O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI

MATEMATIKA KAFEDRASI

MAKTAB, KITSEY VA KXKlarda MATEMATIKA

fanidan
o‘quv-metodik
majmua

1- QISM

Guliston-2019

Turdiboev D.X. Maktab,litsey va KXKlarda matematika: matematika ta’lim yo’nalishi talabalari uchun o‘quv-metodik majmua. 1-qism. Guliston. 2019, 140 bet.

Ushbu o‘quv-metodik majmua amaldagi dasturlar asosida tayyorlanib, matematika ta’lim yo’nalishi talabalari uchun mo‘ljallangan. Unda zamonaviy pedagogik texnologiya tizimiga asoslangan holda ishchi dastur, reyting ishlanma, ma’ruza matnlari, amaliy mashg‘ulotlar, talabalar mustaqil bajarishi zarur bo‘lgan topshiriqlar, nazorat ishi variantlari, oraliq nazorat savollari, yakuniy nazorat savollari va adabiyotlar ro‘yhati keltirilgan.

O‘quv-metodik majmua Guliston davlat universiteti o‘quv metodik kengashi tomonidan (__-bayonnoma, ___.___.2019 yil) nashrga tavsiya etilgan.

Taqrizchilar: fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent K. Jamuratov.
izika-matematika fanlari nomzodi, dotsent X. Norjigitov.

KIRISH

Mazkur o‘quv metodik majmua maktab, akademik litsey va kasb-hunar kollejlari fani o‘quv dasturini to‘la qamrab olgan bo‘lib, sodda, tushunarli tarzda bayon etilgan.

O’quv uslubiy majmua 13 paragrafdan iborat. Har bir paragraf bir nechta bandlarga bo‘lingan bo‘lib, ularning har birining oxirida shu bandga doir misol va masalalar yechib ko‘rsatilgan, mustaqil yechish uchun mashqlar keltirilgan, ularning deyarli yarmiga javoblar berilgan. O’quv uslibiy majmua hajmi jihatidan uncha katta bo‘lmasa ham, mazmunan “maktab, akademik litsey va kasb-hunar kollejlari fani” kursiga doir barcha mavzularni to‘la qamrab olgan.

O’quv uslibiy majmua eng ijobiy tomonlaridan biri uning misol va masa-lalarga, ma’naviy yechimlarga nihoyatda boyligidir.

Mavzularning joylashish ketma-ketligi ularning uzviy bog‘liqligi zaruratidan kelib chiqqan holda amalga oshirilgan.

Muallif o’quv uslibiy majmua nashrga tayyorlashda taqrizchilarning bergan maslahatlari uchun minnatdorchilik bildiradi.

§ 1. TO‘PLAM VA UNING ELEMENTLARI

1.1. Bo‘sh to‘plam. Chekli va cheksiz to‘plamlar

To‘plam tushunchasi matematikada ta’rifsiz qabul qilinadigan tushunchalardan biridir. To‘plamni tashkil qiluvchi obyektlar, jismlar, sonlar va hokazo to‘plamning elementlari deyiladi. Masalan, dars xonasidagi partalar to‘plami, guruhdagi talabalar to‘plami, ma’lum yo‘nalishda qatnaydigan avtobuslar to‘plami va hokazo.

To‘plamlarni lotin alifbosining bosh harflari (*A, B, C, …*), to‘plam elementlarini esa kichik harflari (*a, b, c, …*) bilan belgilash qabul qilingan, *a* elementning E to‘plamga tegishli ekanligini anglatish uchun $a \in E$ kabi belgilash qabul qilingan, agar *a* element E to‘plamga tegishli bo‘lmasa, $a \notin E$ yoki $a \in E$ kabi belgilanadi. Masalan, N natural sonlar to‘plami bo‘lsa, u holda $1 \in N; 13 \in N, -2 \notin N, 1{,}2 \notin N, \ldots$ bo‘ladi.

To‘plamga kiruvchi elementlarning soniga qarab to‘plamlar chekli va cheksiz bo‘ladi. Agar to‘plamdagi elementlar soni chekli bo‘lsa, u chekli to‘plam deyiladi. Masalan $A = \{2, 4, 6, 8\}$ to‘plam to‘rtta elementdan tashkil topgan, u chekli to‘plamdir.

Agar to‘plamdagi elementlar soni cheksiz bo‘lsa, u cheksiz to‘plam deyiladi. Masalan, natural sonlar to‘plami N, butun sonlar to‘plami Z, ratsional sonlar to‘plami Q, haqiqiy sonlar to‘plami R cheksiz to‘plamlarga misol bo‘la oladi. Bu to‘plamlar bilan keyingi mashg‘ulotlarimizda to‘laroq shug‘ullanamiz.

Agar uning barcha elementlari (chekli to‘plam ham) berilgan bo‘lsa yoki shu to‘plamga tegishli elementlarni topish uchun shartlar sistemasi berilgan bo‘lsa, to‘plam berilgan deb hisoblanadi, Bu shartlar sistemasi to‘plamning xarakteristik xossalari deyiladi. Masalan, kvadrati 5 dan katta bo‘lgan barcha natural sonlardan tuzilgan to‘plam $A = \{x | x \in N, x^2 > 5\}$ ko‘rinishida yoziladi, elementlari ratsional sonlardan iborat to‘plam $Q = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q}, p \in Z, q \in N \right\}$ ko‘rinishida yoziladi.

Birorta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam bo‘sh to‘plam deyiladi va Ø orqali belgilanadi. Masalan, $x^2 + x + 2 = 0$ tenglama haqiqiy ildizlari to‘plami bo‘sh to‘plamdan iborat.

Bir xil elementlardan tuzilgan to‘plamlar teng to‘plamlar deyiladi. Masalan, $X = \{2,3\}$, $Y = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$ bo‘lsa, X=Y, chunki ikkala to‘plam ham faqat 2 va 3 elementlardan tuzilgan. Boshqa misol, $A = \{1,3,4\}$ va $B = \{1, \sqrt{9}, 2^2\}$ bo‘lsa, A=B dir, chunki $B = \{1, \sqrt{9}, 2^2\} = \{1,3,4\} = A$.

A chekli to‘plam elementlari sonini *n(A)* orqali belgilaymiz. Agar A to‘plam *k* ta elementga ega bo‘lsa, A to‘plam *k* elementli to‘plam deyiladi. Masalan, $A=\{0,2,4,6,8\}$ bo‘lsa, *n(A)=5*. A to‘plam besh elementli to‘plamdir.

Mashqlar

1. Tug‘ilgan yilingizda qatnashgan raqamlar to‘plamini tuzing.

2. -4, -2, 0, 2, 4 elementlardan tuzilgan A to‘plamni yozing. Shu elementlarga qarama-qarshi bo‘lgan sonlardan tuzilgan B to‘plamni yozing.

3. 30 gacha bo‘lgan tub sonlar to‘plamini yozing. Yozilgan to‘plamda nechta element bor?

4. 10 dan katta 20 dan kichik toq sonlardan iborat to‘plam tuzing. Uning nechta elementi bor?

5. 50 gacha bo‘lgan natural sonlar orasida yozuvida 5 qatnashgan sonlardan tuzilgan to‘plamni yozing. Nechta uning elementi bor?

6. $\frac{17}{23}$ dan katta, birdan kichik, maxraji 23 bo‘lgan kasrlardan to‘plam tuzing. Uning nechta elementi bor?

7. Maxraji 30 bo‘lgan, $\frac{23}{30}$ dan katta, 1 dan kichik bo‘lgan kasrlardan to‘plam tuzing. Elementlar sonini aniqlang?

8. $A=\left\{3;5,2;\ 9;-8;18\,\frac{1}{3}\right\}$ to‘plamning qaysi elementlari natural sonlar to‘plamiga tegishli, qaysilari tegishli emasligini aniqlang. Javobni $\in, \notin$ bilan ifodalang.

9. Quyidagi to‘plamning elementlarini yozib chiqing:

$a)\ A=\{x \mid x\in N, -2<x<4\},$

$b)\ B=\{x \mid x(x+1)(x-2)=0\},$

$c)\ C=\{x \mid 4x-5=x+3\},$

$d)\ D=\{x \mid x\in N, x^2<16\},$

$e)\ E=\{x \mid x\in R, x^2=2\},$

$f)\ F=\{x \mid x\in R, x^2=3\}.$

10. Quyidagi to‘plamlarni son o‘qida belgilang.

$1)\ \{x \mid x\in N, x\le 5\},$ $2)\ \{x \mid x\in Z, -1\le x\le 2\},$

$3)\ \{x \mid x\in R, x\le -1\},$ $4)\ \{x \mid x\in R, -2{,}1<x<1{,}7\},$

$5)\ \{x \mid x^2=9\},$ $6)\ \{x \mid x(x^2-1)=0\}.$

11. 1, 2, 3 raqamlarining har biridan faqat bir marta foydalanib yoziladigan uch xonali sonlar to‘plamini yozing. Bu to‘plamning nechta elementi bor?

12. 2 bilan tugaydigan 100 dan katta bo‘lmagan natural sonlar to‘plamini tuzing. Elementlar sonini aniqlang.

13.Quyidagi keltirilgan to‘plamlardan bo‘sh to‘plamlarni aniqlang:

$1)\ A=\{x \mid x\in N, x<0\}$, $\quad 2)\ B=\{x \mid x\in N, -2\le x\le 1\}$,

$2)\ C=\{x \mid x\in N, 5<x<6\}$ $\quad 4)\ D=\{x \mid x^2+1=0\}$,

$5)\ E=\{x \mid x\in R, |x|=2\}$, $\quad 6)\ F=\{x \mid x<3, x>4\}$.

14. Quyidagi juftliklardan teng to‘plamlarni aniqlang.

$1)\ A=\{2,3,5\}\ va\ B=\{3,5,2\}$; $\quad 2)\ A=\{1,3,2\}\ va\ B=\{1,111,11\}$;

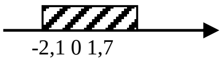
$3)\ A=\{1,3,4\}\ va\ B=\{2^2,\sqrt{9},1\}$; $4)\ A=\{9,4,16\}\ va\ B=\{1^2,2^2,4^2\}$.

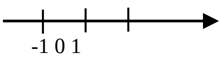
Javoblar:

$2.\ A\{-4,-2,0,2,4\}=B\{-4,-2,0,2,4,\ \}$ $4.\ \{11,13,15,17,19\}, n=5.$

$6.\ \left\{\frac{18}{23},\frac{19}{23},\frac{20}{23},\frac{21}{23},\frac{22}{23}\right\}, n=5.$ $8)\ 2,3,5,9\in N; -8; 18\frac{1}{3}\notin N$

10. 2) 

4) 

6) 

$12)\ \{2,12,22,32,42,52,62,72,82,92\}, n=10.$ $14)\ 1),\ 3).$

1.2. Matematik mantiq elementlari

“Mulohaza”lar va ularning ustida mantiqiy amallarni o‘rgatadigan matematikaning bo‘limi matematik mantiq deyiladi. Mulohazalar ustida bajariladigan mantiqiy amallar maxsus belgilar yordamida ifodalanadi.

Bu belgilardan asosiylarini keltiramiz.

1. $\Rightarrow$ - agar … bo‘lsa, u holda … bo‘ladi. E $\Rightarrow$ F – agar E bo‘lsa, F bo‘ladi (E dan F kelib chiqadi).

2. $\Leftrightarrow$ - teng kuchlilik. E $\Leftrightarrow$ F – E va F teng kuchli (E dan F kelib chiqadi va aksincha).

3. $\vee$ - dizyunksiya (“yoki” amali): E – “6x4=24”. F – “6x4=25” bo‘lsa $E\vee F$ mulohaza “6x4 ko‘paytma 24 yoki 25 ga teng”.

4. $\wedge$ - konyunksiya (“va” amali): G – “13 soni toq va tubdir” mulohazasi quyidagi ikkita mulohazaning konyunksiyasidir, E – “13 soni toq”, F – “13 doni tub”. Demak $G=E\wedge F$.

5. $\forall$ - ixtiyoriy, barcha, har qanday degan ma’noni anglatadi: Masalan, F to‘plam 3 ga karrali natural sonlar to‘plami, E – barcha natural sonlar to‘plami degan mulohaza qilsa, u holda F ning barcha elementlari E ning elementlaridir, degan ma’noni beradi. Bu tasdiqni $F\subset E \Leftrightarrow (\forall a\in F \Rightarrow a\in E)$.

6. $\exists$ - “shunday”, “mavjud” degan ma’noni anglatadi. “ E va F to‘plamlarning umumiy elementi mavjud emas” degan tasdiqni $F \not\subset E \Leftrightarrow (\exists a \in F \Rightarrow a \notin E)$ ko‘rinishida yozish mumkin.

$\forall$ va $\exists$ belgilar kvantorlar deyiladi. Bu belgilar matematikaga mansub bo‘lib, mantiqqa aloqador emas.

7. $\nexists$ - mavjud emas ma’nosini anglatadi (inkor etish amalidir). a<0 bo‘lsa, $\not a \Rightarrow \{n \notin R, \Rightarrow n^2 = a\}$.

Biror E mulohazaning inkori deb E chin bo‘lganda yolg‘on, E yolg‘on bo‘lganda chin bo‘ladigan yangi mulohazaga aytiladi va $\overline{E}$ bilan belgilanadi. E – “5 – murakkab son”, u holda $\overline{E}$ - “5 – tub son”. Bu yerda E yolg‘on, $\overline{E}$ chin mulohazadir.

Mashqlar

Quyidagi jumlalarni belgilar yordamida yozing.

15. Ixtiyoriy $a \geq 0$ uchun x^2=α bo‘ladigan haqiqiy son mavjud.

16.a <0, b<0 bo‘lsa, ab>0 bo‘ladi.

17. Har qanday haqiqiy a va b sonlar uchun ab=ba o‘rinli bo‘ladi.

18. Agar a son 9 ga bo‘linsa, bu son 3 ga ham bo‘linadi.

19. Agar $x^2+y^2+z^2=0$ bo‘lsa, x=y=z=0 bo‘ladi va aksincha x=y=z=0 bo‘lsa $x^2+y^2+z^2=0$ bo‘ladi.

20. Ixtiyoriy n natural son uchun n^2+n natural son bo‘ladi.

21. a<0 bo‘lsa $\sqrt{a}$ =x bo‘ladigan haqiqiy son mavjud emas.

22. a<0 bo‘lsa $x^2=a$ bo‘ladigan haqiqiy son mavjud emas.

Javoblar:

$16.(a < 0) \wedge (b < 0) \Rightarrow (ab > 0)$

$18.(a = 9k) \Rightarrow (a = 3k_1)$. $20.(\forall n \in N) \Rightarrow (n^2 + n) \in N$.

$22. \forall a < 0, \nexists x \in R; x^2 = a$.

1.3. Qism to‘plam. To‘plamlarning kesishmasi va birlashmasi

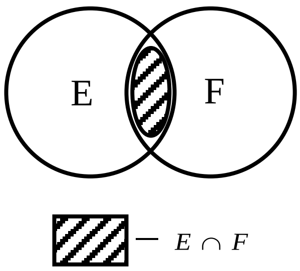
Agar F to‘plamning har bir elementi E to‘plamning ham – elementi bo‘lsa, u holda F to‘plam E to‘plamning qism to‘plami yoki to‘plamostisi deyiladi va $F \subset E$ kabi belgilanadi. Har qanday E to‘plam uchun $\emptyset \subset E$ va $E \subset E$, ya’ni bo‘sh to‘plam, to‘plamning o‘zi shu to‘plamning qism to‘plamlari bo‘ladi, bular xosmas qism – to‘plamlar deyiladi. E to‘plamning qolgan barcha qism to‘plamlari shu to‘plamning xos qism to‘plamlari deyiladi.

Masalan, $N \subset Z, Z \subset Q, Q \subset R \Rightarrow N \subset Q, N \subset R, Z \subset Q, Z \subset R, Q \subset R$. $\emptyset$ vaZ to‘plamlar Z ning xosmas qism to‘plamlaridir. Boshqa misol, A ikki xonali sonlar to‘plami, B ikki xonali toq sonlar to‘plami bo‘lsin, u holda $B \subset A$, chunki ikki xonali toq sonlar A ning ham elementlaridir. Agar A=B bo‘lsa $A \subset B$ va $B \subset A$ va aksincha $A \subset B$, $B \subset A$ bo‘lsa, A=B bo‘ladi.

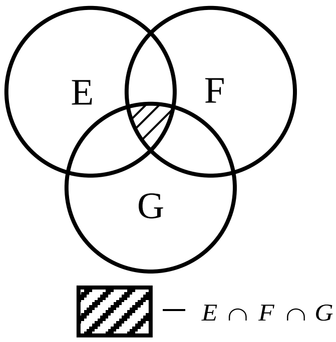
1-ta’rif. Bir vaqtning o‘zida E to‘plamni ham, F to‘plamni ham elementlari bo‘lgan elementlar to‘plami E va F to‘plamlarning kesishmasi deyiladi va $E \cap F$ kabi belgilanadi.

Misol. $E = \{1,2,3,4,5,6\}; F = \{1,3,5,7,9\}$ bo‘lsa $E \cap F = \{1,3,5\}$ bo‘ladi, umuman $E \cap F = \{x \mid x \in E, x \in F\}$.

1-rasmda E va F to‘plamlarning kesishmasi (Eyler-Vann diagrammasi) tasvirlangan.



1-rasm.



2-rasm.

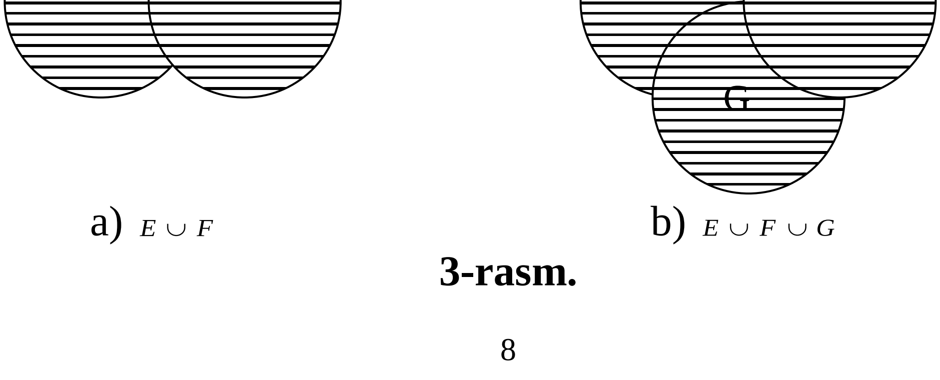
2-rasmda uchta to‘plam E, F, G larning kesishmasi (umumiy qismi) tasvirlangan. Umuman, E_i (i=1, 2, … n) to‘plamlarning kesishmasi deb bir vaqtning o‘zida hamma E_i to‘plamlarga tegishli bo‘lgan elementlardan iborat to‘plamga aytiladi va $\cap E_i$ ko‘rinishida belgilanadi.

Ta’rifdan kelib chiqadiki

$$E \cap F = F \cap E,$$
$$(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G).$$

2-ta’rif. E va F to‘plamlarning barcha elementlaridan tuzilgan to‘plam E va F to‘plamlarining birlashmasi (yig‘indisi) deyiladi va $E \cup F$ ko‘rinishida belgilanadi:

$$E \cup F = \{x \mid x \in E \ \ yoki \ \ x \in F\}$$

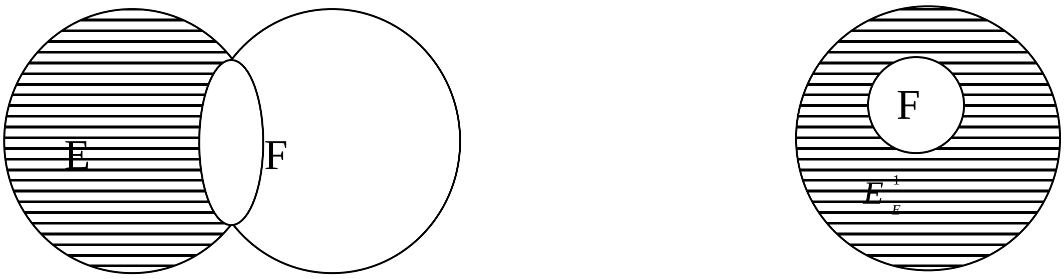


a) $E \cup F$ b) $E \cup F \cup G$

3-rasm.

3-rasmda E va F (a)) hamda E, F va G to‘plamlarining (b)) birlashmasi tasvirlangan. Ta’rifdan $E \cup F = F \cup E$, $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$ kelib chiqadi.

3-ta’rif. E va F to‘plamlarning ayirmasi deb E to‘plam elementlaridan F to‘plamda ham qatnashgan elementlarini olib tashlashdan qolgan elementlaridan tuzilgan elementlar to‘plamiga aytiladi va E\F kabi belgilanadi: $E \setminus F = \{x \mid x \in E, x \notin F\}$.



a) $E \setminus F$ b) $E \setminus F = F_E^1$

4-rasm.

4-rasmda E va F to‘plamlarning ayirmasi (shtrixlangan qismi) tasvirlangan. Bundan tashqari, b) rasmda shtrixlangan soha, F to‘plamning E to‘plamgacha to‘ldiruvchisi deyiladi va F_E^1 yoki F^1 kabi belgilanadi. Bu holatda $F \subset E$ va E\F to‘plam F to‘plamning to‘ldiruvchisi deyiladi.

4-ta’rif. Agar qaralayotgan barcha to‘plamlar uning qism to‘plamlari bo‘lsa, V to‘plam universal to‘plam deyiladi,. Bu holatda V to‘plam qism to‘plamlarining kesishmasi, birlashmasi, ixtiyoriy qism to‘plamining to‘ldiruvchisi ham V to‘plamning qism to‘plami bo‘ladi. Masalan, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4, 5\}$, $C = \{2, 5, 7\}$ to‘plamlar uchun $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ universal to‘plam bo‘ladi. Umuman, agar $A \subset V, B \subset V, C \subset V$ bo‘lsa, V universal to‘plam bo‘ladi.

Mavzuni mustahkamlash uchun quyidagi amallarni mustaqil isbot qilish tavsiya etiladi.

1) $E \cap F = F \cap E$

2) $E \cup F = F \cup E$,

3) $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$,

4) $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$,

5) $(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$,

6) $(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$.

To‘plamlar elementlarini aniqlash uchun foydali bo‘lgan ba’zi teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

1-teorema. A va B chekli to'plamlar bo'lib, $A \cap B = \emptyset$ bo'lsa, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ bo'ladi.

2-teorema. Agar A va B ixtiyoriy chekli to'plamlar bo'lsa, u holda $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

1-misol. Qutida ikki xil sharlar bor: qizil sharlar soni 60 ta, oq sharlar soni 40 ta. A to'plam qizil sharlar, B to'plam oq sharlar bo'lsa $n(A) = 60$, $n(B) = 40$, $A \cap B = \emptyset$.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 60 + 40 = 100$$

2-misol. $A = \{2,3,4,5\}$, $B = \{2,5,6\}$ bo'lsin.

$$A \cap B = \{2,5\}.;\ n(A) = 4;\ n(B) = 3;\ n(A \cap B) = 2$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 4 + 3 - 2 = 5,$$

haqiqatda $A \cup B = \{2,3,4,5,6\}$.

Mashqlar

23. $A = \{2,3,4,6,8,9,10\}$; $B = \{13, -8, 12, 2, 4\}$; $C = \{12, 3, 9, 7\}$ to'plamlar berilgan. $A \cap B, A \cap C, A \cap B \cap C$ larni toping.

24. A -12 ning hamma natural bo'luvchilari to'plami bo'lsin.

B - 20 ning hamma natural bo'luvchilari to'plami bo'lin. $A \cap B$ va $A \cup B$ to'plamlarni tuzing.

25.[-2, 5] va [3, 7] kesmalarning kesishmasini toping.

26. $A = \{n \mid n \in N,\ n < 8\}$, $B = \{n \mid n \in N, n > 10\}$ to'plamlar berilgan. $A \cup B$ ni toping.

$a) -2 \in A \cup B.\ b)\ 6 \in A \cup B,\ c) 12 \in A \cup B$ deyish to'g'rimi?

27. E ikki xonali sonlar to'plami, F barcha juft sonlar to'plami bo'lsa, $E \cap F$ to'plamga qanday elementlar kiradi?

28. $A = \{1,3,4,5,7,10\}$, $B = \{3,4,7,9\}$, $C = \{1,9,11\}$ bo'lsin. Quyidagi to'plamlarda nechtadan element mavjud:

$1)\ A \cup (B \cup C),\quad 2)\ (C \cup B) \cup A,\quad 3)\ A \cap (B \cup C),$

$4)\ A \cup (B \cap C),\quad 5)\ A \cap (B \cap C),\quad 6)\ B \cap (A \cup C)?$

29. $E = \{x \mid -4 \le x \le 6\}$, $F = \{x \mid x \in N,\ 3 \le x \le 12\}$ bo'lsin. $E \backslash F$ va $E \backslash F$ to'plamlar elementlarini toping.

30. E ikki xonali natural sonlar to'plami, F-toq natural sonlar to'plami bo'lsin. E\F va F\E to'plamlarni tuzing.

31. N^1 orqali natural sonlar to'plami N ning butun sonlar to'plami Z ga to'ldiruvchisini belgilaymiz. Quyidagilar to'g'rimi?

$1) -5 \in N^1,\quad 2)\ 3 \in N^1,\quad 3)\ 12 \in N^1,$

$4) -4 \notin N^1,\quad 5) -2{,}7 \notin N^1,\quad 6)\ 0 \notin N^1?$

32. $A = \{x \mid x = 2k,\ k \in Z\}$ to‘plamning Z to‘plamga to‘ldiruvchisini toping.

33. $A = \{x \mid x = 5k,\ k \in Z\}$ to‘plamning Z to‘plamga to‘ldiruvchisini toping.

34. $A = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\},\ B = \{1, 3\}$ bo‘lsa, A=B bo‘lishini isbotlang.

35. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ tenglikni isbotlang.

36. $(A \cup B) \setminus B = A$ tenglikni isbotlang.

37 Guruh talabalaridan 15 tasi tennis bo‘yicha seksiyaga qatnashadi, 11 tasi basketbolga, 6 tasi tennisga ham, basketbolga ham qatnashadi. Ikkala seksiyada nechta talaba qatnashadi.

38. 50 ta sayyohdan 5 tasi ingliz tilini ham, fransuz tilini ham bilmaydi. Agar 38 sayyoh ingliz tilini, 43 tasi fransuz tilini bilsa, ikkala tilni biladigan sayyoh nechta?

39. 30 talabadan 18 tasi shaxmatga, 16 tasi shashkaga qiziqadi. Ham shaxmatga, ham shashkaga qiziqadigan o‘quvchilar nechta?

40. 30 talabadan 12 tasi voleybol seksiyasiga, 13 tasi basketbol seksiyasiga, 7 kishi ikkala seksiyaga qatnashadi. Nechta talaba birorta ham seksiyaga qatnashmaydi?

Javoblar: $24)\ A \cap B = \{1, 2, 4\},\ A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 20\},$

$26)\ A \cup B = \{n \mid n \in N,\ n < 8 \wedge n > 10\}$

a) yo‘q, b) ha, c) ha.

$28.\ 2)\ n = 8.\ 4)\ n = 7.\ 6)\ n = 4.\ 30.\ E \setminus F = E,\ F \setminus E = F.\ 32.\ A^1 = \{x \mid x = 2k + 1,\ k \in Z\}$

$38.\ 36\ ta.\ 40.\ 12\ ta.$

§ 2. ASOSIY SONLI TO'PLAMLAR

2.1. Cheksiz o'nli kasrlar va haqiqiy sonlar

Matematikaning asosiy tushunchalaridan biri son tushunchasi hisoblanadi. Son haqidagi tushuncha qadimda paydo bo'lib, uzoq vaqt davomida kengaytirilib va umumlashtirib borilgan. Eng avval sanashda ishlatiladigan sonlar: 1, 2, 3, … n … hosil bo'lgan, bu sonlar natural sonlar deyiladi. Natural sonlar to'plami N bilan belgilanadi: N= {1, 2, … n …}. Eng kichik natural son 1, eng kattasi mavjud emas. Har bir natural sondan keyin ma'lum bitta natural son keladi; 3 dan keyin albatta 4 keladi, 100 dan keyin – 101 va hokazo.

Natural sonlar to'plami ustida faqat ikkita amal: qo'shish va ko'paytirish bajariladi. Agar $a \in N,\ b \in N$ bo'lsa, $(a+b) \in N,\ ab \in N$ bo'ladi.

Natural sonlarga 0 ni va hamma butun manfiy sonlarni qo'shsak, sonlarning yangi to'plami – butun sonlar to'plami hosil bo'ladi, uni Z bilan belgilash qabul qilingan; Z={…, -2, -1, 0, 1, 2, …}. Butun sonlar ustida qo'shish, ko'paytirish amallaridan tashqari ayirish amali ham bajariladi, haqiqatda agar $a \in Z, b \in Z$ bo'lsa, $-a \in Z,\ -b \in Z$.Bundan $a - b = a + (-b)$ bo'ladi. Butun sonlar hosil qilinishidan $N \in Z$ ekanligi kelib chiqadi.

Endi $\frac{p}{q}(p \in Z,\ \ q \in N)$ ko'rinishdagi kasrlarni, oddiy kasr ham deyiladi, ko'rib chiqamiz. p ixtiyoriy butun qiymatni, q ixtiyoriy natural qiymatni qabul qilganda $\frac{p}{q}$ hosil qiladigan sonlar to'plamiga ratsional sonlar to'plami deyiladi va Q bilan belgilanadi: $Q = \left\{ \frac{p}{q},\ \ p \in Z,\ \ q \in N \right\}$, Q ustida to'rt amal: qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish bajariladi. Natural sonlar va butun sonlar ratsional sonlar to'plamiga qism to'plam bo'ladi, ya'ni $N \subset Q, Z \subset Q$.

Ratsional sonlarning ba'zi xossalarini keltiramiz:

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.dan $a = c, b = d$ kelib chiqadi. $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ hamma vaqt bajariladi.

2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ bo'lib $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ bo'lsa, $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$bo'ladi.

3. $\frac{a}{b}$ va $n \neq 0$ bo'lsa $\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}$ va $\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$ bo'ladi.

1-ta'rif. $\frac{a}{b}$ va $\frac{b}{a}$ kasrlar o'zaro teskari kasrlar deyiladi. Boshqacha qilib aytganda, ko'paytmasi 1 ga teng bo'lgan kasrlar o'zaro teskari kasrlar deyiladi. $\frac{5}{7}, \frac{14}{10}$ o‘zaro teskari kasrlar, chunki $\frac{5}{7} \cdot \frac{14}{10} = 1$ Shunga o‘xshash, $2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = 1$ bo‘lgani uchun ular o‘zaro teskari sonlardir.

2-ta’rif. Agar kasrning surati maxrajidan katta yoki teng bo‘lsa, kasr noto‘g‘ri kasr deyiladi. Bu holda suratni maxrajga bo‘lib noto‘g‘ri kasrni butun son va to‘g‘ri kasr (surat maxrajdan kichik) yig‘indisi ko‘rinishida tasvirlash mumkin: $\frac{27}{4}$ noto‘g‘ri kasr, suratni maxrajga bo‘lsak, 27:4=6(3 qoldiq) hosil bo‘ladi, shuning uchun $\frac{27}{4} = 6 + \frac{3}{4} = 6\frac{3}{4}$ hosil bo‘ladi. Boshqa misol $\frac{117}{23} = 5\frac{2}{23}, \frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$

Butun va to‘g‘ri kasr yig‘indisidan iborat son aralash son deyiladi. Uni noto‘g‘ri kasrga aylantirish uchun butun maxrajga ko‘paytiriladi, ko‘paytma suratga qo‘shiladi. Hosil bo‘lgan son noto‘g‘ri kasrning surati bo‘ladi, maxraj o‘zgarmaydi.

$$A\frac{a}{b} = \frac{Ab + a}{b}; \quad 2\frac{1}{3} = \frac{2x3 + 1}{3} = \frac{7}{3};$$

3-ta’rif. Agar kasrning maxraji 10^n dan iborat bo‘lsa, o‘nli kasr deyiladi. Bu holda suratni maxrajga bo‘lish yakunlanadi.

$$\frac{3}{10} = 0,3; \ \frac{27}{10} = 2,7; \ \frac{97}{100} = 0,97$$

$$\frac{5237}{1000} = 5\frac{237}{1000} = 5,237; \ \frac{17}{1000} = 0,017$$

Kasrning suratini maxrajga bo‘lganda, bo‘lish chekli (yakunlanadi) yoki cheksiz (yakunlanmaydi) bo‘lishi mumkin. Birinchi holatda chekli o‘nli kasr hosil bo‘ladi, ikkinchi holatda cheksiz o‘nli kasr hosil bo‘ladi. Umuman olganda, agar kasrning maxraji $b = 2^n 5^k$ ko‘rinishida bo‘lsa, bu kasr chekli o‘nli kasr ko‘rinishida tasvirlanadi, bu yerda n, k=0,1,2,…

Haqiqatda, $\frac{a}{b} = \frac{a}{2^n \cdot 5^k}$ bo‘lsin. Faraz qilaylik, n>k va n=k+m bo‘lsin. Kasr surat va maxrajini 5^m ga ko‘paytiramiz va $\frac{a}{b} = \frac{a}{2^n \cdot 5^k} x \frac{5^m}{5^m} = \frac{5^m a}{2^n \cdot 5^n} = \frac{5^n a}{10^n}$ ni hosil qilamiz, bu esa o‘nli kasrdir.

Agar kasr maxraji 2 va 5 dan tashqari boshqa tub bo‘luvchiga ega bo‘lsa, kasrni chekli o‘nli kasr ko‘rinishida tasvirlab bo‘lmaydi. Bu holda cheksiz o‘nli davriy kasr hosil bo‘ladi:

$$\frac{1}{3} = 0,333\ldots = 0,(3); \ \frac{7}{33} = 0,2121\ldots = 0,(21);$$

$$\frac{11}{30} = 0,36666\ldots = 0,3(6).$$

Chekli o‘nli kasrni davri 0 yoki 9 bo‘lgan cheksiz o‘nli kasrlar ko‘rinishida yozish mumkin.

Aytilganlardan kelib chiqqan holda, ratsional sonlarga quyidagicha ta’rif berish mumkin.

4-ta’rif. Cheksiz davriy o‘nli kasrlar ratsional sonlar to‘plamiga kiradi.

5-ta’rif. Davriy bo‘lmagan cheksiz o‘nli kasrlar irratsional sonlar to‘plamini tashkil etadi. $\sqrt{2},\ 2-\sqrt{3},\ \pi,\ 1{,}2109327\ \ldots$

Ratsional va irratsional sonlar (ya’ni cheksiz davriy va davriy bo‘lmagan o‘nli kasrlar) haqiqiy sonlar deyiladi va R bilan belgilanadi. Ta’rifdan $Q \subset R$ kelib chiqadi, bundan esa $N \subset R, Z \subset R$ hosil bo‘ladi. Haqiqiy sonlarni sonlar o‘qida tasvirlaydigan bo‘lsak, har bir haqiqiy songa o‘qda bitta nuqta mos keladi va aksincha, sonlar o‘qidagi har bir nuqtaga faqat bitta haqiqiy son mos keladi. Demak, haqiqiy sonlar bilan sonlar o‘qidagi nuqtalar orasida o‘zaro bir qiymatli mos kelish mavjud bo‘lib, “Haqiqiy son” o‘rniga “nuqta” ni ishlatish imkonini beradi.

Mashqlar

41. 5 dan katta natural sonlar to‘plamini yozing.

