}\}$ ko‘rinishida olsak ham, $\tau$ sistema topologiya tashkil qiladi.

Yuqoridagi misollardan ko‘rinadiki, ixtiyoriy bo‘sh bo‘lmagan to‘plamga doimo turlicha topologiya kiritish, ya’ni aniqlash imkoni mavjuddir. Topologiyalarning aniqlanishidan ma’lum bo‘lmoqdaki, ulardagi ochiq to‘plamlar ham turlicha bo‘lishi (topologiyaga qarab) mumkin ekan. Ya’ni, bir topologik strukturaga nisbatan ochiq bo‘lgan to‘plam ikkinchi strukturaga nisbatan ochiq bo‘lmasligi mumkin.

**2-Misol.** $X$ ixtiyoriy, albatta, bo‘sh bo‘lmagan to‘plam deylik. $\tau_0=\{\varnothing;X\}$ sistemani olamiz. Bevosita tekshirib ko‘rish mumkinki, $(X;\tau_0)$ juftlik topologik fazo tashkil qiladi. Ya’ni, ta’rifdagi 1–3-shartlar o‘rinli. Bu topologik fazo trivial yoki antidiskret topologik fazo deb yuritiladi.

**3-Misol.** Ixtiyoriy cheksiz $X$ to‘plam berilgan bo‘lsin. Qism to‘plamlari oilasi $\tau$ sifatida $\varnothing, X$ va shunday $U_\alpha \subset X$ qism to‘plamlarni olamizki, $X \setminus U_\alpha$ to‘plam chekli to‘plamdan iborat bo‘lsin, ya’ni $\tau=\{\varnothing;X;\ U_\alpha : X\setminus U_\alpha = CU_\alpha$ chekli, $\alpha\in A\}$. Bu yerda $CU_\alpha$ bilan $U_\alpha$ qism to‘plamining $X$ gacha bo‘lgan to‘ldiruvchisi $X-U_\alpha$ kabi belgilanadi. To‘plamlar ustida bajariladigan amallardan ma’lumki, bu $\tau$ to‘plamlar oilasi ham topologiya tashkil qiladi. Bu topologik fazo Zarisskiy fazosi deb ataladi.

<u>**Eslatma:**</u> Bu yerda $\varnothing$ bo‘sh qism to‘plam ham chekli to‘plam hisoblanadi.

**4-Misol.** $X$ to‘plam sifatida sonlar o‘qini, ya’ni haqiqiy sonlar to‘plami – $R^1$ ni olaylik. $R^1$ dagi topologiya esa, quyidagi qism to‘plamlar oilasidan tashkil topsin. Bo‘sh to‘plam $\varnothing$ ixtiyoriy intervallar va ularning $U=\underset{\alpha}{U}(a_\alpha;b_\alpha)$ ko‘rinishdagi birlashmasi. Ya’ni,

$$\tau=\{\varnothing;(a,b);\ \underset{\alpha}{U}(a_\alpha,b_\alpha):\alpha\in A,\ a,b,\ \underset{\alpha}{U}(a_\alpha,b_\alpha):\alpha\in A,\}$$

Haqiqiy o‘zgaruvchilarning funksiyalar nazariyasi kursidan ma’lumki, bu $\tau$ sistema ham topologiya ta’rifidagi 1–3-aksiomalarni qanoatlantiradi. Bunday aniqlangan topologiya to‘g‘ri chiziqdagi tabiiy topologiya deb yuritiladi.

**5-Misol.** $X$ to‘plam sifatida $R^2$ Evklid tekisligini olaylik. Ochiq to‘plam sifatida $R^2$ ning ixtiyoriy nuqtasi va markazi shu nuqtada bo‘lgan radiusi yetarlicha kichik bo‘lgan ochiq doiralarni, bo‘sh to‘plamni qarasak, bu barcha ochiq to‘plam oilasi topologiya tashkil qiladi.

**6-Misol.** Bo‘sh bo‘lmagan ixtiyoriy $X$ to‘plam berilgan bo‘lsin. Topologiya sifatida $X$ to‘plamning jami qism to‘plamlarini olaylik, ya’ni $\{U: U \subseteq X, U - ixtiyoriy\ qism\ to'plam\}$. Bu topologik struktura ham $X$ da topologiya tashkil qiladi. Bu topologiya $\tau_1$ topologiya deb qabul qilingan.Bu $(X, \tau_1)$ topologik fazo diskret topologik fazo deyiladi.

## 1.2 Metrik fazolar va unga doir misollar

Matematikaning ko‘p qo‘llaniladigan tushunchalaridan biri metrik fazo tushunchasidir. Bu tushuncha matematikaga birinchi bor fransuz matematigi M.Freshe tomonidan 1906-yilda kiritildi.

**Metrik fazo ─** bu biror bo‘sh bo‘lmagan to‘plamdagi ikki element (nuqta) orasidagi masofani aniqlash ma’lum demakdir. Bu ikki nuqta orasidagi masofani aniqlash amali ma’lum bir shartlarni (aksiomalarni) qanoatlantirishi shart bo‘ladi. Bu shartlar masofa (yoki metrika) aksiomalari deb yuritiladi. Metrik fazo matematikaning deyarli barcha sohalariga tatbiq etiladi. Qolaversa, barcha fanlarda ham turli-tuman ko‘rinishda ishlatiladi. Fazoda (to‘plamda) ikki nuqta orasidagi masofa ma’lum bo‘lsa, nuqtalarning o‘zaro “yaqin”ligini, nuqta va to‘plamning, qolaversa, ikkita to‘plam (figura) “yaqin”ligini aniqlasa bo‘ladi. Bu esa, fazoning, figuralarning turli geometrik xossalarini o‘rganishda muhim ahamiyatga egadir.

Aytaylik, $X$ va $Y$ -topologik fazolar, $f : X \to Y$ - akslantirish (funksiya) va $x \in X$ bo‘lsin.

Agar $f(x) \in Y$ nuqtaning ixtiyoriy ixtiyoriy $V$ atrofi uchun $x \in X$ nuqtaning $U$ atrofi mavjud bo‘lib, uning uchun $f(U) \subset V$ bo‘lsa, u holda $f$ akslantirish $x$ **nuqtada uzluksiz** deyiladi.

Agar $f : X \to Y$ akslantirish (funksiya) $X$ ning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, u holda bu $f$ akslantirish $X$ da **uzluksiz akslantirish (funksiya)** deyiladi. Uzluksiz funksiyalar xossalari:

1. $f : X \to Y$ funksiyaning uzluksiz bo‘lishi uchun $Y$ da ochiq (yopiq) bo‘lgan har qanday to‘plamning asli $X$ da ochiq (yopiq) bo‘lishi yetarli va zarurdir.
2. $f : X \to Y$ va $g : Y \to Z$ uzluksiz funksiyalarning kompozitsiyasi $g \circ f : X \to Z$ ham uzluksizdir.

Bo‘sh bo‘lmagan $X$ to‘plam va $R$ haqiqiy sonlar to‘plami berilgan bo‘lsin.

**1-Ta’rif.** Agar quyidagi shartlar o‘rinli bo‘lsa, $\rho : X \times X \to R$ akslantirish $X$ to‘plamda metrika deyiladi:

$(\rho 1)$. $\forall x, y \in X, \rho(x, y) \geq 0$;

$(\rho 2)$. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

$(\rho 3)$. $\rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x, y \in X$ (simmetriklik aksiomasi);

$(\rho 4)$. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ $\forall x, y, z \in X$ (uchburchak aksiomasi).

Agar $X$ to‘plam va $\rho$ akslantirish metrika tashkil qilsa, ular birgalikda metrik fazo deyiladi va $(X, \rho)$ ko‘rinishda yoziladi. Metrikani $(X, \rho)$ metrik fazoda ikki element yoki ikki nuqta orasidagi masofa deb tushuniladi.

**1-Misol.** $X$ to‘plam sifatida $R^1$ – sonlar to‘g‘ri chizig‘i yoki $X$ – haqiqiy sonlar to‘plami $R^1$ni olsak hamda ixtiyoriy $x$ va $y$ sonlar uchun $\rho(x,y)=|x-y|$ desak, u holda, ma’lumki, bu $\rho$ metrikaning hamma aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, $(R^1,|x-y|)$ metrik fazo tashkil qiladi.

**2-Misol.** $R^n$ – ko‘p o‘lchovli sonlar fazosi. $X$ sifatida $\{x=(x_1,..,x_n):x_i\in R^1, i=\overline{1,n}\}$ ko‘rinishdagi to‘plamni olaylik. Bu to‘plamning ikki $x$ va $y$ elementlari orasidagi metrikani (masofani) $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=\sqrt{(x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2}$ formula bilan aniqlaymiz, bu yerda $x=(x_1,...,x_n)\in X, y=(y_1,...,y_n)\in X$.

Ma’lumki, bu $\rho$ metrika tashkil qiladi. Bu fazo $n$– o‘lchovli sonlar fazosi deb yuritiladi va $R^n$ ko‘rinishda belgilanadi.

Xususiy holda, agar $n=2$ bo‘lsa, $R^2$ da Evklid tekisligidagi metrika $\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$, $n=3$ bo‘lsa, $R^3$ da Evklid fazosidagi metrika $\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$ ko‘rinishlarda bo‘ladi.

**Izoh.** Bu $X$ to‘plamda ko‘p hollarda metrika $\rho(x,y)=\max_i|x_i-y_i|$ ko‘rinishda ham aniqlanadi.

**3-Misol.** $l_\rho$ – fazo. $X$ to‘plam sifatida $x=(x_1,...,x_n,...)$ ko‘rinishdagi haqiqiy sonlardan tashkil topgan, $\sum_{i=1}^{\infty}|x_1|^\rho<+\infty$ shartni qanoatlantiruvchi barcha sonli ketma-ketliklar to‘plamini olaylik. Bu yerda $\rho\geq 1$ shartni qanoatlantiruvchi tayin son. Bu to‘plamda ikki $x$ va $y$ elementlar orasidagi masofa (metrika)ni $\rho(x,y)=\{\sum_{i=1}^{\infty}|x_1-y_1|^\rho\}^{\frac{1}{\rho}}$ ko‘rinishda aniqlaymiz, bu yerda $x_i\in R, \forall i=\overline{1,\infty}$. Tekshirib, ishonch hosil qilish mumkinki, bu $(X,\rho)$ metrik fazo bo‘ladi. Bu fazo $l_\rho$

ko‘rinishda belgilanadi. Agar $\rho = 2$ bo‘lsa, $l_2$ fazo ko‘p hollarda **Gilbert** fazosi deb yuritiladi.

**4-Misol.** Diskret metrik fazo. Faraz qilaylik, $X$ bo‘sh bo‘lmagan ixtiyoriy to‘plam bo‘lsin. $X$ to‘plamda ikki element: $x$ va $y$ orasidagi metrika (masofa)ni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, \; agar \;\; x = y; \\ 1, agar \;\; x \neq y. \end{cases}$$

Bu $\rho(x,y)$ metrika tashkil qiladi va diskret metrika deyiladi. $(X,\rho)$ fazo diskret metrik fazo deb yuritiladi.

Shuni aytish kerakki, bu ko‘rinishda fazoni metrikalashtirish doim ham mazmunli bo‘lavermaydi. Shu sababli doimo fazoni diskret bo‘lmagan metrika bilan ta’minlash mazmunliroq bo‘ladi va ko‘p o‘rganiladi.

**Izoh.** Agar $A$ to‘plam $(X,p)$ metrik fazoning ixtiyoriy bo‘sh bo‘lmagan qism to‘plami bo‘lsa, $A$ to‘plamning ixtiyoriy $x_1$ va $x_2$ elementlari uchun bu ikki element orasidagi masofani (metrikani) $\rho_A(x_1,x_2) = \rho(x_1,x_2)$ deb olsak, u holda $A$ qism to‘plamida metrika bo‘ladi. Bu metrika $\rho_A$ indutsirlangan metrika deb yuritiladi. $(A,\ \rho_A)$ metrik fazo esa, $(X,\rho)$ metrik fazoning qism fazosi deb yuritiladi. Agar $A$ va $B$ to‘plamlar $(X,\ \rho)$ ning bo‘sh bo‘lmagan qism to‘plamlari bo‘lsa, bu $A$ va $B$ to‘plamlar orasidagi masofa sifatida $\rho(A,B) = \inf\limits_{\substack{x\in A \\ y\in B}} \rho(x,y)$ son qabul qilingandir. Xususiy holda $\rho(x_0,A) = \inf\limits_{x\in A} \rho(x_0,x)$ soni $x_0$ nuqtadan $A$ to‘plamgacha bo‘lgan masofa deb ataladi. Xullas, $M$ to‘plamning diametri deb $diamM = \sup\limits_{x,y\in M} \rho(x,y)$ songa aytiladi. Bu yerda $M \subset X$ .

Nihoyat, agar $diamM < \infty$ o‘rinli bo‘lsa, $M$ to‘plam chegaralangan to‘plam deyiladi. Metrik fazolarga doir misollar ba’zi hollarda matematik analizga doir masalalarni hal qilishda yuzaga chiqmoqda.

**5-Misol.** $[0,1]$ kesmada uzluksiz bo‘lgan barcha funksiyalar to‘plamini olaylik. Bu to‘plam $C_{[0,1]}$ ko‘rinishda belgilanadi. Agar $x(t), y(t)$ funksiyalar $C_{[0,1]}$ ning ixtiyoriy uzluksiz funksiyalari bo‘lsa, ular orasidagi masofani $\rho(x,y) = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)|$ shaklda aniqlaymiz. Matematik analiz kurslaridan ham ma’lumki, bu $\rho$ funksiya $C_{[0,1]}$ da metrika tashkil qiladi. $C_{[0,1]}$ uzluksiz funksiyalar fazosi deb ataladi.