42. Hamma juft natural sonlar to‘plamini yozing.

43. 100 gacha bo‘lgan 3 ga karrali natural sonlarning yig‘indisini toping.

44. 4 ga karrali va 100 dan kichik natural sonlarning yig‘indisini toping.

45. $\frac{26}{31}$ dan katta, birdan kichik va maxraji 31 bo‘lgan kasrlar to‘plamini yozing.

46. $\frac{19}{26}$ dan katta, birdan kichik va maxraji 26 bo‘lgan kasrlar to‘plamini yozing.

47. Maxraji 18 bo‘lgan to‘g‘ri qisqarmaydigan kasrlar to‘plamini yozing.

48. Maxraji 24 bo‘lgan to‘g‘ri qisqarmas kasrlar to‘plamini yozing.

Berilgan sonlarga teskari sonlarni yozing:

49. 1) -5; 2) 3; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $-\frac{5}{7}$.

50. 1) $1\frac{1}{3}$; 2) $-2\frac{1}{2}$; 3) $-6\frac{1}{4}$; 4) $4\frac{1}{5}$.

Quyidagi juftliklardan o‘zaro teskari sonlarni aniqlang.

51. 1) $\frac{2}{3}$ *va* $\frac{3}{2}$ 2) $-\frac{1}{5}$ *va* 5 3) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ *va* $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 4) $\sqrt{2}-1$ *va* $\sqrt{2}+1$

52. 1) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ *va* $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ 2) $\sqrt{6}-\sqrt{5}$ *va* $\sqrt{6}+\sqrt{5}$ 3) $1\frac{4}{5}$ *va* $\frac{5}{4}$ 4) $2\frac{1}{3}$ *va* $\frac{6}{7}$

Quyidagi kasrlardan qaysilari chekli o‘nli kasr bo‘ladi.

53. 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{7}{25}$; 3) $\frac{23}{20}$; 4) $\frac{37}{40}$;

54. 1) $\frac{11}{18}$; 2) $\frac{5}{24}$; 3) $\frac{14}{75}$; 4) $\frac{3}{125}$.

Quyidagi kasrlarni chekli yoki cheksiz o‘nli kasr shaklida yozing.

55. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{23}{40}$.

56. 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{5}{6}$; 3) $\frac{17}{12}$; 4) $\frac{25}{18}$.

Javoblar: 42. $\{x \mid x = 2n, n \in N\}$. 44 .1200 . 46 . $\left\{\frac{20}{26}, \frac{21}{26}, \frac{22}{26}, \frac{23}{26}, \frac{24}{26}, \frac{25}{26}\right\}$.
48 . $\left\{\frac{1}{24}, \frac{5}{24}, \frac{7}{24}, \frac{11}{24}, \frac{13}{24}, \frac{17}{24}, \frac{19}{24}, \frac{23}{24}\right\}$. 50 .1) $\frac{3}{4}$, 2) $-\frac{2}{5}$, 3) $-\frac{4}{25}$, 4) $\frac{5}{21}$. 52 . 2). 4). 54 . 4) . 56 .1) 0,(6). 2) 0,8(3). 3) 1,41(6). 4) 1,3(8).

2.2. Haqiqiy sonlar ustida arifmetik amallar

Butun sonlar ustida arifmetik amallar bizga ma’lum. Ratsional kasrlar ustida bu amallar quyidagicha bajariladi:

1) qo‘shish: $A\frac{a}{b} + B\frac{c}{d} = (A+B)\frac{ad+bc}{bd}$ **.**

Umumiy maxraj topishda agar (b, d)=1 bo‘lsa, umumiy maxraj ularning ko‘paytmasi bd bo‘ladi, agar (a, b)>1 bo‘lsa, umumiy maxraj a ga ham b ga ham bo‘linadigan sonlardan eng kichigi bo‘ladi.

2) ayirish: $A\frac{a}{b} - B\frac{c}{d} = (A-B)\frac{ad-bc}{bd}$

ad-*bc* ning ishorasi *A*-*B* ning ishorasiga qarama-qarshi bo‘lsa, *A*-*B* dan bitta butun olib quyidagicha yozamiz va amalni bajaramiz:

$$(A-B)\frac{ab-bc}{bd} = (A-B-1)\frac{(bd+ad)-bc}{bd}$$

Misol: $5\frac{1}{4} - 2\frac{2}{3} = 3\frac{3-8}{12} = 2\frac{15-8}{12} = 2\frac{7}{12}$

3) ko‘paytirish: Amalni bajarishdan oldin aralash sonlar noto‘g‘ri kasrlarga keltiriladi:

$$A\frac{a}{b} \cdot B\frac{c}{d} = \frac{Ab+a}{b} \cdot \frac{Bd+c}{d} = \frac{(Ab+a)(Bd+c)}{bd}$$

Qisqartirish mumkin bo‘lsa, qisqartiramiz va suratni suratga, maxrajni maxrajga ko‘paytiramiz. Noto‘g‘ri kasr hosil bo‘lsa, butun ajratamiz:

$$2\frac{1}{3}\cdot 1\frac{2}{7}=\frac{7}{3}\cdot\frac{9}{7}=3$$

$$1\frac{2}{3}\cdot 3\frac{1}{2}=\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{2}=\frac{35}{6}=5\frac{5}{6}.$$

4) **Bo‘lish.** Aralash sonlarni noto‘g‘ri kasrlarga aylantiramiz, so‘ng bo‘lishni birinchi (bo‘linuvchini) kasrni ikkinchi (bo‘luvchi) kasrning teskarisiga ko‘paytirish bilan almashtiramiz:

$$A\frac{a}{b}:B\frac{c}{d}=\frac{Ab+a}{b}:\frac{Bd+c}{d}=\frac{Ab+a}{b}\cdot\frac{d}{Bd+c}.$$

Misol: $4\frac{1}{5}:2\frac{1}{3}=\frac{21}{5}:\frac{7}{3}=\frac{21}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{3\cdot 3}{5}=\frac{9}{5}=1\frac{4}{5}$.

Irratsional ifodalar ustida amallarni ko‘rib chiqamiz.

1. $\sqrt{8}+\sqrt{18}-4\sqrt{2}=\sqrt{4x2}+\sqrt{9x2}-4\sqrt{2}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}=\sqrt{2}$ yoki

$\sqrt{8}+\sqrt{18}-4\sqrt{2}=\sqrt{2}(\sqrt{4}+\sqrt{9}-4)=\sqrt{2}(2+3-4)=\sqrt{2}$

2. $\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}$ qo‘shishni bajarishdan oldin kasrlarning maxrajini irratsionallikdan ozod qilamiz:

$$\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{(\sqrt{4}+\sqrt{3})(\sqrt{4}-\sqrt{3})}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{6-3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{3}=\frac{6-2\sqrt{3}}{3}.$$

Umuman olganda, irratsional ifodalar ustida amallar arifmetik amallar qonunlariga va ildizlar ustida amallar qoidalariga muvofiq bajariladi.

Darajadan ildiz chiqarishda daraja ko‘rsatkichi ildiz ko‘rsatkichiga bo‘linadi, bo‘linma va qoldiq mos ravishda ildizdan chiqqan va ildiz ostida qolgan asosning daraja ko‘rsatkichi bo‘ladi:

$\sqrt[3]{a^5}=a\sqrt[3]{a^2}$, chunki (5=3⋅1+2)

$\sqrt[4]{a^9\cdot b^{14}}=a^2b^3\sqrt[4]{ab^2}.$

$\sqrt[5]{\frac{a^{12}}{b^{18}}}=\frac{a^2}{b^3}\sqrt[5]{\frac{a^2}{b^3}}.$

2-misol. O‘xshash ildizlarni keltiramiz:

$A\sqrt[n]{a}+B\sqrt[m]{b}+C\sqrt[n]{a}+D\sqrt[m]{b}=(A+C)\sqrt[n]{a}+(B+D)\sqrt[m]{b}.$

3-misol. Ildizlarni ko‘paytirish yoki bo‘lishda ularni umumiy ko‘rsatkichiga keltiramiz: $\sqrt[n]{A}\cdot\sqrt[k]{B}=\sqrt[nk]{A^k}\cdot\sqrt[nk]{B^n}=\sqrt[nk]{A^kB^n}.$

$$\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[k]{B}}=\frac{\sqrt[nk]{A^k}}{\sqrt[nk]{B^n}}=\sqrt[nk]{\frac{A^k}{B^n}}.$$

$$1)\ \sqrt{2\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[4]{9+4\sqrt{2}}=\sqrt[4]{(2\sqrt{2}-1)^2}\cdot\sqrt[4]{9+4\sqrt{2}}=$$

$$=\sqrt[4]{(9-4\sqrt{2})(9+4\sqrt{2})}=\sqrt[4]{81-32}=\sqrt[4]{49}=\sqrt{7}.$$

$$2)\ \frac{\sqrt[4]{324}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt[4]{324}}{\sqrt[4]{4}}=\sqrt[4]{\frac{324}{4}}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3.$$

Ildizlarni hisoblashda murakkab kvadrat ildizni almashtirish:

$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$ formulasidan foydalanish mumkin.

$\sqrt{\frac{9+\sqrt{65}}{2}}+\sqrt{\frac{9-\sqrt{65}}{2}}$ ifoda hisoblansin.

$\sqrt{9\pm\sqrt{65}}=\sqrt{\frac{9+\sqrt{81-65}}{2}}\pm\sqrt{\frac{9-\sqrt{81-65}}{2}}=\sqrt{\frac{9+4}{2}}\pm\sqrt{\frac{9-4}{2}}$ ni hisobga olib topamiz.

$$\sqrt{\frac{9+\sqrt{65}}{2}}+\sqrt{\frac{9-\sqrt{65}}{2}}=\sqrt{\frac{9+4}{4}}+\sqrt{\frac{9-4}{4}}+\sqrt{\frac{9+4}{4}}-\sqrt{\frac{9-4}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}=\sqrt{13}.$$

Ratsional sonlar ustida bajariladigan arifmetik amallarning barcha xossalari haqiqiy sonlar uchun ham o‘z kuchida qoladi.

α,β,γ haqiqiy sonlar bo‘lsin.

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha$$

$$\alpha\beta=\beta\alpha$$

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$$

$$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$$

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$$

$$\alpha+0=\alpha;\alpha\times1=\alpha;\alpha+(-\alpha)=0;\frac{\alpha}{\alpha}=1;$$

Mashqlar

Hisoblang:

57. $1)\ 7\frac{5}{8}+2\frac{3}{8};$ $\quad 2)\ 6\frac{5}{7}+3\frac{2}{7};$ $\quad 3)\ 5\frac{5}{6}-2\frac{1}{6};$

$4)\ 5\frac{4}{5}-3\frac{2}{5};$ $\quad 5)\ 8\frac{2}{7}-5\frac{3}{7};$ $\quad 6)\ 4\frac{1}{4}-2\frac{3}{4}.$

58. $1)\ 5\frac{1}{3}-2\frac{1}{2};$ $\quad 2)\ 4\frac{1}{7}-3\frac{1}{5};$ $\quad 3)\ 5-1\frac{5}{6};$

$4)\ 6-3\frac{1}{6};$ $\quad 5)\ 5\frac{1}{5}-3;$ $\quad 6)\ 3\frac{2}{3}-2.$

Amallarni bajaring:

59. 1) $2\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}$; 2) $3\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}$;

3) $5\frac{1}{3}\times 1\frac{1}{8}$; 4) $3\frac{1}{4}\times 1\frac{3}{13}$.

60. 1) $6\frac{2}{3}:3\frac{3}{4}$; 2) $3\frac{4}{7}:1\frac{1}{14}$;

3) $3\frac{1}{3}:1\frac{1}{4}$; 4) $5\frac{1}{4}:3\frac{1}{8}$.

Amallarni bajaring:

61. 1) $\sqrt{12}+\sqrt{27}-4\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{75}+\sqrt{108}-5\sqrt{3}$:

3) $\frac{2}{\sqrt{4}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{2}}$; 4) $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

5) $\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\sqrt{3}$; 6) $\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}-2\sqrt{5}$;

Hisoblang:

62. 1) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; 2) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{7+4\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$; 4) $\sqrt{19+8\sqrt{3}}+\sqrt{19-8\sqrt{3}}$;

5) $\sqrt{21+8\sqrt{5}}+\sqrt{21-8\sqrt{5}}$; 6) $\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}$.

Proporsiyaning noma’lum hadini toping:

63. 1) x:3=7:2; 2) $1\frac{1}{3}:x=2:2\frac{1}{2}$;

3) $3\frac{1}{3}:5=2\frac{2}{5}:x$: 4) $x:6=8:5$;

64. 1) $2\frac{1}{3}:1\frac{1}{2}=x:\frac{9}{14}$; 2) $4\frac{2}{3}:4=2\frac{1}{4}:x$.

X noma’lumni toping:

65. $\frac{(4-3{,}3):0{,}16}{x}=\frac{3\frac{2}{7}-1\frac{2}{7}}{41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}}$; 66. $\frac{3{,}2-0{,}2}{0{,}4+0{,}8}=\frac{0{,}016:0{,}12+0{,}7}{x}$;

Hisoblang:67. $\left(\frac{3{,}75+2{,}5}{2{,}5-1{,}875}-\frac{2{,}75+1{,}5}{2{,}75-1{,}5}\right)\cdot\frac{10}{11}$

68. $\frac{\left(0{,}3275-2\frac{7}{24}:12\frac{2}{9}\right):0{,}07}{12{,}584:6{,}05+1{,}92}$.

Hisoblang:

69. $\left[(1\frac{1}{12}+2\frac{5}{32}+\frac{1}{24})\times 9\frac{3}{5}+2{,}13\right]\times 2\frac{1}{2}$; 70. $\frac{(2\frac{3}{8}-\frac{2}{3}\cdot 2\frac{5}{14})\cdot 19\frac{4}{9}}{3\frac{1}{2}+4\frac{5}{8}}$.

Javoblar: 58. 1) $2\frac{5}{6}$; 2) $\frac{33}{35}$; 3) $3\frac{1}{6}$; 4) $2\frac{5}{6}$; 5) $2\frac{1}{5}$; 6) $1\frac{2}{3}$; 60. 1) $1\frac{7}{9}$; 2) $3\frac{1}{3}$; 3) $2\frac{2}{3}$; 4) $1\frac{17}{25}$; 62. 1) $-2\sqrt{2}$; 2) $-2\sqrt{3}$; 3) 6; 4) 8; 5) 8; 6) 10; 64. 2) $1\frac{13}{14}$; 66. $\frac{1}{3}$; 68. 0,5; 70. $1\frac{12}{13}$.

2.3. Haqiqiy sonning moduli va uning asosiy xossalari

Ta'rif: Haqiqiy son *a* ning absolut qiymati yoki moduli deb ($|a|$ bilan belgilanadi) *a* songa, agar $a \geq 0$ bo'lsa, va – *a* songa, agar $a<0$ bo'lsa, aytiladi, ya'ni:

$$|a| = \begin{cases} a, \ \ agar \ \ , a \geq 0 \ \ \text{bo`lsa}, \\ -a, \ \ agar \ \ , a < 0 \ \ \text{bo`lsa}. \end{cases}$$

Misol: |3|=3, |0|=0, |-4|=4.

Ta'rifdan har qanday haqiqiy *a* son uchun $a \leq |a|$ munosabat kelib chiqadi.

Absolut qiymatning ba'zi xossalarini ko'rib chiqamiz:

1. $|a+b| \leq |a|+|b|$, ya'ni ikkita haqiqiy son algebraik yig'indisining moduli shu sonlar modullarining yig'indisidan katta emas.

Isbot: Agar $a+b \geq 0$ bo'lsa, $|a+b|=a+b \leq |a|+|b|$ chunki $a \leq |a|$ va $b \leq |b|$.

Agar $a+b<0$ bo'lsa, $|a+b|=-(a+b)=(-a)+(-b) \leq |a|+|b|$.

Misol: 1) |-3+5|<|-3|+|5|=3+5=8 yoki 2<8;

2) |-2-4|=|-2|+|-4|=2+4=6 yoki 6=6.

Isbot qilish mumkinki, $|a+b+.....+c| \leq |a|+|b|+...+|c|$;

2. $|a-b| \geq |a|-|b|$, ya'ni ayirmaning absolut qiymati kamayuvchi va ayriluvchi absolut qiymatlarining ayirmasidan kichik emas.

Isbot uchun $a-b=c$ deb, $a=b+c$ ni topamiz.

$|a|=|b+c| \leq |b|+|c|=|b|+|a-b|$, bundan

$|a|-|b| \leq |a-b|$ kelib chiqadi.

Misol: 1. |(-7)-4|>|-7|-|-4|=|7-4|=3, 11>3

2. |5-2|=|5|-|2|=5-2=3 yoki 3=3

3. Ko'paytmaning moduli ko'payuvchilar modullarining ko'paytmasiga teng, ya'ni:

$|a \cdot b \cdot ..... \cdot c|=|a| \cdot |b| \cdot ..... \cdot |c|$;

4. Bo‘linmaning moduli bo‘linuvchi bilan bo‘luvchi modullarining nisbatiga teng, ya’ni

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}.$$

Oxirgi ikkita xossaning isboti modulning ta’rifidan kelib chiqadi.

Mashqlar

71. Modulning quyidagi xossalarini isbotlang:

1). $|a| \geq -a$;

2) $|a|=|-a|$;

3) $|a-b| \leq |a|+|b|$;

4) $|a+b| \geq |a|-|b|$.

72. Tenglikni isbotlang:

1) $|a^2|=|a|^2=a^2$;

2) $|a^{2n}|=|a|^{2n}=a^{2n}$.

73. Sonlarni taqqoslang:

1) $|6{,}7|$ va 6;

2) $-|0{,}5|$ va $-0{,}5$;

3) $|4{,}2|$ va $4{,}2$;

4) $|-3{,}4|$ va $3{,}4$;

5) $\left|-3\frac{2}{3}\right|$ va $-3\frac{2}{3}$;

6) $|a|$ va a.

74. Harflarning berilgan qiymatlarida ifodaning qiymatini hisoblang:

1) $|a|+|2b|$, $a=-4, b=3$;

2) $|a+b|-2|b|$, $a=5$, $b=-3$;

3) $\dfrac{3-|3a|+2|b|}{|a|-|b|}$, $a=1$, $b=3$;

4) $\dfrac{2+|a-b|-3|a|}{2|a|+|b|}$, $a=-1$, $b=3$.

75. 1) $|x|=y$, 2) $|x|=-y$ bo‘lsa y qanday son?

76. 1) $|x|=|y|$; $|x|=x$; $|y|=-x$; bo‘lsa y qanday son?

77. Ifodalarni modul belgisisiz yozing.

1) $|x+1|$; 2) $|x-2|$; 3) $|2x-3|$;

4) $|4x+5|$; 5) $|3x-7|$; 6) $|-2x+3|$;

7) $|-2x+3|$; 8) $|-6x+5|$; 9) $|-2x-5|$;

10) $|3x|$; 11) $|-3x+4|$; 12) $|4x-7|+2$.

78. Ifodani modul belgisisiz yozing.

1) $|x+1|+|x+2|$; 2) $|2x+1|+|x-3|$;

3) $|2x-4|-2|x+3|$; 4) $|4x+5|-3|x+2|$;

5) $||x|+3|$; 6) $||x|-1|$;

7) $|x+2-|x||$; 8) $|x-3-|x||$.

Javoblar:

74. 1) 10; 2) -4; 3) -3; 4) 0,6; 76. manfiy; 78. 1) $\begin{cases} -x-1, & x<-1 \\ x+1, & x\geq -1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -3x+2, & x<-\frac{1}{2} \\ x+4, & -\frac{1}{2\leq x<3} \\ 3x-2, & x>3 \end{cases}$

2.4. Haqiqiy sonning butun va kasr qismi

1-ta'rif. Berilgan *a* sondan katta bo‘lmagan butun sonlarning eng kattasiga *a* sonning butun qismi deyiladi va [*a*] yoki *E(a)* bilan belgilanadi, “*a* ning butun qismi” yoki “antye *a*” (antye fransuzcha *entiere* – butun) deb o‘qiladi. Masalan:

[2,3]=[2,9]=2, [0,1]=[0,98]=0

[-2,5]=[-2,3]=-3, 4⋅[0,6]=4⋅0=0

$[4\frac{3}{7}+2\frac{1}{5}]=[6\frac{22}{35}]=6$, $4:[3\frac{1}{5}]=1\frac{1}{3}$

$[-\pi]=-4$.

Antyening ba’zi xossalari:

a) $a,b\in N$ bo‘lsa, [*a*+*b*]=[*a*]+[*b*] bo‘ladi, misol:

[4+5]=[4]+[5]=9

b) $a,b\in R$ bo‘lsa, [*a*+*b*]≥[*a*]+[*b*] bo‘ladi. (*a≥0, b≥0*)

Masalan: [4,7]+[5,6]=4+5=9,

[4,7+5,6]=[10,3]=10, demak 10>9

[2,3]+[3,1]=2+3=5; [2,3+3,1]=[5,4]=5; 5=5.

2-ta'rif. *a*-[*a*] ayirma *a* sonning kasr qismi deyiladi ba {*a*} orqali ifodalanadi. {*a*}=*a*-[*a*], masalan:

{3,4}=3,4-[3,4]=0.4;

{-2,6}=-2,6-[-2,6]=-2,6-(-3)=0,4

Umuman olganda 0≤{*a*}<1

Agar [*a*]=[*b*] bo‘lsa, -1< *a*-*b*<1 ekanligini isbot qilamiz:

$a=[a]+\{a\}$, $b=[b]+\{b\}$ tengliklardan: $a-b=[a]+\{a\}-[b]-\{b\}=([a]-[b])+(\{a\}-\{b\})=\{a\}-\{b\}$ ni hosil qilamiz. $0\le\{a\}<1$ va $0\le\{b\}<1$ ligini hisobga olib, qarama qarshi ma'nodagi tengsizliklarni ayirish mumkinligini hisobga olib,

$-1\le\{a\}-\{b\}\le 1$ ni hosil qilamiz.

Mashqlar

79. Agar a butun va $a\ge 0$ bo‘lsa $[na]\ge n\{a\}$ bo‘lishini isbotlang.

80. 100! soni nechta nol bilan tugaydi?

81. Hisoblang:

1) $[3,7]$; 2) $[0,8]$; 3) $[\pi]$

4) $[\sqrt{14}]$; 5) $[3]$; 6) $[-2]$

7) $[-3,9]$; 8) $[-0,4]$.

82. Hisoblang:

1) $127\times[\frac{1}{3}]$; 2) $13\times[1\frac{3}{5}]$; 3) $[\frac{28}{3}]\times 6$;

4) $[3\frac{1}{6}+5\frac{5}{6}]$; 5) $[4\frac{1}{7}+3\frac{4}{7}]$; 6) $[10\frac{5}{8}]+[3\frac{7}{8}]$

7) $[6\frac{5}{9}]-[1\frac{1}{7}]$; 8) $[\frac{9^2}{100}]\times 69$; 9) $[\frac{170}{53}]^2$.

83. Tenglamani yeching:

1) $[\frac{2x+1}{3}]=4$; 2) $[3x-2]=5$; 3) $[\frac{2x}{3}-1]=6$;

4) $[\frac{3x}{5}+1]=-3$; 5) $[\frac{x+1}{2}]=x$; 6) $[\frac{2x+1}{3}]=2x$.

Javoblar: 80. 21; 82. 1) 0; 2) 13; 3) 54; 4) 9; 5) 7; 6) 13; 7) 5; 8) 0; 9) 9.

§ 3. KOMPLEKS SONLAR

3.1. Kompleks sonlar va ular ustida amallar

1-ta'rif. Kompleks son deb z=*a*+bi ifodaga aytiladi. Bu yerda *a*, b$\in R,\ i=\sqrt{-1}$ bo'lib, mavhum birlik deb ataladi.

$i^2=-1, i^3=-i, i^4=1,..., i^{4n}=1, i^{4n+1}=i, i^{4n+2}=-1, i^{4n+3}=-i, i=\sqrt{-1}$ soni biror real kattalikni ifodalamaydi. *a* – kompleks sonning haqiqiy qismi, *bi* – mavhum qismi deyiladi. Kompleks sonning ma'nosi ham uning haqiqiy *a* va mavhum *bi* sonlar "kompleksidan" iborat ekanligidadir. *z=a+bi* kompleks sonning algebraik shakli deyiladi.

$a=\mathrm{Re}\, z$ va $b=\mathrm{Im}\, z$ deb belgilash qabul qilingan (Re fransuzcha **reele** – haqiqiy, **Im** – fransuzcha **imaginaire** – mavhum).

Agar (1) da *b=0* bo'lsa $z=a$ haqiqiy son hosil bo'ladi, demak haqiqiy sonlar to'plami R kompleks sonlar to'plami C ning qism – to'plamidir. $R\subset C$

Agar *a=0* bo'lsa, $z=bi$ sof mavhum son hosil bo'ladi, *a=b=0* bo'lganda $z=0$ kompleks son hosil bo'ladi.

2-ta'rif. Ikkita kompleks son ***z=a+bi*** va ***w=c+di*** teng deyiladi, agar *a=c* va *b=d* bo'lsa, ya'ni haqiqiy va mavhum qismlari mos ravishda teng bo'lsa, masalan: z=*1,5+0,4i* va $w=\frac{3}{2}+\frac{2}{5}i$ bo'lsa, z=*w*, chunki $1{,}5=\frac{3}{2}$ va $0{,}4=\frac{2}{5}$. Kompleks sonlar uchun katta yoki kichik munosabatlar aniqlanmaydi.

3-ta'rif. Bir-biridan faqat mavhum qismining ishorasi bilan farq qiluvchi ikkita kompleks son: $z=a+bi$ va $\bar{z}$ =*a-bi* qo'shma kompleks sonlar deyiladi. z ga qo'shilgan sonni $\bar{z}$ bilan belgilash qabul qilingan: z =*3+2i*, $\bar{z}=3-2i$.

Haqiqiy son *a* ga qo'shmasi o'zi bo'ladi: $\bar{a}=\overline{a+0\times i}=a-0\times i=a$.

Kompleks sonlar ustida arifmetik amallar haqiqiy sonlar ustidagi amallarga o'xshaydi:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i \qquad (2)$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i \qquad (3)$$

$$(a+bi)\times(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i \qquad (4)$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \qquad (5)$$

Ko‘rinadiki, kompleks sonlarning yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasi va bo‘linmasi yana kompleks sondan iborat. (2) va (3) – amallarga bevosita ishonch hosil qilish mumkin. (4) va (5) ni keltirib chiqaramiz. $(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$, bu yerda i^2=-1 ekanligi hisobga olindi;

$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(a+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$ bo‘lib, bundan (5) hosil bo‘ladi.

$(a+bi)+(a-bi)=2a;$
$(a+bi)\times(a-bi)=a^2+b^2,$

ya’ni qo‘shma kompleks sonlarning yig‘indisi va ko‘paytmasi haqiqiy songa teng.

Misollar

$$(3+4i)+(-2-5i)=1-i$$
$$(2+3i)-(-3+2i)=5+i$$
$$(2-5i)\cdot(4+i)=(8+5)+(2-20)i=13-18i$$
$$\frac{3-2i}{2+i}=\frac{(3-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{(6-2)+(-3-4)i}{4+1}=\frac{4}{5}-\frac{7}{5}i.$$

Kompleks sonlar ustida arifmetik amallarning quyidagi xossalarini o‘zingiz tekshirib ko‘ring:

(*Z, W* va *U* – kompleks sonlar)

1) $Z+W=W+Z,$
2) $Z\times W=W\times Z,$
3) $(Z+W)+U=Z+(W+U),$
4) $(ZW)\times U=Z\times(WU),$
5) $Z\pm 0=Z,$
6) $Z\times 1=Z,$
7) $Z\times(W\pm U)=ZW\pm ZU;$

Agar Z va *W* kompleks sonlar $Z+W=0$ tenglikni qanoatlantirsa, va *W* o‘zaro qarama qarshi kompleks sonlar deyiladi. Z ga yagona qarama-qarshi son mavjud bo‘lib, uni $-Z$ bilan belgilash qabul qilingan: $Z=2+5i$ ga qarama-qarshi son $-Z=-2-5i$ dir.

Agar Z va *W* kompleks sonlar $Z\times W=1$ tenglikni qanoatlantirsa, *Z* va *W* o‘zaro teskari kompleks sonlar deyiladi. Har qanday $Z\neq 0$ kompleks songa yagona teskari son mavjud, bu son $\frac{1}{Z}$ bilan belgilanadi: $Z=2-3i$ ga teskari son: $\frac{1}{Z}=\frac{1}{2-3i}$ dan iborat. $Z=0$ songa teskari son mavjud emas.

$z = a + bi$ ga teskari sonni quyidagicha yozish maqsadga muvofiqdir:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

Kompleks songa teskari sonni topishda quyidagi teoremalardan foydalanish mumkin:

1-teorema: $\overline{Z + W} = \overline{Z} + \overline{W}$

2-teorema: $\overline{Z^n} = (\overline{Z})^n$

Mashqlar

84. Berilgan kompleks sonlar uchun haqiqiy qismi $\operatorname{Re} z$ va mavhum qismi $Lm\, z$ ni aniqlang?

1) $z = 2 - 3i$ 2) $z = -4 + 2i$ 3) $z = 4$

4) $z = \frac{2}{3} + i$ 5) $z = 1 + 0{,}2i$ 6) $z = 2i$

7) $z = 0{,}6 - 3i$ 8) $z = 11 - 6i$ 9) $z = -3$

10) $z = \frac{1}{3} - \frac{2}{5}i$ 11) $z = -2 - \frac{4}{7}i$ 12) $z = -6i$

13) $z = 0{,}7 - 0{,}4i$ 14) $z = \frac{1}{5} - \frac{1}{3i}$ 15) $z = 0$

85. Berilgan haqiqiy va mavhum qismlari bo‘yicha kompleks sonni yozing:

1) $\operatorname{Re} z = 0,\ Lm\, z = 3$ 2) $\operatorname{Re} z = 3,\ Lm\, z = 0,$ 3) $\operatorname{Re} z = 3,\ Lm\, z = -2$

4) $\operatorname{Re} z = 1,\ Lm\, z = 0{,}3$ 5) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2},\ Lm\, z = \frac{4}{7}$ 6) $\operatorname{Re} z = 0,\ Lm\, z = 0$

86. Quyidagi tengliklardan *x* va y ni toping:

1) $x + 3yi = 2 - 5i$ 2) $2x - 5yi = \frac{1}{2} + 2i$

3) $(2x + y) + (x - 3y)i = 3 - (x - 2y + 5)i$

4) $5y + (2x + 4y)i = x + (x - 5y + 1)i$

87. Quyidagi sonlarga qarama-qarshi sonni toping:

1) $z = 2 - 3i,$ 2) $z = 4 + 5i$ 3) $z = -5 + i$

4) $z = 3i$ 5) $z = 3$ 6) $z = 0$

88. Quyidagi sonlarga teskari sonni toping:

1) $z = \frac{1}{2 - 3i}$ 2) $z = 4 + i$ 3) $z = 5$

4) $z = -2$ 5) $z = 6 - 5i$ 6) $z = \frac{2}{3 + i}$

89. Z va W berilgan. Ular ustida $Z + W$, $Z - W$, $Z \times W$ va $\frac{Z}{W}$ amallarini bajaring:

1) $Z = 2 - 3i,\ W = 1 + 2i$ 2) $Z = 2i,\ W = 5 + 3i$ 3) $Z = 2i,\ W = 2 - 5i$

4) $Z = 4,\ W = 6 - i$ 5) $Z = 5,\ W = -2i$ 6) $Z = 2 + 3i,\ W = 2 - 3i$

7) $Z = \frac{1}{2} + 2i,\ W = \frac{1}{2} - 2i$ 8) $Z = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}i, W = 3i$ 9) $Z = 0,\ W = 2 - i$

10) $Z = 0,\ W = 3 + i$ 11) $Z = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i,\ W = 1 + i$

12) $Z = 1 - i,\ W = \frac{1+\sqrt{2}}{2} + \frac{1+\sqrt{2}}{2}i$ 13) $Z = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i,\ W = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$

14) $Z = Cos^2\alpha + iSin^2\alpha,\ W = Sin^2\alpha + Cos^2\alpha$

90. Hisoblang:

1) $\frac{(3-i)(1-3i)}{1-i}$, 2) $\frac{(2+3i)(3+2i)}{2+i}$, 3) $\frac{3}{2-3i} + \frac{5}{2+3i}$, 4) $\frac{5}{3-i} + \frac{2}{3+i}$,

5) $\frac{4-3i}{(2-i)(3+i)}$, 6) $\frac{2-5i}{(5-i)(4+i)}$, 7) $(2-3i)^2$, 8) $(3+2i)^2$

9) $(\frac{2-3i}{1+i})^2$, 10) $(\frac{1+2i}{1-i})^2$;

91. Ifodalarni qo‘shma kompleks sonlar ko‘paytmasi shaklida yozing:

1) $4a^2 + b^2$; 2) $9a^2 + 16b^2$; 3) $3a^2 + 7b^2$; 4) $8a^2 + 5b^2$; 5) $81a^2 + 26b^2$

92. x va y ning qanday qiymatlarida quyidagi sonlar o‘zaro qo‘shma bo‘ladi:

1) $Z = (x + y) - 3i$ va $W = 2 - (2x - y)i$,

2) $Z = 3x - 3yi$ va $W = (x + 5) + (2y - 5)i$

93. Ildizlaridan biri: 1) $2 - i$ 2) $5i$ 3) $1 - i$ 4) $2 + \sqrt{3}i$ bo‘lgan haqiqiy koeffitsiyentli kvadrat tenglama tuzing.

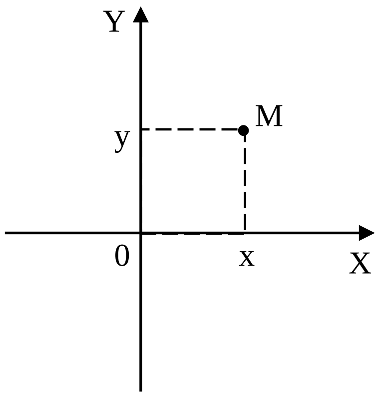
Javoblar:

88. 1) $2 - 3i$; 2) $\frac{1}{4+i}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{6-5i}$; 6) $\frac{3+i}{2}$; 90. 1) $5 - 5i$; 2) $\frac{13}{5}(1+2i)$; 3) $\frac{16-6i}{13}$; 4) $\frac{21+3i}{10}$; 5) $\frac{31-17i}{8}$; 6) $\frac{37-107i}{442}$; 7) $-5 - 12i$; 8) $5 + 12i$; 9) $-\frac{12-5i}{2}$; 10) $-\frac{4+3i}{2}$; 92. 1) $x = -\frac{1}{3},\ y = 2\frac{1}{3}$; 2) $x = 2{,}5,\ y = -5$.

3.2. Kompleks sonning geometrik tasviri. Kompleks sonning trigonometrik shakli

$$z = x+yi \qquad (1)$$

Agar *x* va *y* ga *Oxy* tekislikdagi nuqta koordinatalari deb qaraydigan bo‘lsak, ya’ni M (x;y), u holda har bir (1) kompleks songa *Oxy* tekislikdagi bitta nuqta (4-rasm) mos keladi. Aksincha, *Oxy* tekislikning har bir nuqtasi faqat bitta kompleks sonni aniqlaydi. (1) da y=0 bo‘lsa, z=x haqiqiy son hosil bo‘lib, unga *Ox* o‘qidagi nuqta mos keladi.

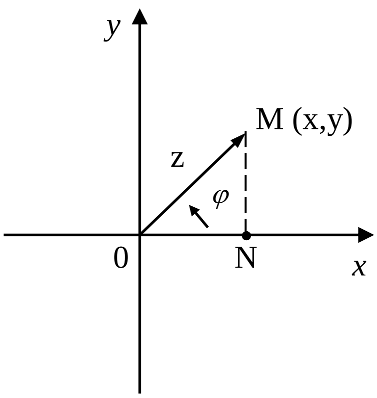


4-rasm.

Shuning uchun *Ox* o‘qi haqiqiy o‘q ham deyiladi. Agar (1) da x=0 bo‘lsa, $z = yi$ mavhum son hosil bo‘lib, unga *Oy* o‘qidagi nuqta mos keladi, shunga ko‘ra *Oy* o‘qi mavhum o‘q ham deyiladi. z =0 songa koordinata boshi mos keladi. *Oxy* tekislik kompleks tekislik deyiladi va z bilan belgilanadi.

Bundan tashqari, har bir kompleks son (1) ga boshi koordinatalar boshiga, oxiri M (x;y) nuqtada bo‘lgan vektor (radius – vektor) mos keltiriladi.

Bu holda ham, har bir kompleks songa bitta radius – vektor mos kelib, har bir nuqta bitta kompleks sonni aniqlaydi (5-rasm)



5-rasm.

Koordinatalar boshidan M (x, y) nuqtagacha bo‘lgan masofa, ya’ni OM vektorning uzunligi kompleks son – (1) ning moduli deyiladi va |z| yoki r bilan belgilanadi, shunga ko‘ra: r=|z|.

Chizmada *Ox* o‘qining musbat yo‘nalishi bilan radius vektor orasidagi burchakni φ bilan belgilab, ΔONM dan topamiz:

$$x = \text{r}\cos\varphi \qquad y = \text{r}\sin\varphi \qquad (2)$$

x va *y* qiymatini (1) ga qo‘yib

$$z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (3)$$

ni topamiz. Kompleks sonning (3) shakldagi ko‘rinishiga kompleks sonning trigonometrik shakli deyiladi, φ esa kompleks sonning argumenti deyiladi va *Argz* bilan belgilanadi. φ bilan birga k ning ixtiyoriy butun qiymatida φ+2πk ham z ning argumenti bo‘ladi, ya’ni argz = φ+2πk. Bu qiymatlardan eng kichik musbati, ya’ni [0,2π] oraliqda yotuvchi qiymati, argumentning bosh qiymati deyiladi va *Argz* bilan belgilanadi, ya’ni *Argz* = φ.

Bosh argument φ uchun $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$ munosabatlar o‘rinli bo‘lib, φ ning qiymatini aniqlashda *x* va *y* ning ishoralariga, ya’ni M nuqtaning qaysi chorakda ekanligiga e`tibor berish kerak.

Misol: z=1-i kompleks sonning moduli va argumenti topilsin, uning trigonometrik shakli yozilsin.

Yechish: Bu yerda x=1, y=-1 bo‘lib, M(1; -1) nuqta to‘rtinchi chorakda yotadi.

$r = |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi = \frac{7\pi}{4}$ shuning uchun

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

z=0 sonning moduli 0 ga teng bo‘lib, argumenti aniqlanmaydi.

Trigonometrik shaklda berilgan kompleks sonlarni ko‘paytirish, bo‘lish va darajaga oshirish quyidagi qoidalarga asosan bajariladi.

$z = r(\cos\varphi + \sin\varphi)$ va $w = R(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ *bo`lsin*.

1. $zw = rR(\cos(\varphi + \alpha) + i\sin(\varphi + \alpha))$
2. $\frac{z}{w} = \frac{r}{R}(\cos(\varphi - \alpha) + i\sin(\varphi - \alpha))$
3. $z^n = r^n(\cos\varphi + i\sin n\varphi)$

Misol:

$z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, $w = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ bo`lsa, $Z \cdot w$, va $\frac{z}{w}$ va z topilsin.

Yechish:

$$1)\ z\cdot w = 6\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 6\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -3\sqrt{3} + 3i.$$

$$2)\ \frac{z}{w} = \frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}i$$

$$3)\ z^4 = 2^4\left(\cos\left(4\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(4\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 16\left(\cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 16\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8(1 - i\sqrt{3}) = -8 + 8\sqrt{3}i.$$

Mashqlar

94. Kompleks tekislikda berilgan songa mos keluvchi nuqtani va vektorni yasang:

1) z=2-3i; 2) z=-3-2i; 3) z=3;
4) z=2i; 5) z=-1-3i; 6) z=5-4i;
7) z=(3-2i)(1-2i) 8) $z=\frac{4-i}{2+2i}$.

95. Kompleks sonni trigonometrik shaklda yozing.

1) z=1-*i*; 2) z=1+*i*; 3) z=-1-*i*;
4) z=1; 5) z=2; 6) z=-*i*
7) z=*i*; 8) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; 9) $z=\sqrt{3}+i$
10) $z=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$; 11) $z=2i$; 12) $z=\sqrt{3}-\sqrt{3}i$;
13) $z=2\cos\frac{5\pi}{4}-2\sin\frac{5\pi}{4}$; 14) $z=-\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}$.

96. z va w kompleks sonlarni trigonometrik shaklda yozing va zw hamda $\frac{z}{w}$ amallarni bajaring.

1) z=1+i; $w=\sqrt{3}-i$
2) z=2-2i; $w=1+\sqrt{3}i$
3) z=3+3i; w=i
4) z=2i; w=-4+4i.

97. a) z kompleks son berilgan. z^3, z^4, z^6 topilsin:

1) z=1-*i*; 2) z=*i*.

b) Quyidagi sonlarni algebraik ko‘rinishda yozing.

1) $z=2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$; 2) $z=3(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$

Javoblar:

95. 2) $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$; 4) $\cos 0+i\sin 0$. 6) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$. 8) $\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}$. 10) $2(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$. 12) $\sqrt{6}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$. 14) $\cos\frac{14\pi}{15}+i\sin\frac{14\pi}{15}$.

96. 2) $ZW=4\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$. $\frac{Z}{W}=\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}$. 4) $ZW=8\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$. $\frac{Z}{W}=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})$. 97. *a*) $z^3=-i$. $z^4=1$. $z^6=-1$. *b*) 2) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}-i\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

3.3. Kompleks sondan kvadrat ildiz chiqarish

Kompleks son z dan kvadrat ildiz deb, $w^2=z$ tenglikni qanoatlantiradigan har qanday kompleks songa aytiladi. Umuman *z* dan *n*-natural darajali ildiz deb, $w^n=z$ tenglamani qanoatlantiruvchi har qanday w kompleks songa aytiladi.

Agar z=0 bo‘lsa, $w^n=0$ tenglik faqat w=0 uchun bajariladi. Agar $z\neq 0$ bo‘lsa, $w^n=z$ tenglama n ta har xil qiymatlarda bajariladi:

Agar $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ berilgan bo‘lsa $w^n=z$ tenglamaning ildizlari quyidagi formuladan topiladi:

$$w_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\qquad k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Bu formulada k ga ketma-ket 0, 1, 2, …n-1 qiymatlarni berib w_k uchun n ta har xil qiymat hosil qilamiz. k ning boshqa qiymatlarida w_k qiymati oldin hosil bo‘lgan qiymatlaridan birortasiga teng bo‘ladi.

Misol. $\sqrt{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$ ning barcha w_k (k=0, 1) qiymatlarini toping.

Yechish: $z=\sqrt{2}-i\sqrt{2}\qquad r=|z|=\sqrt{2+2}=2$

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad \sin\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad demak\qquad \varphi=\frac{7\pi}{4}$$

$$z=2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)\qquad w_k=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi k}{2}\right)\right)\qquad k=0\ bo`lsa,$$

$$w_0=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)=\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$$

$$k=1\ bo`lsa\quad w_1=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{8}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{8}+\pi\right)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$$

Mashqlar

98. $\sqrt{z}$ ni hisoblang, agar:

1) $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

2) $z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$,

3) $z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

4) $z=16\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ bo‘lsa.

99. $z^5 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ tenglamaning barcha ildizlari uchun formula yozing.

100. Ikki hadli tenglamalarni yeching:

1) $z^3+i=0$ 2) $z^4=i$

3) $z^5+1=0$ 4) $z^4-32=0$

98. 2) $W_{01} = \pm\frac{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{3}}}{2}$; 4) $W_{01} = 4\left(\pm\frac{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{3}}}{2}\right)$.

100. 2) $W_k = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{4}$, $k = 0,1,2,3$. 4) $W_k = 2(\cos\frac{2\pi k}{5} + i\sin\frac{2\pi k}{5})$, $k = 0,1,2,3,4$.

§ 4. BUTUN RATSIONAL IFODALARNING KANONIK KO‘RINISHI

4.1. Butun ko‘phadlar ratsional ifodalarning kanonik ko‘rinishi

Ta’rif. Butun ratsional ifoda yoki ko‘phad deb argumentlar va o‘zgarmas miqdordan faqat qo‘shish va ko‘paytirish amallari yordamida tuzilgan ifodaga aytiladi.

$$9,\ x,\ x^2,\ (x-y)^2,\ x^3+5ax^2-a^2,\ x^3+5ax^2-a^3,\ \frac{x}{5}+\frac{y}{2}-\frac{z}{6},$$
$$(ax+by)^2[(x-y^4+3(a^x+b^3y))]$$

ko‘phadlarda misol bo‘la oladi. $\frac{1}{x-y}, \frac{x}{y}, \frac{x-5y-3}{x}+x^2-5y^2$ ifodalarning maxrajlarida argument qatnashgani sababli ko‘phad bo‘la olmaydi.

Biz faqat bir argumentli o‘zgaruvchili ko‘phadlarni ko‘rib chiqamiz: x^2+6x-3, $\frac{1}{3}x^3-2x^2+x-4$ bir argumentli ko‘phadlarga misol bo‘ladi.

Ko‘phad birhadlarning yig‘indisidan iborat. Ko‘phad tarkibidagi eng katta darajali birhadning daraja ko‘rsatkichi shu ko‘phadning darajasi deyiladi. Ko‘phadni darajasi pasayib borish tartibida yozish, ko‘phadni standart shaklda yozish deyiladi:

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

Agar ko‘phadning hamma o‘xshash hadlari keltirilgan bo‘lib, standart shaklda yozilgan bo‘lsa, bu shakl ko‘phadning kanonik shakli deyiladi.

Misol: $P(x)=(x-2)^2+x^3-2x^2+1$ ko‘phadni kanonik shaklga keltiring.

Yechish: $P(x)=x^2-4x+4+x^3-2x^2+1=x^3-x^2-4x+5$ ko‘phad kanonik ko‘rinishga keltirildi.

Ikkita ko‘phad $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a^n$ va $Q(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n$ o‘zaro teng deyiladi, agar bir xil darajali noma’lumlar oldidagi koeffitsiyentlar teng, ya’ni $a_0=b_0,\ a_1=b_1\ldots a_n=b_n$ bo‘lsa, bu holda $P(x)=Q(x)$ deb yoziladi.

Ko‘phadlarni qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish mumkin. Natijada yana ko‘phad hosil bo‘ladi:

$(x^3-2x^2+3)+(x^4-2x^2+1)=x^4+x^3-4x^2+4$
$(3x^3-2x^2+1)-(x^3-2x^2+4)=2x^3-3$
$(x^2-x)(x^3+1)=x^5-x^4+x^2-x$

Mashqlar

101. Ko‘phadlarni kanonik shaklga keltiring.

1) $P(x)=3x^3-2x^2+x-1+(x+2)^2$;

2) $P(x)=x^4-3x+(x-3)^3$;

102. $P(x)=2x^2-3x+5$ bo‘lsa, P(-2),P (1/2), P(3) ni toping.

103. $P(x)=x^3-4x^2+x$ bo‘lsa, P(-1), P(1/2), P(2) ni toping.

104. P(x) va Q(x) ko‘phadlar teng bo‘lsa, noma’lum koeffitsiyentlarni toping.

1) $P(x)=ax^5+2x^6+3x^2-1;$ $\qquad Q(x)=3x^6+bx^2-1$.

2) $P(x)=ax^3+2x+3;$ $\qquad Q(x)=4x^3+bx+3$.

105. $P(x)\pm Q(x)$, $P(x)\cdot Q(x)$ ko‘phadlarni toping, agar:

1) $P(x)=x^2-1;$ $\qquad Q(x)=x^3+x$

2) $P(x)=x-2;$ $\qquad Q(x)=2x^2+3x$ bo‘lsa.

Javoblar:

101. $x^4+x^3-9x^2+24x-27$. 102. 2) $P(\frac{1}{2})=4$. 203. 2) $P(\frac{1}{2})=-\frac{3}{8}$.

104. 2) $a=4$, b=2. 105. $P+Q=2x^2+4x-2$. $P-Q=-2x^2-2x-2$. $P-Q=2x^3-x^2-6x$.

4.2. Ko‘phadlarni bo‘lish

Berilgan $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ ko‘phadni $Q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m$ ko‘phadga bo‘lish talab qilinsin. Agar shunday S(x) va R(x) ko‘phadlar mavjud bo‘lib,

$$P(x)=Q(x)\cdot S(x)+R(x) \qquad (1)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, P(x)-bo‘linuvchi, Q(x)-bo‘luvchi S(x)- bo‘linma va R(x) – qoldiq ko‘phadlar deyiladi. Bu yerda R(x) ning daraja ko‘rsatkichi, Q(x) daraja ko‘rsatkichidan kichik bo‘ladi. R(x)=0 bo‘lsa, P(x) ko‘phad Q(x) ga qoldiqsiz bo‘linadi deyiladi, aks holda bo‘lish qoldiqli deyiladi (yoki bo‘linmaydi deyiladi).

Bo‘linma S(x) va qoldiq R(x) ni topishda “aniqmas koeffitsiyentlar usuli” yoki “burchakli bo‘lish” usulidan foydalanish mumkin.

Bo‘luvchi Q(x) va bo‘linma S(x) daraja ko‘rsatkichlarining yig‘indisi P(x) daraja ko‘rsatkichiga tengligini hisobga olgan holda, (1) tenglikni S(x) va R(x) koeffitsiyentlari noma’lum bo‘lgan shaklda yozamiz. Ikki ko‘phad tengligidan (qavslarni ochib, ma’lum amallarni bajargandan keyin) foydalanib, noma’lum koeffitsiyentlarni topish uchun chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bunday sistema yagona yechimga ega bo‘ladi. Buni misolda ko‘ramiz.

1-misol. $P(x)=x^3+2x^2-1$ ko‘phadni $Q(x)=x^2+x+2$ ko‘phadga bo‘lamiz.

Bo‘linmani $S(x)=c_0x+ c_1$ ko‘rinishda qidiramiz. Q(x) ni darajasi 2ga P(x) ning darajasi 3 ga teng, demak S(x)ning darajasi birga teng bo‘lishi kerak, qoldiqni $R(x)=d_0x+d_1$ ko‘rinishda qidiramiz. (1) tenglikni yozamiz: $x^3+2x^2-1=(x^2+x+2)(c_0x+c_1)+d_0x+d_1$.

Bundan ko‘rinadiki, $c_0=1$ bo‘lishi kerak. Qavslarni ochib, o‘xshashlarini keltirib $x^3+2x^2-1=x^3+(1+c_1)x^2+(2+c_1+d_0)x+(2c_1+d_1)$ tenglikni hosil qilamiz. Mos koeffitsiyentlarni tenglashtirib,

$$\begin{cases} 1=1 \\ 1+c_1=2 \\ 2+c_1+d_0=0 \\ 2c_1+d_1=-1 \end{cases}$$

sistemaga ega bo‘lamiz, uni yechib $c_1=1$, $d_0=-3$, $d_1=-3$ ni topamiz. Bo‘linma $S(x)=x+1$ va qoldiq $R(x)=-3x-3$ ekan.

“Burchakli bo‘lish” usulini misolda ko‘ramiz.

2-misol. Ushbu ifodaning butun qismini ajratamiz. Quyidagi bo‘lishni bajaramiz:

$$\begin{array}{l|l}
4x^2-15ax^3+20a^2x^2+5a^4 & x^2-2ax+4a^2 \\ \cline{2-2}
\underline{4x^2-8ax^3+16a^2x^2} & 4x^2-7ax-10a^2 \\
-7ax^3+4a^2x^2+5a^4 & \\
\underline{-7ax^3+14a^2x^2-28a^3x} & \\
-10a^2x^2+28a^3x+5a^4 & \\
\underline{-10a^2x^2+20a^3x-40a^4} & \\
\quad 8a^3x+45a^4 &
\end{array}$$

Butun qism $4x^2-7ax-10a^2$ bo‘lib, qoldiq $8a^3 x+45a^4$ ga teng ekan.

Berilgan P(x) va Q(x) ko‘phadning eng katta umumiy bo‘luvchisini topish uchun Yevklid algoritmidan foydalanish mumkin. P(x) ni Q(x) ga bo‘lib, qoldiq $R_1(x)$ ni hosil qilamiz, Q(x) ni $R_1(x)$ ga bo‘lib $R_2(x)$ qoldiqni va hokazo hosil qilamiz. Qoldiqlarning darajalari pasayib boradi va oxiri 0 ga teng qoldiqqa ega bo‘lamiz. Undan oldingi 0 dan farqli, qoldiq berilgan ko‘phadlarning eng katta umumiy bo‘luvchisi bo‘ladi.

3-misol. $P(x)=x^3-4x^2+4x-1$ va $Q(x)=x^2-x$ ko‘phadlarning eng katta umumiy bo‘luvchisi topilsin.

Yechish:

1) $$\begin{array}{l|l}
x^3-4x^2+4x-1 & x^2-x \\ \cline{2-2}
x^3-x^2 & x-3 \\ \cline{1-1}
-3x^2+4x-1 & \\
-3x^2+3x & \\ \cline{1-1}
x-1=R_1(x) &
\end{array}$$

2) $$\begin{array}{r|l}
x^2-x & x-1 \\ \cline{2-2}
x^2-x & x \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Eng katta umumiy bo‘luvchi x-1 ga teng.

Mashqlar

106. “Noma’lum koeffitsiyentlar usuli” dan foydalanib, bo‘linma va qoldiqni toping:

1) $P(x)=x^3-3x^2+5$, $Q(x)=x+2$
2) $P(x)=2x^3+5x-3$, $Q(x)=x^2+3x$
3) $P(x)=3x^4-5x^2+1$, $Q(x)=x^2+3$
4) $P(x)=4x^4+3x^3-x$, $Q(x)=2x^2+3x-1$

107. “Burchakli bo‘lish” usulidan foydalanib, P(x) ni Q(x) ga bo‘ling:

1) $P(x)=3x^4-3x^2+5$, $Q(x)=2x^2-x$
2) $P(x)=x^5+10x^4-14x^3+16x^2-x+3$, $Q(x)=2x^2-3x$
3) $P(x)=5x^5-7x^3+4x-5$, $Q(x)=x^2-3$
4) $P(x)=6x^6-5x^4+7x^2-3x$, $Q(x)=2x^3+3x$

108. Yevklid algoritmidan foydalanib, ko‘phadlarning eng katta umumiy bo‘luvchisini toping.

1) $P(x)=x^4-4x^3+1$, $Q(x)=2x^3+2x^2+1$
2) $P(x)=x^5+x^4-x^2-2x-1$, $Q(x)=3x^4+2x^3+x^2+2x-2$
3) $P(x)=x^5+x^4-x^3-3x^2-3x-1$, $Q(x)=x^4-2x^3-x^2-2x+1$
4) $P(x)=x^6+2x^4-4x^3-3x^2+8x-5$, $Q(x)=x^5+x^2-x+1$

106. 2) bo‘linma 2x-6, qoldiq 23x-3. 4) bo‘linma $2x^2-\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}$, qoldiq $\frac{5}{4}x-\frac{5}{4}$. 107. 2) bo‘linma $\frac{x^3}{2}+\frac{23}{4}x^2+\frac{13}{8}x+\frac{167}{16}$, qoldiq $\frac{485}{16}x+3$. 4) bo‘linma x, qoldiq $2x^4-5x^3-x^2+7x-5$.

4.3. Bezu teoremasi va Gorner-Ruffini sxemasi

$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ ko‘phadni $Q(x)=x-a$ ikkihadga bo‘lsak:

$P(x)=(x\text{-}a)\cdot S(x)+R$ ni hosil qilamiz.

Qoldiq R ning darajasi 0 ga teng bo‘lgan ko‘phad, chunki uning darajasi bo‘luvchi Q(x) ning darajasidan kichik.

1-teorema (Bezu). Etyen Bezu (1730-1783)-fransuz matematigi ko‘phad P(x) ni $x\text{-}a$ ga bo‘lganda qoldiq R ko‘phadni $x=a$ dagi qiymatiga teng, ya’ni R=P(a)

Isbot. P(x)=(x-a) $\cdot$ S(a)+R tenglikda x ning o‘rniga a ni qo‘yib topamiz:

P(a)=R, teorema isbotlandi.

Natija. Agar R=0 bo‘lsa, P(x) $x\text{-}a$ ga qoldiqsiz bo‘linadi, R≠0 bo‘lsa, P(x) $x\text{-}a$ ga qoldiqli bo‘linadi (bo‘linmaydi).

4-misol. $P(x)=3x^3-4x^2+5$ ni x-3 ga bo‘lganda qoldiqni toping.

Yechish. $R=P(3)=3*3^3-4*3^2+5=81-36+5=50$.

5-misol. $P(x)=x^n-a^n$ ni $x\text{-}a$ ga qoldiqsiz bo‘linishini ko‘rsating.

Yechish. $R=P(a)=a^n-a^n=0$

6-misol. $P(x)=x^{2n}+a^{2n}$ $x+a$ ga bo‘linmasligini ko‘rsating.

Yechish. $R=P(-a)=a^{2n}+a^{2n}=2a^{2n}\neq 0$

Bezu teoremasidan P(x) ko‘phadni $ax+b$ ikkihadga bo‘lishdan hosil bo‘ladigan qoldiq R ni $P(-\frac{b}{a})$ ga tengligi kelib chiqadi.

7-misol. $P(x)=2x^3-3x^2+5x+3$ ni 2x+1 ga bo‘lganda qoldiq nimaga teng?

Yechish:

$$R=P(-\frac{1}{2})=2\cdot(-\frac{1}{2})^3-3\cdot(-\frac{1}{2})^2+5\cdot(-\frac{1}{2})+3=-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-\frac{5}{2}+3=$$
$$=\frac{-1-3-10+12}{4}=-\frac{1}{2}.$$

Endi P(x) ko‘phadni $Q(x)=x\text{-}a$ ikkihadga bo‘lganda bo‘linma S(x) ning koeffitsiyentlarini aniqlashga o‘tamiz.

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=(x\text{-}a)\cdot S(x)+R \qquad (2)$$

tenglikda S(x) bo‘linmani $S(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}$ ko‘rinishda qidiramiz. (2) tenglikda x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlarini tenglashtirib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$a_0=b_0$ $a_1=b_1-ab_0$ $a_2=b_2-ab_1$ ………….. $a_{n-1}=b_{n-1}-ab_{n-2}$ $a_n=R-ab_{n-1}$

Bu tengliklardan ketma-ket noma’lum koeffitsiyentlarni topamiz: $b_0=a_0$, $b_1=ab_0+a_1$, $b_2=ab_1+a_2,\ldots,b_{n-1}=ab_{n-2}+a_{n-1}$, $R=ab_{n-1}+a_n$. topilganlarni quyidagi jadvalga joylashtirish maqsadga muvofiq bo‘ladi.

a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n
$b_0=a_0$	$b_1=ab_0+a_1$	$b_2=ab_1+a_2$	...	$b_{n-1}=ab_{n-2}+a_{n-1}$	$R=a_0b_{n-1}+a_n$

Keltirilgan usul Gorner (Xorner Uilyam (1786-1837) – ingliz matematigi) sxemasi deb ataladi.

8-misol. Gorner sxemasi yordamida $P(x)=x^5-3x^3+5x-4$ ko‘phadni $x+2$ ga bo‘lganda bo‘linma va qoldiqni toping.

Yechish. Jadvalning birinchi qatorida P(x) ning koeffitsiyentlari 1, 0, - 3, 0, 5, - 4 ni joylashtiramiz. Ikkinchi qatoriga $a=-2$ ni qo‘yib bularni topamiz:

	$a_0=1$	$a_1=0$	$a_2=-3$	$a_3=0$	$a_4=5$	$a_5=-4$
$a=-2$	$b_0=1$	$b_1=-2$	$b_2=1$	$b_3=-2$	$b_4=9$	$R=-22$

Topilgan koeffitsiyentlarga ko‘ra bo‘linma $S(x)=x^4-2x^3+x^2-2x+9$ qoldiq $R=-22$ ga teng.

Mashqlar

109. P(x) ko‘phad Q(x) ikkihadga bo‘linadimi?

1) $P(x)=x^{80}-4x+3$, $Q(x)=x-1$;
2) $P(x)=x^{80}-4x+3$, $Q(x)=x+1$;
3) $P(x)=x^{80}-4x+3$, $Q(x)=x^2-1$.

110. 1) x^4-3x+1 ni $x-2$ ga
2) $3x^5-4x^3+2x-1$ ni $x+2$ ga
3) x^4+2x^3-3x+2 ni $2x+1$ ga va $2x-3$ ga bo‘lganda qoldiqni toping.

111. m ning qanday qiymatlarida $3x^3-4x^2-m$ ko‘phad $x-1$ ga bo‘linadi.

112. Gorner-Ruffini sxemasi yordamida P(x) ni Q(x) ga bo1`ganda bo‘linma va qoldiqni toping.

1) $P(x)=x^3-3x^2+5x-4$, $Q(x)=x+2$,
2) $P(x)=2x^4-3x^2+5$, $Q(x)=x-2$,
3) $P(x)=5x^5-4x^3+8x$, $Q(x)=x-1$
4) $P(x)=x^6+3x^5+4x^2+3$, $Q(x)=x+1$.

Javoblar: 109.ha. 110. 2) -69. 111. m=-2.
112. 2) bo‘linma $2x^3+4x^2+3x+6$, qoldiq 17.
4) bo‘linma $x^5+2x^4-4x^3+4x^2$, qoldiq 3.

4.4. Ko‘phadning ildizi

Ta’rif. Agar $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$ bo‘lib, P(a)=0 bo‘lsa, a son P(x) ko‘phadning ildizi deyiladi.

Misol. P(x)=x^3-3x^2+5x-3 ko‘phad uchun 1 son ildiz bo‘ladi.

Haqiqatda, P(1)=1-3+5-3=0 a son P(x)=$a_0x^n+...+a_n$ ko‘phadning ildizi bo‘lishi uchun, P(x) ni x-a ga bo‘linishi zarur va yetarlidir.

Isbot. 1) Zaruriyligi, a son P(x) ning ildizi bo‘lsin, u holda ta’rifga ko‘ra P(a)=0 bo‘ladi. Bezu teoremasiga asosan esa R=P(a)=0. Bu esa P(x) ni x-a ga bo‘linishini bildiradi.

2) Yetarliligi P(x) ko‘phad x-a ga bo‘linsin, u holda R=0 bo‘ladi.

Yana Bezu teoremasiga asosan P(a)=R=0 bo‘lib, a son P(x) uchun ildiz ekanligini bildiradi. $x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n=0$ tenglamaning butun ildizi ozod had a_n ning butun bo‘luvchisidir. Agar $\frac{p}{q}$ ko‘rinishidagi ratsional son ildiz bo‘lsa, u holda p ozod had a_n ning q esa bosh koeffitsiyent 1 ning bo‘luvchisi bo‘lishi zarur.

Mashqlar

113. Tenglamaning butun ildizlarini toping.

1) $x^3+3x^2+3x-2=0$ 2) $x^3-2x^2-x-6=0$

114. Tenglamaning barcha ildizlarini toping.

1) $x^3+x^2-4x-4-0$ 2) $x^3-3x^2-4x+12=0$

Javoblar: 113. 2)3. 114. 2) -2; 2: 3.

4.5. Ratsional ifodalarning aynan tengligi

Ratsional ifodani aynan almashtirish deb berilgan ifodani berilganiga o‘xshamaydigan shunday yangi ifoda bilan almashtirish tushuniladiki, ikkalasining qiymatlari teng bo‘lsin.

Misol: $\frac{x^2+8x+15}{(x+5)^2}$ berilgan bo‘lsa, kasr suratini x^2+8x+15=(x+3)(x+5) ko‘rinishda yozib berilgan kasrni $\frac{x+3}{x+5}$ bilan almashtiramiz. Ikkala kasrning barcha x≠-5 dagi qiymatlari o‘zaro teng bo‘ladi.

Umumiy mavjudlik sohasida bir ratsional ifodani unga aynan teng ifoda bilan almashtirishga shu ifodani aynan almashtirish deyiladi. Bunday almashtirishlar tenglamani yechishda, teoremalar va ayniyatlarni isbotlashda, masala va misollarni yechishda ishlatiladi. Almashtirishlar kasrlarni qisqartirish, qavslarni ochish, umumiy ko‘paytuvchini qavsdan chiqarish, ifodani ko‘paytuvchilarga ajratish, o‘xshash hadlarni ixchamlash va shu kabilardan iborat bo‘ladi. Almashtirishlarni bajarishda quyidagilardan foydalanish tavsiya etiladi.

Agar x_1 va x_2 $ax^2+bx+c=0$ tenglamaning ildizlari bo‘lsa, u holda $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Qisqa ko‘paytirish formulalari va ba`zi umumlashtirilganlari:

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$
$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
$(a\pm b)^4=a^4\pm 4a^3b+6a^2b^2\pm 4ab^3+b^4$
$(a\pm b)^5=a^5\pm 5a^4b+10a^3b^3\pm 10a^2b^3+5ab^4\pm b^5$
$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$
$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

Daraja bilan amallar $\underbrace{a\cdot a\ldots\ldots\cdot a}_{n\ ma}=a^n$

$a^n\cdot a^k=a^{n+k}$, $\quad \dfrac{a^n}{a^k}=a^{n-k}$, $\quad a^0=1$,

$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$, $\quad \dfrac{1}{a^{-n}}=a^n$, $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^n$, $\quad (a^nb^k)^m=a^{nm}b^{km}$.

Misollar. 1) Kasrni qisqartiring. $\dfrac{3x+3y}{12x}\cdot\dfrac{4x^2}{x^2-y^2}$ ketma-ket amallarni bajarib, topamiz: $\dfrac{3(x+y)}{12x}\cdot\dfrac{4x^2}{(x+y)(x-y)}=\dfrac{x}{x-y}$

2) Ifodani soddalashtiring. $\dfrac{x^3-2x^2+5x+26}{x^3-5x^2+17x-13}$

Suratdagi ko‘phadning butun ildizlari ozod had 26 ning bo‘luvchilari -26, -13, -2, -1, 1, 2, 13, 26 orasida bo‘lishi mumkin. Bu sonlarni ketma-ket $x^3-2x^2+5x+26$ ko‘phaddagi x o‘rnida qo‘yib $x=-2$ ildiz ekanligini aniqlaymiz. Shuning uchun (bu ko‘phadni $x+2$ ga bo‘lib, bo‘linma x^2-4x+1 ni topamiz):

$x^3-2x^2+5x+26=(x+2)(x^2-4x+1)$

Shunga o‘xshash $x^3-5x^2+17x-13=(x-1)(x^2-4x+1)$

Bularni kasrning surat va maxrajga qo‘yib, topamiz:

$$\frac{x^3-2x^2+5x+26}{x^3-5x^2+17x-13}=\frac{(x+2)(x^2-4x+1)}{(x-1)(x^2-4x+1)}=\frac{x+2}{x-1}.$$

Mashqlar

115. 1) $\frac{116^8\cdot 87^4}{58^9\cdot 174^3}$ 2) $\frac{51^2\cdot 16\cdot 125}{102\cdot 5^2\cdot 153}$ ni hisoblang.

116. Quyidagi kasrlarni qisqartiring:

1) $\frac{48a^7b^3c}{64a^8bc^4}$ 2) $\frac{a^{n+1}b^{m+2}}{a^nb^m}$ 3) $\frac{x^{m-1}y^{n-3}}{x^my^n}$

4) $\frac{12a^mb^{m-2}}{27a^{m+n}b^m}$ 5) $\frac{7x^my^{m+n}}{21x^{m-2}y^m}$ 6) $\frac{6a^mb^{n+3}}{9a^{m-2}b^{n+1}}$

7) $\frac{a^{-3}b^4}{9}\cdot\left(\frac{3}{a^{-2}b^3}\right)^{-3}$ 8) $\left(\frac{c}{10a^5b^2}\right)^{-1}\cdot(5a^3bc^2)^{-2}$ 9) $\left(\frac{x^2y^{-3}}{6z}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{x^2y^{-2}}{9z}\right)^2$

117. Kasrlarni qisqartiring:

1) $\frac{1-a^3}{1+a+a^2}$ 2) $\frac{8-a^3}{2-a}$ 3) $\frac{a^3+8}{a^2-2a+4}$ 4) $\frac{a^3+27}{a+3}$

5) $\frac{a^3-1}{a^2+a+1}$ 6) $\frac{9a^2-4}{3a+2}$ 7) $\frac{a^2+6a+9}{a+3}$ 8) $\frac{b^2-6b+9}{b-3}$

118. Ifodani soddalashtiring:

1) $\frac{x^2+x-6}{x^2+4x+3}$ 2) $\frac{x^4-x^3+x-1}{x^3+1}$

3) $\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$ 4) $\frac{x^3+8}{3x+6}$

5) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}$ 6) $\frac{x^3-1}{x^2+x+1}$

7) $\frac{x^3+1}{x^2-x+1}$ 8) $\frac{a^2+7a+12}{a^2+6a+8}$

9) $\frac{a^4+7a^2+10}{a^4+6a^2+5}$ 10) $\frac{x^3-x^2-7x+7}{x^2-7}$

119. Ayniyatni isbotlang:

1) $\frac{(n+1)4-16n^2}{n^3+5n^2-5n-1}=n-1$ 2) $\frac{a^3-9a}{2a+10}\div\frac{3-a}{a^2+5a}=-\frac{a^2(a+3)}{2}$

120. Ifodani soddalashtiring:

1) $\dfrac{m^3 - n^3}{m^2 - n^2} - \dfrac{m^2 + n^2}{m + n} - \dfrac{m^2 n + mn^2}{m^2 + n^2 + 2nm}$

2) $\dfrac{a^2 - 1}{an + n^2} \cdot \dfrac{1}{n - 1} \cdot \dfrac{a - an^3 - n^4 + n}{1 - a^2}$

3) $\dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b(a - b)^2}{a^4 - b^4}$

4) $\dfrac{2a}{a^2 - 4b^2} + \dfrac{b + 3}{2b^2 + 6b - ab - 3a}$

5) $\dfrac{b}{ab - 2a^2} - \dfrac{2 + 2b}{b^2 + b - 2ab - 2a}$

6) $\left[\dfrac{x3 + y3}{xy^3} : \left(\dfrac{x - y}{y2} + \dfrac{1}{x}\right)\right] : \dfrac{x(x - y)2 + 4x^2 y}{x + y}$

7) $\left[\dfrac{(y - x)^2}{x^2} - \dfrac{(x + y)^2 - 4xy}{x^2 - xy}\right]^2 \cdot \dfrac{x^4}{x^2 y^2 - y^4}$

8) $\left(\dfrac{2x + 5y}{4x^2 - y^2} - \dfrac{1}{2x - 5y}\right) : \dfrac{y^2}{4x^2 - y^2}$

9) $\dfrac{3a^2 + 2ax - x^2}{(3x + a)(a + x)} - 2 + 10 \cdot \dfrac{ax - 3x^2}{a^2 - 9x^2}$

Javoblar:. *115. 2) 40. 116. 2) ab^2; 4)* $\dfrac{4}{9a^n b^2}$; 6) $\dfrac{2}{3}a^2 b^2$; 8) $\dfrac{2}{5ac^5}$.