## 1.3 Topologik fazolarda o‘lcham

Umumiy topologiya fani o‘rganadigan asosiy va o‘rta geometrik-topologik invariantlar qatoriga topologik fazolar o‘lchami tushunchasi ham kiradi. Bu invariant to‘g‘ri chiziq, ko‘pburchak, fazo, ko‘pyoqlilar va hokazolarning elementar-geometrik o‘lchamlari tushunchasining o‘lchovlar sonini umumlashtiruvchi topologik invariantdir. Bu invariant $n = 1, 2, 3, \ldots$ hollarda arifmetik fazo $R^n$ qism to‘plamlarining topologik xarakteristikasini berish uchun ham juda muhimdir.

Masalan, to‘g‘ri chiziq va kesma, tekislik va kvadrat o‘lchovlari, fazoda kub o‘lchamlari biz tasavvur qilganimizdek, mos ravishda 1, 2 va 3 ga tengdir. Bu invariant yordamida ko‘p geometrik figuralarga, masalan, chiziq tushunchasiga umumiy ta’rif beriladi.

O‘lchamlar nazariyasida asosan (albatta, topologik invariant) uchta klassik $ind$, $Ind$ va $\dim$ o‘lcham funksiyalari mavjud bo‘lib, bu bo‘limda ular bilan tanishtirib o‘tiladi.

**Nol o‘lchamli topologik fazolar.**

**1-Ta’rif.** Agarda $p$ ning ixtiyoriy $U$ atrofi uchun shunday $V$ atrof topilsa va u $V \subset U$ hamda $F_r V = \emptyset$ shartni qanoatlantirsa, $X$ topologik fazo $p \in X$ nuqtada nol o‘lchamli fazo deyiladi (o‘lchami nol). Bunda $F_r V -$ $V$ ning barcha chegaraviy nuqtalaridan tashkil topgan to‘plam yoki $V$ ning chegarasi.

**2-Ta’rif.** Bo‘sh bo‘lmagan $X$ topologik fazo o‘zining har bir nuqtasida nol o‘lchamga ega bo‘lsa, nol o‘lchamli fazo deyiladi va $\dim X = O$ ko‘rinishda yoziladi.

Agar $X$ topologik fazo, agar har bir nuqtasi bo‘sh to‘plamdan iborat atrofga ega bo‘lsa, nol o‘lchamli bo‘lar ekan.

Ta’rifdan ko‘rinadiki, fazoning nol o‘lchamli yoki nuqtada nol o‘lchamli bo‘lishi xossasi topologik invariantdir.

Fazoning nol o‘lchamli bo‘lishini quyidagicha ta’riflash ham mumkin. Fazoning elementlari bir vaqtda ham ochiq, ham yopiq to‘plamlardan iborat bo‘lsa, fazo nol o‘lchamlidir.

**1-Misol.** Har bir chekli yoki sanoqli topolgik fazo nol o‘lchamlidir.

Deylik, $U$ ochiq to‘plam birorta $p \in X$ nuqtaning atrofi bo‘lsin. Bu holda $p$ nuqtaning shunday $O_r(p)$ atrofi(shar) topiladiki, $O_r(p) \subset U$ o‘rinlidir. $x_1, x_2, x_3,..$ lar $X$ ning nuqtalari bo‘lsin. Bu holda $r_i = \rho(x_i,\rho)$. Endi shunday $r^1$ son topiladiki, u $r^1$ va $r^1 \neq r_i$ uchun o‘rinli bo‘lishi zarur. U holda $O_{r^1}(p)$ shar atrofi uchun $O_{r^1}(p)$ $\subset U$ va $FrO_{r^1}(p) = \varnothing$.

Bu misoldan xususiy holda barcha natural, butun va ratsional sonlar to‘plami nol o‘lchamli ekanligi ko‘rinadi.

**1-Teorema.** Nol o‘lchamli fazoning bo‘sh bo‘lmagan har qanday qism to‘plami nol o‘lchamlidir.

***Isbot.*** Faraz qilaylik, $X_0 \subset X$, $X_0 \neq \varnothing$ va $x_0$ nuqta $X_0$ ning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. $U^1$ to‘plam $x_0$ ning ixtiyoriy atrofi bo‘lsin. $X_0$ nuqtaning $X$ fazoda shunday $U$ atrofi topiladiki, $U \cap X^1 = U^1$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. $X$ ning nol o‘lchamli ekanligidan, bir vaqtda ham ochiq, ham yopiq shunday $V$ to‘plam topiladiki, $x_0 \in V \subset U$. $V^1 = V \cap X_0$ desak, $x_0 \in V^1$ va $V^1$- ochiq va yopiqdir. $x_0 \in V^1 \subset U^1$. Demak, $X_0$ nol o‘lchamlidir.

**2-Misol.** Barcha irratsional sonlar to‘plami $J$ nol o‘lchamlidir.

Agar $U \subset J$ to‘plam $r$ irratsional sonning atrofi bo‘lsa, shunday $r_1$ va $r_2$ ratsional sonlar topiladiki, $r_1$ va $r_2$ orasida yotgan barcha irratsional sonlar to‘plami $J(r, r_1)$ uchun $J(r_1 r_2) \subset U$ bo‘ladi. Irratsional sonlar fazosi $J$ da $J(r_1 r_2)$ ochiq to‘plamlar va $F_r J(r_1 r_2) = \varnothing$. Chunki ixtiyoriy irratsional nuqta limit bo‘lib, u ham yana shu $J(r_1 r_2)$ ga tegishlidir.

Ikki nol o‘lchamli to‘plamlar birlashmasi nol o‘lchamli bo‘lishi shart emas. Chunki irratsional va ratsional sonlar birlashmasi nol o‘lchamli emas.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

**2-Teorema.** Sanoqli sondagi yopiq nol o‘lchamli to‘plamlar birlashmasi nol o‘lchamlidir.

### $n$ o‘lchamli topologik fazolar.

Bunda, agar aksi aytilmagan bo‘lsa, fazo sifatida sanoqli bazaga ega bo‘lgan metrik fazolarni ko‘rib chiqamiz. Nuqta atrofi deb esa, faqat shu nuqtani saqlovchi ochiq to‘plamlarni olamiz.

Fazoning nuqtadagi o‘lchamini induksiya bo‘yicha quyidagicha aniqlaymiz:

**3-Ta’rif.** Bo‘sh to‘plam va faqat bo‘sh to‘plam − 1 o‘lchamga ega.

Agar $x_0$ nuqta chegarasi $\leq n-1$ o‘lchamga ega bo‘lgan shunday turli kichik atroflarga ega bo‘lsa, topologik fazo $X$ o‘zining $x_0 \notin X$ nuqtasida o‘lchami $\leq n (n \geq 0)$ ga ega deyiladi.

Topologik fazo, agar o‘zining har bir nuqtasida $\leq n$ o‘lchamga ega bo‘lsa, uning o‘lchami $\leq n(n \geq 0)$ deyiladi va $\dim X \leq n$ ko‘rinishda yoziladi. Agar X fazo $\dim X \leq n$ bo‘lib, $\dim X > n-1$ bo‘lsa, $\dim X = n$ deyiladi.

Agar $\dim X \geq n$ uchun har qanday $n \in N$ o‘rinli bo‘lsa, $\dim X = \infty$ deyiladi.

Ravshanki, topologik akslantirishlarda fazoning strukturasi o‘zgarmaydi. Shu sababli nuqtaning atrofi va chegarasida o‘zgarish bo‘lmaydi.

Bu ta’rifdan quyidagi xulosalarni chiqarishimiz mumkin.

**1-Xulosa.** Ma’lum bo‘ladiki, fazoning $n$ o‘lchamli (nuqtada $n$ o‘lchamli) bo‘lish xususiyati topologik invariant ekan.

**2-Xulosa.** $\dim X \leq n$ shart $X$ fazoning shunday ochiq bazasi topilib, uning elementlari chegarasi $\leq n-1$ o‘lchamga ega bo‘lishi shartiga ekvivalentdir.

**3-Xulosa.** $n = 0$ bo‘lganda, 1- va 3-ta’riflar ustma-ust tushadi.

**3-Teorema.** Agar $\dim X = n$, bo‘lsa, $n$ chekli. U holda ixtiyoriy $m \leq n$ uchun $X$ fazo $m$ o‘lchamli qismga ega.

***Isbot.*** Ma’lumki, agar $\dim X > n-1$ bo‘lsa, u holda shunday $x_0 \in X$ nuqta va uning $U_0$ atrofi topiladiki, ixtiyoriy $V$ ochiq atrof uchun $x_0 \in V \subset U_0$ va $\dim F_r V \geq n-1$ shartlar o‘rinli. Ikkinchi tomondan, $\dim X \leq N$ bo‘lganligidan shunday $V_0$ ochiq to‘plam topiladiki, $x_0 \in V_0 \subset U_0$ bo‘lsin. Bu atrof uchun $\dim F_r V_0 \leq n-1$. Demak, $V_0$ to‘plamning chegarasi $X$ ning shunday qism to‘plami ekanki, uning o‘lchami $n-1$ ga teng ekan.

Mazkur 3-teorema faqat chekli o‘lchamli fazolar uchun o‘rinlidir.

**Misol.**

a) to‘g‘ri chiziq va interval 1 o‘lchamlidir;

b) ixtiyoriy ko‘pburchak, aylana, ellips, giperbola va parobola 1 o‘lchamga ega;

d) doira, Myobius yaprog‘i va sfera 2 o‘lchamlidir.

**4-Teorema.** Ixtiyoriy $X_0 \subset X$ uchun $\dim X_0 \le \dim X$ o‘rinlidir.

***Isbot.*** Induksiya metodi bilan isbotlaymiz: $n=-1$ bo‘lganda teorema o‘rinli.

$n-1$ uchun teorema sharti o‘rinli bo‘lsin. $X$ fazo uchun $\dim X \le n$ o‘rinli, $X_0$ qism fazo va $x_0 \in X_0$ ixtiyoriy nuqtasi bo‘lib, $U_0$ to‘plamining $X_0$dagi atrofi bo‘lsin. U holda $X_0$ nuqtaning $X$ da $U$ atrofi topiladiki, u uchun $U_0 = U \cap X_0$ o‘rinli. $\dim X \le n$ bo‘lganidan, $X$ fazoda shunday $V$ ochiq to‘plam topiladiki, u uchun $x_0 \in V \subset U$ ,$\dim F_r V \le n-1$ shartlar o‘rinlidir. $V_0 = V \cap X_0$ desak, u holda $V_0$ to‘plam $X_0$ da ochiq to‘plam va $x_0 \in V_0 \subset U_0$ bo‘ladi. Endi $B = F_r V$ va $B_0 = F_r V_0$ deb belgilasak, bu yerda $B = \bar{V} \setminus V, B_0 = (\bar{V}_0 \setminus V) \cap X_0$. Bu holda, ravshanki, $B_0 \subset B \cap X_0$ Induksiya shartiga ko‘ra, $\dim B_0 \le n-1$.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

**5-Teorema.** $X$ topologik fazoning ixtiyoriy ikki $A$ va $B$ to‘plamlari uchun quyidagi tengsizlik o‘rinlidir:

$$\dim(A \cup B) \le \dim A + \dim B + 1$$

**6-Teorema.** $X$ va $Y$ topologik fazolar uchun $\dim(X \times Y) \le \dim X + \dim Y$ o‘rinlidir.

***Isbot.*** Induksiya metodi bilan isbotlaymiz. Agar $\dim X = -1$ va $\dim Y = -1$ bo‘lsa, teorema o‘rinli.

Faraz qilaylik, $\dim X = m,\ \dim Y = n$ bo‘lsin. Induksiyaga ko‘ra, quyidagi hollar o‘rinli:

$\dim X \le m$, $\dim Y \le n-1$ (1)

$\dim X \le m-1$, $\dim Y \le n$ (2)

Har bir $z=(x,y)\in X\times Y$ nuqta $X\times Y$ topologik fazoda yetarli kichik $U\times V$ ko‘rinishdagi atrofga ega va bu yerda $U$ to‘plam $x$ ning $X$ fazodagi, $V$ esa, $y$ ning $Y$ dagi atroflari bo‘lib, ular uchun $\dim F_r U \le m-1$, $\dim F_r V \le n-1$ lar o‘rinli bo‘ladi.

Dekart ko‘paytma va chegaraviy to‘plamlarning xossalariga ko‘ra, ular uchun $F_r(U\times V)=(\bar{U}\times F_r)\cup(F_r U\times\bar{V})$ tenglik o‘rinli. Bu birlashmada $\bar{U}\times F_r V$ va $F_r U\times\bar{V}$ to‘plamlar yopiq to‘plamlardir. Induktivlik shartga hamda (1),(2) shartlarga ko‘ra, qo‘shiluvchilar o‘lchami $\dim F_r(X\times Y)\le m+n-1$ ga teng. Demak, $\dim F_r(X\times Y)\le m+n-1$. Teorema isbotlandi.

U holda $\dim(X\times Y)\le m+n$ bo‘ladi.

## Fazoning *ind, Ind* va *dim* o‘lchamlari hamda ularning asosiy xossalari.

Yuqorida sanoqli bazaga ega bo‘lgan metrik fazolarning *dim* ko‘rinishdagi o‘lchami bilan tanishgan edik. Lekin fazolarning *ind, Ind* o‘lchamlari ham mavjud. Bu o‘lchamlar sanoqli bazaga ega bo‘lmagan metrik fazolar sinfidan tashqarida teng emas. Ya’ni, metrik bo‘lmagan X topologik fazo uchun $\dim X \ne indX \ne IndX$ tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. Lekin sanoqli bazali yoki separabel metrik fazolar uchun bu uchala o‘lcham ekvivalentdir.

Faraz qilaylik, $f: X\to Y$ funksiya biyektiv, ya’ni teskari funksiya $f^{-1}: Y\to X$ mavjud bo‘lsin. Bunda, agar har ikkala to‘g‘ri $f: X\to Y$ va teskari $f^{-1}: Y\to X$ funksiyalar uzluksiz bo‘lsa, u holda $X$ va $Y$ topologik fazolar **gomeomorf fazolar** deyiladi. Bu yerdagi $f$ ga esa **gomeomorfizm (yoki gomeomorf akslantirish)** deyiladi. Ravshanki, gomeomorf akslantirishlar kompozitsiyasi yana gomeomorf akslantirish bo‘ladi.

**Misollar:** 1. $R^n$ fazo undagi birlik ochiq shar $B_1(0)$ ga gomeomorfdir. Haqiqatdan ham, $f: R^n \to B_1(0)$ akslantirishni ushbu

$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ $\quad (x \in R^n,\ f(x) \in B_1(0))$ formula bilan aniqlaylik. Teskari akslantirishni topish uchun berilgan $y \in B_1(0)$ ga ko‘ra $y = f(x)$ tenglamani $x$ ga nisbatan yechamiz:

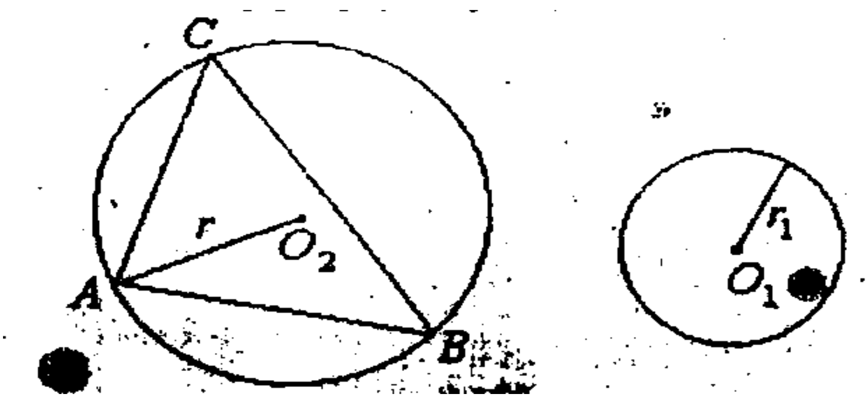
$$y = \frac{x}{1+|x|} \Rightarrow y(1+|x|) = x \Rightarrow |y| \cdot \big|1+|x|\big| = |x| \Rightarrow |x| = \frac{|y|}{1-|y|}$$

Buni $y(1+|x|) = x$ tenglikka qo‘yib $x$ ni $y$ orqali ifodalaymiz. Natijada $x = \frac{y}{1-|y|}$, ya’ni $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$ $\big(y \in B_1(0)\big)$ hosil bo‘ladi. Bu yerdagi $f: R^n \to B_1(0)$ va $f^{-1}: B_1(0) \to R^n$ funksiyalar uzluksiz, ya’ni aniqlangan $f$ funksiya $R^n$ va $B_1(0)$ orasida gomeomorf akslantirishni o‘rnatadi.

2. $R^n$ tekislikda ixtiyoriy uchburchak ixtiyoriy aylanaga gomeomorfdir. Haqiqatdan ham, $ABC$ – berilgan uchburchak, $S$- berilgan aylana bo‘lsin. Uning radiusini $r_1$, markazini $O_1$ deylik.

$ABC$ uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazi $O_2$ nuqtada va $AO_2=r$ bo‘lsin. Ravshanki, $O_1$ markazli radiuslari $r_1$ va $r$ bo‘lgan $S(O_1, r_1)$ va $S(O_1, r)$ aylanalar gomeomorf (Gomeomorfizmni $O_1$ markazli $\lambda = \frac{r}{r_1}$ koeffitsientli gomotetiya beradi). $S(O_1, r)$ aylanani parallel ko‘chirib, $S(O_2, r)$ aylanani hosil qilamiz. Ravshanki, $S(O_1, r)$ aylana $S(O_2, r)$ aylanaga gomeomorf.

Endi $ABC$ uchburchakni $O_2$ markazdan $S(O_1, r)$ aylanaga proeksiyalab $ABC$ uchburchak va $S(O_2, r)$ larning gomeomorf ekanligini ko‘ramiz. Gomeomorf akslantirishlar kompozitsiyasi gomeomorf bo‘lgani uchun $S(O_2, r_1)$ aylana $ABC$ uchburchakka gomeomorfdir. (1-rasm.)




1-rasm. $ABC$ uchburchak $O_1$ markazli va $r_1$ radiusli aylanaga gomeomorf.

X regulyar fazo va n- manfiy bo‘lmagan butun son berilgan bo‘lsin.

**1-Ta’rif.**

i1) $indX = -1$ bo‘ladi faqat va faqat shu holdaki, $X = \varnothing$ bo‘lsa;

i2)agar ixtiyoriy $x \in X$ va uning ixtiyoriy atrofi $V$ uchun shunday ochiq to‘plam $U \subset X$ topilsa va $x \in U \subset V$ bo‘lib hamda $indF_rU \le n-1$ o‘rinli bo‘lsa, $indX \le n$;

i3)agar $indX \le n$ tengsizlik o‘rinli bo‘lib va $indX \le n-1$ tengsizlik bajarilmasa, u holda $indX = n$ bo‘ladi;

i4)agar $ind \le n$ tengsizlik hech bir $n$ uchun o‘rinli bo‘lmasa, u holda $indX = \infty$ bo‘ladi.

Bu i1)–i4) shartlar har bir $X$ regulyar fazoga $indX$ manfiy bo‘lmagan butun sonni yoki 1 yoxud cheksiz son $\infty$ mos qo‘ymoqda. Boshqacha aytganda, $ind$ funksiya barcha regulyar fazolar oilasini $\{-1,0,1,2,...,n....+\infty\}$ to‘plamga akslantiradi. Yana shuni ta’kidlash lozimki, o‘lchami bir xil bo‘lgan fazolar topologik ekvivalentdir. $indX$ son regulyar fazoning Menger-Urison o‘lchami yoki kichik induktiv o‘lchami deyiladi. Osongina tekshirib ko‘rish mumkinki, agar $X$ va $Y$ regulyar fazolar gomeomorf bo‘lsa, u holda $indX = indY$ o‘rinlidir.

**2-Ta’rif.** $X$ topologik fazoning $E$ to‘plami uning $P \subset X$ va $Q \subset X$ to‘plamlarini ayiradi (yoki ajratadi), deyiladi, agar $X \setminus E = H_1 \cup H_2$ bo‘lib, $H_1, H_2$ dizyunkt va $X \setminus E$ da ochiq va $P \subseteq H_1; Q \subseteq H_2$ bo‘lsa**.**

$X$ topologik fazoning regulyar bo‘lganligi tufayli ta’rifdagi i2) shartning $U$ to‘plamini kuchliroq $\overline{U} \subset V$ shart bilan almashtirsak ham bo‘ladi. Bu holda $indX \le n \ge 0$ tengsizlik ixtiyoriy $x \in X$ nuqta bilan bu nuqtani o‘z ichiga olgan ixtiyoriy $F$ yopiq to‘plamni o‘lchami $indF \le n-1$ bo‘lgan to‘plam orqali ajratish mumkin bo‘lsa.

Menger-Urison o‘lchami ta’rifidan bevosita aytishimiz mumkin: agar $X$ fazoning shunday $\beta$ bazasi mavjud bo‘lsa va $indX \le n$ bu fazoning ixtiyoriy $U \in \beta$ elementi uchun $F_2 U \le n-1$ o‘rinli bo‘lsa.

Topologik fazoning regulyarligi nasliy xossa bo‘lganligi tufayli, agar $X$ fazoda *ind* o‘lcham aniqlangan bo‘lsa, u holda uning ixtiyoriy qism fazosi $M \le X$ da ham $indX$ o‘lcham aniqlangan bo‘ladi.

**1-Teorema.** Regulyar topologik fazoning ixtiyoriy $M$ qism fazosi uchun $indM \le indX$ o‘rinli.

***Isbot.*** Agar $indX = 1$ yoki $indX = \infty$ bo‘lsa, teorema shartidagi tengsizlik o‘rinlidir. Yuqoridagi $indM \le indX$ tengsizlik $indX \le n-1$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $X$ fazolar uchun isbotlangan bo‘lsin. Endi $X$ regulyar fazo va $indX = n$ bo‘lsin va ixtiyoriy $x \in M$ nuqtani olaylik. $V$ to‘plam $x$ nuqtanng $M$ dagi ixtiyoriy atrofi bo‘lsin. $X$ da $V_1$ ixtiyoriy ochiq to‘plam olamiz, u $V = V_1 \cap X$ shartni qanoatlantirsin. $indX \le n$ bo‘lganligi sababli shunday $U_1 \subset X$ ochiq to‘plam topiladiki, bu to‘plam uchun

$x \in U_1 \subset V_1$ va $indFrU_1 \le n-1$ (1)

$U = M \cap U_1$ to‘plam $x$ nuqtaning $M$ atrofi bo‘ladi, uning $M$ dagi chegarasi $FrU = M \cap \overline{M \cap U_1} \cap \overline{M \setminus U_1}$. $U_1$ ning $X$ dagi chegarasining qism fazosidir.

Binobarin, (1) va induktiv shartga ko‘ra, $indM \le n$. Teorema isbotlandi.

Endi $X$ normal fazo va $n$ manfiy bo‘lmagan butun son bo‘lsin.

**3-Ta’rif.**

I1) $IndX = -1$ faqat va faqat, $X = \varnothing$ bo‘lsa;

I2) agar ixtiyoriy $V \subset X$ atrofi uchun shunday $U \subset X$ ochiq to‘plam topilmasa va u uchun $A \subset U \subset V$ va $IndFrU \le n-1$ o‘rinli bo‘lsa; $IndX \le n$ bo‘ladi.

I3) agar $IndX \le n$ bo‘lsa va $IndX \le n-1$ tengsizlik bajarilmasi $IndX = n$ bo‘ladi.

I4) agar $IndX \le n$ tengsizlik hech bir $n$ uchun o‘rinli bo‘lmasa $IndX = \infty$ bo‘ladi.

I1)−I4) shartlarhar bir normal $X$ fazo uchun $IndX$ sonni mos keltirmoqda, bu $IndX$ yoki $\ge / -1$ butun son yoki “cheksiz katta” $\infty$ sondan iboratdir. $IndX$ son $X$ normal fazoning Brauer-Chex o‘lchami yoki katta induktiv o‘lchami deb yuritiladi. Agar $X$ va $Y$ fazolar gomeomorf bo‘lsa, u holda $IndX = IndY$ ekanligi osongina tekshiriladi.

Bu ta’rifdan hamda $X$ normal fazo bo‘lganligi tufayli I2) shartdagi $U$ to‘plamni yanada kuchliroq shart $\overline{U} \subset V$ bilan almashtirsa bo‘ladi. Bu holda I2) shart quyidagi ko‘rinishga keladi:

$IndX \le n$ tengsizlik shuni anglatadi: agar $X$ fazoda ixtiyoriy ikki yopiq kesishmaydigan $A \subset X$ va $B \subset X$ to‘plamlar chegarasining o‘lchami $\le n-1$ dan iborat bo‘lgan to‘plam bilan ajratilgan (yoki ayirilgan) bo‘lsa.

Bu teorema kichik va katta induktiv o‘lchamlar deb atalishini oqlaydi.

**2-Teorema.** Agar $X$ normal fazo bo‘lsa, u holda $indX \le IndX$.

Ma’lumki, normal fazolar nasliy xossaga ega emas. Quyidagi teorema ham 1-teoremaga o‘xshash isbotlanadi.

**3-Teorema.** Normal fazoning ixtiyoriy $M \subset X$ yopiq qism fazosi uchun $IndM \leq IndX$ tengsizlik o‘rinlidir.

Bo‘sh bo‘lmagan $X$ to‘plam berilgan bo‘lsin, $A = \{A_\alpha : A_\alpha \subset X, \alpha \in J\}$ qism to‘plamlar sistemasi karrasi deb shunday eng katta butun $n$ songa aytiladiki, $A$ sistemaning $n+1$ ta elementi kesishmasi bo‘sh bo‘lmasa yoki “cheksiz son” $\infty$ deyiladi, agar bunday butun son mavjud bo‘lmasa. Demak, agar $A$ sistemaning tartibi $n$ ga teng bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $n+2$ ta har xil $S_1, S_2, \ldots S_{n+2} \in J$ indeks uchun $A_{s1} \cap A_{s1} \cap \ldots \cap A_{s_{n+2}} = \varnothing$ o‘rinli. $A$ sistemaning karrasi $ordA$ ko‘rinishida belgilanadi.

**4-Ta’rif.** Agar shunday $f : X \to [0,1]$ funksiya mavjud bo‘lib, uning uchun $f^{-1}(0) = A$ bajarilsa, $X$ topologik fazoning $A$ qism to‘plami funksional

yopiq to‘plam deyiladi.