117. 2) $4 + 2a + a^2$; 4) $a^2 - 3a + 9$; 6) $a - 1$; 8) $b - a$,

118. 2) $x - 1$; 4) $\dfrac{1}{3}(x^2 - 2x + 4)$; 6) $x - 1$; 8) $\dfrac{a + 3}{a + 2}$; 10) $x - 1$. 120. 2) $\dfrac{n^2 + n + 1}{n}$;

4) $\dfrac{1}{a + 26}$; 6) $\dfrac{1}{xy}$; 8) $-\dfrac{24}{2x - 5y}$.

4.6. Ratsional ifodalarning kanonik shakli

Ta'rif: Argument (o'zgaruvchi)larga nisbatan ratsional ifoda deb o'zgarmas miqdorlardan va o'zgaruvchilarni qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish amallari yordamida tuzilgan ifodaga aytiladi.

$\dfrac{ax + by}{cx + b}$; $\dfrac{x^2}{3} + x - \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{ab}{x + y}}{a^2 + b^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y}}$ va hokazolar ratsional ifodalarga misol bo'ladi, $\dfrac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$; $tg\left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right) \cdot \dfrac{\cos x - 1}{\sin x - 1}$ ifodalar ratsional bo'la olmaydi, chunki argumentlar ustida transsendent amallarni bajarilishi lozim.

Ta'rif: Ikkita ko'phadning nisbati $\dfrac{P(x, y, ..., z)}{Q(x, y, ..., z)}$ algebraik yoki ratsional kasr deyiladi.

Har qanday ko‘phadni maxraji birga teng bo‘lgan ratsional kasr deb tushunish mumkin. Shunday qilib, ko‘phadlar to‘plami ratsional kasr to‘plamining qism to‘plamidir.

Kasr maxraji noldan farqli bo‘ladigan argumentlarning barcha qiymatlari to‘plami algebraik kasrning aniqlanish sohasi deyiladi. $\frac{3x}{(x^2-1)(x^2+1)}$ kasrning aniqlanish sohasi x≠±1 bo‘ladigan barcha haqiqiy sonlar to‘plamidan iborat.

Agar algebraik kasrning surat va maxrajida mumkin bo‘lgan hamma amallar bajarilib, standart shaklda (darajalari o‘suvchi yoki kamayuvchi tartibda) yozilgan bo‘lsa, ratsional kasr kanonik shaklga keltirilgan deyiladi.

Ratsional kasrlarni soddalashtirish deb surat va maxrajida qavslarni ochish, umumiy ko‘paytuvchilarni qavsdan tashqariga chiqarish, o‘xshash hadlarni ixchamlash (keltirish), surat va maxrajda umumiy bo‘lgan ko‘paytuvchilarga qisqartirish va shu kabilardan iborat bo‘ladi.

Misol: $\left(\frac{a-b}{2b-a}-\frac{a^2+b^2+b-2}{a^2-ab-2b^2}\right):\frac{4a^4+4a^2b+b^2-4}{a^2+b+ab+a}$ ifoda soddalashtirilsin.

Yechish: Qavs ichidagi ikkinchi kasr maxrajini *a*^{2}-*ab*-*2b*^{2}=-*(a+b)(2b-a)* ko‘rinishida va bo‘luvchini $\frac{(2a^2+b)^2-4}{a(a+b)+(a+b)}=\frac{(2a^2+b-2)(2a^2+b+2)}{(a+b)(a+1)}$ ko‘rinishida yozib, ketma-ket amallarni bajaramiz:

$$\left(\frac{a-b}{2b-a}+\frac{a^2+b^2+b-2}{(a+b)(2b-a)}\right):\frac{(2a^2+b-2)(2a^2+b+2)}{(a+b)(a+1)}=\frac{a^2-b^2+a^2+b^2+b-2}{(a+b)(2b-a)}\cdot$$

$$\cdot\frac{(a+b)(a+1)}{(2a^2+b-2)(2a^2+b+2)}=\frac{a+1}{(2b-a)(2a^2+b+2)}.$$

Mashqlar

121. Quyidagi ifodalarni soddalashtiring.

1) $(a^2-(b-c)^2):\frac{a+b-c}{a+b+c}$,

2) $\left(\frac{2a+b}{a(a+2b)}-\frac{6b}{4b^2-a^2}\right)\cdot\left(2b+3a-\frac{6a^2}{2a-b}\right)$,

3) $\frac{a^2+a-2}{a-3}\cdot\left(\frac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\frac{3}{a^2-a}\right)$

4) $\frac{2a^2b^2-\frac{1}{2}}{a^3+2a^2}:\frac{2ab-1}{2(a^2+2a)}$

Javoblar: 121. 2) $\frac{a}{6}$. 4) $\frac{2ab+1}{a}$

§ 5. TENGLAMALAR

5.1. Bir noma'lumli ikkinchi darajali tenglamalar

Ikkinchi darajali bir noma'lumli tenglama soddalashtirishdan keyin

$$ax^2+bx+c=0 \quad (1)$$

ko'rinishga keltiriladi.

Tenglamaning o'ng tomonidan to'la kvadrat ajratamiz:

$a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=0$ yoki $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}=-c$ bundan $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a}-c=\frac{b^2-4ac}{4a}$ yoki $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ ikkala tomonidan kvadrat ildiz topamiz:

$$x_{1,2}=\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ va } x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ yoki } x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (2)$$

b^2-$4ac$ kvadrat tenglamaning diskriminanti deyiladi va D bilan belgilanadi:

D=b^2-$4ac$.

1. Agar D>0 bo'lsa, (1) tenglama $x_1 \neq x_2$ haqiqiy ildizlarga ega bo'ladi;

2. Agar D=0 bo'lsa, (1) tenglama $x_1=x_2$ haqiqiy ildizlarga ega bo'ladi;

3. Agar D<0 bo'lsa, (1) tenglama kompleks ildizlarga ega bo'ladi.

Misollar

1) $3x^2-5x+2=0$ ikkita haqiqiy ildizga ega. Haqiqatda:

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{6}=\frac{5\pm1}{6}; \quad x_1=\frac{2}{3}; \quad x_2=1$$

2) $4x^2-12x+9=0$ tenglamada D=144-144=0 bo'lib tenglama $(2x-3)^2=0$ ko'rinishini oladi, bundan $x_{1,2}=\frac{3}{2}$

3) $5x^2-4x+1=0$ tenglamani yechib:

$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{10}=\frac{4\pm2i}{10}=\frac{2\pm i}{5}; \quad x_1=\frac{2-i}{5}; \quad x_2=\frac{2+i}{5}$ kompleks ildizlarni hosil qildik.

Keltirilgan kvadrat tenglama deb

$$x^2+px+q=0 \quad (3)$$

ifodaga aytiladi. Buni yechish uchun (2) formuladan tashqari yana

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \qquad (4)$$

formuladan foydalanish mumkin.

Misol: $x^2-6x+5=0$ tenglamani yechamiz.

Xususiy holda kvadrat tenglama. $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2;\ x_1 = 1;\ x_2 = 5$.

$ax^2+2kx+c=0$ (5) ko‘rinishda bo‘lsa, ildizlarini

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a} \qquad (6)$$

formula yordamida topish qulay bo‘ladi.

Agar x_1 va x_2 kvadrat tenglama (1) yoki (3) ning ildizlari bo‘lsa, u holda

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$ bo‘ladi.

Viyet teoremasi: Agar x_1 va x_2 keltirilgan (3) kvadrat tenglamaning ildizlari bo‘lsa,

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$ bo‘ladi.

5.2. Chala kvadrat tenglamalar

1. (1) da $c=0$ bo‘lsa:
$ax^2+bx=0$ bo‘lib, bundan $(ax+b)x=0$ ni hosil qilamiz va $x_1=0$, $ax+b=0$; $x_2 = -\frac{b}{a}$ ni topamiz.

2. $b=0$ bo‘lsa, $ax^2+c=0$ hosil bo‘ladi. Bundan $ax^2=-c$, $x^2 = -\frac{c}{a}$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ ni topamiz. Bu holda $-\frac{a}{c} \geq 0$ bo‘lganda tenglama haqiqiy ildizlarga ega bo‘ladi.

3. $b=c=0$ bo‘lsa, $ax^2=0$, $x^2=0$, $x_{1,2}=0$ hosil bo‘ladi.

Misollar

1) $2x^2+3x=0$ bo‘lsa, $x(2x+3)=0$; $x_1=0$, $x_2 = -\frac{3}{2}$

2) $x^2-9=0$ bo‘lsa, $x^2=9$; $x_1=-3$; $x_2=3$ bo‘ladi.

3) $5x^2=0$ bo‘lsa, $x^2=0$; $x_{1,2}=0$ bo‘ladi.

Mashqlar

122. Tenglamalarni yeching.

1) x^2-3x+2=0   6) x^2+x+9=0
2) x^2-x-6=0   7) $5x^2$-6x+1=0
3) x^2-4x+4=0   8) $4x^2$+5x+1=0
4) x^2-2x+1=0   9) $3x^2$+7+4=0
5) x^2-4x+5=0   10) $7x^{2+}$10x+3=0

123. Ildizlari

1) 2 va 3   2) -1 va 4
3) 0 va 4   4) $\frac{1}{2}$ va $\frac{1}{3}$ bo‘lgan kvadrat tenglamalarni tuzing.

124. Tenglamalarni yeching.

1) $\frac{ax-b}{a+b}+\frac{bx+a}{a-b}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

2) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+2x}=0$

3) $\frac{2x}{x+b}-\frac{x}{b-x}=\frac{b^2}{4(x^2-b^2)}$

4) $\frac{x}{x+2}+\frac{2x}{x-2}=\frac{5}{x^2-4}$

Javoblar: 122. 2) -2, 3; 4) 1; 6) Haqiqiy ildizi yo‘q;
8) $-\frac{1}{4}$, -4; 10) $-\frac{3}{7}$, -1; 123. 2) $x^2-3x-4=0$; 4) $6x^2-5x+1=0$; 124.
2) $\frac{-3a\pm a\sqrt{3}}{2}$;
4) $-\frac{5}{3}$, 1.

5.3. Yuqori tartibli tenglamalar

Yuqori tartibli tenglamalardan ikki hadli va uch hadli tenglamalarni ko‘rib chiqamiz.

Tarif: $x^n-a=0$ (1)

(a-berilgan son) ikki hadli tenglama deyiladi.

$px^n+q=0$, $p\neq 0$, tenglama $x^n-a=0$ tenglamaga ekvivalentdir.

(1) tenglamaning ildizlari

$x=\sqrt[n]{a}$ formuladan topiladi.

Ildizlarning xossalaridan foydalanib, (1) tenglama ildizlarini tahlil qilamiz.

1. Agar a=0 bo‘lsa (ixtiyoriy sonlar maydonida), tenglama yagona yechim x=0 ga ega bo‘ladi.

2. Agar $a\neq 0$ va haqiqiy son bo‘lsa, haqiqiy sonlar to‘plamida, n=2k+1 bo‘lganda, tenglama yagona yechim $x=\sqrt[2\tilde{o}+1]{a}$ ga ega bo‘ladi.

3. a>0 va n=2k bo‘lganda, tenglama haqiqiy sonlar to‘plamida ikkita yechim $x=\pm\sqrt[2k]{a}$ ga ega bo‘ladi.

4. a<0 va n=2k bo‘lsa, haqiqiy sonlar to‘plamida tenglama yechimga ega bo‘lmaydi.

5. $a\neq 0$ va ixtiyoriy kompleks (xususiy holda haqiqiy) son bo‘lganda, tenglama kompleks sonlar to‘plamida n ta yechimga ega bo‘ladi. Bu yechimlar $\sqrt[n]{a}$ ning turli qiymatlari bo‘ladi.

1-misol. $x^3-1=0$ tenglama yechilsin.

Yechish: Tenglama $(x-1)(x^2+x+1)=0$ ga teng kuchli.

Bundan $x_1=1$, $x=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ ni hosil qilamiz.

2-misol. $\sqrt[4]{1}$ qiymatlari topilsin.

Yechish: $x^4-1=0$ tenglamani yechamiz. Ko‘paytuvchilarga (x--1)(x+1)(x-i)(x+i)=0 ajratib $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=i$, $x_4=-i$ ni topamiz.

3-misol. $\sqrt[4]{-1}$ hisoblansin.

Yechish: $x^4+1=0$ ni yechamiz. Chap tomonini ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)=0$ va bundan $x_{1,2}=\frac{-1\pm i}{\sqrt{2}}, x_{3,4}=\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$ ni topamiz.

5.4. Uch hadli tenglamalar

Tarif. $ax^{2n}+bx^n+c=0\ (a\neq 0)$ (1)

ko‘rinishdagi tenglama uch hadli tenglama deyiladi. Agar $x^n=y$ deb belgilasak, (1) uch hadli tenglama (y) ga nisbatan quyidagi kvadrat tenglamaga keltiriladi:

$$ay^2+by+c=0$$

Natijada $x=\pm\sqrt[n]{\frac{-b\pm\sqrt{b-4ac}}{2a}}$ ni hosil qilamiz.

Xususiy holda, n=2 bo‘lganda, bikvadrat tenglamaga ega bo‘lamiz va uning hamma to‘rtta ildizlari uchun

$$x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$ ni topamiz.

Bikvadrat tenglamani $a>0$ bo‘lganda ildizlarini tekshiramiz.

1. $D=b^2-4ac>0$, $c>0$, $b>0$ bo‘lsa, yordamchi $ay^2+by+c=0$ tenglamaning ildizlari musbat va turli. Bikvadrat tenglama to‘rtta haqiqiy ildizga ega.

2. $D>0$, $c>0$ bo‘lganda x^2 uchun har xil ishorali ikkita qiymatni hosil qilamiz. Bikvadrat tenglama ikkita haqiqiy, ikkita mavhum ildizga ega bo‘ladi.

3. $D>0$, $c>0$, $b>0$ bo‘lganda x^2 uchun ikkita manfiy qiymatlarni topamiz. Bikvadrat tenglama faqat mavhum ildizlariga ega bo‘ladi.

4. $c=0$ bo‘lsa, yordamchi tenglama $ay^2+by=0$ bo‘lib, $y_1=x^2=0$, $y_2=x^2=-\frac{b}{a}$ bo‘ladi.

$b\neq 0$ bo‘lganda bikvadrat tenglama ikki karrali ildiz $x=0$ ga va yana ikkita haqiqiy ildizlarga, $b<0$ bo‘lganda, mavhum ildizlarga, $b>0$ bo‘lganda ega bo‘ladi.

$b=c=0$ bo‘lsa, bikvadrat tenglama to‘rkarrali ildiz $x=0$ ga ega bo‘ladi.

5. $D<0$ bo‘lganda, x^2 uchun ikkita qo‘shma mavhum qiymatlarni topamiz. Bikvadrat tenglama uchun to‘rtta har xil (juft=juft qo‘shma) mavhum ildizlarni topamiz.

6. $D=0$ bo‘lganda, yordamchi tenglama ikki karrali ildiz $y=x^2=-\frac{b}{2a}$ ga ega bo‘ladi. Bikvadrat tenglama, $b>0$ bo‘lganda, ikkita ikki karrali mavhum ildizlarga, $b<0$ bo‘lganda, ikkita ikki karrali haqiqiy ildizlarga ega bo‘ladi.

4-misol. $x^6-3x^3-2=0$ tenglama yechilsin.

Yechish: $y=x^3$ deb belgilab $y^2-3y+2=0$ yordamchi tenglama topamiz, uning ildizlari $y_1=1$, $y_2=2$.

Natijada $x^3=1$ va $x^3=2$ tenglamalarga ega bo‘lamiz. Bular $(x-1)(x^2+x+1)=0$ va $\left(x-\sqrt[3]{2}\right)\left(x^2+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4}\right)=0$ tenglamalarga teng kuchlidir. Birinchisidan, $x_1=1$, $x_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, $x_3=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ni, ikkinchisidan $x_4=\sqrt[3]{2}$, $x_5=\frac{-1-i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$, $x_6=\frac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$ ni hosil qilamiz.

5-misol. $3x^4+26x^2-9$ bikvadrat uchhad ko‘paytuvchilarga ajratilsin.

Yechish: $3x^4+26x^2-9=0$ tenglamani yechamiz: $x^2=\frac{-13\pm 14}{3}$ va

$x^2=\frac{1}{3}$ dan $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x^2=-9$ dan $x_3=3i$, $x_4=-3i$ ni topamiz va $3x^4+26x^2-9=3\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(x-3i)(x+3i)$ ni hosil qilamiz, yoki $3x^4+26x^2-9=$ $=(\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1)(x-3i)(x+3i)$ hosil bo‘ladi (kompleks sonlar to‘plamida), Haqiqiy sonlar to‘plamida esa $3x^4+26x^2-9=(\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1)(x^2+9)$ bo‘ladi

Mashqlar

125. Quyidagi ikki hadli tenglamalarni yeching.

1) $x^3-8=0$	5) $x^4-16=0$
2) $x^3+8=0$	6) $x^4+16=0$
3) $x^5-32=0$	7) $x^4-81=0$
4) $x^5+32=0$	8) $x^4+81=0$

126. Quyidagi uch hadli tenglamalarni yeching:

1) $x^4+5x^2-36=0$	5) $x^4+3x^2-18=0$
2) $x^4-8x^2-9=0$	6) $x^4+4x^2-32=0$
3) $x^4-x^2-6=0$	7) $x^4+x^2-1=0$
4) $x^4+2x^2-15=0$	8) $x^4-2x^2+4=0$.

127. 1) Ildizlari 1-2i, 2-i bo‘lgan haqiqiy koeffitsiyenti to‘rtinchi darajali tenglamani tuzing.

2) Ildizlari 1, 1-2i, 2-i bo‘lgan haqiqiy koeffitsiyenti beshinchi darajali tenglamani tuzing.

Javoblar: 125. 2) $x_1=-2$, $x_{3,4}=1\pm i\sqrt{3}$; 4) $x_k=2\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{5}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{5}\right)$, k=0,1,2,3,4; 6) $x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}$; 8) $x_{1,2,3,4}=\frac{1}{2}(\pm 3\sqrt{2}\pm i3\sqrt{2})$.

126. 2) $\pm$ 3; $\pm$ *i;* 4) $\pm\sqrt{3}$; $\pm i\sqrt{5}$; 6) ± 2, $\pm i2\sqrt{2}$.

127. 2) $x^5-7x^4+24x^3-48x^2+55x-25=0$.

§ 6. TENGSIZLIKLAR

6.1. Bir noma'lumli tengsizliklar

Agar x ga bog'liq bo'lgan A(x) va B(x) ifodalar quyidagi munosabatlardan A(x)>B(x), A(x)≥B(x), A(x)<B(x), A(x)≤B(x) birini qanoatlantirsa, bir noma'lumli tengsizlik berilgan deyiladi. Bu ifodalarni ikkala tomoni ma'noga ega bo'ladigan x ning qiymatlari to'plami tengsizliklarning mavjudlik sohasi deyiladi. O'zgaruvchi x ning tengsizlikni qanoatlantiradigan qiymatlar to'plami tengsizlikning yechimi deyiladi.

2x–6≤0 bo'lsin, bundan 2x≤6=>x≤3 bo'lib, tengsizlikning yechimi $x \in (-\infty, 3)$ bo'ladi.

Tengsizliklarning yechimini topishda quyidagi qoidalarga rioya qilish lozim:

1. Tengsizlikning ikkala tomoniga bir xil ifodani qo'shish yoki ayirishdan tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi;
2. Tengsizlikning ikkala tomonini bir xil musbat ifodaga ko'paytirish yoki bo'lishdan tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi;
3. Tengsizlikning ikkala tomonini bir xil manfiy ifodaga ko'paytirsak yoki bo'lsak, tengsizlik ishorasi teskarisiga o'zgaradi, ya'ni $A(x) > B(x)$ bo'lsa:

1) A(x)+C(x)>B(x)+C(x)
2) C(x)>0 bo'lsa, A(x) $\cdot$ C(x)>B(x) $\cdot$ C(x) va $\frac{A(x)}{C(x)} > \frac{B(x)}{C(x)}$
3) C(x)<0 bo'lsa, A(x) $\cdot$ C(x)<B(x) $\cdot$ C(x) va $\frac{A(x)}{C(x)} < \frac{B(x)}{C(x)}$ bo'ladi.

6.2. Chiziqli tengsizliklar

Soddalashtirishdan keyin ax>b, ax≥b, ax<b, ax≤b ko'rinishidan biriga keltirilishi mumkin bo'lgan tengsizlik chiziqli (birinchi darajali) tengsizlik deyiladi.

Misol. $\frac{2x-1}{2} - 3 > x - \frac{x+3}{3}$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Ikkala tomonini 6 ga ko'paytirib 6x-3-18>6x-2x-6 ni, bundan esa 2x>15 ni hosil qilamiz. Ikkala tomonini 2 ga bo'lib, x>7,5 ni topamiz.Yechim: $x \in (7{,}5; \infty)$

Mashqlar

128. Tengsizliklarni yeching:

1) $4(x-2)\le 2x-5$;	2) $5-6(x+1)\ge 2x+3$;
3) $3x-7<4(x+2)$;	4) $7-6x\ge \frac{1}{3}(9x-1)$;
5) $1,5(x-4)+2,5x<x+6$	6) $1,4(x+5)+1,6x>9+x$;
7) $\frac{x-1}{3}-\frac{x-4}{2}\le 1$	8) $\frac{x+4}{5}-\frac{x-1}{4}\ge 1$
9) $\frac{2x-5}{4}-\frac{3-2x}{5}<1$	10) $\frac{x+2}{4}+x<3$
11) $3(x+2)+\frac{2}{3}x<4x+5$	12) $\frac{5x+6}{3}+2\le 3x-\frac{x}{2}$
13) $\frac{2}{2+x}>0$	14) $\frac{5}{x-3}<0$
15) $\frac{x}{x+3}>1$	16) $\frac{2x}{x-5}<2$

Javoblar: 128.

2) $x\le -0,5$	4) $x\le \frac{22}{27}$	6) $x>1$	8) $x\le 1$
10) $x<2$	12) $x>4,8$	14) $x<3$	16) $x<5$

6.3. Kvadrat tengsizliklar

$$ax^2+bx+c>0 \quad (ax^2+bx+c\ge 0) \quad ax^2+bx+c<0 \quad (ax^2+bx+c\le 0)$$

ko‘rinishidagi yoki shu ko‘rinishga keltirilishi mumkin bo‘lgan tengsizlik kvadrat tengsizlik deyiladi (bunda x – o‘zgaruvchi, a, b, c – o‘zgarmas sonlar).

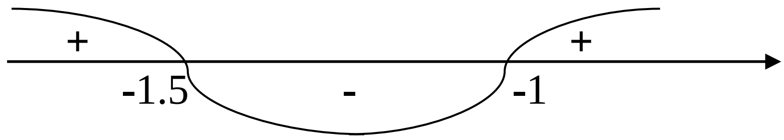
Kvadrat tengsizlikni yechishda quyidagilarga amal qilish kerak. $ax^2+bx+c<0$ kvadrat uchhadni $a(x-x_1)(x-x_2)<0$ ko‘rinishida tasvirlaymiz (x_1 va x_2 ($x_1<x_2$) kvadrat uchhadlarning nollari).

$a(x-x_1)(x-x_2)<0$ yechimi a>0 bo‘lganda $x\in(x_1,x_2)$, $a<0$ bo‘lganda $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,\infty)$ bo‘ladi, chunki ax^2+bx+c ning ishorasi *a* ning qiymatiga qarab u yoki bu oraliqning ishorasi bilan bir xil bo‘ladi. $a(x-x_1)(x-x_2)>0$ bo‘lganda, aksincha.

Agar ax^2+bx+c uchhadning diskriminanti D<0 bo‘lsa, $ax^2+bx+c>0$ tengsizlik $a>0$ bo‘lganda *x* ning barcha qiymatlarida o‘rinli, $a<0$ bo‘lsa, yechimga ega emas. Amalda bu qoidaning qo‘llanishini misollarda ko‘rib chiqamiz.

Misol. 1) $2x^2+5x+3>0$ tengsizlik yechilsin.

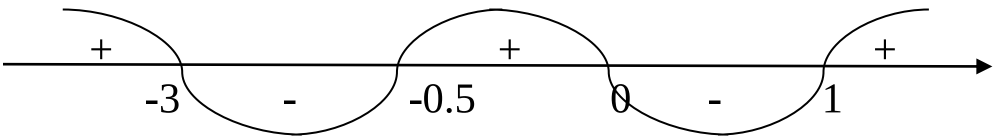
Yechish: Kvadrat uchhadning ildizlarini topib, tengsizlikni $2(x+\frac{3}{2})(x+1)>0$ ko‘rinishida yozamiz. Kvadrat uchhadning aniqlanish sohasi $(-\infty,\infty)$ ekanligini bilgan holda, uni $x_1=-\frac{3}{2},\ x_2=-1$ nuqtalar yordamida oraliqlarga ajratamiz: $(-\infty,-\frac{3}{2}),\ (-\frac{3}{2},-1)\ va\ (-1,\infty)$. Bu oraliqlarni sonlar o‘qida tasvirlaymiz:



$2(x+\frac{3}{2})(x+1)>0$ – tengsizlikda ikkala qavsning ishorasi chapdagi oraliqda hamma vaqt musbat bo‘ladi, undan bitta oldingi oraliqda esa qavslarning ishorasi qarama-qarshi bo‘lib, umumiy ishora minus bo‘ladi, keyingisida musbat bo‘ladi va hokazo. Tengsizlik yechimi $x\in(-\infty;\frac{3}{2})\cup(-1,\infty)$ bo‘ladi. Bu usulda ko‘paytuvchilar (qavslar) soni ko‘p bo‘lganda ham foydalanish mumkin.

Misol. 2) $x(x+3)(x+\frac{1}{2})(x-1)<0$ bo‘lsin.

Bu tengsizlikda chap tomondagi ifodaning nollari $-3,\ -\frac{1}{2},\ 0.1$ bo‘ladi, shuning uchun yechim tasviri quyidagicha bo‘ladi:



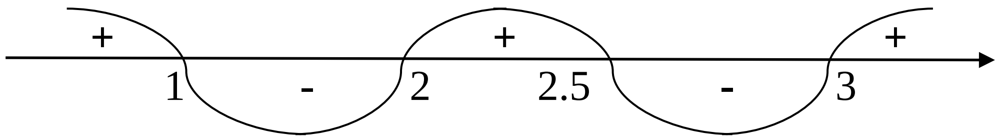
Ifoda manfiy qiymatlarni $(-3;-\frac{1}{2})$ va $(0;1)$ oraliqlarda qabul qiladi. Yechim $x\in(-3;-\frac{1}{2})\cup(0;1).$

Keltirilgan usuldan (u intervallar usuli deyiladi) kasr ifoda bo‘lganda ham foydalanish mumkin.

Misol: 3) $\frac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+6}\geq 0$ tengsizlik yechilsin.

Yechish: Bu tengsizlikni quyidagicha yozamiz:

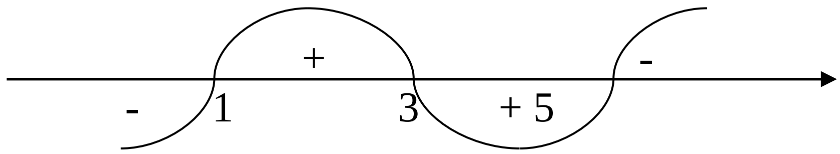
$\frac{2(x-1)(x-\frac{5}{2})}{(x-2)(x-3)} \geq 0$ va sonlar o‘qida belgilab topamiz:



Yechim: $x \in (-\infty, 1] \cup (2, \frac{5}{2}] \cup (3, \infty)$ **.**

Misol. 4) $\frac{x+7}{x-5} + \frac{3x+1}{2} \leq 0$ tengsizlik yechilsin.

Yechish: $\frac{2x+14 + 3x^2 + x - 15x - 5}{2(x-5)} \leq 0, \; \frac{3x^2 - 12x + 9}{2(x-5)} \leq 0, \frac{3(x-1)(x-3)}{2(x-5)} \leq 0$



Yechim: $x \in (-\infty; 1] \cup [3; 5)$.

Mashqlar

Tengsizliklarni yeching:

129. 1) $x^2 + 5x + 4 \geq 0$ 2) $x^2 + 7x + 6 \leq 0$

130. 1) $3x^2 - 5x + 2 \leq 0$ 2) $4x^2 + 5x + 1 \leq 0$

131. 1) $2x^2 + 3x \geq 0$ 2) $5x^2 - 2x \leq 0$

132. 1) $4x^2 + 1 > 0$ 2) $2x^2 + 3 < 0$

133. 1) $2x^2 - 3x + 5 < 0$ 2) $3x^2 + 4x + 2 > 0$

134.1) $x^2(x+1)(x-2)(x-5) > 0$ 2) $x^2(x+2)(x-1)(x-3) < 0$

135.1) $(x+3)^2(x-2)(x-4) \leq 0$ 2) $(x+2)(x+1)^2(x+\frac{1}{2})(x-2)^2 \geq 0$

136. 1) $(2x-1)(x-4)(x-3) \geq 0$ 2) $(3x+2)(x^2-1)(x-2) \leq 0$

137. 1) $\frac{x^2+5x+4}{2x^2-3x+2} \leq 0$ 2) $\frac{3x^2-5x+2}{x^2+x-6} \geq 0$

138. 1) $\frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-2} < 0$ 2) $\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+2} < 1$

Javoblar:

129.2) $x \in [-1,-6]$ 130.2) $x \in [-0.25;-1]$ 131.2) $x \in [0;0.4]$

132. 2) $x \notin$ 133. 2) $x \in (-\infty,\infty)$ 134. 2) $x \in (-\infty,0) \cup (0,-2) \cup (1,3)$

135. 2) $x \in (-\infty,-2) \cup (-0.5;2) \cup (2,\infty)$ 136. 2) $x \in [-1.5;-1] \cup [1,2]$

137. 2) $x \in (-\infty,-3) \cup [\frac{2}{3},1] \cup (2,\infty)$ 138. 2) $x \in (-\infty,-2) \cup (\frac{1-\sqrt{6}}{2},1) \cup (\frac{1+\sqrt{6}}{2},\infty)$

6.4. Muhammad al-Xorazmiy – algebra fanining asoschisi

Algebra fanining asoschisi, ulug‘ alloma Abu Abdulloh Muhammad ibn Muso al-Xorazmiy (Xorazm 780-Bag‘dod 847) o‘zining “Al-Jabr va al-Muqobala” kitobida $ax^2 + bx + c = 0$, $ax^2 + c = bx$, $bx + c = ax^2$, $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $bx = c$ ko‘rinishidagi tenglamalarning nomanfiy ildizlarini topishning algebraik usulini ko‘r-satgan va geometrik tahlil etgan.

O‘z ishida u al-Jabr (*jabr* arabcha so‘z bo‘lib – o‘tkazishni anglatadi), al-Hatt (qo‘shish, ortiqchasini olib tashlash), ya’ni tenglamaning ikkala tomoniga bir xil ifodani qo‘shish yoki ayirish, al-Muqobala muqobil qo‘shish, tanglikning bir tomonini ortishi bilan ikkinchi tomoni o‘shancha kamayishiga teng kuchli iboralardan foydalanadi.

§ 7. IKKI NOMA'LUMLI TENGLAMALAR

7.1. Ikki noma'lumli tenglamaning geometrik ma'nosi

Umumiy qilib aytganda, har qanday ikki *x* va *y* noma'lum ga bog'liq bo'lgan tenglama tekislikda shunday nuqtalarning geometrik o'rnini bildiradiki, bu nuqtalarning koordinatalari shu tenglamani qanoatlantiradi. x va *y* ga bog'liq bo'lgan tenglamani

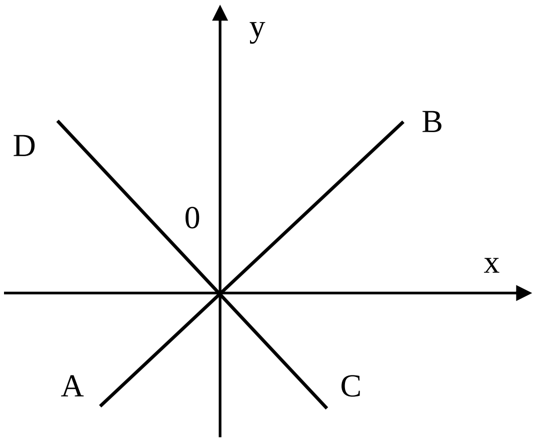
$$F(x,y)=0 \qquad (1)$$

ko'rinishida yozish mumkin. Bu tenglama qanday bo'lganda, qanday chiziq aniqlanishini misollarda ko'rib chiqamiz.

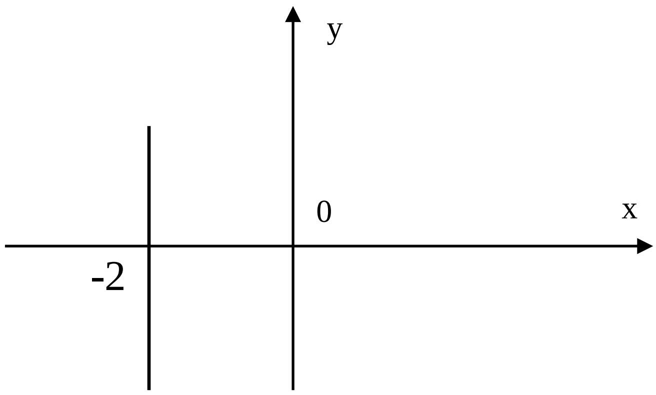
1. (1) tenglama **Ax+By+C=0** ko'rinishidagi chiziqli tenglama bo'lsin. Bu holda o'zgaruvchi *x* ning har bir qiymatiga *y* ning bitta qiymati mos keladi. Bunday (x,y) juftlardan bir nechtasini topib tekislikda belgilaymiz va ularni tutashtirib, to'g'ri chiziqni hosil qilamiz.

Misol. 1) y=x tenglama birinchi va uchinchi koordinatalar burchagining bissektrisasini bildiradi (AB to'g'ri chiziq).

2. y=-x tenglama esa ikkinchi va to'rtinchi koordinatalar burchagining bissektrisasini aniqlaydi (CD to'g'ri chiziq) (6-rasm).



6-rasm.



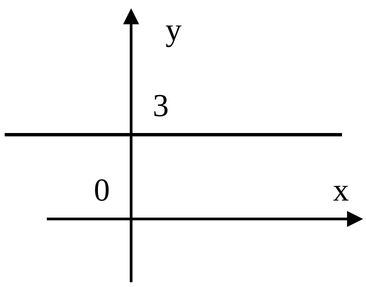
7-rasm.

Tenglamada o'zgaruvchilardan faqat bittasi qatnashishi mumkin. Bu holda ham tenglama biror chiziqni bildiradi.

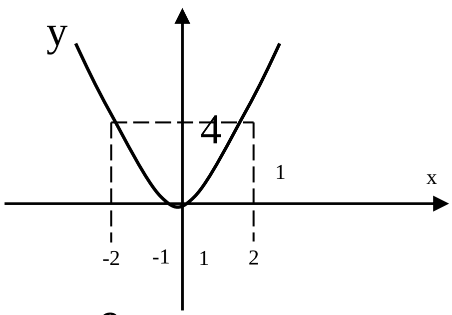
Misol. x+2=0 tenglama berilgan bo'lsin.

Bundan x=-2 ni topamiz. Bu tenglama shunday nuqtalarning geometrik o'rnini aniqlaydiki, ularning har birining abssissasi x=-2 bo'lib, ordinatasi ixtiyoriy bo'ladi, bunday nuqtalar abssissa o'qidan – 2 ga teng nuqtadan o`tadi va 0y o'qiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq bo'ladi (7-rasm).

Shunga o‘xshash, $y-3=0$ tenglama ordinata o‘qidan 3 ga teng kesmani ajratuvchi va 0x o‘qiga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqni bildiradi (8-rasm).



8-rasm.

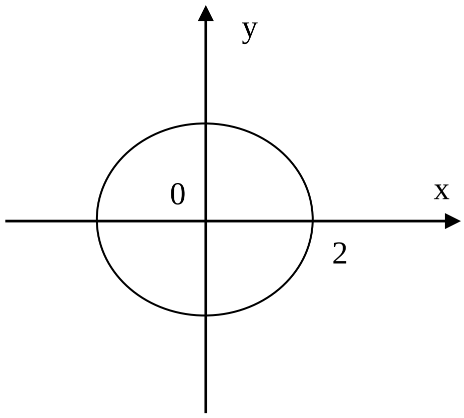


9-rasm.

2. Ikkinchi darajali noma’lum qatnashgan tenglamani ko‘rib chiqamiz.

Misol. 1) $x^2-y=0$ tenglama uchi koordinatalar boshida va tarmoqlari yuqoriga qaragan parabolani bildiradi (9-rasm).

2) $x^2+y^2=4$ tenglama markazi koordinatalar boshida, radiusi $R=2$ bo‘lgan aylanani bildiradi (10-rasm).



10-rasm.

3. Agar (1) tenglamaning chap tomoni ko‘paytuvchilarga ajralsa, har bir ko‘paytuvchini alohida-alohida nolga tenglashtirib, bir nechta chiziqlarni hosil qilamiz.

Misol. $x^2-y^2=0$ yoki $(x+y)(x-y)=0$ tenglama $x+y=0$ va $x-y=0$ to‘g‘ri chiziqlar juftini aniqlaydi.

4. Xususiy holda $F(x,y)=0$ tenglama bitta yoki bir nechta nuqtalardan iborat bo‘lgan to‘plamni aniqlashi mumkin.

Misol. $x^2+y^2=0$ tenglama faqat O(0,0) nuqtani ifodalaydi $(x^2-4)^2+(y^2-1)^2=0$ tenglama to‘rtta nuqta (-2;-1), (-2;1), (2;-1), (2;1) ni aniqlaydi.

5. $F(x,y)=0$ tenglama bironta ham nuqtani aniqlamasligi mumkin. Misol, $x^2+y^2+1=0$ tenglamani haqiqiy sonlar juftining birontasi ham qanoatlantirmaydi, demak bu tenglamaga hech qanday nuqta mos kelmaydi.

Mashqlar

Quyidagi tenglamalarga mos keluvchi chiziqlarni yasang:

139. 1) $y+3x-6=0$ 2) $2y-x+4=0$

140. 1) $x-3=0$ 2) $y+2=0$

141. 1) $x=0$ 2) $y=0$

142. 1) $y^2-x=0$ 2) $y+2x^2=0$

143. 1) $y+x^2-3=0$ 2) $y-2x^2+4=0$

144. 1) $x^2+y^2-2x=0$ 2) $x^2+y^2+2x=0$

145. 1) $x^2+y^2+4x-6y-3=0$ 2) $x^2+y^2-6y-4x-3=0$

146. 1) $2x^2+4y^2=0$ 2) $2x^2+3y^2=0$

147. 1) $(x^2-9)^2+y^2=0$ 2) $x^2+(y^2-4)^2=0$

7.2. Tenglamalar sistemasining geometrik ma’nosi

Chiziqli $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin.

Ma’lumki, sistemadagi har bir tenglama to‘g‘ri chiziqni bildiradi. Sistemaning yechimi ikkala to‘g‘ri chiziqqa umumiy bo‘lgan nuqtasining koordinatalaridan iborat bo‘ladi. Bu nuqta to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasidir. Isbotsiz quyidagini keltiramiz.

1. Agar $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ bo‘lsa, sistema yagona yechimga ega bo‘ladi (to‘g‘ri chiziqlar kesishadi).

2. Agar $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ bo‘lsa, sistema yechimga ega emas (to‘g‘ri chiziqlar parallel)

3. Agar $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ bo‘lsa, sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi (to‘g‘ri chiziqlar ustma-ust tushadi).

Misol. 1) $\begin{cases} 2x-y+5=0 \\ x+3y-7=0 \end{cases}$ sistema yagona yechimga ega, chunki $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{3}$

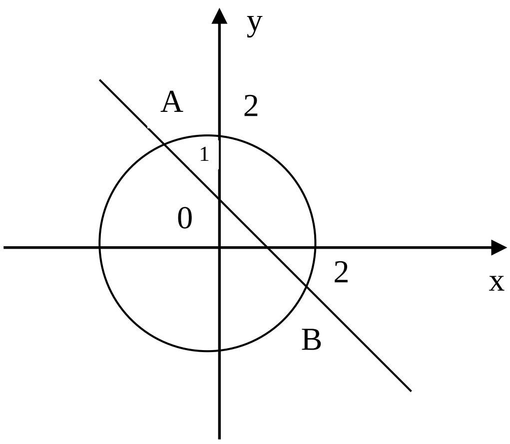
2) $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - 2y - 5 = 0 \end{cases}$ sistema yechimga ega emas, chunki $\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{3}{-5}$

3) $\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ -2x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$ sistema cheksiz ko‘p yechimga ega, chunki $\frac{2}{-2} = \frac{-3}{3} = \frac{1}{-1}$

Agar $\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}$ sistemada tenglamalar har xil darajali bo‘lsa, har bir tenglama biror chiziqni anglatadi. Sistemaning yechimi esa bu chiziqlarning kesishish nuqtalarining koordinatalaridan iborat bo‘ladi.

Misol. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ sistema nechta yechimga ega?

Yechish: $x+y=1$ to‘g‘ri chiziq va $x^2+y^2=4$ aylanani bitta chizmada tasvirlaymiz. Ularning kesishish nuqtalari A va B ning koordinatalari sistemaning yechimi bo‘ladi. Demak, sistema 2 ta yechimga ega ekan (11-rasm).



11-rasm.

Mashqlar

Quyidagi chiziqli sistemalar yechimga ega yoki ega emasligini aniqlang:

148. 1) $\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 4y = 5 \\ 6x - 5y = 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{x}{2} - y = 4 \\ 2x + \frac{y}{5} = 3 \end{cases}$

149. 1) $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ -2x + 3y = 7 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - 5x = 6 \\ -2y + 10x = 9 \end{cases}$

150. 1) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2x + 2y = -6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + \frac{3}{2}y = \frac{1}{2} \end{cases}$

Quyidagi sistemalar nechtadan yechimga ega?

151. 1) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ y + x^2 = 0 \end{cases}$

152. 1) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 5 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

Javoblar: 148. 2) ega; 4) ega. 149. 2) ega emas. 150. 2) ega emas. 151. 2) 2 ta yechimga ega. 152. 2) yechimga ega emas.

7.3. Tenglamalar sistemasini yechishning turli usullari

Tenglamalar sistemasini yechishda turli usullar: noma'lumlarni ketma-ket yo‘qotish, o‘rniga qo‘yish, o‘zgaruvchilarni almashtirish va boshqalar qo‘llanilishi mumkin. Bularni misolda ko‘rib chiqamiz.

1-misol $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$. Sistemani o‘zgaruvchini yo‘qotish yo‘li bilan yeching.

Yechish. Birinchi tenglamani o‘zgarishsiz qoldirib, ikkinchi tenglamani 3 ga ko‘paytiramiz va ularni qo‘shsak, hosil bo‘lgan tenglama faqat x ga nisbatan bo‘ladi, ya’ni:

$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 9x - 3y = 3 \end{cases}$ bo‘lib, qo‘shib 11x=11 va x=1 ni topamiz.

Ikkinchi tenglamada x ning o‘rniga x=1 ni qo‘yib, y ning qiymatini topamiz:

$3 \cdot 1 - y = 1$; $y = 3 - 1 = 2$ Yechim; (1;2)

2-misol. $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$ sistemani o‘rniga qo‘yish usuli bilan yeching.

Yechish: Birinchi tenglamadan y=7-x ni topib, ikkinchi tenglamadagi y ning o‘rniga qo‘yib topamiz:

$x(7-x)=12;$

$7x-x^2-12=0$

$x^2-7x+12=0;$

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\frac{7\pm1}{2};$$

$x_1=3; x_2=4.$

$y=7-x$ da x ning o‘rniga topilgan qiymatlarni qo‘yib, $y_1=4$ va $y_2=3$-ni topamiz.

Yechim: (3,4); (4,3).

3-misol. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^3-y^3=7 \end{cases}$ sistemani o‘rniga qo‘yish usuli bilan yeching.

Yechish: Birinchi tenglamadan $x=y+1$ni topib, ikkinchi tenglamaga qo‘yamiz:

$$(y+1)^3-y^3=7 \Rightarrow y^3+3y^2+3y+1-y^3-7=0 \Rightarrow y^2+y-2=0 \Rightarrow y_{1,2}=\frac{-1\pm3}{2};$$

$y_1=1; y_2=-2.$ $x_1=2, x_2=-1$. Yechim: (2;1), (-1; -2).

4-misol. $\begin{cases} x+y+xy=11 \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases}$ sistemani belgilab yeching.

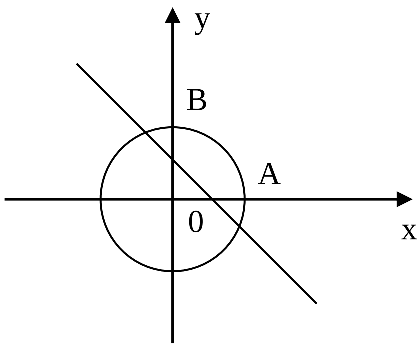
Yechish: Sistemani $\begin{cases} x+y+xy=11 \\ xy(x+y)=30 \end{cases}$ shaklda yozib, $x+y=u$, $xy=v$, deb belgilab, $\begin{cases} u+v=11 \\ uv=30 \end{cases}$ sistemani hosil qilamiz. Viyet teoremasiga ko‘ra u va v $z^2-11z+30=0$ kvadrat tenglamaning ildizlari bo‘ladi:

$$z_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{121-120}}{2\cdot1}=\frac{11\pm1}{2};\ z_1=5,\ z_2=6.$$

Bundan $u_1=5$, $v_1=6$ va $u_2=6$, $v_2=5$ ni topamiz va ikkita sistema $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$ va $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=5 \end{cases}$ ni hosil qilamiz. Bularni yechib, sistemaning yechimi (2;3), (3;2) (5; 1), (1; 5) ni hosil qilamiz.

5-misol. $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ sistemani grafik usulda yeching.

Yechish: $x+y=2$ to‘g‘ri chiziqni va $x^2+y^2=2^2$ aylanani bitta chizmada chizamiz va ularning kesishish nuqtalari A (2;0) va B (0; 2) ni topamiz. Sistemaning yechimi (2; 0) va (0; 2) bo‘ladi (12-rasm).



12-rasm.

Mashqlar

Quyidagi sistemalarni qulay usul bilan yeching:

153. 1) $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 2x - 3y + 10 = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 3y + 7 = 0 \\ 3x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$

154. 1) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} + 1 = 0 \\ \frac{x}{4} + y - \frac{13}{2} = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{3x}{2} - \frac{y}{5} - 2 = 0 \\ 2x - \frac{y}{3} - \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$

155. 1) $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 5y = 9 \end{cases}$

156. 1) $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x + y = 5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$

157. 1) $\begin{cases} -x + y = 6 \\ x^2 - 4y = -3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 2 \\ y^2 + x = 32 \end{cases}$

158. 1) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + y^2 = 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - 3x = 7 \\ x^2 + xy = 2 \end{cases}$

159. 1) $\begin{cases} y - 3x = 2 \\ x^2 - 2y = 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$

160. 1) $\begin{cases} xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = 3 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$

161. 1) $\begin{cases} x - y = \frac{1}{4}xy \\ x^2 + y^2 = \frac{5}{4}xy \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases}$

162. 1) $\begin{cases} (x^2 - y^2)xy = 180 \\ x^2 - xy - y^2 = -11 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x^2 - 2xy + 5y^2 = 35 \\ 5x^2 - 10y^2 = 5 \end{cases}$

Javoblar:

153. 2) $\left(-\frac{2}{13};\frac{29}{13}\right)$; 154. 2) (6; 35); 155. 2) (4; 1); 156. 2) (5; 1);

157. 2) (7; -5); (-4; 6); 158. 2) $\left(\frac{1}{4};\frac{31}{4}\right)$, (-2; 1); 159. 2) (2; 3), (3, 2);

60. 2) (1; 3), (3, 1); 161. 2) (1; 3), (3; 1); 162. 2) (3; 2), (-3; -2), $\left(-\frac{25}{\sqrt{113}};\frac{16}{\sqrt{113}}\right)$, $\left(\frac{25}{\sqrt{113}};-\frac{16}{\sqrt{113}}\right)$.

7.4. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$ son ikkinchi tartibli determinant deyiladi. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$ son uchinchi tartibli determinant deyiladi (hisoblash qoidasi o‘ng tomonida tuzilgan hadlar tuzilishi qoidasidan iborat).

Misol. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 - (-2)\cdot 1 = 15 + 2 = 17$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot(-3) + 3\cdot 6\cdot 4 + 0\cdot 0\cdot(-2) - (-2)\cdot 5\cdot 4 - 3\cdot 0\cdot(3) - 6\cdot 0\cdot 1 = -15 + 72 + 40 = 97$$

7.5. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yechish

$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$ sistema berilgan bo‘lsa, uning yechimi $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ bo‘ladi, bu yerda $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Misol. $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$ sistemani yeching.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2) - 1\cdot 3 = -7; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -12 - 15 = -27; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 6 = 4;$$

$$x = \frac{-27}{-7} = 3\frac{6}{7}; \quad y = -\frac{4}{7}$$

Javob. $\left(3\frac{6}{7};\ -\frac{4}{7}\right)$.

$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ sistemaning yechimi $x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\ \ y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\ \ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$ bo‘lib,

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\ \Delta x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\ \Delta y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\ \Delta z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Keltirilgan usul chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yechish deyiladi.

Misol. $\begin{cases} x+2y+3z=14 \\ 2x-3y+5z=11 \\ 2x+4y-2z=4 \end{cases}$

Yechish: $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}=6+24+20+18+8-20=56$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 11 & -3 & 5 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}=84+132+40+36+44-280=56$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 2 & 11 & 5 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}=-22+24+140-66-20+56=112$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 2 & -3 & 11 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}=-12+44+112+84-16-44=168$$

$$x=\frac{56}{56}=1,\quad y=\frac{112}{56}=2,\quad z=\frac{168}{56}=3$$

Javob: (1; 2; 3)

Mashqlar

Quyidagi sistemalarni Kramer usulida yeching:

163. 1) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x-y=7 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-5y=2 \\ 4x+3y=2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x+5y=18 \\ x-2y=-2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - 4y = 7 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x + 5y = 0 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 5x - y = 6 \end{cases}$

164. 1) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 3x - y + 2z = 4 \\ 2x + 5y + z = 8 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - y + z = 6 \\ 5x + 3y = -1 \\ x + 4z = 9 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 2y - 3z = 11 \\ -2x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ 2y + 3z = 1 \end{cases}$

Javoblar: 163. 2) $\left(\frac{31}{29}; \frac{7}{29}\right)$, 4) (3; -1), 6) (1; -1)

164. 2) (1; -2; 2), 4) (2; 2; -1)

7.6. Tengsizliklar sistemasini yechish

Tengsizliklar sistemasida qatnashgan bir noma'lumli har bir tengsizlik alohida-alohida yechilib, ularning yechimlarini umumiy qismi sistemaning yechimi bo'ladi. Buni misollarda ko'ramiz.

1) $\begin{cases} 2x + 1 \geq 4 \\ x^2 - 3x + 2 < 0 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasini yeching.

Yechish: $\begin{cases} 2x \geq 3 \\ (x-1)(x-2) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1{,}5 \\ 1 < x < 2 \end{cases} \Rightarrow x \in [1{,}5;2)$.

Yechim: $x \in [1{,}5;2)$.

2) $y = \frac{1}{\sqrt{3x-5}} + \frac{1}{x-5}$ funksiyaning aniqlanish sohasi topilsin.

Yechish: Birinchi kasr mavjud bo'lishi uchun *3x-5>0* bo'lishi, ikkinchi kasr mavjud bo'lishi uchun $x - 5 \neq 0$ bo'lishi zarur. Bularni birlashtirib $\begin{cases} 3x - 5 > 0 \\ x - 5 \neq 0 \end{cases}$ sistemaga ega bo'lamiz. Bu sistemani yechib, $\begin{cases} x > \frac{5}{3} \\ x \neq 5 \end{cases} \Rightarrow x \in (\frac{5}{3}, 5) \cup (5, \infty)$ yechimni topamiz.

3) $y = \sqrt{\frac{x^2 + 4x}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish: Ildiz mavjud bo‘lishi uchun, $\frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2-5x+6}} \ge 0$ bo‘lishi zarur.

Kasr mavjud bo‘lishi uchun, maxraj noldan farqli bo‘lishi zarur, demak:

$\begin{cases} x^2-5x+6>0 \\ x^2+4x\ge 0 \end{cases}$ sistemani hosil qilamiz.

Har bir tengsizlikni alohida-alohida yechib, topamiz:

$$\begin{cases} (x-2)(x-3)>0 \\ x(x+4)\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \quad x>3 \\ x\le -4 \quad x\ge 0 \end{cases}$$

Bu yechimlarni umumiy qismi $x\in(-\infty;-4]\cup[0;2)\cup(3;\infty)$ ni topamiz. Bu sistemaning yechimi funksiyaning aniqlanish sohasini beradi.

Mashqlar

Sistemalarni yeching:

165. 1) $\begin{cases} 2x+5>1 \\ x-3<6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x+1}{2}-\frac{1}{3}<\frac{x}{6} \\ 3x-\frac{1}{4}>\frac{5x-1}{2}-3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-3x<0 \\ x^2-3x+2>0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{x}{3}-1<\frac{2x+1}{2}+2 \\ 2x^2-5x+2>0 \end{cases}$

Funksiyaning aniqlanish sohasini toring:

166. 1) $y=\sqrt{|x-1|(x-3)}$, 2) $y=\sqrt{|x+2|(2x-5)}$

167. 1) $y=\sqrt{(x+3)\sqrt{2-x}}$, 2) $y=\sqrt{(4-x)\sqrt{2x+3}}$

168. 1) $y=\frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2-1}}$, 2) $y=\frac{x}{(x+3)\sqrt{4x+x^2}}$

169. 1) $y=\frac{1}{x-5}+\frac{1}{\sqrt{3x-2}}$, 2) $y=\frac{1}{x^2-1}+\sqrt{x^2-6x+8}$

Javoblar:

165. 2) (-6,5;-0,5) 166. 2) [2,5; ∞), 167. 2) [-1,5; 4 168. 2) (0; ∞). 169. 2) $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2)\cup(2,\infty)$

7.7. Modul qatnashgan tenglama va tengsizliklar

Tenglamada modul qatnashgan bo‘lsa, modul belgisidan qutulish lozim. Buning uchun umumiy qoida:

1) $f(x)=F(x)$ bo‘lsa $\begin{cases} F(x)\ge 0 \\ \begin{cases} f(x)=F(x) \\ -f(x)=-F(x) \end{cases} \end{cases}$ dan 2) $|f(x)|=|F(x)|$ bo‘lsa,

$\begin{cases} f(x)=F(x) \\ f(x)=-F(x) \end{cases}$ dan foydalanish kerak.

Misol: 1) $|4x+5|=9$ tenglamani yeching.

Yechish: Bu tenglama quyidagi ikki holga ajraladi:

1) $\begin{cases} 4x+5\ge 0 \\ 4x+5=9 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x+5<0 \\ 4x+5=-9 \end{cases}$

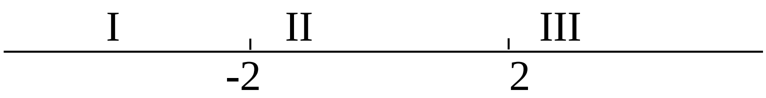
Bularni yechamiz: 1) $\begin{cases} x\ge -\frac{5}{4} \\ x=1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x<-\frac{5}{4} \\ x=-3,5 \end{cases}$

Ikkala yechim ham tenglamani qanoatlantiradi.

Yechim: -3,5 va 1

2) $|2x+4|-|x-2|=3$ tenglamani yeching.

Yechish: Modul ostidagi ifodalarni nolga tenglashtirib $x_1=-2$, $x_2=2$ qiymatlarni topamiz. Bu qiymatlar yordamida sonlar o‘qini qismlarga ajratamiz (13-rasm). Har qismda tenglamani alohida-alohida yechamiz:



13-rasm.

I) $x\le -2;$ $\quad -(2x+4)+(x-2)=3$

$-2x-4+x-2=3$

$-x=9,$ $\quad x_1=-9$

II) $-2<x\le 2;$ $\quad 2x+4+x-2=3$

$3x=1,$ $\quad x_2=\frac{1}{3}$

III) $x>2$ $\quad 2x+4-x+2=3$

$x\ne -3$

Javob: $x_1 = -9; \qquad x_2 = \frac{1}{3}$

3) $\left|2x^2 - 7x + 3\right| = 2x^2 - 7x + 3$ tenglamani yeching.

Yechish: Ikkala tomonda bir xil ifoda turibdi. Bir tomonda modul ostida, boshqa tomonda modulsiz. Tenglik o‘rinli bo‘lishi uchun bu ifoda manfiy bo‘lmasligi yetarli, ya’ni:

$$2x^2 - 7x + 3 \geq 0 \Rightarrow 2(x - \frac{1}{2})(x - 3) \geq 0 \Rightarrow$$

$$x \leq \frac{1}{2}; \; x \geq 3$$

Yechim: $x \in (-\infty, \frac{1}{2}] \cup [3, \infty)$.

4) $\left|x - 2\right| \leq 6$ tengsizlikni yeching.

Yechish: $-6 \leq x - 2 \leq 6 \Rightarrow -4 \leq x \leq 8$

Javob: $x \in [-4, 8]$.

5) $\left|x + 3\right| > 1$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Agar modul ostidagi ifoda manfiy bo‘lsa, *x+3<-1*, bundan *x<-4* bo‘lishi, agar modul ostidagi ifoda musbat bo‘lsa, *x+3>1* bo‘lishi, bundan *x>-2* bo‘lishi lozim. Yechim: $x \in (-\infty, -4) \cup (-2, \infty)$.

6) $\left|x^2 - 5x + 4\right| > 0$ tengsizlik $x^2 - 5x + 4 = 0$ tenglamaning ildizlaridan tashqari *x* ning barcha qiymatlarida o‘rinli bo‘ladi, ya’ni $x \neq 1, \; x \neq 4$.

Yechim: $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 4) \cup (4, \infty)$

7) $\left|x^2 + 3x + 1\right| > 5$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Bu tengsizlik quyidagi ikkita tengsizlikka teng kuchli.

a) $x^2 + 3x + 1 < -5$ b) $x^2 + 3x + 1 > 5$

Birinchisini yechamiz:

$x^2 + 3x + 6 < 0$ D=9-24<0 bo‘lgani uchun $x^2 + 3x + 6$ ifoda hamma vaqt musbat bo‘ladi.

Ikkinchi tengsizlikni yechamiz:

$x^2 + 3x - 4 > 0$ yoki $(x + 4)(x - 1) > 0$

Bundan $x \in (-\infty, -4) \cup (1, \infty)$ yechimni topamiz.

Mashqlar

Tenglamalarni yeching.

170. 1) $|x+2|=4$; 2) $|3x-5|=6$; 3) $|2x+3|=7$; 4) $|5x-4|=9$;

171. 1) $|x+3|=2(x-1)$; 2) $|4x-2|=7x+1$; 3) $|2x-1|=9-x$;

4) $|4x-1|=10-2x$; 5) $|5-x|=2x+3$; 6) $|3-2x|=4-3x$.

172. 1) $|x-2|+|x+2|=4$; 2) $|x+4|-|x-1|=3$;
3) $|x+3|-|x-1|=2$; 4) $|2x-6|-|x+2|=4$.

173. 1) $|x^2-5x+6|=x^2-5x+6$; 2) $|x^2-x-6;|=x^2-x-6$
3) $|2x^2-7x+5|=7x-2x^2-5$; 4) $|-3x^2-8x-5|=3x^2+8x+5$.
5) $|x^2+3x-4|=x-1$; 6) $|x^2-3x+3|=x$.

Tengsizliklarni yeching:

174. 1) $|x-3|<5$; 2) $|x-4|<6$; 3) $|5x-4|\le 6$; 4) $|3x+2|\le 7$.

175. 1) $|x+4|>2$; 2) $|x-5|>6$; 3) $|2x-3|\ge 5$; 4) $|3x-7|\ge 9$.

176. 1) $x^2-3x+2>|x-3|$; 2) $x^2-2>|x^2+3x|$;

3) $|x^2-2x-3|<5$; 4) $|x^2+4x-6|<3x-6$.

177. 1) $|x+2|\ge|x-1|$; 2) $|3x-1|\le|x+5|$;
3) $|x-1|+3>|x+2|$; 4) $|x+1|-2|x|\ge -4$.

Javoblar: 170. 2) $\frac{11}{3}, -\frac{1}{3}$. 4) -1, $\frac{13}{5}$. 171. 2) $\frac{1}{11}$; 4) $-4{,}5; \frac{11}{6}$; , 6) 1. 172. 2) 0, 4) 0;12; 173. 2) $x\in(-\infty,-2]\cup[3,\infty)$; 4) [1, 2, 5]; 6) 1, 3. 174. 2) $x\in(-2,10)$; 4) $x\in[-3,\frac{5}{3}]$.

175. 2) $x\in(-\infty,-1)\cup(11,\infty)$; 4) $x\in(-\infty,-\frac{2}{3}]\cup[\frac{16}{3},\infty)$.

176. 2) $x\in(-\infty,-2)$; 4) Ø 177. 2) $x\in[-1,3]$; 4) $x\in[-\frac{5}{2},-3]\cup[5,\infty)$

7.8. Matnli masalalarni yechish

1-masala. Korxonadagi ayollar hamma ishchilarning 35%ini tashkil qiladi. Agar korxonada erkaklar ayollardan 252 kishiga ortiq bo‘lsa, korxonada ayollar soni nechta?

Yechish: Korxonada erkaklar umumiy ishchilarning 100-35=65% ni tashkil etadi. Erkaklar ayollardan 65-35=30% ga ortiq. 30% ishchilar 252 tani tashkil etsa, 35% i nechta bo‘ladi?

$$\frac{35 x 252}{30} = 294$$

Javob: Korxonada ayollar soni 294 ta ekan.

2-masala. Ikki sonning yig‘indisi 90 ga, nisbati esa 8 ga teng bo‘lsa, bu sonlarni toping.

Yechish: Masala shartiga ko‘ra $\begin{cases} x + y = 90 \\ \frac{x}{y} = 8 \end{cases}$ sistemaga ega bo‘lamiz. Bu sistemani yechib x=80, y=10 ni hosil qilamiz.

Javob: 80 va 10.

3-masala. Shaxsiy korxona chiqargan mahsulotni 3348 so‘mga sotib 4% zarar ko‘rdi. Bu mahsulotning tannarxi qancha bo‘lgan?

Yechish: Mahsulotning tannarxi 100% deb qabul qilinadi, u holda ko‘rilgan zarar tannarxiga nisbatan hisoblanadi. Demak, 3348 so‘m tannarxining 100-4=96%ini tashkil qiladi. Tannarxni x bilan belgilasak, uni topish uchun 3348:96=x:100 proporsiyaga ega bo‘lamiz, buni yechib $x = \frac{3348 \cdot 100}{96} = 3487,5$ so‘mni topamiz.

Javob: 3487 so‘m 50 tiyin.

4-masala. Mahsulotning 1 kilogrammi 640 so‘m turar edi. Narxi tushirilganidan keyin u 570 so‘m bo‘ldi. Mahsulotning narxi necha foiz tushirilgan?

Yechish: Mahsulot narxi 640-570=70 so‘mga kamaytirildi. Bu 640-ning necha foizini (x%) tashkil qilishini topish uchun 640:100=70:x proporsiyaga ega bo‘lamiz. Buni

yechib $x = \frac{100 x 70}{640} \approx 10,94$ ni topamiz.

Javob 10,94 %.

5-masala. Mayiz quritiladigan uzum og‘irligining 32%ini tashkil qiladi. Necha kg uzum quritilganda 2 kg mayiz chiqadi?

Yechish: Masala shartiga ko‘ra 2 kg mayiz quritiladigan uzumning 32%ini tashkil qiladi. Shuning uchun 2:32=x:100 bo‘lib, bundan $x = \frac{2 \cdot 100}{32} = 6,25$

Javob: 6,25 kg.

6-masala. Mahsulot 30% ga arzonlashtirildi. Yangi narx yana 15% ga kamaytirildi. Mahsulotning dastlabki narxi necha foizga arzonlashtirildi?

Yechish: Mahsulotning dastlabki narxini x deb belgilaymiz. Uning narxi 30% kamaygan bo‘lsa, endi x-0,3x=0,7x bo‘ladi. Bu narx yana 15%ga kamaytirilgan bo‘lsa, uning narxi 0,7x-0,15·0,7x=0,595x ni tashkil etadi. Avvalgi narx *x*, oxirgi narx 0,595x bo‘lsa, mahsulot narxi x-0,595x =0,405x ga arzonlashtirildi. Bulardan foydalanib, 0,405x ni necha foiz (P) ekanligini topamiz. $P = \frac{100 \cdot 0,405x}{x} = 40,5\%$

Javob: 40,5%.

7-masala. Guruhdagi talabalarning 12%i matematikadan yozma ishni umuman bajarmagan, 32%i xatolar bilan bajargan, qolgan 14 talaba hammasini ishlagan. Guruhda nechta talaba bo‘lgan?

Yechish: 14 ta to‘g‘ri ishlagan talabalar, talabalar umumiy sonining 100-12-32=56%ni tashkil qiladi. Agar talabalarning umumiy soni x bo‘lsa, $x:100 = 14:56$ bo‘ladi. Bundan $x = \frac{100 \cdot 14}{56} = 25$ ni topamiz.

Javob: 25 ta talaba.

8-masala. Kema oqim bo‘ylab A portdan B portgacha 2 sutka, B dan A gacha 3 sutkada yetadi. Sol A dan B gacha necha sutkada yetadi?

Yechish: A dan B gacha masofa a ga teng bo‘lsin. Bu masofani sol *x* sutkada bosib o‘tsin, demak uning tezligi $\frac{a}{x}$ km/sutka bo‘ladi. Shartga ko‘ra, oqim bo‘ylab harakat qilayotgan kemaning tezligi $\frac{a}{2}$ km/sutka, turg‘un suvdagi tezligi esa $(\frac{a}{2} - \frac{a}{x})$ km/sutka bo‘ladi. Shunga o‘xshash, oqimga qarshi harakatdagi kemaning tezligi $\frac{a}{3}$ km/sutka bo‘lib, turg‘un suvdagi tezligi $(\frac{a}{3}+\frac{a}{x})$ km/sutka bo‘ladi. Bularni tenglashtirib $\frac{a}{2}-\frac{a}{x}=\frac{a}{3}+\frac{a}{x}$ tenglamani hosil qilamiz. Uni yechib x =12 ni topamiz.

Javob: 12 sutka.

Mashqlar

178. Mahsulotni 138600 so‘mga sotib, 10% foyda olindi. Mahsulotning tannarxi qancha?

179. Bir quti sigaret 800 so‘m turar edi. Narxi tushirilgandan keyin u 704 so‘m bo‘ldi. Narxi necha foizga arzonlashdi?

180. Ekskursiya uyushtirish uchun har bir qatnashchidan 225 so‘mdan yig‘ilsa, hamma xarajatlar uchun 1320 so‘m yetmaydi. Agar har bir qatnashchidan 240 so‘mdan yig‘ilsa, 1320 so‘m ortib qoladi. Ekskursiya qatnashchilari nechta bo‘lgan?

181. Kollej talabalarining 55%*i* qizlar. Qizlar o‘g‘il bolalardan 120 taga ortiq. Barcha talabalarning soni nechta?

182. Bir necha kishi 8100 so‘m yig‘ishi lozim edi. Agar ular 3 kishiga kam bo‘lganda, har bir kishi 450 so‘mdan ortiq to‘lashi lozim bo‘lar edi. Ular necha kishi bo‘lgan?

183. A va B shaharlar orasidagi masofa suv bo‘ylab 20 km. Qayiq A dan B ga va B dan A ga borib kelishi uchun 10 soat vaqt sarf qildi. Agar qayiqni oqim bo‘ylab 3 km ga sarf qilgan vaqti, oqimga qarshi 2 km ga sarf qilgan vaqtiga teng bo‘lsa, kemaning turg‘un suvdagi tezligini toping.

184. Kema oqim bo‘ylab 36 km va oqimga qarshi shuncha yo‘l bosib, hammasi bo‘lib 5 soat vaqt sarf qildi. Agar oqim tezligi 3 km/soat bo‘lsa, kemaning turg‘un suvdagi tezligini toping.

185. Yo‘lovchi poyezd stansiyasiga keta turib, avvalgi 1 soatda 3,5 km masofani o‘tdi. Shu tezlikda harakatlanayotgan yo‘lovchi 1 soat kechikishini sezib, tezligini 5 km/soatgacha oshirdi va stansiyaga 30 minut oldin yetib keldi. Yo‘lovchi qancha masofani o‘tishi kerak edi?

Javoblar: 178. 126 000; 180. 176; 182. 9; 184. 15

§ 8. MATEMATIK INDUKSIYA USULI

8.1. Deduksiya va induksiya

Induksiya – lotincha bo‘lib, “hosil qilish”, “yaratish”ni anglatadi.

Har qanday mulohazani ikki xilga: umumiy va xususiyga bo‘lish mumkin:

1. Har qanday uchburchakda ichki burchaklar yig‘indisi 180^o ga teng.
2. Har qanday juft son ikkiga bo‘linadi; bu jumlalar umumiy.

Agar: 1. To‘g‘ri burchakli uchburchakda o‘tkir burchaklar yig‘indisi 90^o ga;

2.56 songa bo‘linadi desak, bular xususiy mulohazalar (tasdiqlar) bo‘ladi.

Umumiy mulohazalardan xususiyga o‘tish deduksiya deyiladi. Bu usul matematikada keng qo‘llaniladi.

Misol: Hamma umumiy teoremalar xususiy hollar uchun qo‘llanishi mumkin deb isbot qilinadi.

Shu qatorda, ko‘p hollarda xususiy hollardan umumiy holga o‘tiladi. Masalan, $a_{2,}\ a_{2,} \dots\ a_n$ arifmetik progressiyadagi

$$a_{2,} = a_1 + d$$

$$a_3 = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_1 + 3d$$

xususiy formulalardan kelib chiqib, umumiy formula

$a_n = a_1 + (n-1)d$ ni yozamiz.

Xususiy hollardan umumiy holga o‘tish induksiya deyiladi.