$X$ fazoning funksional yopiq to‘plamlarining to‘ldiruvchisi funksional ochiq to‘plam deyiladi. Ta’rifdan ma’lum bo‘ladiki, funksional yopiq to‘plam yopiq to‘plamdir. Shu sababli funksional ochiq to‘plam ochiq to‘plam bo‘ladi.

Endi $X$ Tixonov fazosi, $n$ butun son va $n \geq -1$ bo‘lsin.

**5-Ta’rif.** d1) agar $X$ fazoning ixtiyoriy funksional ochiq chekli qoplamasiga karrasi $\leq n$ bo‘lgan funksional ochiq chekli qoplama chizish mumkin bo‘lsa; $\dim X \leq n$ bo‘ladi.

d2) agar $\dim X \leq n$ o‘rinli, lekin $\dim X \leq n-1$ o‘rinli bo‘lmasa; $\dim X = n$ bo‘ladi.

d3) agar $\dim X \leq n$ tengsizlik barcha $n$ lar uchun bajarilmasa, $\dim X = \infty$; bo‘ladi.

d1)−d3) shartlar har bir Tixonov fazosi $X$ ga $\dim X$ sonni mos keltirmoqda. Bu $\dim X$ son yoki butun son $\geq 1$ yoxud “cheksiz son” $\infty$ bo‘lar ekan. $\dim X$ son $X$ Tixonov fazosining Chex-Lebeg o‘lchami yoki fazoning qoplama ma’nosida o‘lchami deb yuritiladi. Agar $X$ va $Y$ fazolar gomeomorf bo‘lsa, $\dim X = \dim Y$ o‘rinli bo‘ladi.

Fazoning qoplama ma’nosidagi ta’rifidan bevosita aytish mumkinki, $X = \varnothing$ bo‘lgan taqdirdagina $\dim X \le -1$ bo‘ladi.

Tixonov fazolari nasliy xossaga ega bo‘lgani uchun, agar bunday $X$ da *dim* aniqlangan bo‘lsa, uning ixtiyoriy qism fazosida ham *dim* aniqlangandir.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz. Bu teorema ko‘p hollarda ta’rif sifatida ham qabul qilinadi.

**4-Teorema.** Har bir $X$ normal fazo uchun quyidagi ikki shart ekvivalentdir:

1) $\dim X \le n$;

2) $X$ fazoning ixtiyoriy chekli ochiq qoplamasiga karrasi $\le n$ bo‘lgan chekli ochiq qoplama chizish mumkin.

Agar $X$ metrik hamda sanoqli bazaga ega bo‘lgan fazo bo‘lsa, “Nol o‘lchamli topologik fazo”da keltirilgan o‘lcham $\dim$, “n o‘lchamli topologik fazo”da keltirilgan o‘lcham $\dim$ va “Fazoning *ind, Ind va dim* o‘lchamlari” da keltirilgan o‘lchamlar $ind$, $Ind$ va $\dim$ lar o‘zaro ekvivalentdir. Ya’ni, sanoqli bazaga ega bo‘lgan metrik $X$ fazo uchun quyidagi tenglik doimo o‘rinli:

$$\dim X = indX = IndX$$

# II bob. Ko‘pxillik va uning xossalari

## 2.1 Ko‘pxillik va uning xossalari

Sirt tushunchasi Evklid tomonidan geometriya faniga olib kirilganida sirtga: “Sirt shuldirki, u uzunlikka va enga ega”, “Sirtning chegaralari chiziqlardir”, “Tekislik shunday sirtki, u o‘zidagi barcha to‘g‘ri chiziqlarga nisbatan bir xil joylashgandir” deya ta’rif berilgan va qariyb ikki ming yil davomida turli sirtlar o‘rganib kelingan. Keyinchalik sirtlar elementar va sodda sirtlarga ajratib tadqiq qilingan. Masalan, kvadrat, yopiq yarim tekislik va tekislik eng sodda sirt deb atalgan. Eng sodda sirtlar vositasida elementar sirt kiritilgan. Elementar sirt deb sodda sirtlarning birortasiga gomeomorf bo‘lgan figuraga aytilgan. Masalan, elliptik va giperbolik paraboloidlar va parabolik silindrlar elementar sirtga misol bo‘la oladi, chunki ularning har biri tekislikning bir qismiga gomeomorfdir.

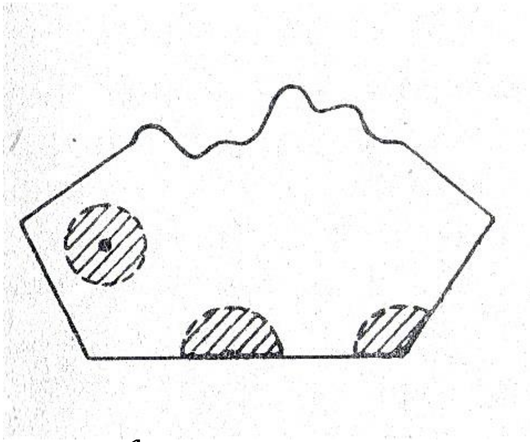
Yarim sferani chegarasi bilan birga olsak, u ham elementar sirtlarga misol bo‘la oladi, chunki u yopiq yarim tekislikka gomeomorfdir. Evklid fazosi $R^3$ dagi chekli yoki sanoqli sondagi elementar sirtlar bilan qoplangan to‘plam (figura) sirt deb ataladi. Boshqacha aytganda, Evklid fazosi $R^3$ dagi birorta figurani chekli yoki sanoqli sondagi elementar sirtlar bilan qoplash mumkin bo‘lsa, unga sirt deyiladi. Sfera, ellipsoid, elliptik silindr, bir pallali va ikki pallali giperboloidlarni olsak, ular sirtga misol bo‘la oladi. Chunki sferani ikkita yarim sfera bilan qoplash mumkin: ellipsoid esa, sferaga gomeomorfdir; elliptik silindrni chekli sondagi silindrik poloskalar (yo‘lakchalar) orqali qoplash mumkin. Ularning har biri esa, tekislikka gomeomorfdir; bir pallali giperboloid ikkita yo‘lakchadan iborat bo‘lib, ularning har biri tekislikka gomeomorfdir. Oldingi boblarning birida biz yelimlash amali yoki faktor fazo va faktor akslantirish tushunchasi aniqlangandan keyin yelimlash orqali $\mathrm{R}^3$ Evklid fazoda ko‘pgina sirtlarni ko‘rishimizga to‘g‘ri kelgan. Shu sirtlarning har birini topologik sirt sifatida qarab, ixtiyoriy biror o‘lchamga ega bo‘lgan sirtni olsak, bunday sirtlar tasnifini bera olamizmi yoki yo‘qmi degan savollarga javob izlashga urinamiz.

Qattiq jismlar dengiz to‘lqinlarining bir ondagi sirti yoki kundalik hayotda ishlatiladigan piyola, gantel yoki ikki tutqichli jismlar sirtlarini olsak, ular turli-tumandir. Ushbu sirtlarning umumiy xususiyatlarini aniqlab, shunga ko‘ra ularni sinflarga ajratish mumkin bo‘ladi.

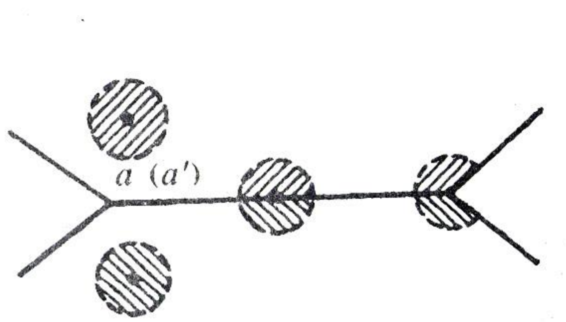
**Ikki o‘lchamli sirtlarni yelimlash.**

Quyida tekis figurani yelimlab yopishtirish amali natijasida hosil bo‘ladigan faktor fazosini to‘liq o‘rganamiz. $R^2$ tekislikda $P$ ko‘pburchak olamiz va unda indutsirlangan metrikani ko‘rib chiqamiz. Ma’lumki, har bir $x \in P$ nuqtaning doirasimon atrofi mavjud. Bu atrof $P$ ko‘pburchak bilan markazi $x$ nuqtada bo‘lgan doira kesishmasidan iborat bo‘ladi. Agar $x$ nuqta $P$ ko‘pburchakning chegarasiga tegishli bo‘lmasa, $x$ ning yetarli kichik doirasimon atrofi ochiq doiralardir. Agar $x$ nuqta $P$ ko‘pburchak chegarasiga tegishli bo‘lsa, $y$

holda atrofi ochiq doiraning chegaralovchi radiuslari bilan olingan sektorlardan yoki segmentlardan iborat bo‘ladi **(1-rasm).**



1-rasm

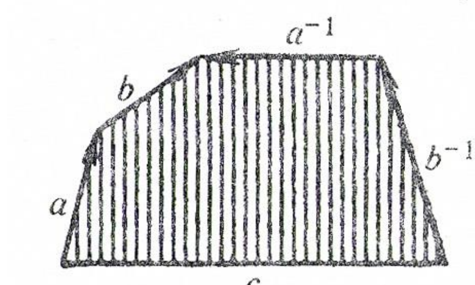



2-rasm

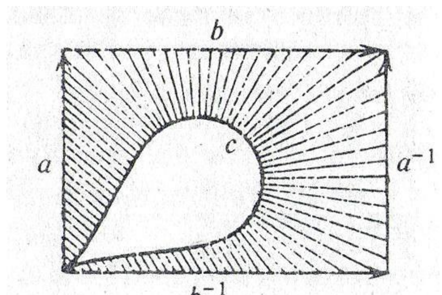
Ikkita $P$ va $P^1$ ko‘pburchaklar berilgan bo‘lsin va ularning $a$ va $a^1$ tomonlarining uzunligi teng bo‘lsin. Ko‘pburchaklarni $a$ va $a^1$ tomonlari bo‘yicha yelimlab yopishtiramiz. Bu bilan $\lambda : a \to a^1$ gomeomorfizmda obraz va proobrazni (bu ikki nuqtani bir nuqta deb qabul qilamiz) ekvivalent deb olamiz. $R$ ekvivalentlik munosabatida $(P \cup P^1)/R$ faktor fazo topologiyasi: agar $x$ va $x^1$ nuqtalar ko‘pburchaklarning ichki nuqtalari bo‘lsa, ularning ochiq atrofi bu nuqtani o‘z ichiga olgan doiradan iborat bo‘ladi; agar $x$ va $x^1$ nuqtalar ko‘pburchaklarning chegarasiga tegishli, ya’ni yelimlangan ekvivalent $x \in a$ va $x^1 \in a^1$ nuqtalardan iborat bo‘lsa, bu ularning atroflari nuqtalarni o‘z ichiga olgan yelimlanuvchi sektorlardan iborat bo‘ladi. 2-rasmda ko‘pburchaklarning $a$ va $a^1$ tomonlarini yelimlash chizmasi keltirilgan. Shunga o‘xshab, ko‘pburchakning ikki tomonini yelimlab yopishtirish mumkin bo‘ladi.

Yuqorida yelimlash natijasida hosil bo‘lgan sirtning faktor fazodagi topologiyasining bazasi elementi(yoki ochiq to‘plami) qanday bo‘lishini ko‘rsatdik.

Endi sirtlarni yelimlashga o‘taylik.



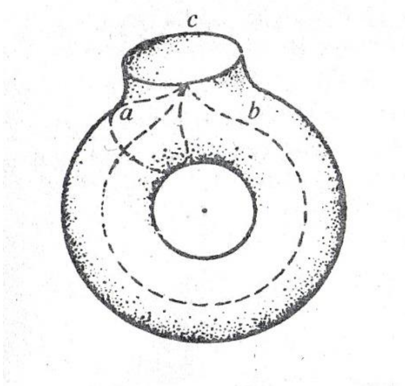


3-rasm 4-rasm

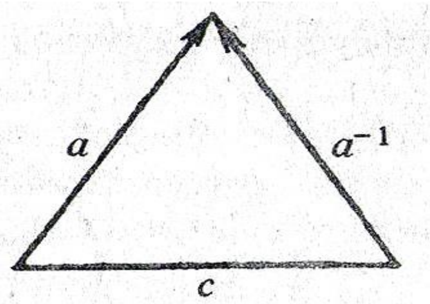
3-rasmda berilgan beshburchakning bir xil harflar bilan belgilangan tomonlarini yelimlab yopishtiramiz. Yelimlash tartibi quyidagicha: mos, ya'ni bir xil harflar bilan belgilangan tomonlar yo'nalishi strelka bilan ko'rsatilgan bo'lib, yo'naltirilgan mos kesmalarning boshi bilan boshi, oxiri bilan oxiri yelimlanadi. Harflar tepasidagi -1 ishorasi o'sha tomonlarning yo'nalishi mos tushmasligini bildiradi, ya'ni ko'pburchakning cheti bo'ylab soat mili yo'nalishiga nisbatan strelka (yo'nalish) teskaridir. Yelimlash tartibini bayon qilishda ko'pburchak tomonlarini aylanib o'tish soat mili bo'ylab olinsa, qulayroq bo'ladi. Masalan, yuqoridagi beshburchakda yelimlash jarayoni a tomondan boshlansa, uning sxemasi $aba^{-1}$, $b^{-1}c$ ko'rinishda bo'ladi. Bu ko'rinishdagi yelimlash sxemasi ko'pburchakning yelimlanadigan tomonlarini to'la aniqlaydi va yelimlash qonuniyatini qanoatlantiradi. Shuni ta'kidlash kerakki, yelimlash jarayonida yelimlanadigan tomonlarning uzunliklari bir xil deb olinadi.