Agar deduksiya qo‘llanganda xato natijalar olinmasa, induksiya usuli noto‘g‘ri natijalarga keltirishi mumkin. Masalan, $\lambda(n) = n^2 + n + 41$ uchhad natural n ning boshlang‘ich qiymatlarida tub sonlarni beradi: $\lambda(1) = 43,\quad \lambda(2) = 47,\quad \lambda(3) = 53,\quad \lambda(4) = 61 \dots n$ ning barcha natural qiymatlarida $n^2 + n + 41$ tub sonni beradi deyish xato bo‘ladi. n=41 ni qo‘yib ko‘ramiz: $\lambda(41) = 41^2 + 41 + 41 = 41(41 + 1 + 1) = 41 \cdot 43$. Natija murakkab sondir.

Induktiv usul matematikada qadim zamonlardan qo‘llaniladi. Aksar hollarda natija xato bo‘lib chiqadi. XVII asrning o‘rtalariga kelib, bunday noto‘g‘ri mulohazalar ko‘plab yig‘ilib qoladi. Ilmiy asoslangan usullarni qo‘llash talabi borgan sari oshib borar edi. Bunday usul ishlab chiqildi (Paskal 1623-1662, Dekart, Yakov Bernulli 1654-1705) Bu usul matematik induksiya usuli deyiladi va quyidagicha asoslanadi.

biror mulohaza (tasdiq):

1) n=1 uchun to‘g‘ri bo‘lsa,

2) bu tasdiqni n=k uchun tog‘riligidan uni n=k+1 hol uchun to‘g‘riligi kelib chiqsa, bu mulohaza (tasdiq) har qanday naural *n* uchun to`g‘ri hisoblanadi.

1-misol. $s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ yig‘indini hisoblang.

Yechish: Avval bitta, ikkita, uchta, to‘rtta qo‘shiluvchilar uchun yig‘indini hisoblaymiz (induksiya – lotincha bo‘lib, “hosil qilish”, “yaratish” ni anglatadi).

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}$$

Har bir yig‘indini surati qo‘shiluvchilar soniga teng bo‘lib, maxraji undan bitta katta. Bu har qanday n uchun $s_n = \frac{n}{n+1}$ taxmin qilish imkonini beradi. Bu taxminning to‘g‘riligini tekshirishga matematik induksiya usulini qo‘llaymiz.

1) n=1 bo`lganda taxmin to‘g‘ri, yani, $s_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$

2) n=k da $s_n = \frac{k}{k+1}$ deb taxmin qilib, n=k+1 uchun bu taxminning to‘g‘riligini tekshiramiz.

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Shunday qilib, n=k uchun to‘g‘riligini faraz qilgan holda, uni n=k+1 hol uchun isbot qildik, yani $s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ formula barcha natural *n* uchun to‘g‘ri.

2-misol. $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + \sin n\alpha$ ayniyat isbotlansin.

Yechish: 1) n=1 bo‘lganda tenglikning ikkala tomoni bir xil, yani $\cos\alpha + i\sin\alpha$ ga teng.

2) $n = k$ bo‘lganda $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^k = \cos k\alpha + i\sin k\alpha$ tenglik o‘rinli deb faraz qilamiz va $n = k + 1$ uchun to‘g‘riligini tekshiramiz:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{k+1} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^k \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha) = (\cos k\alpha + i\sin k\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha) =$$

$$(\cos k\alpha\cos\alpha - \sin k\alpha\sin\alpha) + i(\cos k\alpha\sin\alpha + \sin k\alpha\cos\alpha) = \cos(k\alpha + \alpha) + i\sin(k\alpha + \alpha) =$$

$$\cos(k + 1\alpha) + i\sin(k + 1\alpha)$$

Bu formulani n=k+1 bo‘lganda ham to‘g‘riligini bildiradi. Matematik induksiyaning ikkala sharti ham bajarildi, shu bilan ayniyat barcha natural *n* uchun to‘g‘ri bo‘ladi.

Mashqlar

Quyidagi mulohazalardan umumiy va xususiylarini ko‘rsating:

186. 28 soni juftdir.

187. Har qanday 8 bilan tugaydigan son juftdir.

188. Har qanday burchakning kosinusi birdan katta bo‘la olmaydi.

189. 46^o burchak kosinusi birdan kichik.

190. 24, 44, 84 sonlar 4 ga bo‘linadi. Shunga asosan, har qanday 4 bilan tugaydigan son 4 ga bo‘linadi deyish mumkinmi?

191. 30^o, 45^o li burchaklarning kosinusi irratsional sonlar. Shunga asosan har qanday burchakning kosinusi irratsional son deyish mumkinmi?

192. Arifmetik progressiya ixtiyoriy hadining formulasini keltirib chiqaring.

193. $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ tenglikni barcha natural n uchun to‘g‘riligini ko‘rsating.

Javoblar: 186. xususiy, 188. umumiy, 190. yo‘q, 192. $a_n = a_1 + (n-1)d$.

8.2. Matematik induksiya usuli yordamida ba’zi ayniyatlarni isbotlash

1-misol. n ning barcha natural qiymatlarida $a_n = 6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$ ni 17 ga bo‘linishini isbotlash.

Yechish: 1) n=1 bo‘lganda $a_1 = 6^2 + 19 - 2^2 = 36 + 19 - 4 = 51 = 3 \cdot 17$ 2)n=k da $a_k = 6^{2k} + 19^k - 2^{k+1}$ 17 ga bo‘linadi deb faraz qilamiz va n=k+1 bo‘lganda 17 ga bo‘linishi isbotlaymiz:

$$a_{k+1} = 6^{2(k+1)} + 19^{k+1} - 2^{k+1+1} = 36 \cdot 6^{2k} + 19 \cdot 19^k - 2 \cdot 2^{k+1} = (34 + 2)6^{2k} + (17 + 2) \cdot 19^k - 2 \cdot 2^{k+1} =$$

$$= 2(6^{2k} + 19^k - 2^{k+1}) + 34 \cdot 6^{2k} + 17 \cdot 19^k = 2 \cdot a_k + 17(2 \cdot 6^{2k} + 19^k)$$

farazga ko‘ra a_k 17 ga bo‘linadi, ikkinchi qo‘shiluvchida 17 ko‘payuvchi bo‘lgani uchun u 17 ga bo‘linadi, demak yig‘indi a_{k+1} ham 17 ga bo‘linadi.

Matematik induksiya jarayoniga ko‘ra, a_n n ning barcha natural qiymatlarida 17 ga bo‘linadi.

Ba’zi mulohazalar (tasdiqlar) birdan boshlab emas, balki biror p natural sondan boshlab to‘g‘ri bo‘lishi mumkin. Bunday mulohazalar oldingiga o‘xshash bo‘lgan yo‘l bilan isbotlanadi. Bunday isbot quyidagiga asoslanadi:

1) bu mulohaza n=p (p>1) da o‘rinli,

2) bu mulohazani n=k (k$\geq p$) da to‘g‘riligidan uni n=k+1 da to‘g‘riligi isbot qilinsa, u barcha natural n lar uchun isbotlangan bo‘ladi.

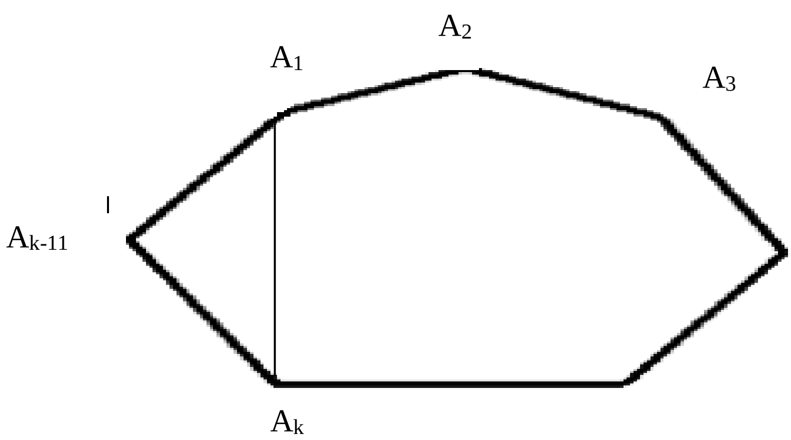
2-misol. Har qanday qavariq ko‘pburchak ichki burchaklarining yig‘indisi $S_n = (n-2)\pi$ ga teng, bu yerda n ko‘pburchak tomonlarining soni.

Yechish: Bu tasdiq faqat $n \geq 3$ uchun manoga ega.

Masalani yechish uchun hozir bayon etilgan induksiyani qo‘llaymiz:

1) n=3 bo‘lganda tasdiq $S_3 = \pi$ shaklni oladi Har qanday uchburchakda ichki burchaklarining yig‘indisi π ga teng, demak bu holda formula to‘g‘ri.

2) n=k bo‘lganda $S_k = (k-2)\pi$ deb faraz qilamiz va n=k+1 hol uchun isbot qilamiz.



14-rasm.

$A_1A_2...A_kA_{k+1}$ ixtiyoriy qavariq (k+1) burchak bo‘lsin (14-rasm). A_1-ni A_k bilan tutashtirib $A_1A_kA_{k+1}$ uchburchakni ajratamiz. $A_1A_2...A_k$ qavariq k burchak bo‘ladi.

$A_1A_2...A_{k+1}$ (k+1) burchakning burchaklarining yig‘indisi, $A_1A_kA_{k+1}$ uchburchak burchaklari va $A_1A_2...A_k$ k burchak burchaklari yig‘indisidan iborat, yani $S_{k+1} = S_k + \pi = (k-2)\pi + \pi = (k-1)\pi$

Matematik induksiyaning ikkala talabi bajarildi, demak bu formula barcha natural $n \geq 3$ uchun o‘rinlidir:

O‘tkazilgan mulohazalardan ma’lum bo‘ladiki, matematik induksiya usuli bilan isbot qilish ikki qismga bo‘linadi.

1-qism. Tasdiqni (mulohazani) n=1 (yoki n=p)da to‘g‘riligini tekshirish;

2-qism. Tasdiq n=k uchun o‘rinli deb faraz qilinadi va n=k+1 uchun isbot qilinadi.

Bu qismlarning har biri o‘zicha muhim. Oldin aytganimizdek, $f(n) = n^2 + n + 41$ ifoda n ning bir qator qiymatlarida tub sonni beradi, umuman olganda, n ning barcha qiymatlarida tub sonni beradi deyish noto‘g‘ri bo‘ladi.

Isbotdagi 1-qism tekshirilmasdan, 2-qismning to‘g‘riligidan xulosa chiqarish ham noto‘g‘ri mulohazalarga olib keladi. Buni quyidagi misolda ko‘rish mumkin.

Teorema. Ixtiyoriy natural n da 2n+1 juft son boladi.

Isbot. Bu tasdiqni $n = k$ uchun to‘g‘ri deb, ya’ni $2k+1$ sonni juft son deb faraz qilib, $n = k+1$ bo‘lganda sonni juft ekanligini isbot qilamiz; Haqiqatda $2(k+1)+1 = (2k+1)+2$

Farazga ko‘ra 2k+1 juft son, 2 ham juft son, demak ularning yig‘indisi (2k+1)+2 ham juft son bo‘ladi. teorema “isbot” qilindi. Biz teoremaning to‘g‘riligini n=1 da tekshirmadik, oqibatda noto‘g‘ri tasdqni isbotladik.

3-misol. Natural n ning barcha qiymatlarida $a_n = 5^{n+3} \cdot 2^n - 125$ ni 45 ga bo‘linishini isbotlang.

Yechish: 1) n=1 da $a_1 = 5^4 \cdot 2 - 125 = 125(5 \cdot 2 - 1) = 125 \cdot 9 = 25 \cdot 45$son 5 45 ga bo‘linadi.

2)n=k da $a_k = 5^{k+3} \cdot 2^k - 125$ 45 ga bo‘linadi deb faraz qilamiz va n=k+1 da 45 ga bo‘linishini isbot qilamiz:

$$a_{k+1} = 5^{k+1+3} \cdot 2^{k+1} - 125 = 5 \cdot 2 \cdot 5^{k+3} 2^k - 125 = 9 \cdot 5^{k+3} \cdot 2^k + 5^{k+3} \cdot 2^k - 125 =$$

$$= 9 \cdot 5 \cdot 5^{k+2} \cdot 2^k + a_k = 45 \cdot a^{k+2} \cdot 2^k + a_k$$

Birinchi qo‘shiluvchi 45 ga bo‘linadi (45 ko‘payuvchi), farazga ko‘ra ikkinchi qo‘shiluvchi a_k ham 45 ga bo‘linadi, demak yig‘indi ham 45 ga bo‘linadi. Bundan esa, n ning barcha natural qiymatlarida $a_n = 5^{n+3} * 2^n - 125$ ni 45 ga bo‘linishi kelib chiqadi.

Mashqlar

194. $S_n = \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + ... + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{a}{a(a+n)}$ ayniyatni isbotlang.

195. $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ayniyatni isbotlang.

196. $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ayniyatni isbotlang.

197. $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ayniyatni isbotlang.

198. Geometrik progressiya ixtiyoriy hadi formulasini keltirib chiqaring.

199. Qavariq n burchak o‘zining kesishmaydigan diagonallari bilan nechta uchburchakga ajraladi?

200. $a_n = n^3 + 11n$ ni ixtiyoriy natural n da 6 ga bo‘linishini isbotlang.

Quyidagi misollarda ixtiyoriy natural n da a_n ni b ga bo‘linishini isbotlang.

201. $a_n = 2^n + 2^{n+1}$ b=6

202. $a_n = 7^n + 3n - 1$ b=9

203. $a_n = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$ b=19

204. $a_n = 3^{3n+2} + 7^n$ b=10

205. $a_n = 18^n - 1$ b=17

8.3. Matematik induksiya usuli yordamida ba’zi tengsizliklarni isbotlash

Matematik induksiya usuli yordamida tengsizliklarni isbotlash ayniyatlarini isbotlash kabi olib boriladi: 1) tengsizlikning to‘g‘riligi n=1 (yoki n=p) hol uchun tekshiriladi; 2) n=k uchun tengsizlik to‘g‘ri deb faraz qilinadi va $n=k+1$ bo‘lganda isbot qilinadi. Buni misollarda ko‘rib chiqamiz:

1-misol. Ixtiyoriy n va $a\geq -1$ bo‘lganda $(1+a)^n\geq 1+na$ ekanligini isbot qilamiz.

Yechish: 1) n=1 bo‘lganda 1+ a =1+ a qanoatlantiradi. 2) $n=k+1$ bo‘lganda (1+a)^k $\geq 1+ka$ o‘rinli deb faraz qilamiz va n=k+1 bo‘lganda isbot qilamiz:

$$(1+a)^{k+1}=(1+a)^k(1+a)\geq(1+ka)(1+a)=1+ka+a+ka^2=1+(k+1)a+ka^2\geq 1+(k+1)a$$

yani $(1+a)^{k+1}\geq 1+(k+1)a$ kelib chiqadi. Talab bajarildi. Demak matematik induksiya talablariga binoan n ning barcha natural qiymatlarida $(1+a)^n\geq 1+na$ bajariladi.

2-misol. $2^{2n}>$ n^2 n ning barcha natural qiymatlarida bajarilishini ko‘rsating.

Yeching: 1) n=1 da bu tengsizlik o‘rinli 2>1

2) $n=k$ da bu tengsizlik bajariladi deb faraz qilamiz va $n=k+1$ uchun isbot qilamiz.

$2^{2(k+1)}=4^{k+1}=4\cdot 4^k=4^k+2\cdot 4^k+4^k$ ni hosil qilamiz va $4^k=2^{2k}>$ k^2 (farazga binoan), $4^k>k^2\geq 1,\quad k^2\geq 1$ ekanligini hisobga olgan holda $2^{2(k+1)}>k^2+2k^2+k^2$ yoki $2^{2(k+1)}>k^2+2k+1=(k+1)^2$ ni hosil qilamiz.

Bundan $2^{2n}>n^2$ barcha natural n uchun bajarilishi kelib chiqadi.

Mashqlar

206. n ning barcha natural qiymatlarida $2^n\geq n+1$ bo‘lishini isbotlang.

207. n ning barcha natural qiymatlarida
$\frac{1}{n}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{2^n-1}\leq n$ bo‘lishini isbotlang.

208. n natural va $n\geq 3$ bo‘lganda $2^n\geq 2n+1$ bo‘lishini isbotlang.

209. Barcha natural n uchun $|Sinnx|<n|Sinx|$ bo‘lishini isbotlang.

210. Har qanday natural $n\geq 5$ uchun $2^n>n^2$ ekanligini isbotlang.

211. Har qanday natural $n\geq 2$ uchun
$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+.....+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ bo‘lishini isbotlang.

212. Natural $n > 1$ bo‘lganda

$\frac{1}{n+1} + \frac{1^n}{n+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n+n} > \frac{13}{24}$ bo‘lishini isbotlang.

213. Natural $n > 1$ bo‘lganda

$\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}$ ekanligini ko‘rsating.

214. Natural n uchun $Sin^{2n} a + \cos^{2n} a \le 1$ ekanligini tekshiring.

§ 9. FUNKSIYALAR

9.1. Sonli funksiyalar

Kundalik hayotimizda tabiatdagi, jamiyatdagi hodisalarni bir-biriga bog‘liqligini ko‘ramiz: havo haroratini vaqtga nisbatan o‘zgarishi, transport vositasini kelmaganligi sababli talabaning darsga kechikishi va h.

Matematika bunday hodisalarni o‘rganishni umumlashtiradi va umumiy xulosalar chiqaradi.

Faraz qilaylik ikkita sonli to‘plamlar X va Y berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar o‘zgaruvchi miqdor x ning har bir qiymatiga boshqa o‘zgaruvchi miqdor y ning ma’lum qiymati mos keltirilgan bo‘lsa, y x ning funksiyasi deyiladi va $y = f(x)$ (yoki $y = f \ (x), y = y(x),...)$ kabi belgilanadi.

O‘zgaruvchi x o‘zgarish jarayonida boshqa o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lmagan holda o‘zgaradi, shuning uchun erkli o‘zgaruvchi yoki argument deyiladi, y ning o‘zgarishi esa x ning qiymatlariga bog‘liq holda amalga oshadi, shuning uchun u bog‘liq o‘zgaruvchi yoki funksiya deyiladi. x va y orasidagi bog‘lanish funksional bog‘lanish deyiladi. Funksional bog‘lanishni bildiruvchi $y = f(x)$ ifoda y ning qiymatini hosil qilish uchun x va o‘zgarmas miqdorlar ustida bajarilishi kerak bo‘lgan amallar majmuasini bildiradi.

1-misol. Kubning hajmi $\cup$ uning qirrasi x ning funksiyasidir: $\cup = x^3$.

2-misol. Doiraning yuzi S uning radiusi R ning funksiyasidir: $S = \pi R^2$

3-misol. Moddiy nuqtaning harakat natijasida bosib o‘tgan masofasi vaqtning funksiyasidir $S = f(t)$.

Bu misollarda argument (kub qirrasi x, doira radiusi R, vaqti t) boshqa o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lmagan holda o‘zgaradi, funksiya (hajm, yuza, masofa) esa argumentning o‘zgarishiga bog‘liq holda o‘zgaradi.

Agar $ó = f(x)$ funksional bog‘lanishda argument x ning har bir qiymatiga funksiya y ning ikkita (yoki ko‘p) qiymatlari mos kelsa, funksiya ikki (yoki ko‘p) qiymatli deyiladi.

4-misol. $y = 2x + 3$ bir qiymatli funksiya, $y^2 = |x|$ ikki qiymatli funksiya $(y = \pm\sqrt{1x1})$.

$y = c \ (c = const)$ ham funksional bog‘lanishni bildiradi. Bu yerda argument x ning barcha qiymatlari uchun funksiya y o‘zgarmas miqdor c ni qabul qiladi.

2-ta’rif. Funksiyaning aniqlanish (yoki mavjudlik) sohasi deb argument x ning shunday qiymatlar to‘plamiga aytiladiki, bu qiymatlar uchun funksiya y aniqlangan bo‘lsin. $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(y)$ yoki $D(f)$ orqali belgilanadi.

5-misol. $y = x - 5$ funksiya uchun: $D(y) = (-\infty, \infty)$ yoki x$\in (-\infty, \infty)$.

$y = \frac{1}{x^2 - 4}$ funksiya uchun: $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2, 2) \cup (2; \infty)$ yoki $x \in (-\infty, -2) \cup (-2; 2) \cup (2, \infty)$, yani $x = -2$ va $x = 2$ da kasr maxraji nolga teng bo‘lib, funksiya ma’noga ega bo‘lmaydi.

3-ta’rif. Funksiyaning qiymatlar (yoki o‘zgarish) sohasi deb funksiya y ning aniqlanish sohasida qabul qilishi mumkin bo‘lgan barcha qiymatlari to‘plamiga aytiladi va $E(y)$ bilan belgilanadi.

6-misol. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ funksiya uchun $D(y) = (-\infty, \infty)$ bo‘lsa, $E(y) = (0, 1]$ bo‘ladi.

Mashqlar

215. 1-20 misollarda funksiyalarning aniqlanish sohasini toping.

1. $y = \frac{3}{x + 2}$; 2. $y = \frac{2}{3x - 2}$; 3. $y = \frac{2x}{x - 3}$; 4. $y = \frac{5x}{4x + 3;}$

5. $y = \frac{2x + 3}{(x + 1)(x - 2)}$; 6. $y = \frac{x + 6}{(x + 2)(x - 3)}$; 7. $y = \frac{x - 3}{(x + 2)(x - 1)(x - 2)}$;

8. $y = \frac{x + 1}{x(x - 2)(x - 3)}$; 9. $y = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}$; 10. $y = \frac{x - 3}{x^2 + 4x + 3}$;

11. $y = \frac{2x - 3}{x^2 + 2x + 5}$; 12. $y = \frac{5x + 1}{2x^2 - 3x + 10}$; 13. $y = x^2 + \frac{1}{x + 1}$;`

14. $y = x + 1 - \frac{1}{x + 2}$; 15. $y = \sqrt{x - 4}$; 16. $y = \sqrt{9 - x^2}$;

17. $y = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}}$; 18. $y = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 5x + 4}}$; 19. $y = \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 + 2x + 5}$;

20. $y = \frac{1}{2x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 3}$

216. Funksiyaning qiymatlar sohasini aniqlang

1. $y = |x - 3|$; 2. $y = |1 - 2x|$; 3. $y = 2x^2 - 1$; 4. $y = 3 - x^2$;

5. $y=\dfrac{x}{x-3}$; 6. $y=\dfrac{2x}{1+3x}$; 7. $y=\sqrt{x-3}-2$; 8. $y=3+\sqrt{2-x}$;

9. $y=\sqrt{x^2+x+2}$; 10. $y=\dfrac{2}{\sqrt{x^2-2x+3}}$.

Javoblar: 215 2) $(-\infty,\frac{2}{3})\cup(\frac{2}{3},\infty)$; 4) $(-\infty,-\frac{3}{4})\cup(-\frac{3}{4},\infty)$;

6) $(-\infty,-2)\cup(-2,3)\cup(3,\infty)$; 8) $(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,3)\cup(3,\infty)$;

10) $(-\infty,-3)\cup(-3,-1)\cup(-1,\infty)$; 12) $(-\infty,\infty)$; 14) $(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$;

16) $[-3,3]$; 18) $(-\infty,-4)\cup(-1,\infty)$; 20) $(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},\infty)$.

216 2) $[0,\infty)$; 4) $(-\infty,3]$; 6) $(-\infty,\infty)$; 8) $[3,\infty)$; 10) $(0,\sqrt{2}]$.

9.2. Funksiyaning berilish usullari

1. Jadval usuli: Argumentning $x_1, x_2 \dots x_n$ ma’lum qiymatlariga mos keluvchi funksiyaning $y_1, y_2, \dots y_n$ qiymatlari jadval ko‘rinishda berilgan bo‘ladi. Bunga trigonometrik funksiyalarning qiymatlar jadvallari, logorifmlar jadvallari va hokazolar misol bo‘lishi mumkin.

2. Grafik usuli: Bu usulda Oxy tekisligida funksiyaning grafigi berilgan bo‘ladi.

Ta’rif: Funksiyaning grafigi deb shunday nuqtalarning geometrik o‘rniga aytiladiki, ularning abssissalari argument x ning qiymatlari bo‘lib, ordinatalari funksiya y ning mos qiymatlaridan iborat bo‘ladi.

3. Analitik usul. Bu usulda funksional bog‘lanish formula yordamida beriladi.

Masalan: $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$; $f(x)=\sqrt{1-x^2}$; $Q=\pi R^2$

Keltirilgan usullardan eng muhimi analitik usuldir. Bu usulda funksiya ixcham berilgan bo‘lib, x ning mumkin bo‘lgan har qanday qiymati uchun funksiya y ning mos qiymatini hisoblash mumkin bo‘ladi. Eng asosiy afzalligi esa bu usulda berilgan funksiya uchun matematik analiz usullarini qo‘llash mumkin bo‘ladi. Analitik usulda berilgan funksiya uchun qiymatlar jadvalini tuzish mumkin, grafikni ham yasash mumkin.

Aniqlanish sohasining turli qismlarida funksional bog‘lanish turli analitik ko‘rinishlarda berilishi mumkin:

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & -\infty < x < \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\le x < 1\\ 2x^2-2 & 1\le x<\infty\end{cases}$$

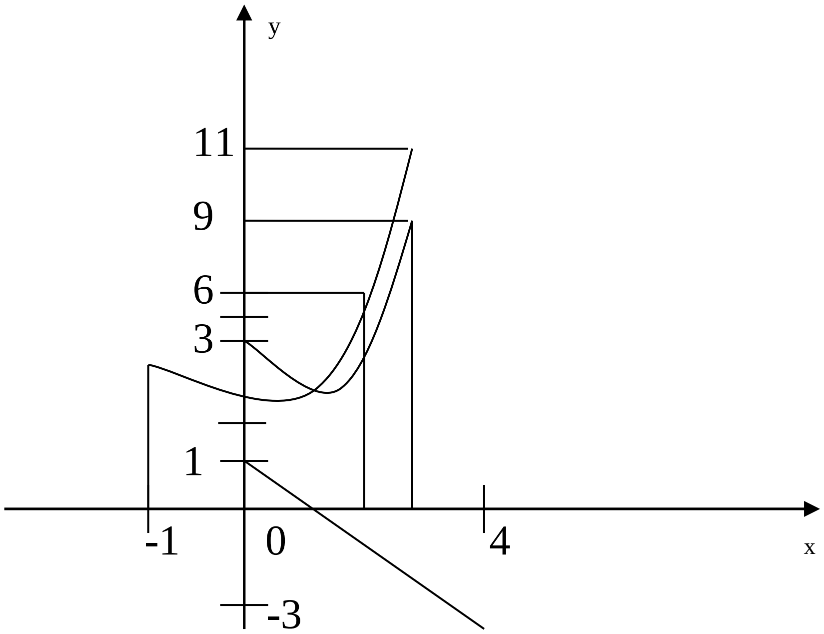
9.3. Funksiyalar ustida amallar

$y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)$, $y=\varphi(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(\varphi)$ bo‘lsin.

1-ta’rif. $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalarning yig‘indisi deb $D(F)=D(f)\cap D(\varphi)$ sohada aniqlangan $F(x)=f(x)+\varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.

1-misol. $f(x)=x^2+2,\quad 1\le x\le 3$ va $\varphi(x)=1-x,\quad 0\le x\le 4$ funksiyalarning yig‘indisi $F(x)=(x^2+2)+(1-x)=x^2-x+3,\ 1\le x\le 3$ bo‘ladi. $F(x)$ ning grafigini yasashda $f(x)$ va $\varphi(x)$ grafiklarini qo‘shishdan foydalanish mumkin.

$y=(1-x)+(x^2+2)$ funksiyaning grafigini $y=1-x$ va $y=x^2+2$ funksiyalarning grafiklarini qo‘shishdan hosil qilamiz (15-rasm).



15-rasm.

2-ta’rif. $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalarning ko‘paytmasi deb $D(F)=D(f)\cap D(\varphi)$ sohada aniqlangan $F(x)=f(x)\ \varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.

3-ta’rif. $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalarining bo‘linmasi deb $F(x)=\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ funksiyaga aytiladi, bunda $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ uchun $D(\varphi)$ sohaning barcha $\varphi(x)\neq 0$ bo‘ladigan nuqtalarida qaraladi va $D(F)=D(f)\cap D(\frac{1}{\varphi})$ bo‘ladi.

2-misol. $f(x)=x^2-1;\quad \varphi(x)=\frac{2}{x}$ bo‘lsin $F(x)=\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{x(x^2-1)}{2}$ bo‘ladi.

4-ta’rif. $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalarning kompozitsiyasi (*composition* lotincha – tuzish) deb $F(x)=\varphi(f(x))$ (yoki $F(x)=\varphi of$) funksiyaga aytiladi. Kompozitsiyani tuzish uchun $\varphi(x)$ da x ning o‘rniga $f(x)$ ni qo‘yish lozim.

3-misol. $\varphi(x)=\sqrt{x+1},\quad f(x)=\frac{1}{2x-1}$ bo‘lsin $\varphi of=\varphi(f(x))=\sqrt{\frac{1}{2x-1}+1}=$ $=\sqrt{\frac{2x}{2x-1}}$ va $f0\varphi=\frac{1}{2\sqrt{x+1}-1}$ $f0\varphi=\frac{1}{2\sqrt{x+1}-1}$ bo‘ladi.

9.4. Nuqtalar yordamida funksiya grafigini yasash

Faraz qilaylik $y=f(x)$ funksiya (a;b) oraliqda aniqlangan bo‘lsin va grafigini yasash talab qilinsin.

Buning uchun x ning (a, b) oraliqqa tegishli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qiymatlariga mos keluvchi $y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2),\ldots,\ y_n=f(x_n)$ funksiyaning qiymatlarini topamiz.

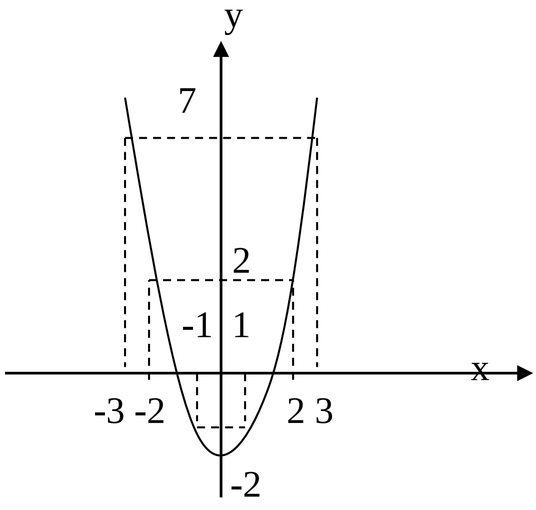
$(x_i, f(x_i))$ (i=1,2,…, n) nuqtalarni Oxy tekisligida belgilab, ularni siniq chiziq (yoki egri chiziq) bilan tutashtiramiz va funksiya grafigining eskizini (eskiz – asbob yordamisiz chizilgan chizma, xomaki) chizamiz.

1-misol. $y=x^2-2$; $D(y)=(-\infty,\infty)$ grafigining eskizini chizamiz.

Yechish: Jadval tuzamiz.

x	-3	-2	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	2	3
Y	7	2	0	-1	-2	-1	0	2	7

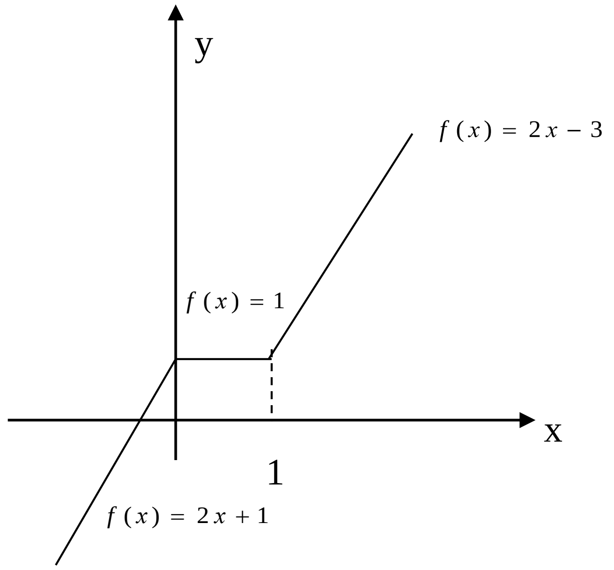
Bu nuqtalarni koordinata tekisligida belgilab, taqribiy grafikni chizamiz. (16-rasm).



16-rasm.

2-misol. $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x<0 \\ 1, & 0 \le x \le 2 \\ 2x-3, & x>2 \end{cases}$ funksiyaning grafigini yasang.

Yechish: $x<0$ bo‘lganda $f(x)=2x+1$, $0 \le x \le 2$ bo‘lganda $f(\tilde{o})=1$ va x>2 bo‘lsa $f(x)=2x-3$ funksiyalarning grafiklarini yasaymiz (17-rasm).



17-rasm.

Mashqlar

217. $f(x)=x^2-3x+1$ funksiya berilgan.
$f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$, larni hisoblang.

218. $f(x)=\frac{x-2}{x+1}$ funksiya berilgan.
$f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ larni hisoblang.

219. $f(x)=x^2-\frac{1}{x}$ bo‘lsa, $f(\frac{1}{x})$ ni toping.

220. $f(x)=2x^3-\frac{1}{x}$ bo‘lsa, $f(-\frac{1}{x})$ ni toping.

221. $f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2+2}$ bo‘lsa $f(\sin x)$ ni toping.

222. $f(x)=x-\frac{1}{x^2}$ bo‘lsa, $f(\cos x)$ ni toping.

223. $f\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)=\frac{2-x}{x+1}$ bo‘lsa, $f(x)$ ni toping.

224. $f\left(\frac{2x}{x+3}\right)=3+\frac{1}{x-1}$ bo‘lsa, $f(x)$ ni toping.

225. $f(x)=\begin{cases}2x^2-3 & -3\le x<0\\ 2x-3 & 0\le x\le 5\end{cases}$ funksiya berilgan $f(-3)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(5)$ larni toping.

226. $f(x)=\begin{cases}x^3-1 & x<0\\ 2 & 0\le x\le 2\\ x+2 & x>2\end{cases}$ funksiya berilgan $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$, larni toping.

Quyidagi funksiyalarning grafiklarini nuqtalar bo‘yicha yasang:

227. $y=3-2x^2$ 228. $y=\frac{1}{2}x^2-2$ 229. $y=\frac{1}{3}-2x$

230. $y=[x]$ $(x$ ning butun qismi)

231. $y=\{x\}$ $(x$ ning kasr qismi)

232. $y=\begin{cases}3 & x\le 0\\ 2x-1 & 0<x<3\\ x^2+1 & x\ge 3\end{cases}$

233. $y=\begin{cases}x-3 & x<1\\ 2 & 1\le x\le 3\\ x^2 & x>3\end{cases}$

234. $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & -1\le x\le 3\\ 2x & x>1\\ 2 & x<1\end{cases}$

235. $y=\begin{cases}x+2 & x<1\\ \sqrt{4-x^2} & 1\le x\le 2\end{cases}$

Javoblar: 218. 4; -2; -0, 5; 0; 0, 25. 220. $-\frac{2}{x^3}+x$.

222. $\cos x-\frac{1}{\cos^2 x}$. 224. $\frac{11x-4}{4x-2}$. 226. -9; 2; 5.

9.5. Funksiyaning juft-toqligi

Agar $\forall x\in D$ uchun $-x\in D$ bo‘lsa: D soha simmetrik to‘plam (soha) deyiladi, $(-\infty,\infty)$, $(-a,a)$, $(-10,-3)\cup(3;\ 10)$ oraliqlar simmetrik sohalar, chunki ularning har biri $O(0,0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik sohalardir.

1-ta'rif. Agar $O(0,0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik sohada $f(-x)=f(x)$ shart bajarilsa, bu sohada $y=f(x)$ juft funksiya deyiladi: $f(x)=2x^4+x^2+6$, $f(x)=5$, $f(x)=|x|$, $f(x)=\cos x$, umuman olganda $y=f(x^{2n})$ $(n\in N)$ juft funksiyaga misol bo'la oladi.

2-ta'rif. Agar $O(0,0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik D sohada $f(-x)=-f(x)$ shart bajarilsa, bu sohada $y=f(x)$ toq funksiya deyiladi: $f(x)=2x^3+x$, $f(x)=\sin x$, $y=f(x^{2n+1})$ $(n\in N)$ toq funksiyaga misol bo'la oladi.

Funksiya toq ham, juft ham bo'lmasligi mumkin: $y=2x^3-3x^2+5$ juft ham, toq ham emas.

Juft yoki toq funksiyalarning bazi xossalarini (isbotsiz) keltiramiz.

$y=f(x)$ funksiya $D(f)$ sohada, $y=\varphi(x)$ funksiya $D(\varphi)$ sohada juft (yoki toq) bo'lsin.

Bu ikkala funksiyaga umumiy bo'lgan $D(f)\cap D(\varphi)$ sohada ularning yig'indisi $f(x)+\varphi(x)$, ayirmasi $f(x)-\varphi(x)$ juft (yoki toq) funksiya bo'ladi. Ikkalasi ham juft (yok i toq) bo'lsa, ko'paytmasi juft, juft-toqligi har xil bo'lsa – toq bo'ladi agar maxrajdagi funksiya noldan farqli bo'lsa ikki funksiya bo'linmasi ham huddi ko'paytmadek aniqlanadi.

Natija. $y=f(x)$ funksiya juft (yoki toq) bo'lsa, $y=a\cdot f(x)(a=const)$ juft (yoki toq) ligini saqlaydi. Shunga o'xshash $f(x)\pm\varphi(x)$ juft (yoki toq) bo'lsa, $af(x)\pm b\varphi(x)$ ham juft (yoki toq) bo'ladi.

Agar D simmetrik sohada ixtiyoriy $y=f(x)$ funksiya berilgan bo'lsa, uni $f(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(x))$ juft va $\psi(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$ toq funksiyalar yig'indisi shaklida tasvirlab bo'ladi. Ya'ni $f(x)=\varphi(x)+\Psi(x)$. Bu tenglikning tog'riligi yaqqol ko'rinib turibdi. Juft funksiyalarning grafigi Oy o'qiga nisbatan, toq funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrikdir.

Mashqlar

Quyidagi funksiyalarning juft yoki toqligini aniqlang.

236. 1) $f(x)=195$; 2) $f(x)=0$; 3) $f(x)=2x^2-|x|$;
4) $f(x)=2|x|-4x^4+5$; 5) $f(x)=(3-x)^3+(3+x)^3$;
6) $f(x)=(2x-7)^4+(2x+7)^4$; 7) $f(x)=3x^3-5x^5$;
8) $f(x)=4x^5+7x^7$; 9) $f(x)=\frac{|x+3|}{x-2}+\frac{|x-3|}{x+2}$;
10) $f(x)=\frac{|2-x|}{4-x}+\frac{|2+x|}{4+x}$.

237. 1) $f(x)=(x-1)(x-3)(x-5)-(x+1)(x+3)(x+5);$

2) $f(x)=(x-2)(x-4)+(x+2)(x+4).$

238. 1) $f(x)=(x+3)^4(x-4)^5+(x-3)^4(x+4)^5.$

2) $f(x)=(2x^2-3x)(3x^3+4x^2+4x-5)-(2x^2+3x)(3x^3+8x^2+4x+5);$

239. 1) $f(x)=\dfrac{(x+2)^3}{(2x-3)^5}+\dfrac{(x-2)^3}{(2x+3)^5};$

2) $f(x)=\dfrac{x^4-2x^3}{x+2}-\dfrac{x^4+2x^3}{x-2};$

240. 1) $f(x)=2^{x^2};$ 2) $f(x)=4^{|x|};$ 3) $f(x)=3^x;$

4) $f(x)=x^3-2x^2+x-1.$

241. Quyidagi funksiyalarni juft va toq funksiyalar yig‘indisi shaklida ifodalang:

1) $f(x)=2x^4+3x-1;$ 2) $f(x)=2x^3+4x^2-3;$

3) $f(x)=|3x+1|+x^2-3;$ 4) $f(x)=x^2|x-1|+4;$

5) $f(x)=\dfrac{(x+3)^2}{3x+1}-\dfrac{(x-1)^2}{x+2};$ 6) $f(x)=\dfrac{(x-4)^2}{x+3}-\dfrac{(x+3)^2}{x-2}.$

242. $x=2$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik funksiya qanday shartlarni qanoatlantiradi?

243. A (3,-2) nuqtaga nisbatan simmetrik funksiya qanday shartlarni qanoatlantiradi?

Javoblar: 236. 2) juft, 4) juft, 6) juft, 8) toq, 10) juft.

237. 2) juft. 238) 2) juft ham, toq ham emas. 239. 2) juft. 240. 2) juft, 4) juft ham, toq ham emas.

9.6. Davriy funksiyalar

Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya $D(f)$ sohada aniqlangan bo‘lsin va shunday eng kichik T son mavjud bo‘lsinki, agar $x\in D(f)$ bo‘lsa, $(x\pm n\mathrm{T})\in D(f)$ bo‘lsin $(n\in N)$.

Ta’rif. Agar $f(x\pm n\mathrm{T})=f(x)$ bo‘lsa, $f(x)$ davriy funksiya deyiladi, T funksiyaning asosiy davri deyiladi: $\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\cos(x+2\pi)=\cos x$, $tg(x+\pi)=tgx$, $ctg(x+\pi)=ctgx$ funksiyalar davriy, $\sin x$ va $\cos x$ ning asosiy davrlari 2π, tgx va $ctgx$ ning asosiy davrlari π ga teng.

$y = x - [x] = \{x\}$ $([x] - x$ sonning butun qismi, $\{x\}$ – x sonning kasr qismi) funksiyaning asosiy davri 1 ga teng. Haqiqatda, $\{x + n\} = \{x\}, n \in N$. Bunday n lardan eng kichigi 1 dir.

Davriy funksiyalarning bazi xossalarini (isbotsiz) keltirasiz.

Agar T son $f(x)$ funksiyaning davri bo‘lsa, $kT,\ k \in Z,$ ham funksiyaning davri bo‘ladi. Agar T_1 va T_2 funksiyaning turli davrlari bo‘lsa, $T_1 \pm T_2$ ham funksiyaning davri bo‘ladi.

Mashqlar

244. Quyidagi funksiyalarni davriylikka tekshiring.

1) $y = \{x\} + 3;$ 2) $y = \{x\} - 2;$ 3) $y = -3;$

4) $y = 4;$ 5) $y = 3x;$ 6) $y = \dfrac{x^2}{2};$ 7) $y = [x + 3];$

8) $y = [2 - x];$ 9) $y = \{5 - x\};$ 10) $y = \{x + 2\};$

245. Quyidagi funksiyalarning asosiy davrini toping.

1) $y = \sin 3x;$ 2) $y = \cos \dfrac{3}{4}x;$ 3) $y = tg\,\dfrac{x}{2};$

4) $y = |\sin x|;$ 5) $y = \sin \dfrac{2x}{3};$ 6) $y = ctg\,3x;$

246. Davrlari T ga teng bo‘lgan $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar uchun $f(x) \pm \varphi(x),\ \ f(x) \cdot \varphi(x),\ \ \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ ham T davrga ega ekanligini ko‘rsating.

9.7. Funksiyalarning nollari, o‘sishi va kamayishi

1-ta’rif. $y = f(x)$ funksiyaning nollari deb shunday $x_i\ (i = 0,1,2,\ldots, k)$ $(x_i \in D(f))$ sonlarga aytiladiki, bu qiymatlar uchun $f(x_i) = 0$ bo‘lsin.

Boshqacha qilib aytganda, funksiyaning nollari deb $f(x) = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi x ning qiymatlariga aytiladi. $f(x) = x^2 - 4$ funksiyaning nollari $x_1 = -2,\ \ x_2 = 2$ dan iborat, $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 4x + 3}$ funksiyaning noli $x = -1.$

Faraz qilaylik, $x_1 \in (a, b),\ \ x_2 \in (a, b)$ bo‘lib, $x_1 < x_2$ uchun $f(x_1) < f(x_2)$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda o‘suvchi va $f(x_1) > f(x_2)$ bo‘lsa – kamayuvchi funksiya deyiladi: $y = 3x + 5$ funksiya butun sonlar o‘qida o‘suvchi, $Q = \pi R^2$ $0 < R < \infty$ uchun o‘suvchi, $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ $x \in (0, \infty)$ oraliqda kamayuvchi funksiyadir.

Biror D sohada o'suvchi yoki kamayuvchi funksiyalar monoton funksiyalar deyiladi. Agar $x_1 < x_2$ uchun $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya noqat'iy o'suvchi (kamayuvchi) funksiya deyiladi. Bunday funksiyalarga noqat'iy monoton funksiyalar deyiladi. $y = x^2$ aniqlanish sohasi $(-\infty, \infty)$ da monoton emas, lekin $(-\infty, 0)$ oraliqda monoton kamayuvchi, $(0, \infty)$ oraliqda esa monoton o'suvchidir.

Monoton funksiyalarning ba'zi xossalarini isbotsiz keltiramiz.

$y = f(x)$ funksiya D sohada o'suvchi bo'lsin, u holda:

1) $f(x) \pm c$ $(c \in R)$ o'suvchi bo'ladi;

2) $cf(x)$ $(c \in R^+)$ o'suvchi, $-cf(x)$ - kamayuvchi bo'ladi,

3) $f(x) \ne 0$ o'suvchi bo'lsa, $\dfrac{1}{f(x)}$ kamayuvchi $(f(x) > 0$ yoki $f(x) < 0)$ bo'ladi.

$y = f(x)$ va $y = \varphi(x)$ funksiyalar D sohda o'suvchi bo'lsin:

4) $f(x) + \varphi(x)$ ham shu sohada o'suvchi,

5) $f(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$ bo'lsa, $f(x)\varphi(x)$ ham o'suvchidir;

6) $f(x) > 0$ bo'lsa $f^n(x)$ $(n \in N)$ o'suvchidir.

Mashqlar

247. Quyidagi funksiyalarning nollarini toping.

1) $f(x) = 4x^2 - 9$, 2) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$, 3) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$,

4) $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 2x$, 5) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 5x + 4}$,

6) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 7x + 6}$, 7) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x + 5}$,

8) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$, 9) $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + 3x + 5}$,

10) $f(x) = \sqrt{x + 3} + \sqrt{2 - x}$.

248. Funksiyalarning o'suvchi yoki kamayuvchi ekanligini isbotlang:

1) $y = \dfrac{1}{2}x + 3$, 2) $y = -2x + 3$, 3) $y = x^3 - 3$,

4) $y = 2 - x^3$, 5) $y = \sqrt{x + 3}$, 6) $y = 2 - \sqrt{2 + x}$.

249. Quyidagi funksiyalarning o'sish yoki kamayish oraliqlarini aniqlang.

1) $y = 2x^2 + 4x + 5$, 2) $y = x^2 + 3x + 8$, 3) $y = -3x^2 + 6x - 4$,

4) $y = -5x^2 + 8x - 3,$ 5) $y = 3x^2 - 2x,$ 6) $y = 4x - 5x^2,$

7) $y = 2 - x^2,$ 8) $y = 2x^2 - 5x,$ 9) $y = \frac{3}{x - 1}.$

10) $y = \frac{2}{2 + x},$ 11) $y = \frac{x + 1}{2x - 1},$ 12) $y = \frac{3x + 1}{x - 2}.$

250. $\forall x_i,\ x_i \in R$ uchun $f(x) = x^2 + 2$ funksiya $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \le \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ shartni qanoatlantirishini isbotlang.

251. $\forall x_1,\ x_2 \in D(f)$ uchun $f(x) = \sqrt{2x - 3}$ funksiya $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \le \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ shartni qanoatlantirishini isbotlang.

252. Quyidagi funksiyalar argumentning qanday qiymatida eng katta qiymatga erishadi?

1) $y = 3 - |x - 2|,$ 2) $y = 7 - 2|x + 3|,$ 3) $y = 4 - \sqrt{2 + x},$

4) $y = 3 - \sqrt{x - 2},$ 5) $y = \frac{3}{x^2 + 2x + 3},$ 6) $y = \frac{3}{x^2 - 2x + 5}.$

Javoblar: 247. 2) -1; $-\frac{1}{2}$. 4) -1; $-\frac{2}{3}$; 0. 6) Ø. 8) 0; 3. 10) Ø.

248. 2), 4), 6) – kamayuvchi.

249. 2) $(-\infty, -\frac{3}{2})$ da kamayuvchi, $[-1{,}5; \infty)$ da o‘suvchi; 4) $(-\infty, 0{,}8]$ da o‘suvchi, $(0{,}8; \infty)$ da kamayuvchi; 6) $(-\infty; 0{,}4]$ da o‘suvchi, $(0{,}4; \infty)$ da kamayuvchi; 8) $\left(-\infty, \frac{5}{4}\right)$ da kamayuvchi, $\left[\frac{5}{4}, \infty\right)$ da o‘suvchi; 10) $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$ da o‘suvchi; 12) $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ da o‘suvchi.

252. 2) $x = -3;$ 4) $x = 2;$ 6) $x = 1.$

§ 10. ELEMENTAR FUNKSIYALAR

10.1. Asosiy elementar funksiyalar

Quyidagi analitik usulda berilgan funksiyalar asosiy elementar funksiyalar deyiladi.

1. Darajali funksiya: $y=x^{\alpha}$, a∈R;
2. Ko‘rsatkichli funksiya: $y = a^{x}$, a>0, a≠1;
3. Logarifmik funksiya: $y=\log_a x$, x>0, a>0, a≠1;
4. Trigonometrik funksiyalar: *y=sinx, y=cosx, y=tgx, y=ctgx, y=secx, y=csecx;*
5. Teskari trigonometrik funksiyalar: *y=arcsinx, y=arccosx, y=arctgx, y=arcctgx, y=arcsecx, y=arccosecx.*

Bu funksiyalar navbati bilan tekshiriladi va grafiklari yasaladi.

«Funksiyadan funksiya» amalini ko‘rib chiqamiz: *y* o‘zgaruvchi *u* ning funksiyasi bo‘lsin: *y=f(u). u* o‘z navbatida boshqa o‘zgaruvchi *x* ning funksiyasi bo‘lsin: *u=φ(x).* Demak, *y* ham, o‘z navbatida *u* orqali *x* ga bog‘liq: *y=F(φ(x)).* Oxirgi funksiya murakkab funksiya yoki «funksiyadan funksiya» deyiladi.

Misol. $y=\cos u$, $u=x^2$ bo‘lsin, u holda $y=\cos(x^2)$ murakkab funksiya bo‘ladi. *y=F(φ(x))* funksiyaning aniqlanish sohasi *φ(x)* aniqlash sohasining hammasidan yoki uning shunday qismidan iborat bo‘ladiki, bu qismdan u qabul qiladigan qiymatlari uchun *F(u)* aniqlangan bo‘lsin.

«Funksiyadan funksiya» amali bir necha marta takrorlanishi mumkin.

Misol. $y=\sqrt{\sin^3(x^2+1)}$ funksiyani $y=\sqrt{u^3}$, $u=\sin v$, $v=x^2+1$ bo‘g‘inlar yordamida tasvirlash mumkin, bu yerda «funksiyadan funksiya» amali ikki marta ishlatildi.

Ta’rif. Elementar funksiya deb asosiy elementar funksiyalar va o‘zgarmas miqdorlardan soni chekli bo‘lgan qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish, bo‘lish va «funksiyadan funksiya» amallari yordamida tuzilgan va bitta formula *y=f(x)* ko‘rinishida berilishi mumkin bo‘lgan funksiyaga aytiladi. $y=\frac{a^3}{5a+2b\sin 3x}+6\cos^3 x$, $y=\frac{3-\sqrt{x}}{2+\sqrt[3]{x}}$,

$$y=\log_3(2x-\sqrt{x^2+1}),\quad y=4^{2x-5x^2}+tgx$$

funksiyalar elementar funksiyalardir. Biz asosan elementar funksiyalarni tekshiramiz.

Mashqlar

253. $\varphi(x)=\frac{(x+1)}{3x+5}$ berilgan, $\varphi(\frac{1}{x})$, $\frac{1}{\varphi(x)}$ ifodalarni toping.

254. $\varphi(x)=\sqrt{4x^2+9}$ funksiya uchun $\varphi(0)$, $\varphi(2x)$ ifodalarni toping.

255. $y=u^2$, $u=\cos v$, $v=2x+1$ bo‘lsa, $y(x)$ elementar funksiyani yozing.

256. $y=u^{\frac{1}{2}}$, $u=1+\cos v$, $v=1-x^2$ bo‘lsa, $y(x)$ elementar funksiyani yozing.

257. $y=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x\le 1\\ 1+x & x>1\end{cases}$ funksiya elementar funksiya bo‘ladimi?

258. $f(n)=n!=1*2*3....n$ funksiya elementar funksiya bo‘ladimi?

259. Quyidagi funksiyalarni elementar funksiya zanjiri bo‘g‘inlari ko‘rinishida yozing.

1) $y=(3x-4)^8$, 2) $y=\sqrt[3]{2x^2+1}$, 3) $y=\sin(x+tgx)$, 4. $y=\cos^2(2x+1)$

260 $f(x)=\frac{1}{1-x}$ bo‘lsa, $f\{f[f(x)]\}$ni toping.

261. $f(x-1)=x^2+3$ bo‘lsa , $f(x+1)$ ni toping.

Javoblar: 254. 3. $\sqrt{16x^2+9}$, 256. $\sqrt{1+\cos(1-x^2)}$, 258. Yo‘q

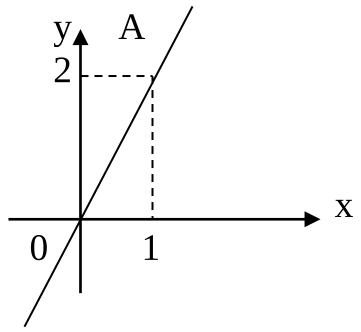
10.2. *Ax+By+C=0* chiziqli funksiyaning geometrik ma’nosi

Ta’rif: $y=kx+b$, $k,b\in R$ chiziqli funksiya yoki to‘g‘ri proporsional bog‘lanish deyiladi. Bu funksiya uchun $D(y)=(-\infty,\infty)$, $E(y)=(-\infty,\infty)$, bo‘-lib, grafigi to‘g‘ri chiziqdan iborat ekanligini ko‘rsatamiz. To‘g‘ri chiziq grafigini yasash uchun uning ikkita nuqtasini bilish yetarli.

1-misol. $y=2x$ ning grafigini yasaymiz.

Bu yerda $k=2,\ b=0,\ x=0$ deb $y=0$, ya’ni $O(0,0)$ nuqtani $x=1$ deb $y=2$, ya’ni $A(1,2)$ nuqtani topamiz.

Bu nuqtalarni koordinatalar tekisligida belgilaymiz va ularni to‘g‘ri chiziq bo‘yicha tutashtirib, $y=2x$ funksiyaning grafigini topamiz (18-rasm).



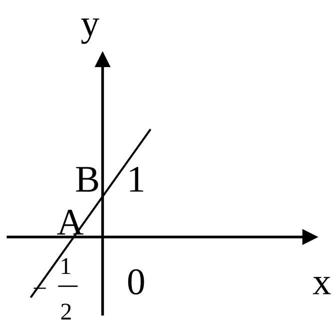
18-rasm.

Shunga o‘xshash, $y = kx$ funksiya grafigi $O(0,0)$ nuqtadan o‘tishini ko‘rish mumkin. Demak, $y = kx + b$ funksiyada $b = 0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq koordinatalar boshidan o‘tadi.

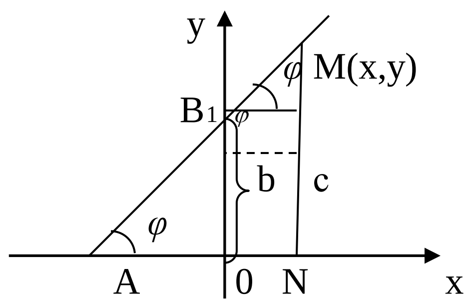
2-misol. $y = 2x + 1$ grafigini yasaymiz.

Bu yerda $k = 2,\ b = 1,\ x = 0$ desak $y = 1$ bo‘ladi, $B(0,1)$ nuqtani topamiz. $y = kx + b$ tenglikda $x = 0$ desak $y = b$ bo‘lib, to‘g‘ri chiziq (0;b) nuqtadan o‘tadi. Bundan xulosa chiqarib aytish mumkinki, $y = kx + b$ tenglikdagi b to‘g‘ri chiziqni Oy o‘qida kesib ajratgan kesmasining miqdorini beradi.

Misolda $y = 0$ deb $x = -\frac{1}{2}$, ya’ni $A(-\frac{1}{2},0)$ nuqtani topamiz va to‘g‘ri chiziq grafigini (19-rasm) yasaymiz.



19-rasm.



20-rasm.

Quyidagi masalani ko‘rib chiqamiz. Koordinatalar boshidan o‘tmaydigan, koordinata o‘qlarini kesib o‘tadigan AB to‘g‘ri chiziqning tenglamasini tuzing.

Yechish: To‘g‘ri chiziqni Ox o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagini φ bilan va Oy o‘qida kesib ajratgan kesma (OB) miqdorini b bilan belgilaymiz. M(x,y) to‘g‘ri chiziqning o‘zgaruvchan nuqtasi bo‘lsin (20-rasm).

$$\Delta\ BCM\ dan:\ BC=x,\ CM=y-b$$

$tg\,\varphi = \frac{y-b}{x}$. Bundan $y - b = x\,tg\,\varphi$. $tg\,\varphi = k$ desak, $y = kx + b$ ni hosil qilamiz.

Hosil bo‘lgan tenglamani, shartga ko‘ra faqat to‘g‘ri chiziqda yotuvchi nuqtalarning koordinatalari qanoatlantiradi.

$y = kx + b$ to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi deyiladi. $k = tg\varphi$ to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti deyiladi: k>0 bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq Ox o‘qining musbat yo‘nalishi bilan o‘tkir burchak hosil qiladi, k<0 bo‘lsa – o‘tmas burchak hosil qiladi, k=0 bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq $y = b$ ko‘rinishini olib, Ox o‘qiga parallel bo‘ladi. Agar $\varphi = 90^0$ bo‘lsa, k mavjud emas. Bu holga Oy o‘qiga parallel bolgan to‘g‘ri chiziq mos keladi, uning tenglamasi $x = a$ bo‘ladi. $x = 0$ Oy o‘qining tenglamasi bo‘ladi.

Ko‘rib chiqilgan tahlildan ma’lum bo‘ladiki, $y = kx + b$. *k* va *b* ning barcha hollarida to‘g‘ri chiziqni bildirar ekan.

Endi $Ax + By + C = 0$ funksiyaning geometrik ma’nosini ko‘rib chiqamiz.

1. *B≠0* bo‘lsin . Ikkala tomonini *B* ga bo‘lamiz va *y* ni topamiz:

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ $\quad -\frac{A}{B} = k$, $\quad -\frac{C}{B} = b$ desak, $y = kx + b$ hosil bo‘ladi.

2. *B=0 (A≠0)* bo‘lsa, $Ax + C = 0$ bo‘lib, bundan $x = -\frac{C}{A} = a$ hosil bo‘ladi.

3. A=0 (B≠0) bo‘lsa, $By + C = 0$ bo‘lib, bundan $y = -\frac{C}{B} = b$ hosil bo‘ladi.

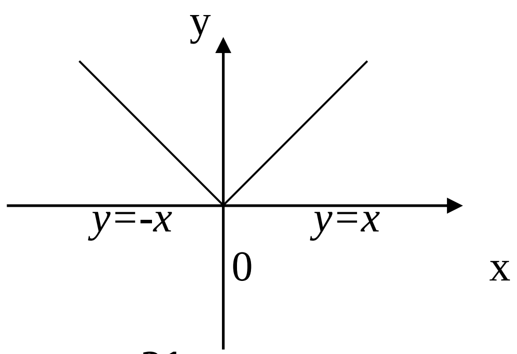
4. *C=0* bo‘lsa, $Ax + By = 0 \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x = kx$ hosil bo‘ladi.

5. *B=C=0* bo‘lsa, *Ax=0* va *x=0* bo‘ladi.

6. *A=C=0* bo‘lsa, *By=0* va *y=0* bo‘ladi.

Ko‘rib chiqilgan barcha holatlarda to‘g‘ri chiziq tenglamasini *(y=kx+b, x=a, x=b, y=kx)* hosil qildik. Demak *Ax+By+C=0* funksiya to‘g‘ri chiziq tenglamasi ekan.

7. Misol tariqasida *y*=|*x*| funksiyaning grafigini ko‘rib chiqamiz. Bu funksiyani $y = |x| = \begin{cases} -x & x \le 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ deb yozish mumkin. Har bir qismining grafini alohida-alohida chizib, $y = |x|$ ning grafigini (21-rasm) hosil qilamiz.



21-rasm.

Mashqlar

262. $y=2x+3$ va $y=-x+4$ to‘g‘ri chiziqlar berilgan. Ularni A(-1,1), B(2,-3), C(4,0), D(3,1), E(2,7), O(0,0) nuqtalardan o‘tish-o‘tmasligini tekshiring.

263. Quyidagi to‘g‘ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentlarini va Oy o‘qidan kesib ajratadigan kesma miqdorlarini toping:

$1)\ y=2x+3;\quad 2)\ y=4x-5;\quad 3)\ y=\frac{1}{3}x-2;$

$4)\ y=-\frac{2}{3}x+1;\quad 5)\ y=2x;\quad 6)\ y=-\frac{x}{3};$

$7)\ y=3;\quad 8)\ y=-2.$

264. Quyidagi funksiyalarning grafiklarini yasang:

$1)\ y=x-3;\quad 2)\ y=2x-2;\quad 3)\ y=5;\quad 4)\ y=-6;$

$5)\ y=\frac{x}{2}-3;\quad 6)\ y=\frac{x}{4}+\frac{1}{2};\quad 7)\ y=-2x;\quad 8)\ y=3x;$

$9)\ y=-x+1;\quad 10)\ y=-2x+3;\quad 11)\ x=5;\quad 12)\ x=-4.$

265. Berilgan to‘g‘ri chiziq tenglamalaridan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti *k* va *Oy* o‘qidan kesib ajratiladigan kesma *b* ning miqdorini toping:

1) 2x+3y-5=0 2) 3x-4y+7=0; 3) –x+2y+3=0;
4) 2x+4y-3=0 5) 3x+y=0; 6) 4x+3y=0.

266. Quyidagi funksiyalarning grafiklarini yasang:

1) 3x+4y=0; 2) x-2y=0; 3) x+2y-3=0;
4) 2x+3y-1=0; 5) 5x+4=0; 6) 4x+5=0.
7) 3y-5=0; 8) 5y+3=0;

10.3. Darajali funksiya

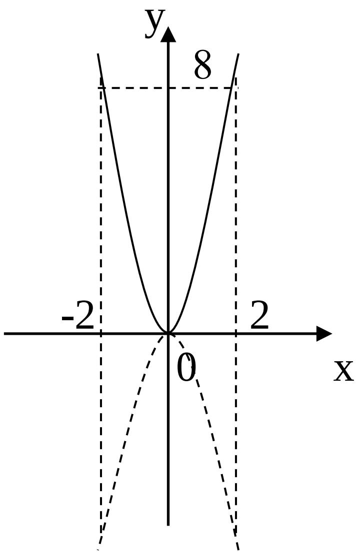
Ta’rif. $f(x)=x^{\alpha}$ formula bilan berilgan funksiya darajali funksiya deyiladi. α – daraja ko‘rsatkichi deyiladi. Darajali funksiyaning aniqlanish va o‘zgarish sohalari α ning qiymatlariga bog‘liq bo‘ladi. α ning ba’zi qiymatlarida darajali funksiyani tekshiramiz va grafigini yasaymiz.

1. Kvadrat funksiya

Umumiy ko‘rinishi $y=ax^2+bx+c$ aniqlanish sohasi $x\in(-\infty,\infty)$ bo‘lib, o‘zgarish sohasi a>0 bo‘lganda $\left[-\frac{b^2-4ac}{4a},\infty\right)$ a<0 bo‘lganda $\left(-\infty,-\frac{b^2-4ac}{4a}\right]$ bo‘ladi. Ma’lumki, $y=ax^2$ funksiyaning grafigi uchi

koordinata
boshi (0,0) nuqtada va a>0 bo‘lganda tarmoqlari yuqoriga yo‘naltirilgan paraboladan iborat.

22-rasmda $y = 2x^2$ parabolaning grafigi tasvirlangan $y = -2x^2$ parabolaning grafigi $y = 2x^2$ funksiyaning grafigini Ox o‘qiga nisbatan akslantirishdan hosil bo‘ladi (22-rasm).



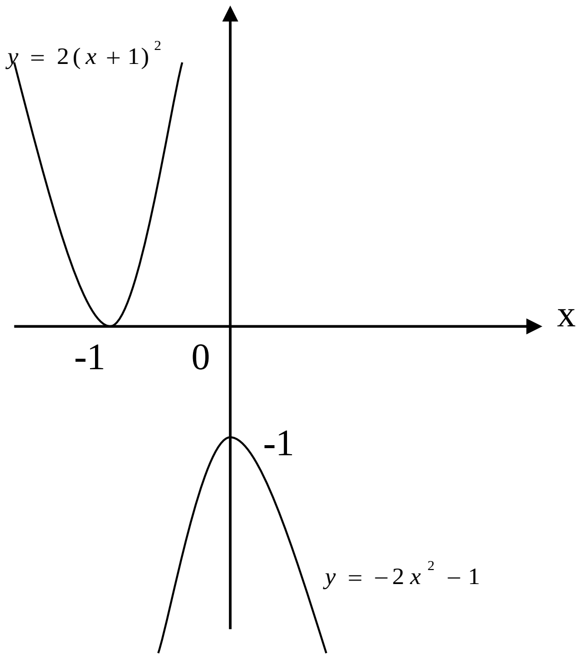
22- rasm.

Keltirilgan grafiklardan foydalanib, $y = \pm 2x^2 + c$ ning grafigini yasash mumkin bo‘ladi. Buning uchun $y = \pm 2x^2$ ning grafigini *oy* o‘qi yo‘nalishida c birlikka yuqoriga, agar c>0 bo‘lsa, va c birlikga pastga, agar c<0 bo‘lsa, siljitish (parallel ko‘chirish) lozim bo‘ladi. Agar parabolani o‘ziga parallel qilib uchini (a,0*)* nuqtaga ko‘chirsak, xuddi shunga o‘xshash $y = 2(x-a)^2$ funksiyaning grafigini $y = 2x^2$ funksiyga grafigidan hosil qilgan bo‘lamiz. 23-rasmda $y = -2x^2 - 1$ *va* $y = 2(x+1)^2$ funksiyalarning grafiklari keltirilgan. Birinchi funksiyaning grafigi $y = -2x^2$ grafigini -1 birlikka pastga siljitishdan hosil bo‘ldi. Ikkinchi funksiyaning grafigini $y = 2x^2$ grafigini o‘ziga parallel qilib, parabola uchini (-1,0) nuqtaga ko‘chirishdan hosil bo‘ladi.

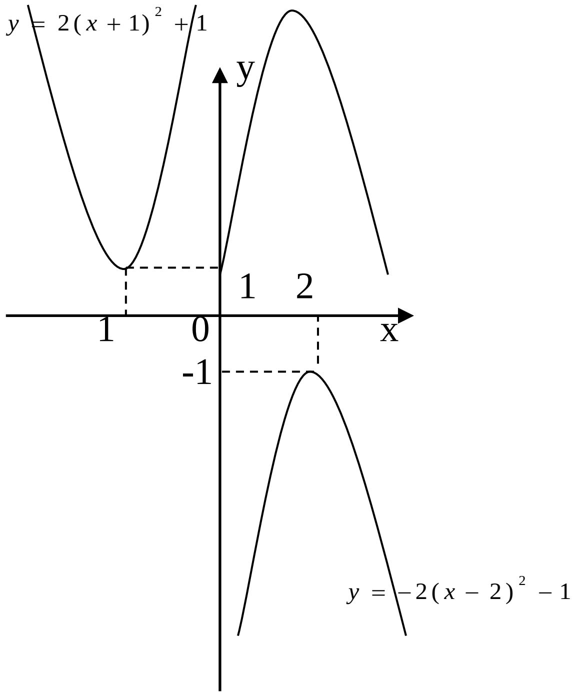
$y = ax^2 + bx + c$ funksiyaning grafigini yasash uchun undan to‘la kvadrat ajratamiz, ya’ni $y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ ni hosil qilamiz.

Agar koordinata boshini O $(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a})$ nuqtaga ko‘chirsak, yangi $O_1 x_1 \quad y_1$ sistemada funksiya $y_1 = ax_1^2$ ko‘rinishi oladi. 24-rasmda $y_1 = 2x^2 + 4x + 3 = 2(x+1)^2 + 1$ va $y = -2x^2 + 8x - 9 = -2(x-2)^2 - 1$ funksiyalarning grafiklari keltirilgan.

Umuman $y = ax^2 + bx + c$ funksiyaning grafigini $y = ax^2$ funksiya grafigini parallel ko‘chirish yo‘li bilan hosil qilish mumkin. $y = ax^2 + bx + c$ funksiyaning grafigi parabola uchidan *oy* o‘qiga parallel bo‘lib o‘tadigan to‘g‘ri chiziqga nisbatan simmetrik joylashgan.

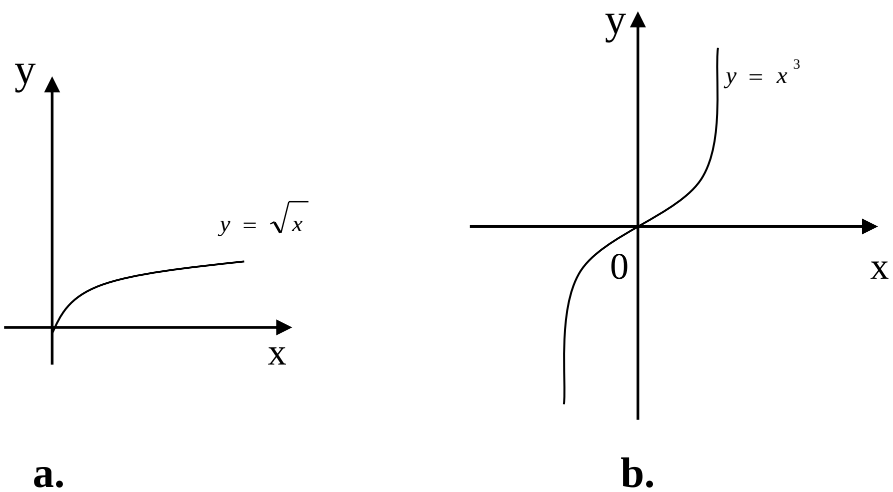


23-rasm.



24-rasm.