Ishonch hosil qilish mumkinki, bu faktor fazoni boshqa usul, ya'ni topologik ekvivalentlik usuli orqali ham yasashimiz mumkin (4-rasm): bu yerda faktor fazo teshigining cheti c chiziqdan iborat bo'lgan tor (ballon, kamera)dir. 5-rasmda shtrixlangan chiziqlar orqali yelimlash $aa^{-1}$ va $bb^{-1}$ chiziqlari belgilangan. Teshikli tor dasta (ruchka) deb ataladi.

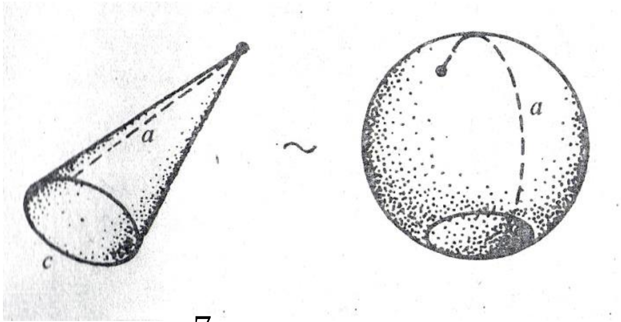


5-rasm

**1-Misol.** Ixtiyoriy uchburchak olamiz va uning qo‘shni tomonlarini yelimlashni ko‘rib chiqaylik. Agar oriyentatsiya teskari bo‘lsa, u holda yelimlash sxemasi $aa^{-1}c$ ko‘rinishida (6-rasm) bo‘ladi. Bu holda faktor fazo topologik teshikli sferaga ekvivalentdir (7-rasm).

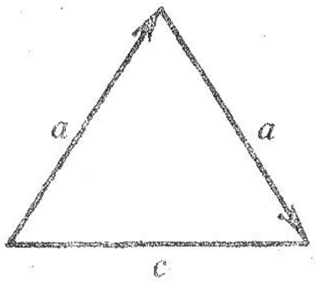



6-rasm

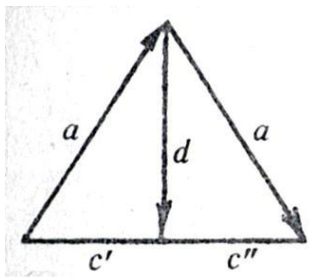



7-rasm

**2-Misol.** Endi bir xil oriyentatsiyali uchburchakning qo‘sh tomonlarini yelimlashni sxema bo‘yicha (7-rasm) ko‘rib chiqaylik. Uchburchakni bir umumiy d balandligi bilan ko‘rsatilgan oriyentatsiyali ikkita to‘g‘ri burchakli uchburchak deb olaylik (8-rasm). Bunday holatda uchburchaklarni yelimlash tartibi quyidagicha bo‘ladi. Birinchi navbatda uchburchaklarning gipotenuzalari yelimlanadi, so‘ngra katetlari $d$ yelimlanadi (9-rasm). Natijada, Myobius yaprog‘i hosil bo‘ladi. Shuni ta’kidlash kerakki, oxirgi hosil bo‘lgan faktor fazo birinchi keltirilgan (7-rasm) fazoga gomeomorfdir.

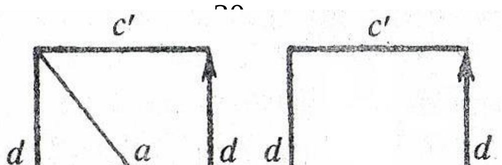



8-rasm



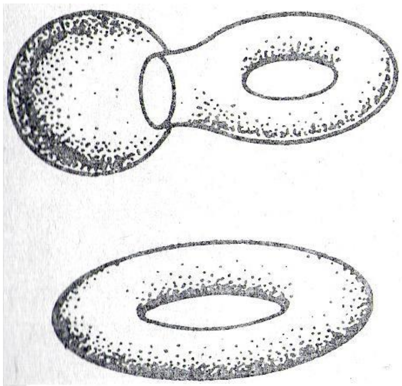

9-rasm

**3-Misol.** $S^2$ sferadan halqacha kesib olamiz yo bo‘lmasa teshikli sferaga erkin chetki $c$ chizig‘i bo‘ylab dasta yoki Myobius yaprog‘ini yelimlab yopishtiramiz. Birinchi holda torga ega bo‘lamiz (10- rasm).



10-rasm

Ikkinchi holda esa, proektiv tekislik $RP^2$ ga ega bo‘lamiz. Haqiqatan ham, proektiv tekislik topologik (10-rasm) faktor fazoga ekvivalentdir. Buning uchun yuqori “qopqoqga” cheti $c$ chiziqdan iborat Myobius varag‘i ekanligini ko‘rsatish yetarlidir. Bu figurani ichki aylananing diametrial qarama-qarshi nuqtalari aynanlashtirilgan (yelimlangan, ya’ni diametrial qarama-qarshi ikki nuqta bir nuqta deb hisoblangan) tekis halqa sifatida tasavvur qilib, Myobius varag‘iga olib keluvchi topologik almashtirishlar (11-rasm) bajariladi. Yuqoridagi yasash (sirtlarni ko‘rish) jarayonini quyidagi ikki yo‘nalishda rivojlantirish mumkin:



11-rasm

1) sferada $R$ dona halqacha qirqib, unga $R$ dona dasta yelimlaymiz;

2) sferada $q$ dona halqacha qirqib, unga $q$ dona Myobius varag‘ini yelimlab yopishtiramiz.

Shunday qilib, biz ikki qator quyidagi sirtlar ketma-ketligiga ega bo‘lamiz:

$$\left.\begin{matrix} M_0, M_1, \dots, M_r \\ N_0, N_1, \dots, N_q \end{matrix}\right\} \qquad (1)$$

Demak $M_0$ va $N_0$ sirtlar $S^2$ sferadir. Hosil qilingan bu sirtlarning ba'zi geometrik xossalarini o'rganamiz va talqin qilamiz. Birinchi navbatda, bu sirtlar chekli sondagi qavariq ko'pburchaklarning tomonlarini yelimlash va keyingi topologik almashtirishlar natijasida hosil qilinganligini anglab olish kerak.

$M_r$ va $N_q$ sirtlar orasida shunday bir bog'liqlik borki, ular yagona bo'lakdan iborat, ya'ni bu sirtlar o'zaro kesishmaydigan ko'pburchaklar guruhiga ajralmaydi. Chunki, bu sirtlarning qurilish jarayoniga e'tibor bersak, ko'pburchakning ikki uchini bog'lovchi tomoni bo'yicha yelimlashda uchlarini tutashtiruvchi uzluksiz yo'l doim mavjud ekanligini ko'ramiz. Bu sirtlar chetga ega emas, chunki yelimlashda qatnashayotgan ko'pburchakning ixtiyoriy chegaraviy tomoni faqat bitta boshqa tomon bilan yelimlanadi. Bundan kelib chiqadiki, bu sirtlarning ixtiyoriy nuqtasi ochiq doiraga gomeomorf atrofga ega. Shu sababli bunday sirtlar (fazolar) ikki o'lchamli ko'pxillik deyiladi.

Demak $M_r$ sirt oriyentirlangan va uni $R^3$ fazoga o'zaro kesishmagan ikki tomonli sirt sifatida joylashtirish mumkin.

$N_q$ sirt esa, $M_r$ sirtning aksi – oriyentirlanmagan Myobius yaprog'iga o'xshab bir tomonli va uni $R^3$ fazoga o'zaro kesishgan sirt sifatida joylashtirish mumkin emas. Lekin uni $R^4$ fazoga joylashtirish mumkin.

Sirtning oriyentirlanganligi topologik xossa bo'lganligi tufayli $M_r$ va $M_q$ sirtlar ($q \geq 1$) hech qachon gomeomorf bo'la olmaydi.

Har xil ikki $M_r$ va $M_q$ sirtlar (yoki $N_p$ va $M_q$ sirtlar) (bunda $p \neq q$) ham hech qachon o'zaro gomeomorf bo'la olmaydi (bu ta'kid qurish jarayonidan kelib chiqadi).

Demak, (1) ro'yxat yopiq sirtlarning to'la topologik tasnifidan iborat bo'lar ekan.

Agar sferaga $R$ ta dasta va $q \geq 1$ ta Myobius yaprog‘i ($p + q$ ta teshik teshib) yelimlasak, hosil bo‘lgan sirt sferaga, $2r + q$ ta Myobius yaprog‘i yelimlangan sirtga topologik ekvivalentdir.

## 2.2 Topologik ko‘pxilliklar va uning xossalari

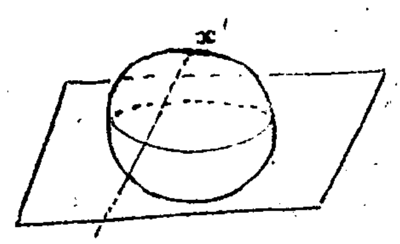
$X-$topologik fazo, $x \epsilon X$ bo‘lsa, $x$ tegishli bo‘lgan $X$ fazoning ixtiyoriy ochiq qism to‘plami $x$ ning atrofi deyiladi. Agar $X$ ning ixtiyoriy ochiq qism to‘plamini birorta $B$ oilaga tegishli to‘plamlar yig‘indisi sifatida yozish mumkin bo‘lsa, $B$ oila $X$ topologik fazo uchun baza deyiladi. Tabiiyki $B$ oilaga tegishli to‘plamlar ham $X$ ning ochiq qism to‘plamlaridan iboratdir. $B$ oila elementlari sanoqli sonda bo‘lsa, ya’ni ularni nomerlab chiqish mumkin bo‘lsa, u $X$ uchun sanoqli baza deyiladi. Agar $X$ topologik fazoning o‘zaro farqli ixtiyoriy ikki nuqtasi kesishmaydigan atroflarga ega bo‘lsa, bu fazoda Xausdorf aksiomasi bajarilgan deyiladi. Biz quyida topologik fazo deganda sanoqli bazaga ega bo‘lgan va Xausdorf aksiomasi bajarilgan topologik fazoni nazarda tutamiz.

$X, Y$ lar topologik fazolar bo‘lib, $f{:}X \rightarrow Y$ akslantirish berilgan bo‘lsin. Agar $f$ ga teskari akslantirish $f^{-1}$ mavjud bo‘lib $f$ va $f^{-1}$ uzluksiz akslantirishlar bo‘lsa, $f$ topologik akslantirish yoki gomeomorfizm deb ataladi. Agar ikkita topologik fazolar o‘rtasida gomeomorfizm mavjud bo‘lsa, ular o‘zaro gomeomorf fazolar yoki topologik ekvivalent fazolar deyiladi.

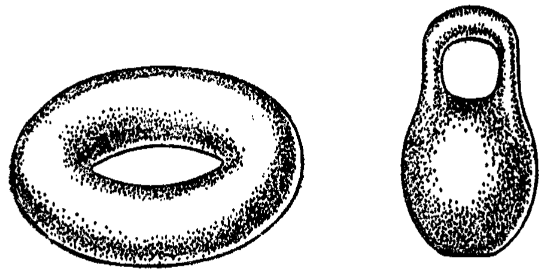
**1-Ta’rif.** Topologik fazo $X$ ning ixtiyoriy nuqtasi $R^n$ ning biror ochiq qism to‘plamiga gomeomorf bo‘lgan atrofga ega bo‘lsa $X$ $n$ o‘lchamli topologik ko‘pxillik deyiladi. $n$ soni ko‘pxillikning o‘lchami deyiladi va $dimX$ bilan belgilanadi.

**Misollar. 1.** $X=R^n$ bo‘lsin. Bu holda ixtiyoriy nuqta uchun zarur atrof sifatida $R^n$ ning o‘zini olish mumkin. Xuddi shunday $R^n$ ning ixtiyoriy ochiq qism to‘plami ham $n$ o‘lchamli topologik ko‘pxillikdir.

**2.** $X=S^n \subset R^{n+1}$ – o'lchamli sfera $n$ o‘lchamli ko‘pxillikdir. Chunki u $R^{n+1}$ ning qism to‘plami sifatida sanoqli bazaga ega va unda Xausdorf aksiomasi bajarilgan. $x \in S^n$ bo‘lsa $x'$ bilan unga diametral qarama-qarshi joylashgan nuqtani belgilaymiz. $X$ ning atrofi $U(x)= S^n \setminus \{ x' \}$ $x'$ nuqtada o‘tkazilgan urinma tekislikka gomeomorfdir. Bu gomeomorfizmni stereografik proeksiya yordamida o‘rnatish mumkin.(1-rasm)




1-rasm



2-rasm

**3.** $X=T^2$ ikki o‘lchamli torni $T^2=S^1 \times S^1$ ko‘rinishda yozish mumkin. Agar $a=(a_1,a_2)$ bo‘lib $a_1,a_2$ lar aylanalarga (bir o‘lchamli ko‘pxilliklarga) tegishli va mos ravishda ochiq kesmalarga gomeomorf $U(a_1)$, $U(a_2)$ atroflarga ega. $U(a) = U(a_1)\times U(a_2)$ to‘g‘ri ko‘paytma $a$ nuqta uchun zarur bo‘lgan atrofdir.(2-chizma)

Topologik ko‘pxillik ta’rifiga ko‘ra unga tegishli ixtiyoriy $x$ nuqta uchun uning atrofi $U$ va bu atrofni $R^n$ dagi biror ochiq $G$ to‘plamga akslantiruvchi gomeomorfizm $\varphi$ dan iborat $(U, \varphi)$ juft mavjud. $R^n$ da $y= \varphi(x)$ nuqtani o‘z ichiga oluvchi va $G$ ga qism to‘plam bo‘lgan ochiq shar $V(y)$ mavjud. (chunki ochiq sharlar $R^n$ da bazani hosil qiladi). $\varphi^{-1}:G\to U$ gomeomorfizm bo‘lganligi uchun akslantirish $\varphi^{-1}/_{V(y)}:V(y) \to \varphi^{-1}(V(y))$ ham gomeomorfizmdir. Shuning uchun $V(x)= \varphi^{-1}(V(y))$ to‘plam $x$ ning ochiq shar $V(y)$ ga gomeomorf atrofidir. Demak ko‘pxillik ta’rifida atrof $U$ ning $R^n$ dagi biror ochiq sharga gomeomorfligini talab qilish mumkin. O‘z navbatida

$R^n$ dagi ochiq shar $R^n$ ga gomeomorfdir. Bundan kelib chiqadiki, topologik ko‘pxillik ta’rifida atrof $U$ ning $R^n$ ga gomeomorfligini talab qilish mumkin.

Agar topologik ko‘pxillikning biror nuqtasi bir vaqtda $R^n$ va $R^m$ ga gomeomorf atroflarga ega bo‘lib qolsa, ko‘pxillik o‘lchami korrekt aniqlanmagan bo‘lardi. Quyidagi L.Brauer teoremasiga ko‘ra bunday hol bo‘lishi mumkin emas.

**1-Teorema.** $R^n$ va $R^m$ lar gomeomorf bo‘lsa $n=m$ bo‘lishi zarurdir.

**Chegarali topologik ko‘pxilliklar**

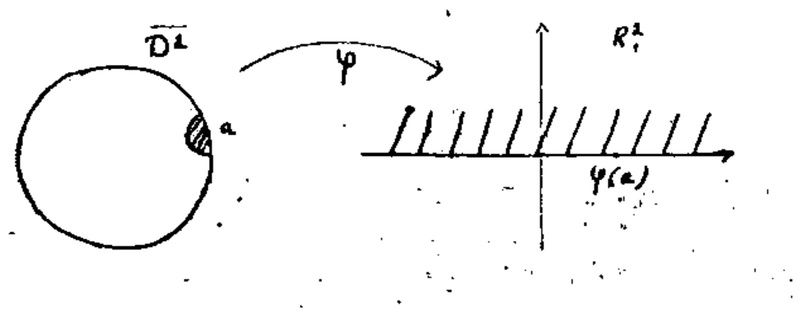
**2-Ta’rif.** $X$ topologik fazoning ixtiyoriy nuqtasi $R^n$ ga yoki $R^n_+ =\{(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)\in R^n, x_n\geq 0\}$ ga gomeomorf bo‘lgan atrofga ega bo‘lsa, $X$ $n$ o‘lchamli chegarali topologik ko‘pxillik deyiladi.

Chegarali ko‘pxillikning $R^n$ ga gomeomorf atrofga ega bo‘lgan nuqtalari ichki nuqtalar, $R^n_+$ ga gomeomorf atrofga ega bo‘lgan nuqtalari chegaraviy nuqtalar deyiladi. Chegarali ko‘pxillikning ichki nuqtalari to‘plami $intX$ bilan, chegaraviy nuqtalari to‘plami $\partial X$ bilan belgilanadi. Agar $\partial X=\emptyset$ bo‘lsa $X$ topologik ko‘pxillikdir.

**Misollar. 1.** $R^n_+$ chegarali ko‘pxillik bo‘lib, $\partial R^n_+ =R^{n-1}$. $\partial R^1_+$ nuqta, $\partial R^2_+$ to‘g‘ri chiziqdir.

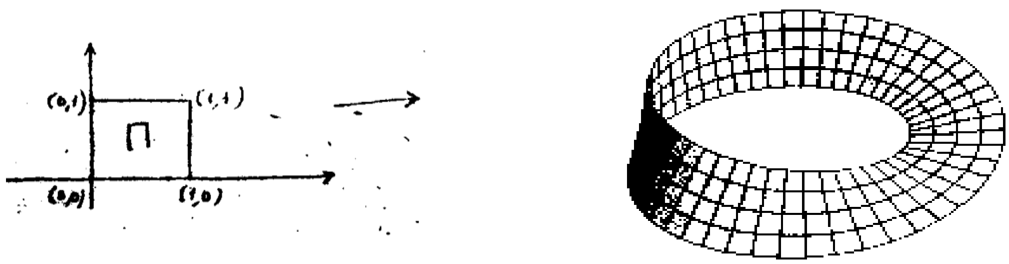
**2.** Yopiq shar $\overline{D^n}\subset R^n$ $n$ o‘lchamli chegarali ko‘pxillik bo‘lib, uning chegarasi $n-1$ o‘lchamli sferadir. Agar $n$=1 bo‘lsa, $\overline{D^n}$ yopiq kesma, chegarasi esa ikki nuqtadan iborat: $\overline{D^1}$ yopiq doiraning chegarasi aylanadan iboratdir.

**3.** “Teshik sfera” ham ikki o‘lchamli chegarali ko‘pxillikka misol bo‘ladi. “Teshik sfera” ni hosil qilish uchun sferadan ochiq sharga gomeomorf to‘plamni “qirqib” olish kerak (3-rasm).




3-rasm

**4.** Tekislikda $\Pi = \{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ kvadrat nuqtalari orasida ekvivalentlik munosabatini kiritaylik: $(0,y)$ va $(1,1-y)$ ko‘rinishdagi nuqtalarni ekvivalent deb ataymiz. Bu kiritilgan ekvivalentlik munosabati bo‘yicha factor fazo $M^2 = \Pi/\sim$ myobius yaprog‘i deb ataladi. Myobius yaprog‘i ikki o‘lchamli chegarali topologik ko‘pxillik bo‘lib, uning chegarasi aylanaga gomeomorfdir (4- rasm).

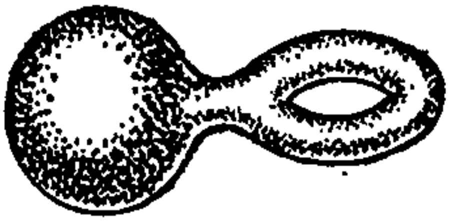



4- rasm

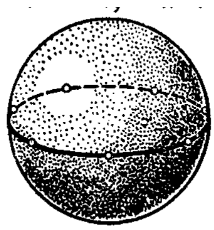
**5.** Torning ochiq doiraga gomeomorf qismini “qirqib” olsak, uning qolgan qismi ikki o‘lchamli chegarali ko‘pxillik bo‘lib, chegarasi aylanaga gomeomorfdir. Bu ko‘pxillik “ruchka” deb ataladi. (5- rasm)

5- rasm

**6.** “Teshik sfera ” bilan “ruchka” ni chegaralari bo‘yicha “yelimlasak” bir ruchkali sferani hosil qilamiz. Bir ruchkali sfera ikki o‘lchamli ko‘pxillik bo‘lib, uning chegaraviy nuqtalari Ƥ to‘plami bo‘sh to‘plamdir(6- rasm).



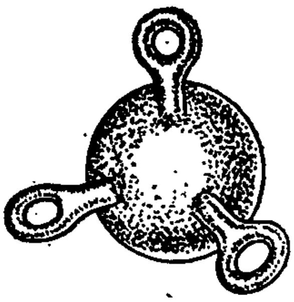
Bir dastali sfera



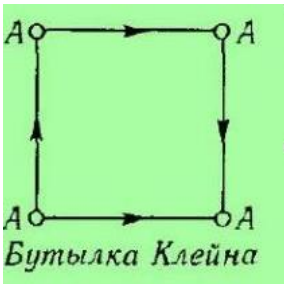
“teshik sfera”

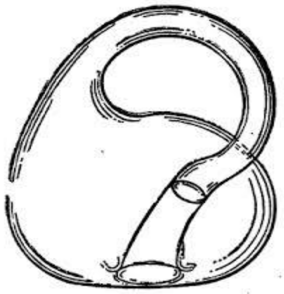
6-rasm

**7.** “Teshik sfera ” bilan myobus yaprog‘ini chegaralari bo‘yicha “yelimlasak” bir yaproqli sferani hosil qilamiz. Bir yaproqli sfera ham chegaraviy nuqtalari to‘plami bo‘sh to‘plam bo‘lgan ikki o‘lchamli ko‘pxillikdir. Agar sferaning “teshiklari” soni K ta bo‘lsa, sferaga mos ravishda K ta “ruchka” yoki “yaproq” “yelimlab” Kta ruchkali sfera yoki K ta yaproqli sfera hosil qilamiz. (7- rasm)



Uch dastali sfera



Ikki yaproqli sfera-Klein shishasi

7-rasm

## 2.3 Ikki o‘lchamli ko‘pxilliklar va ularning xossalari

Quyida ikki o‘lchamli yopiq sirtlarni topologik uchburchaklarga bo‘lib, ularning ba’zi geometrik xossalarini ko‘rib chiqamiz.

Agar $X$ topologik fazoning har bir $x$ nuqtasi $R^2$ fazodagi ochiq doiraga gomeomorf bo‘lgan atrofga ega bo‘lsa, $X$ fazo ikki o‘lchamli ko‘pxillik deyiladi. Bunday fazolarni o‘rganishda ularni Evklid fazolaridagi uchburchakka gomeomorf bo‘ladigan elementar bo‘laklarga bo‘lib o‘rganish qulay bo‘ladi.

**1-Ta’rif.** Agar $T \subset X$ bo‘lib, $\varphi : \Delta \to T$ gomeomorf bo‘lsa, u holda $(\mathrm{T}, \varphi)$ juftlik $X$ fazodagi topologik uchburchak deyiladi. Bu yerda $\Delta \subset R^2$, $\Delta$ $-$ uchburchak, $\varphi$ gomeomorfizm “ustiga”, boshqacha aytganda, $\varphi$ $-$ syurektiv, ya’ni akslantirish $\varphi^{-1}(t) \neq \varnothing, \ \forall \gamma, t \in T$ **.**

Agar $\varphi : \Delta \to \mathrm{T}$ gomeomorfizm tayin bo‘lsa, ortiqcha takrorlamaslik va tushunmovchilik bo‘lmasligi uchun $\Delta$ uchburchakning uchi va tomonlarini topologik $T \subset R^2$ uchburchakning ham uchi va qirralari deb qabul qilamiz. Bir xillik hamda qulay bo‘lishi uchun $\Delta$ uchburchakning tomonlarini $T$ ning qirralari deymiz. Uchburchakning oriyentatsiyasini aniqlaymiz va $\Delta$ ning uchlaridan tashkil topgan har xil tartiblangan “uchlikdan” (uchta uchidan) iborat nuqtalar to‘plami hosil qilamiz.

Agar bir uchlik ikkinchi uchlikdan o‘rin almashtirish natijasida hosil qilingan bo‘lsa, ikkita uchlik ekvivalent deymiz. Ma’lumki, bu yerda ekvivalentlik sinfi ikkitadan iborat bo‘ladi. Agar bu tayin bir ekvivalent sinflarining biridan iborat bo‘lsa, $\Delta$ uchburchakni oriyentirlangan deymiz. Agarda $\Delta$ uchburchak oriyentirlangan bo‘lsa, $(T, \varphi)$ topologik uchburchak oriyentirlangan deyiladi.

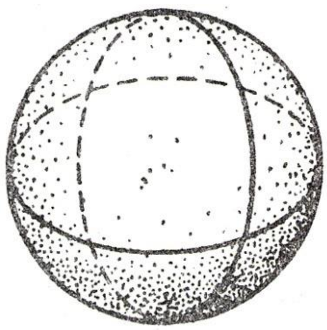
$\Delta$ uchburchakning oriyentatsiyasi ushbu uchburchakning uchlari orqali soat millari bo‘ylab yoki soat miliga teskari harakatlanish orqali bir qiymatli aniqlanadi. Bu o‘tish yo‘nalishi $\varphi$ ning gomeomorfizm yordamida topologik uchburchakda ham uchlaridan o‘tish yo‘lini aniqlaydi. Bunga indutsirlangan gomeomorfizm $\varphi$ oriyentatsiyasi deyiladi. Uchburchakning oriyentatsiyasi uning qirralari oriyentatsiyasini ham aniqlaydi. Yuqoridagidan ko'rinadiki, shunga o'xshab $n$ burchak va uning qirralari $(n > 3)$ oriyentatsiyasini ham aniqlash mumkindir.

**2-Ta'rif.** Agar quyidagi shartlar o'rinli bo'lsa, $X$ fazoning chekli sondagi $R = \{(T_i\varphi_i) : i = \overline{1,k}\}$ topologik uchburchaklardan tashkil topgan to'plami ikki o'lchamli ko'pxillikning triangulyasiyasi deyiladi:

1) $X = \bigcup_{i=1}^{K} T_i$;

2) $T_i, T_j = \varnothing$ yoki $T_i \cap T_j$ kesishma $T_i$ va $T_j$ larning umumiy qirrasidan yoki umumiy uchidan iborat bo'lsa, bu yerda $\forall i, j \in \{1, k\}$, $K = \{T_i : i = \overline{1,k}\}$ triangulyasiya.

Agar ko'pxilliklar triangulyasiyaga ega bo'lsa, bunday ko'pxilliklar triangulyasiyali ko'pxillik deyiladi. Agar K uchburchaklarning ixtiyoriy ikki uchini qirralaridan tuzilgan yo'l orqali tutashtirish mumkin bo'lsa, u holda $X$ bog'lamli deyiladi.



1-rasm.

1-rasmda $S^2$ sfera sakkizta uchburchakdan tashkil topgan triangulyasiyali figuraga misol bo'ladi.

**3-Ta'rif.** Bog'lamli triangulyasiyali ikki o'lchamli ko'pxilliklar yopiq sirt deyiladi.

Ta’rifdan va 1-rasmdan ko‘rinadiki, $S^2$ sfera yopiq ikki o‘lchamli ko‘pxillik ekan. Oldingi bo‘limda keltirilgan yopiq sirtlar triangulyasiyali yopiq sirtlarga misol bo‘la oladi. Yopiq sirtlarning topologik xossalari triangulyasiyasining ko‘rilishi asosida ta’riflanadi. Ularni o‘rganish uchun tekislikda ularning sxematik yoyilmasini ifodalash lozim. Shuni aytib o‘tish kerakki, $T_i \overset{\leftrightarrow}{\subset} K$ uchburchaklarning asli (proobrazi) bo‘lgan tekis $\Delta_i$ uchburchaklarni bir tekislikda yotadi va o‘zaro kesishmaydi, deb olish talab qilinadi. Bunday yoyilmalarni bayonini keltiraylik.

Ko‘pxillikning K triangulyasiyasi berilgan bo‘lsin. Aytaylik, $(T_i, \varphi_i)$,$(T_j$, $\varphi_j)$ lar K ning uchburchaklari va $T_i \cap T_j = a$ ularning umumiy qirrasi bo‘lsin.

$a_i = \varphi_i^{-1}(a)$ va $a_j = \varphi_j^{-1}(a)$ lar mos ravishda $\Delta_i$ va $\Delta_j$ larning qirralari bo‘lsin. Demak, yelimlovchi gomeomorfizm $\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1}|_a \, o \rho_i |_{ai}: a_i \to a_j$ aniqlangan.

Shunday qilib, K ning triangulyasiyasini $\Delta = (\{\Delta_i\}_{i=1}^k, \{\varphi_{ij}\})$ uchburchaklar sistemasiga mos keltiramiz, bu tekislikdagi uchburchaklar sistemasi mos qirralar juftligi birgalikdagi $\varphi_{ij}$ gomeomorfizmlari bilan olinadi. Agar $\varphi_{ij}$ lar gomeomorfizmda bir-biriga mos tushsa, $\bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i$ birlashmada ikki nuqtani ekvivalent deb ataymiz. Bu munosabat ekvivalentlik munosabati bo‘ladi va uni $R$ bilan belgilaymiz.

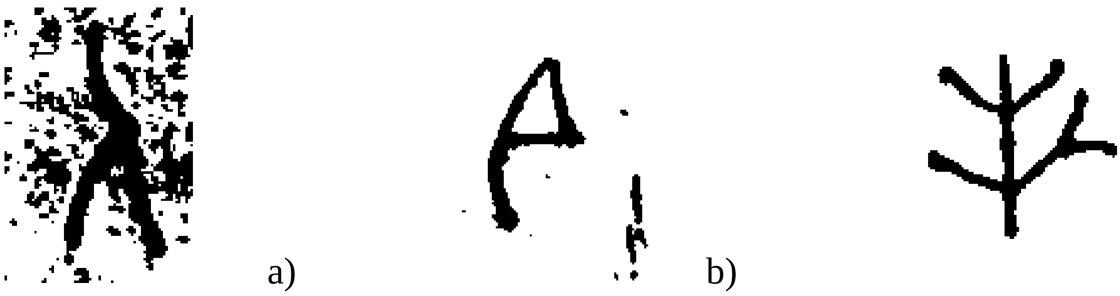
**lemma.** $(\bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i)$/R faktor fazo $X$ sirtga gomeomorfdir.

***Isboti.*** Ekvivalentlik munosabati ta’rifida keltirilgan $\varphi_i : \Delta_i \to T_i$ gomeomorfizmlar tabiiy ravishda $\varphi$: $(\bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i) \to X$ syurektiv akslantirishni aniqlaydi, bunda har bir $x \in X$ nuqtaning asli $\varphi^{-1}(x)$ aniq $R$ ekvivalentlik sinfidan iborat bo‘ladi. Faktor akslantirish $\overline{\Phi}\,(\bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i)$/R$\to X$ uluksiz akslantirish bo‘lib, ayni paytda biektiv hamdir. Aniqki, unga teskari bo‘lgan $\phi^{-1}$ akslantirish ham uzluksiz. Demak, $\overline{\Phi}$ akslantirish biektiv va ikki tomonga uzluksiz ekan. Bu esa, gomeomorfizmdir.

## Eyler harakteristikasi

Topologik fazolarning gomeomorf akslantirishlarda saqlanadigan xossalari topologik xossalar yoki topologik invariantlar deyiladi. Agar ikkita topologik fazolar o‘zaro gomeomorf bo‘lsa, ularning topologik xossalari bir xildir, ya’ni ular umumiy topologik invariantlarga ega. Ko‘pxilliklarning topologik invariantlaridan biri bo‘lgan ularning Eyler bo‘yicha xarakteristikasini quyidagi misollardan boshlab ko‘rib chiqamiz.

1. Graflar. Graf deb, chekli sondagi yoylardan va chekli sondagi nuqtalardan iborat bog‘lamli figura ataymiz. Yoylar grafning qirralari, nuqtalar esa uning uchlari deb ataladi. Grafning ba’zi uchlari o‘zaro kesishmaydigan qirralar yordamida tutashtirilgan bo‘lishi mumkin. Misol uchun 2-a rasmdagi graf 3 ta qirra va 4 ta uchga ega.



a) b) v)

2-rasm.

Grafdagi qirralardan iborat va aylanaga gomeomorf yopiq egri chiziq kontur deb ataladi(2-b rasm). Agar grafning ixtiyoriy ikkita uchini qirralar yordamida tutashtirish mumkin bo‘lsa, u bog‘lamli graf, konturga ega bo‘lmagan bog‘lanishli graf esa daraxt deyiladi(2-v rasm). $G$ bilan grafni, $B$ bilan graf uchlarining sonini, $P$ bilan esa qirralarning sonini belgilaymiz.

**1-Teorema.** $G$ daraxt bo‘lsa $B - P = 1$.

Isbot. Teoremani induksiya metodi yordamida isbotlaymiz. Agar $P=1$ bo‘lsa, graf ikkita uchga ega va tabiiyki teorema o‘rinli. $P=n$ bo‘lganda teoremani o‘rinli hisoblab, $P=n+1$ hol uchun isbotlaymiz. Graf bog‘lanishli bo‘lganligi uchun unda shunday qirra mavjudki, uni olib tashlasak yana daraxt hosil bo‘ladi. Bu qirrani $\gamma$ bilan, hosil bo‘lgan yangi grafni $G'$ bilan belgilaymiz. $G'$ da $n$ ta qirra bor. Demak uning uchun teorema o‘rinlidir, ya’ni uning soni $n+1$ ga teng. Qirra $\gamma$ ni $G'$ va qo‘shib $G$ ni hosil qilamiz: bunda qirralar soni va uchlar soni bittaga oshadi, chunki $\gamma$ ning bitta uchi $G'$ ga kirmaydi. Shunday qilib, $G$ ning qirralari soni $n+1$ ga teng bo‘lsa, uning uchlari soni $n+2$ ga teng bo‘ladi. Teorema isbotlandi.

Bu $B-P$ ayirma grafning Eyler bo‘yicha xarakteristikasi deyiladi va $\chi(G)$ bilan belgilanadi. Yuqoridagi teoremadan ko‘rinib turibdiki, ixtiyoriy daraxtning Eyler bo‘yicha xarakteristikasi birga teng. Ixtiyoriy bog‘lanishli graf uchun quyidagi o‘rinli.

**2-Teorema.** $G$ bog‘lamli graf bo‘lsa $\chi(G)\leq 1$.

**Isbot.** Agar $G$ daraxt bo‘lsa $\chi(G)=1$. Faraz qilaylik $G$ konturga ega bo‘lsin. Bu konturning birorta qirrasini chiqarib tashlab yana bog‘lanishliu graf hosil qilamiz. Hosil bo‘lgan grafni $G^{(1)}$ bilan belgilaymiz. $G^{(1)}$ ning uchlari soni $G$ ning uchlari soni bilan bir xil. Agar $G^{(1)}$ daraxt bo‘lsa $\chi\left(G^{(1)}\right)=1$ va $\chi(G)=B-P=\chi\left(G^{(1)}\right)-1$. $G^{(1)}$ daraxt bo‘lmasa unda kontur mavjud. Bu konturning bitta qirrasini chiqarib tashlab $G^{(2)}$ grafni hosil qilamiz. $G^{(2)}$ ning uchlari soni $B$ ga teng, qirralari soni $P-2$ ga teng. Bu prossessni $k$ marta takrorlab $G^{(k)}$ grafni hosil qilamiz. Agar $G$ dagi konturlar soni $k$ ga teng bo‘lsa, $G^{(k)}$ bog‘lanishli graf va konturga ega emas, ya’ni daraxtdir. Shuning uchun $\chi(G)=B-P=B^{(k)}-\left(P^{(k)}+k\right)=1-k$. Bu yerda $k\geq 1$, demak $\chi(G)\leq 0$. Teorema isbotlandi.

2. Qavariq ko‘pyoqliklar. $\Phi$ bilan qavariq ko‘pyoqlikni, $\alpha_0$ bilan uchlari sonini, $\alpha_1$ bilan qirralari sonini va $\alpha_2$ bilan yoqlari sonini belgilaymiz.

| Ko‘pyoq | $\alpha_0$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2$ |
|---|---|---|---|---|
| Kub (oltiyoq) | 8 | 12 | 6 | 2 |
| Tetraedr (to‘rtyoq) | 4 | 6 | 4 | 2 |
| Oktaedr (sakkizyoq) | 6 | 12 | 8 | 2 |
| Dodekaedr (o‘n ikkiyoq) | 20 | 30 | 12 | 2 |
| Ikosaedr (yigirmayoq) | 12 | 30 | 20 | 2 |

Bu jadvalda keltirilgan ko‘pyoqliklar uchun quyidagi tenglik o‘rinli: $\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=2$

Bu tenglik ixtiyoriy qavariq ko‘pyoqlik uchun o‘rinli va Eyler teoremasi deb ataladi.

Jadvalda keltirilgan ko‘pyoqliklarning bitta umumiy xossasiga e’tibor qilaylik: ularning har biri sferaga gomeomorf, yoqlari esa doiraga gomeomorfdir. Keyinchaklik biz bu teoremaga topologik formulirovka beramiz.

3. Ko‘pxilliklarning Eyler bo‘yicha xarakteristikasi.

$R^k$ dagi ochiq shar $D^k$ ga gomeomorf bo‘lgan topologik fazo $k$ o‘lchamli katak deb ataladi. Nuqtani nol o‘lchamli katak deb hisoblaymiz.

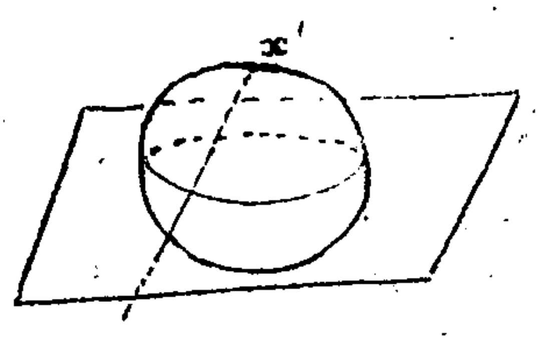
**4-Ta’rif.** $X$ topologik fazoni sanoqli sondagi kataklar yig‘indisi sifatida yozish mumkin bo‘lib, quyidagi shartlar bajarilsa u katakli fazo deb ataladi:

1. Har bir $e_i^k$ katak uchun shunday uzluksiz akslantirish $f_i:\overline{D^k}\to X$ mavjudki$f_i|_{D^k}:D^k\to e_i^k$ gomeomorfizmdir. Bu yerda $e_i^k-k$ o‘lchamli katak.
2. Har bir $e_i^k$ katak uchun $\partial e_i^k=\overline{e_i^k}-e_i^k$ to‘plam $k$ dan kichik o‘lchamli kataklar yig‘indisiga qism to‘plamdir.

3. $F \subset X$ to‘plam yopiq to‘plam bo‘lishi uchun $F \cap \overline{e_i^k}$ to‘plamlarning yopiq bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Misollar.

1. Graflar nol va bir o‘lchamli kataklarga ajraladi. Ko‘pyoqliklar esa nol, bir va ikki o‘lchamli kataklardan iboratdir.
2. $S^n - n$ o‘chamli sferani bitta nol o‘lchamli va bitta $n$ o‘lchamli kataklarga ajratish mumkin. Buning uchun stereografik proektsiyaga murojaat qilish kerak(3-rasm): $x'$ nuqta nol o‘lchamli, $S^n\{x'\}\, n$ o‘lchamli katakdir.




3-rasm

Ma’lumki, ixtiyoriy $n$ o‘lchamli ko‘pxillik katakli fazodir. Agar ko‘pxillik kompakt bo‘lsa, undagi kataklar soni cheklidir.

Agar $M - n$ o‘lchamli kompakt ko‘pxillik, $\alpha_i - i$ o‘lchamli kataklar soni bo‘lsa $\chi(M) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\,\alpha_i$ ifoda $M$ ko‘pxillikning Eyler bo‘yicha harakteristikasi deyiladi. Ko‘pxillikning Eyler bo‘yicha xarakteristikasi uning kataklarga bo‘linishiga bog‘liq emas, quyida bu faktni ikki o‘lchamli sfera uchun isbotlaymiz.

**3-Teorema.** Sferada graf $\Gamma$ berilgan bo‘lsin. Agar $\alpha_0$ –graf uchlarining soni, $\alpha_1$ –qirralarining soni, $\alpha_2$ –sferada hosil bo'lgan sohalar soni va $l$ –grafning komponentlari soni bo'lsa $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - l = 1$ tenglik o‘rinli.

**Izoh.** Graf $\Gamma$ bir nechta bog‘lanishli graflardan iborat bo‘lishi mumkin. Ana shu bog‘lanishli graflar va birorta ham qirra chiqmaydigan uchlar graf $\Gamma$ ning komponentlarini tashkil qiladi.

Isbot. Agar $\Gamma$ graf bo‘sh graf bo‘lsa, ya’ni uning uchlari va qirralari soni nolga teng bo‘lsa, $\alpha_0 = \alpha_1 = l = 0,\ \alpha_2 = 1$ va teorema o‘rinlidir. Agar $\Gamma$ bo‘sh graf bo‘lmasa, uning uchlari va qirralari sonini shunday qilib kamaytirish mumkinki, bu kamaytirish davomida $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - l$ ifoda o‘z qiymatini o‘zgartirmaydi. Quyida ana shu protsessni keltiramiz:

1. Graf $\Gamma$ dan ajralgan uchlarni, ya’ni bitta ham qirra chiqmagan uchlarni chiqarib tashlaymiz. Har bir ajralgan uchni chiqarib tashlaganimizda $\alpha_1, \alpha_2$ lar o‘zgarmaydi, $\alpha_0$ va $l$ lar bittaga kamayadi. Demak $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - l$ yig‘indi o‘zgarmaydi(4-rasm).
2. Hamma ajralgan uchlarni chiqarib bo‘lganimizdan keyin faqat bitta qirra chiquvchi uchlarni qaraymiz. Agar $A$ uchga faqat bitta qirra $\gamma$ kirsa, $A$ uchni va $\gamma$ qirrani chiqarib tashlasak $\alpha_0$ va $\alpha_1$ lar bittaga kamayadi, $\alpha_2, l$ lar o‘zgarmaydi(4-rasm). Natijada $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - l$ yig‘indi o‘zgarmaydi.
3. Birinchi va ikkinchi punktdagi operatsiyalarni bajarib $\Gamma'$ grafni hosil qilsak, agar u bo‘sh graf bo‘lmasa unda kontur mavjud. Konturga tegishli bo‘lgan har bir qirra ikkita sohaning umumiy chegarasida yotadi. Shuning uchun konturga tegishli bironta qirrani chiqarib tashlasak $\alpha_1, \alpha_2$ lar bittaga kamayadi, $l$ va $\alpha_0$ lar o‘zgarmaydi. Natijada $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - l$ yig‘indi o‘z qiymatini saqlab qoladi.

4-rasm

Birinchi, ikkinchi va uchinchi punktdagi operatsiyalarni yetarli marta takrorlab bo‘sh grafni hosil qilish mumkin. Bu protsess davomida $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - l$ yig‘indi o‘z qiymatini o‘zgartirmaydi. Demak $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - l = 1$ tenglik o‘rinlidir.

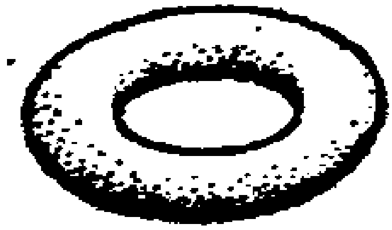
**1-Natija.** Agar graf $\Gamma$ sferani kataklarga ajratuvchi graf bo‘lsa, $\Gamma$ bog‘lanishli grafdir, ya’ni $l = 1$ chunki sohalar ochiq doiraga gomeomorf sohalar bo‘lishi kerak. Shuning uchun teoremadan $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$ tenglikni hosil qilamiz. Demak sferaning Eyler bo‘yicha xarakteristikasi uning kataklarga qanday qilib ajralishiga bog‘liq emas va ikkiga teng.

**2-Natija.** $\Phi$ −ixtiyoriy qavariq ko‘pyoqlik bo‘lsa $f\colon \Phi \to S^2$ gomeomorfizm mavjud. Bu akslantirishda ko‘pyoqlik uchlarining obrazlari sferada nol o‘lchamli kataklarni, qirralarining obrazlari bir o‘lchamli kataklarni, yoqlarining obrazlari esa ikki o‘lchamli kataklarni hosil qiladi. Yuqoridagi teoremaga asosan $\Phi$ ko‘pyoqlik uchun $B - P + \Gamma = 2$ tenglik o‘rinlidir.

Misollar.

1. Yuqorida ko‘rdikki, $n$ o‘lchamli sferani bitta nol o‘lchamli va bitta $n$ o‘lchamli kataklarga ajratish mumkin. Shuning uchun $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 2, & agar\ n\ juft\ son\ bo'lsa \\ 0, & agar\ n\ toq\ son\ bo'lsa \end{cases}$
2. Ikki o‘lchamli torni parallel va meridian yordamida (5-rasm) bitta nol o‘lchamli $(M - nuqta)$, ikkita bir o‘lchamli va bitta ikki

o'lchamli kataklarga ajratish mumkin. Shuning uchun $\chi(T^2) = 1 - 2 + 1 = 0$.



5-rasm

3. $n$ o'lchamli yopiq shar $\overline{D^n}(n > 1)$ ni kataklarga quyidagicha ajratish mumkin: uning chegarasi $S^{n-1}$ –yuqoridagidek ikkita katakka ajraladi, ichi $D^n$ esa $n$ o'lchamli katakdir. Demak $\chi(\overline{D^n}) = 1 - (-1)^{n-1} - (-1)^n = 1$.
4. Myobus yaprog'ini kataklarga ajratish uchun kvadrat Π da (0,0) nuqtadan (1,1) nuqtalar Myobius yaprog'ida bitta nuqtani hosil qilganligi uchun ular bitta nol o'lchamli katakni hosil qiladi. Diagonal va nol o'lchamli katak chiqarilgan yaproq chegarasi ikkita bir o'lchamli kataklarni, yaproqning qolgan qismi esa bitta ikki o'lchamli katakni hosil qiladi. Demak $\chi(M^2) = 1 - 2 + 1 = 0$.

## Xulosa

Bitiruv malakaviy ish kirish, ikki bob, jami oltita paragraf, xulosa, ilova va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat.

Bitiruv malakaviy ishining kirish qismida mavzuning dolzarbligi, bitiruv malakaviy ishning maqsadi, obyekti, predmeti, vazifalari uning tuzilishi haqida ma'lumotlar berilgan.

Bitiruv malakaviy ishining birinchi bobi "Topologik fazolar va unda o'lchamlar" deb nomlanadi. Unda topologik va metrik fazolar, hamda ularning ba'zi xossalari, topologik fazolarda o'lchamlar haqida so'z yuritilgan. Jumladan, topologik hamda metrik fazolarning kiritilish usullari o‘rganilgan, topologik va metrik fazolarga ba’zi misollar keltirilgan. Topologik va metrik fazolarning bir qancha muhim xossalari to‘liq o‘rganilgan. Shu bilan birga ushbu bobda topologik fazolarda o‘lcham tushunchasi ko‘rilgan, hamda topologik fazolarning o‘lchamlariga doir bir qancha muhim teoremalar isbotlangan bo‘lib, bu teoremalardan tegishli natijalar olingan.

Bitiruv malakaviy ishining ikkinchi bobi “Ko‘pxilliklar va uning xossalari” deb nomlanadi. Bu bobda dastlab ko‘pxilliklarga umumiy ta’rif berilgan va ko‘pxilliklarning ba’zi sodda xossalari misollarda to‘la tekshirilib, kerakli natijalar olingan. Topologik ko‘pxilliklar o‘lchamlari ta’riflari kiritilgan va topologik ko‘pxilliklar o‘lchamlariga oid ba’zi muhim xossalar to‘liq o‘rganilgan. Xususan, ikki o‘chamli topologik ko‘pxilliklarning bir qancha muhim xossalari keltirilgan bo‘lib, ularga oid bir nechta muhim teoremalar isbotlangan, hamda, tegishli natijalar olingan.

Xulosa qilib shuni aytish mumkinki, ushbu bitiruv malakaviy ishda topologik va metrik fazolarning ba’zi muhim xossalari to‘la o‘rganilgan, topologik fazolar va topologik ko‘pxilliklarda o‘cham tushunchasi to‘liq ochib berilgan, hamda ikki o‘lchamli ko‘pxilliklarning muhim xossalari to‘la tekshirilgan.

## FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. O‘zbekiston Respublikasi "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi".
2. Karimov I.A. “Barkamol avlod-O‘zbekiston taraqqiyotining poydevori” Toshkent-1998y “Sharq” nashriyoti.
3. Karimov I. A. Yuksak ma’naviyat - yengilmas kuch, Toshkent, Ma’naviyat, -2009 y., B- 61-65.
4. Мирзиёев Ш.М. Эркин ва фаровон, демократик Ўзбекистон давлатини биргаликда барпо этамиз. Тошкент, 2016. 56-б.
5. T.F.Jo‘rayev. Topologiyaga kirish. Toshkent. “Tafakkur – Bo‘stoni” nashriyoti. 2012 y.

6. A.Ya.Narmanov. Ko‘pxilliklar va ularning Eyler bo‘yicha xarakteristikasi. Toshkent-1990y.
7. Р.Энгелькиг Обшая топология. Москва. Мир. 1986 г.
8. Dilmurodov.N Ko‘pxilliklarda matematik analiz. Qarshi.Nasaf nashriyoti 2003- y.
9. Ayupov SH.A.,Berdiqulov M.A., Turg‘unbayey R.M. “Funksiyalar nazariyasi” . Toshkent 2004-y.
10. В.Г.Болянский.,В.Ф.Ефремович «Наглядная топология» .Москва «наука» главная редаксия физико-математической литературы 1982 г.
11. Р.А.Александрян ,Э.А.Мирзаханян «Обшая топология» .Москва «Высшая школа» 1979 г.
12. http:// vilenin.narod.ru//Mm/books/
13. http://www.allmath.ru/
14. http://www.pedagog.uz/
15. http://www.ziyonet.uz/
16. http://window.edu.ru/window/

# Glossariy

| № | Inglizcha | Ruscha | O‘zbekcha |
|---|---|---|---|
| 1. | Topology | Топология | Topologiya |
| 2. | Dimension | Размерность | O‘lcham |
| 3. | Set | Множество | To‘plam |
| 4. | Subset | Подмножество | To‘plamosti |
| 5. | Space | Пространство | Fazo |
| 6. | System | Система | Sistema |
| 7. | Boundary | Граница | Chegara |
| 8. | Closed | Замкнутый | Yopiq |
| 9. | Open | Открытый | Ochiq |
| 10. | Compact | Компакт | Kompakt |
| 11. | Connected | Связное | Bog‘lamli |
| 12. | Complete | Полный | To‘la |
| 13. | Continuos | Непрерывный | Uzluksiz |
| 14. | Countable | Счетное | Sanoqli |
| 15. | Definition | Определение | Ta’rif |
| 16. | Degree | Степень | Daraja |
| 17. | Interior | Внутренность | Ichki |
| 18. | Homeomorphism | Гомеоморфизм | Gomeomorfizm |
| 19. | Hull | Оболочка | Qobiq |
| 20. | Union | Обьединение | Birlashma |
| 21. | Intersection | Пересечение | Kesishma |
| 22. | Interval | Interval | Interval |
| 23. | Mapping | Отображение | Akslantirish |
| 24. | Distance | Растояние | Masofa |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 25. | Point | Точка | Nuqta |
| 26. | Function | Функция | Funksiya |
| 27. | Every | Произвольная | Ixtiyoriy |
| 28. | Really | Реальный | Haqiqiy |
| 29. | Composition | Композиция | Kompozitsiya |
| 30. | Circle | Окружность | Aylana |
| 31. | Diskret | Дискрет | Diskret |
| 32. | Line | Линия | Chiziq |
| 33. | Theorem | Теорема | Teorema |
| 34. | Proof | Доказательство | Isbot |
| 35. | Axiom | Аксиома | Aksioma |
| 36. | Concerning | Принадлежать | Tegishli |
| 37. | Cover | Покрытие | Qoplama |
| 38. | Result | Результат | Natija |
| 39. | Partial | Часть | Qisman |
| 40. | Base | База | Baza |
| 41. | Funktor | Функтор | Funktor |
| 42. | Maximal | Махсимал | Maxsimal |
| 43. | Metrization | Метризуемость | Metrikalashgan |
| 44. | Product | Произведение | Ko‘paytma |
| 45. | Paracompact | Паракомпакт | Parakompakt |
| 46. | Finite | Конечное | Chekli |
| 47. | Family | Семейство | Oila |
| 48. | Infinite | Бесконечное | Cheksiz |
| 49. | Probalility | Вероятность | Ehtimol |
| 50. | Measures | Мера | O‘lchov |
| 51. | Bundles | Расслоение | Qatlam |
| 52. | Manifolds | Многообразия | Ko‘pxillik |
| 53. | Weight | Весь | Salmog‘i |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 54. | Neigbourhood | Окрестность | Atrof |