2. $y=\sqrt{x}$ **funksiyani qarab chiqamiz.** Aniqlanish sohasi $x\in[0,\infty)$, o‘zgarish sohasi $y=[0,\infty)$, $O(0,0)$ nuqtaning koordinatalari $y=\sqrt{x}$ tenglamani qanoatlantiradi. Demak, egri chiziq bu nuqtadan o‘tadi. ***x*** ning qiymatlari o‘sib borsa, ***y*** ham o‘sib boradi. Keltirilgan xossalardan, funksiyaning grafigi birinchi koordinata choragida joylashishi kelib chiqadi (25-rasm).

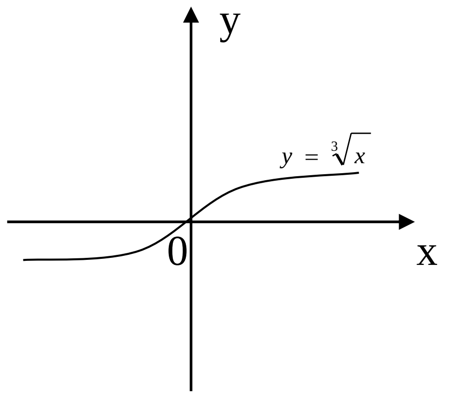


a. **b.**

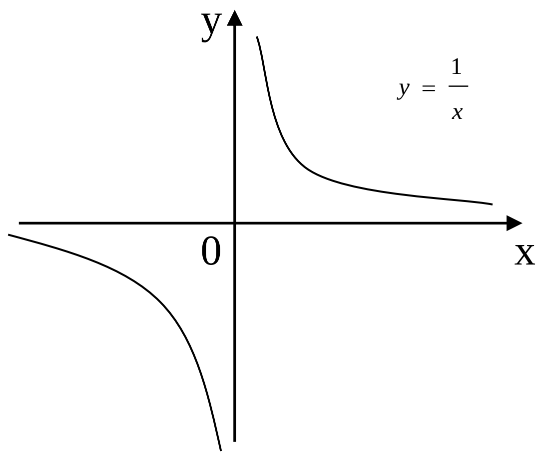
25-rasm.

3. $y=x^3$ **funksiyani tekshiramiz.** $x\in(-\infty,\infty)$; $y\in(-\infty,\infty)$. Toq funksiya bo‘lib, grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashgan. Aniqlanish sohasida o‘suvchi. Grafik koordinata boshi $O(0,0)$ nuqtadan o‘tadi, $x\to\pm\infty$ bo‘lganda $y\to\pm\infty$ bo‘ladi. Grafigi 25-rasm, b da keltirilgan.

4. $y=\sqrt[3]{x}$ **funksiyani tekshiramiz.** $x\in(-\infty,\infty)$, $y\in(-\infty,\infty)$. Toq funksiya (grafigi $O(0,0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik), aniqlanish sohasida o‘suvchi $x=0$ bo‘lsa, $y=0$ bo‘ladi. $x\to\pm\infty$ bo‘lganda $y\to\pm\infty$ bo‘ladi. Grafigi 26-rasmda keltirilgan.

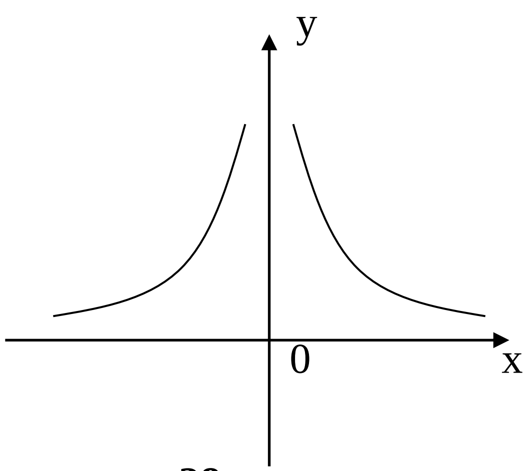


26-rasm.



27-rasm.

5. $y=\frac{k}{x}$ **funksiya.** $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$; $y\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ funksiya toq bo‘lib, grafigi $O(0,0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik . $x\to\pm\infty$ bo‘lganda $y\to 0$ bo‘ladi. Koordinata o‘qlari funksiya grafigining asimptotalari bo‘ladi. Grafigi giperbola deyiladi: k>0 k<0 bo‘lganda I va III, II va IV choraklarda joylashadi. 27 rasmda $y=\frac{1}{x}$ ning grafigi keltirilgan.



28-rasm.

6. $y=\frac{1}{x^2}$ **funksiyani tekshiramiz.**

$x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, $y\in(0,\infty)$. Juft funksiya, ya’ni grafigi *Oy* o‘qiga nisbatan simmetrik joylashgan.

$x\to\pm\infty$ bo‘lsa $y\to 0$, $x\to 0\pm 0$ bo‘lsa $y\to\infty$ grafigi 28-rasmda keltirilgan.

Mashqlar

267. Funksiyalar grafiklarini yasang.

1) $y=x^2$; 2) $y=-x$; 3) $y=\frac{1}{2}x^2$;

4) $y=-\frac{1}{2}x^2$; 5) $y=-3x^2$; 6. $y=3x^2$.

268. 1) $y = x^{-\frac{1}{2}}$; 2) $y = -x^{\frac{1}{2}}$; 3) $y = 3x^{\frac{1}{2}}$;

4) $y = -2x^{\frac{1}{2}}$; 5) $y = \frac{1}{3}x^3$; 6) $y = 2\sqrt[3]{x}$.

269. 1) $y = 2x^2 - 1$; 2) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2$; 3) $y = -2(x-2)^2$;

4) $y = 3(x+2)^2$; 5) $y = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2})^2$; 6) $y = -3(x+1)^2$.

270. 1) $y = x^2 - 3x - \frac{1}{4}$; 2) $y = x^2 + 2x - 1$;

3) $y = 3x^2 + 6x + 4$; 4) $y = 2x^2 + 3x - \frac{1}{8}$.

271. 1) $y = \frac{2}{x}$; 2) $y = -\frac{3}{x}$;

3) $y = \frac{1}{x+1}$; 4) $y = -\frac{1}{x-2}$.

272. $y = 7 - 4x - x^2$ funksiyaning eng katta qiymatini toping.

273. $y = x^2 + 5x - 3$ funksiyaning eng kichik qiymatini toping.

274. $y = 3x^2 - 5x + 2$ funksiya grafigini Ox o‘qi bilan kesishish nuqtalari koordinatalarini toping.

275. $y = 5 - 3x - 2x^2$ funksiya grafigini Ox o‘qi bilan kesishish nuqtalari koordinatalarini toping.

Javoblar: 272. 11**. 273. -9,25. 274.** $\left(\frac{2}{3},0\right)$; $(1,0)$, 275. $\left(-\frac{5}{2},0\right)$; $(1,0)$

10.4. O‘zaro teskari funksiyalar

Agar (a;b) oraliqqa tegishli $x_1 < x_2$ uchun $f(x_1) < f(x_2)$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa,

1-ta’rif. $y = f(x)$ funksiya bu oraliqda monoton o‘suvchi (yoki o‘suvchi) deyiladi. Shunga o‘xshash monoton kamayuvchi funksiya ta’riflanadi: agar argumentning ixtiyoriy ikkita qiymatidan kichik qiymatiga funksiya oraliqda kamayuvchi deyiladi, Funksiyaning katta qiymati mos kelsa, ya’ni agar $x_1 < x_2$ bo‘lib $f(x_1) > f(x_2)$ bo‘lsa.

Masalan, $y = 2x - 5$ funksiya $(-\infty, \infty)$ oraliqda o‘suvchi, $y = 3 - x$ funksiya esa aniqlanish sohasida kamayuvchi.

Monoton o‘suvchi funksiyaning grafigi chapdan o‘ngga qarab ko‘tarilib boradi, monoton kamayuvchi funksiyaniki esa chapdan o‘ngga qarab pasayib boradi.

Agar funksiya (a,b) oraliqda faqat o‘suvchi yoki faqat kamayuvchi bo‘lsa, monoton funksiya deyiladi.

Faraz qilaylik, (a,b) oraliqda $y = f(x)$ funksiya monoton bo‘lsin. Bu holda argument *x* ning har bir qiymatiga *y* funksiya ning yagona qiymati mos keladi. Demak $y = f(x)$ tenglamadan *x* ni *y* orqali ifodalash mumkin bo‘ladi: $x = \varphi(y)$. Bu tenglikda *y* bog‘liq emas o‘zgaruvchi (argument) sifatida, *x* esa funksiya sifatida keladi. $y = f(x)$ va $x = \varphi(y)$ funksiyalarning grafiklari bitta chiziqni beradi (birining aniqlanish sohasi ikkinchisining o‘zgarish sohasi va aksincha bo‘ladi). Agar $x = \varphi(y)$ tenglikda *x* va *y* joylarini almashtirsak (rollarini o‘zgartirsak) yangi funksiya

$$y = \varphi(x) \tag{2}$$

hosil bo‘ladi. Bu funksiya avvalgi funksiya

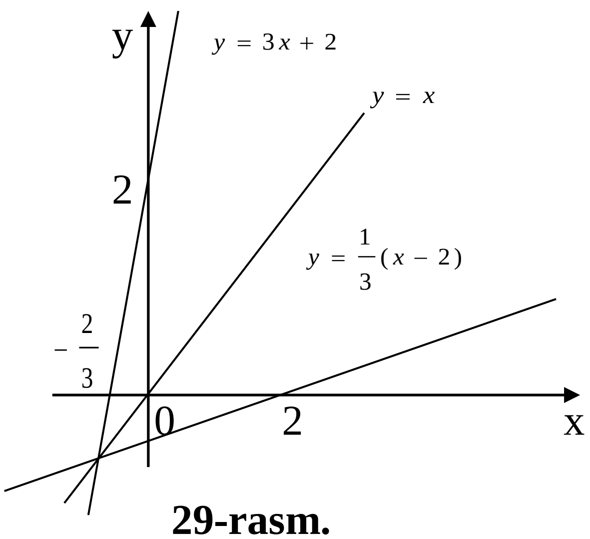
$$y = f(x) \tag{1}$$

ga nisbatan teskari funksiya deyiladi va aksincha $y = f(x)$ ham $y = \varphi(x)$ ga nisbatan teskari funksiya deyiladi, ya’ni ular bir-biriga nisbatan teskari funksiya deyiladi.

Avval ta’kidlanganidek, birining aniqlanish sohasi ikkkinchi uchun o‘zgarish sohasi bo‘ladi va aksincha.

1-misol. $y = 3x + 2$ funksiya uchun teskari funksiya topilsin.

Yechish: Berilgan tenglikdan *x* ni topamiz $x = \frac{y-2}{3}$. Hosil bo‘lgan tenglikda *x* va *y* ning joylari almashtirilib teskari funksiya $y = \frac{x-2}{3}$ ni topamiz. Bularni grafigini bitta chizmada yasaymiz. Ular $y = x$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo‘ladi (29-rasm). Umuman, o‘zaro teskari bo‘lgan (1) va (2) funksiyalarning grafiklari $y = x$ to‘g‘ri chiziqga nisbatan simmetrik joylashadi.



29-rasm.

Agar funksiya o‘zining aniqlanish sohasida monoton bo‘lmasa, funksiya uchun teskari funksiya mavjud bo‘lmaydi. Bu holda aniqlanish sohasini shunday qismlarga bo‘lish kerakki, har bir qismda funksiya yo o‘suvchi, yo kamayuvchi bo‘lsin va har bir qism uchun funksiyaga teskari funksiyani topamiz.

2-misol. $y = x^2$ funksiya aniqlanish sohasi $(-\infty, \infty)$ da monoton emas. Bu sohani shunday $(-\infty, 0)$ va $[0, \infty)$ qismlarga bo‘lamizki, birinchi oraliqda berilgan funksiyaga teskari funksiya $y = -\sqrt{x}$ (funksiya bu oraliqda kamayuvchi), ikkinchi oraliqda esa teskari funksiya $y = \sqrt{x}$ (bu oraliqda funksiya o‘suvchi) mavjud bo‘ladi.

Mashqlar

276. Teskari funksiyani toping. Ikkala funksiya uchun aniqlanish va o‘zgarish sohalarini toping.

1) $y = \frac{2x-1}{x+2}$; 2) $y = \frac{x}{2x-3}$; 3) $y = \frac{1}{x^3}$; 4) $y = -\frac{1}{x^3}$.

277. Teskari funksiyani toping va ikkala funksiyaning grafigini bitta chizmada chizing:

1) $y = 2x - 3$; 2) $y = \frac{1}{2}x + 2$; 3) $y = \frac{1}{x+2}$; 4) $y = \frac{2}{x-2}$.

278. Quyidagi funksiyalarga teskari funksiyalar mavjudmi:

1) $y = x^3 - 3$; 2) $y = 2 - x^3$; 3) $y = 2 + x^2$; 4) $y = 1 - x^2$?

279. *a* va *b* qanday shartni qanoatlantirganda $y = \frac{ax+3}{bx+4}$ funksiyaning teskarisi o‘ziga teng bo‘ladi?

280. *c* va *d* qanday shartni qanoatlantirganda $y = \frac{x+c}{x+d}$ funksiyaning teskarisi o‘ziga teng bo‘ladi.

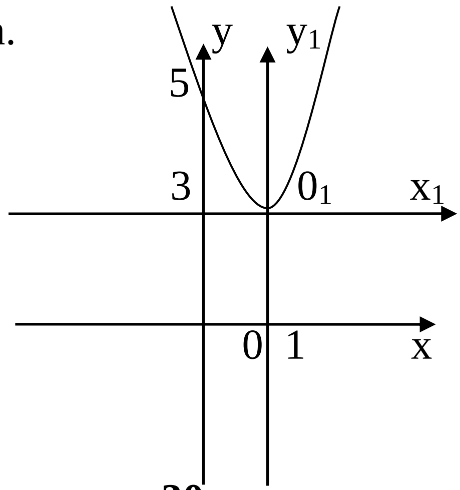
10.5. Funksiya grafigini almashtirish

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksional bog‘lanish berilgan bo‘lsin. Bu tenglama albatta *Oxy* koordinatalar sistemasida tekshiriladi va grafigi yasaladi. Ko‘p hollarda bu tenglamadan foydalanib, grafikni yasash qiyinchiliklar bilan bog‘liq bo‘ladi. Shunday hollarda yangi koordinatalar sistemasi $O_1x_1y_1$ tanlanadiki, bu sistemada tenglama sodda ko‘rinishni qabul qilsin va grafigini chizish oson bo‘lsin.

1. Parallel ko‘chirish. Bunda koordinatalar boshi oldingi sistemaga nisbatan $O_1(a;b)$ nuqtaga ko‘chiriladi va koordinata o‘qlarining yo‘nalishi o‘zgarmaydi. Yangi $O_1x_1y_1$ sistemada funksiya $y_1 = f(x_1)$ ko‘rinishni olsa, eski *Oxy* sistemada funksiya $y = f(x-a)+b$ bo‘lgan bo‘ladi.

3-misol. $y = 2x^2 - 4x + 5$ funksiya grafigi yasalsin.

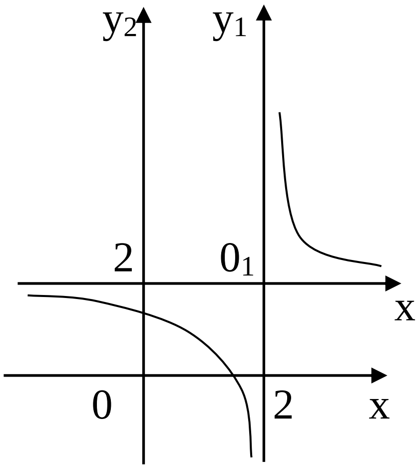
Yechish: Funksiyani $y = 2(x-1)^2 + 3$ ko‘rinishda yozamiz va koordinatalar boshini $O(1;3)$ nuqtaga ko‘chiramiz, natijada yangi $O_1x_1y_1$ sistemada funksiya $y_1 = 2x_1^2$ ko‘rinishini oladi. Uning grafigi 30-rasmda ko‘rsatilgan.



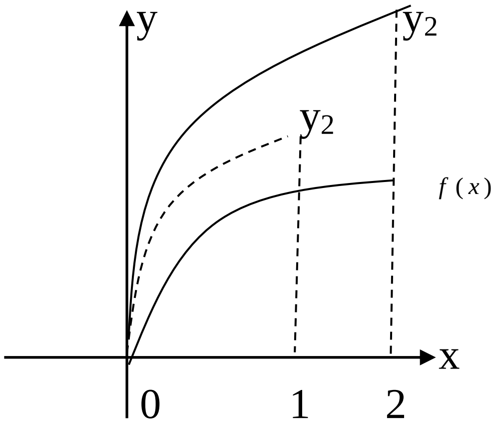
30-rasm.

4-misol. $y = \frac{1}{x}$ funksiya grafigidan foydalanib, $y = \frac{2x-3}{x-2}$ funksiyaning grafigi yasalsin.

Yechish: Funksiyani $y = \frac{2(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} + 2$ ko‘rinishda yozamiz va koordinata boshini $O_1(2,2)$ nuqtaga ko‘chiramiz, yangi $O_1x_1y_1$ sistemada funksiya $y_1 = \frac{1}{x_1}$ ko‘rinishda bo‘lib, uning grafigi 31-rasmda ko‘rsatilgan.



31-rasm.

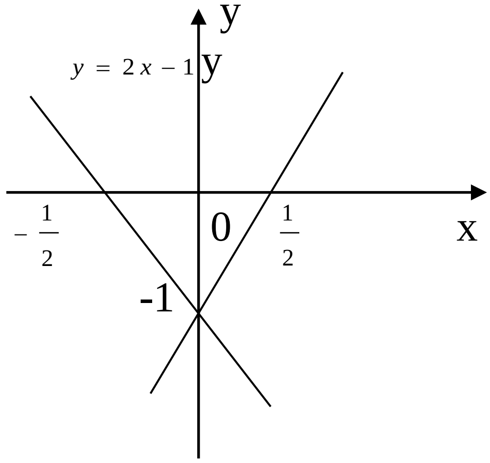


32-rasm.

2. Cho‘zish. $y = f(x)$ funksiya grafigidan foydalanib $y = kf\left(\frac{x}{\ell}\right)$ funksiya grafigini yasash talab qilinsa, grafikning har bir nuqtasini abssissalar o‘qidan *k* marta, ordinatalar o‘qidan *l* marta cho‘zish kerak.

4-misol. $y=f(x)$ funksiya grafigidan foydalanib, $y_1=2f(x)$, $y_2=f(2x)$ funksiyalar grafiklari yasalsin.

Yechish: 32-rasmda keltirilgan $y=f(x)$ funksiya grafigi har bir nuqtasining ordinatasini 2 ga ko‘paytirsak, y_1 egri chiziqni, $f(x)$ grafikni Oy o‘qidan $l=\frac{1}{2}$ marta cho‘zish (ya’ni ikki marta siqish) bajarilsa y_2 grafigi hosil bo‘ladi.



33-rasm.

Agar $y=f(x)$ funksiya grafigini abssissalar o‘qiga nisbatan simmetrik almashtirsak, $y=-f(x)$ funksiyaning grafigini, ordinata o‘qiga nisbatan simmetrik almashtirsak, $y=f(-x)$ funksiya grafigini, koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik almashtirsak, $y=-f(-x)$ funksiyaning grafigini hosil qilamiz.

5-misol. $f(x)=2x-1$ funksiyaning grafigidan foydalanib, $f(-x)=-2x-1$ funksiyaning grafigi yasalsin.

Yechish: $f(x)=2x-1$ funksiya grafigini yasab, uni Oy o‘qiga nisbatan simmetrik almashtirsak (akslantirsak), $f(-x)=-2x-1$ funksiya grafigi hosil bo‘ladi, (33-rasm).

Mashqlar

281. $y=x^2$ funksiya grafigidan foydalanib,

1) $y=x^2-3$; 2) $y=-x^2+2$; 3) $y=-x^2-2$;
4) $y=x^2+3x$; 5) $y=2x-x^2$; 6) $y=x^2-x+1$. funksiya grafiklari yasalsin.

282. $y=\frac{1}{x}$ funksiya grafigidan foydalanib,

1) $y=-\frac{1}{x-3}$; 2) $y=\frac{x}{x-3}$; 3) $y=\frac{3x-1}{x+1}$; 4) $y=\frac{2-3x}{x}$

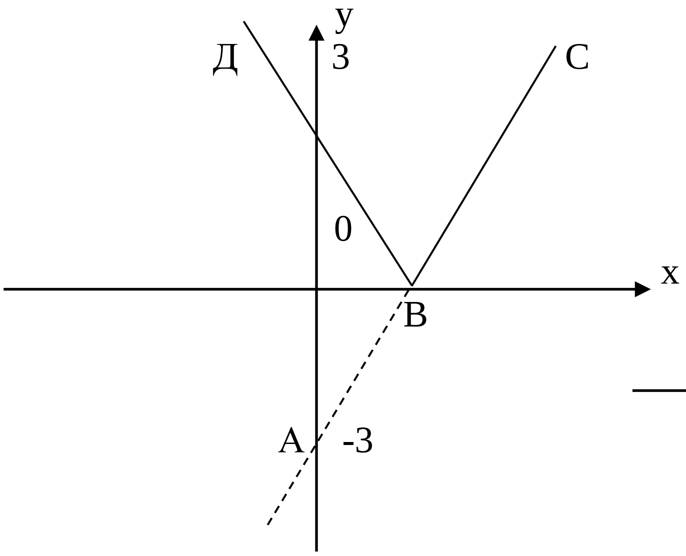
funksiyalarning grafiklari yasalsin.

Javoblar: 276. 2) $y=\frac{3x}{2x-1}$; $(-\infty,\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2},\infty)$ va $(-\infty,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},\infty)$. 4) $y=-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ Ikkalasi uchun $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$; 278. 2) mavjud 4) mavjud emas; 280. d=-1, c-ixtiyoriy.

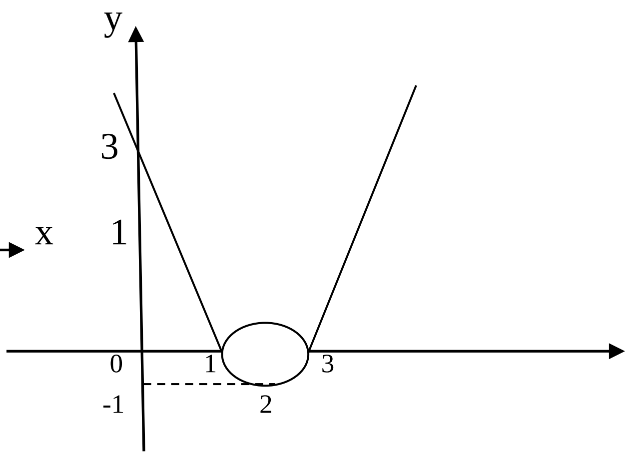
10.6. Modul bilan bog‘liq ifodalarning grafiklari

Ma’lumki: $|f(x)| = \begin{cases} f(x), & agar \quad f(x) \ge 0 \quad bo`lsa, \\ -f(x), & agar \quad f(x) < 0 \quad bo`lsa. \end{cases}$

Bundan ko‘rinadiki, $y = |f(x)|$ funksiyaning grafigini yasash uchun $y = f(x)$ grafigini yasash va bu grafikning *Ox* o‘qidan pastda joylashgan qismini *Ox* o‘qiga nisbatan yuqori yarim tekislikka akslantirish kerak.



34-rasm.



35-rasm.

1-misol 1. $y = |2x - 3|$ funksiyaning grafigi yasalsin.

Yechish: Avval $y = 2x - 3$ funksiyaning grafigini yasaymiz. (ABC to‘g‘ri chiziq, 34-rasm). $y = |2x - 3|$ ning grafigini hosil qilish uchun $y = 2x - 3$ grafikning *OX* o‘qidan pastda joylashgan qismi AB ni *Ox* o‘qi-ga nisbatan akslantirish lozim. Natijada DBC siniq chiziqni hosil qila-miz, bu $y = |2x - 3|$ ning grafigi bo‘ladi.

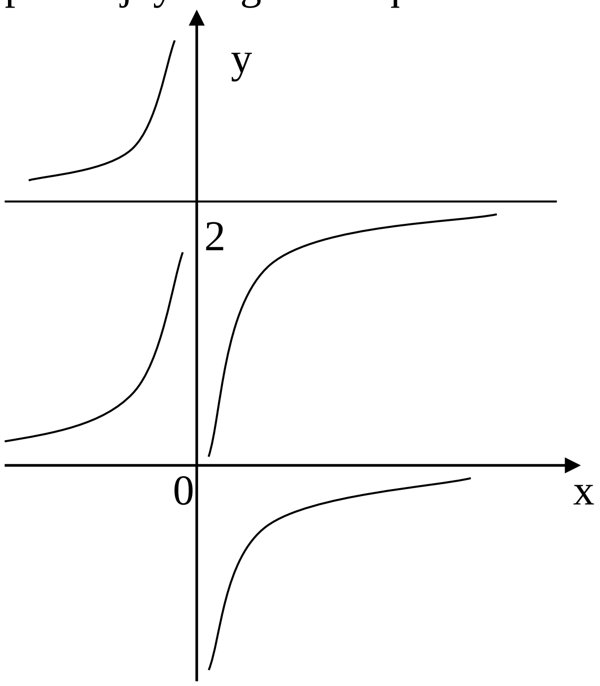
2-misol. $y = |x^2 - 4x + 3|$ funksiyaning grafigi yasalsin.

Yechish: Avval $y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$ funksiyaning grafigini yasaymiz. Bu ABC paraboladan iborat bo‘ladi (35-rasm).

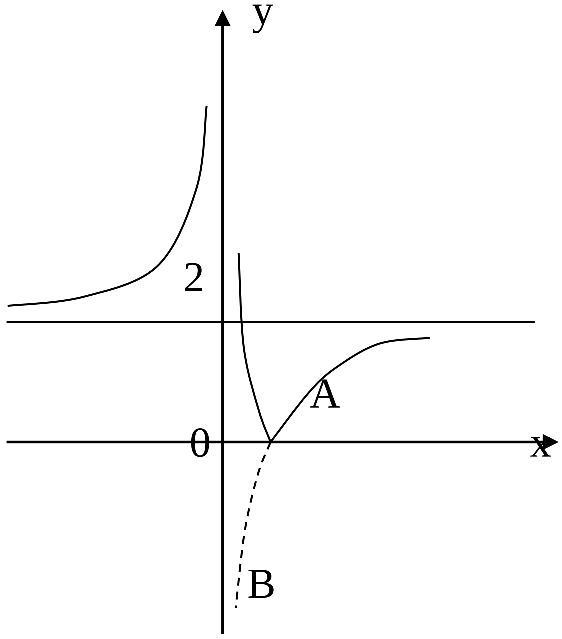
$y = |x^2 - 4x + 3|$ ning grafigini yasash uchun $y = x^2 - 4x + 3$ grafigining *Ox* o‘qidan pastda joylashgan qismi EBF ni *Ox* o‘qiga nisbatan akslantirib, AEDFC egri chiziqni hosil qilamiz. Bu berilgan funksiyaning grafigidan iborat.

3-misol. $y = |2 - \frac{1}{x}| + 2$ funksiyaning grafigini yasang.

Yechish: Avval $y=-\frac{1}{x}$ funksiyaning grafigini yasaymiz. Bu ikkinchi va to‘rtinchi choraklarda joylashgan giperbola bo‘ladi. Agar bu grafikni *Oy* o‘qi yo‘nalishida ikki birlik yuqoriga siljitsak, $y=2-\frac{1}{x}$ funksiyaning grafigi hosil bo‘ladi (36-rasm). Endi $y=|2-\frac{1}{x}|$ funksiyaning grafigini yasaymiz. Buning uchun $y=2-\frac{1}{x}$ funksiya grafigining *Ox* o‘qidan pastda joylashgan AB qismini *OX* o‘qiga nisbatan akslantiramiz (37-rasm).



36-rasm.

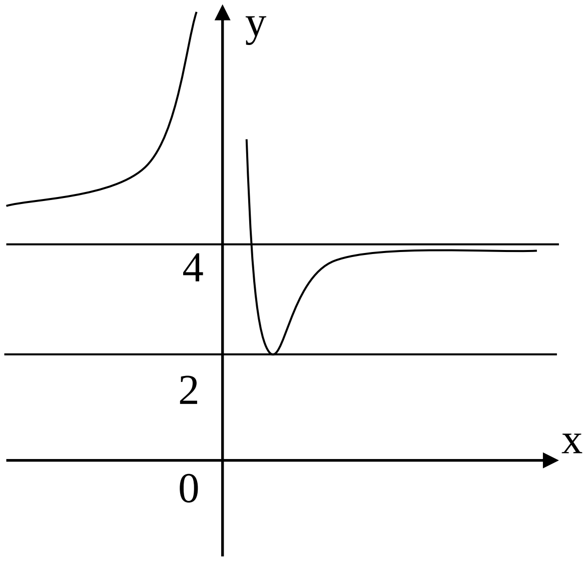


37-rasm.

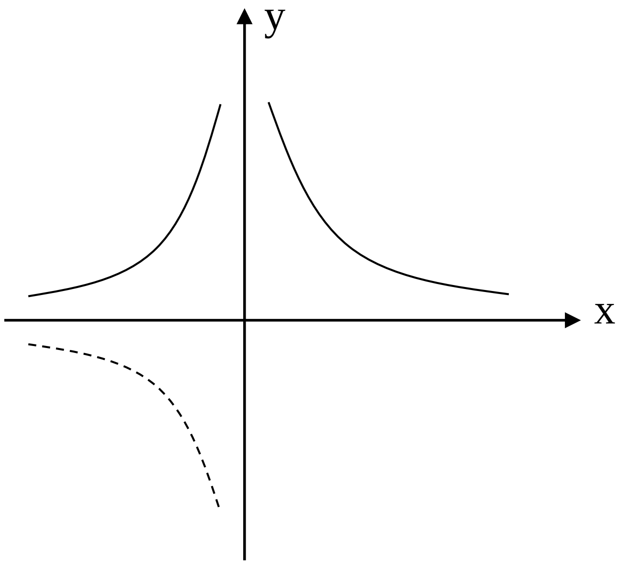
Endi $y=|2-\frac{1}{x}|+2$ funksiyaning grafigini yasaymiz. Buning uchun $y=|2-\frac{1}{x}|$ funksiya grafigini *Oy* o‘qi yo‘nalishda ikki birlikka yuqoriga siljitish yetarli bo‘ladi (38-rasm).

4-misol. $y=\frac{1}{|x|}$ ning grafigi yasalsin.

Yechish: $y=\frac{1}{x}$ grafigi birinchi va uchinchi choraklardagi giperbola bo‘lsa, $y=\frac{1}{|x|}$ grafigini hosil qilish uchun $y=\frac{1}{x}$ ning birinchi chorakdagi qismini o‘zgarishsiz qoldirib, uchinchi chorakdagi *Ox* o‘qiga nisbatan simmetrik akslantirish kerak (39-rasm).



38-rasm.

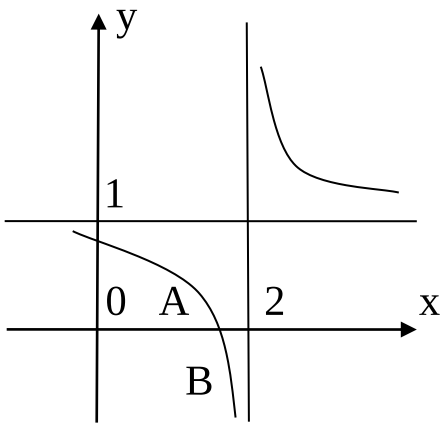


39-rasm.

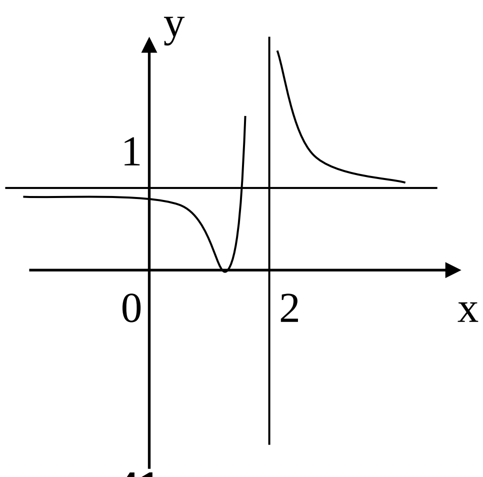
5-misol. $y = \left|\dfrac{x+1}{x-2}\right|$ funksiyaning grafigini yasang.

Yechish: Avval $y = \dfrac{x+1}{x-2} = 1 + \dfrac{3}{x-2}$ funksiyaning grafigini yasaymiz, Bu 40-rasmda keltirilgan giperboladan iborat bo‘ladi.

$y = \left|\dfrac{x+1}{x-2}\right|$ funksiyaning grafigini yasash uchun $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ grafigida AB qismini, ya’ni *Ox* o‘qidan pastda joylashgan qismini, *Ox* o‘qiga nisbatan akslantirish kerak (41-rasm).



40-rasm.



41-rasm.

Mashqlar

Funksiyalar grafiklarini yasang:

283. 1) $y = |x-2|$; 2. $y = |2-3x|$;

3) $y = \left|\dfrac{x}{2}+3\right|$; 4. $y = \left|1+\dfrac{x}{4}\right|$.

284. 1) $y=|x^2-3|$; 2. $y=|2-x^2|$;

3) $y=|x^2-2x-3|$; 4. $y=|x^2+4x-5|$;

5 $y=|x^2-3x|+2$; 6. $y=|x^2+3x|-2$.

285. 1) $y=\frac{1}{|x+3|}$; 2) $y=-\frac{2}{|x+2|}$;

3) $y=|\frac{2x}{x-2}|$; 4) $y=-|\frac{x}{x+3}|$;

5) $y=-\left|\frac{x+3}{x-1}\right|$; 6) $y=|\frac{x-2}{x+2}|$.

§ 11. KO‘RSATKICHLI FUNKSIYA VA KO‘RSATKICHLI TENGLAMA

11.1. Ko‘rsatkichli funksiya

Darajaning ba’zi xossalarini eslatib o‘tamiz. Faraz qilaylik, $a>0$, $b>0$, bo‘lib, m, n, k – haqiqiy sonlar bo‘lsin.

U holda

$$\underbrace{a......a}_{n-marta} = a^n$$

$$a^n \cdot a^k = a^{a+k}, \quad \frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}, \quad a^0 = 1,$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \qquad (a^n \cdot b^k)^m = a^{nm} \cdot b^{km},$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \qquad \left(\frac{a^n}{b^n}\right)^m = \frac{a^{mn}}{b^{mn}},$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \qquad \frac{1}{a^{-n}} = a^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n,$$

$\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$; $\quad (\sqrt[n]{a^k})^m = \sqrt[n]{a^{km}}$, $\quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$ – tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

Ta’rif: $y = a^x$, ya’ni asosi o‘zgarmas, daraja ko‘rsatkichi o‘zgaruvchi bo‘lgan funksiya, ko‘rsatkichli funksiya deyiladi, bu yerda a- berylgan son bo‘lib, $a>0$ va $a \neq 1$

Bu funksiyaning xossalarini ko‘rib chiqamiz:

1. Bu funksiya x ning barcha $x \in R$ qiymatlari uchun aniqlangan, ya’ni funksiyaning aniqlanish sohasi haqiqiy sonlar to‘plamidan iborat.

2. x-ning barcha qiymatlari uchun $a^x > 0$, chunki $a > 0$, $a \neq 1$. Shuning uchun $y = a^x$ funksiyaning qiymatlar sohasi barcha musbat sonlardan iborat , ya’ni $y \in R^+$.

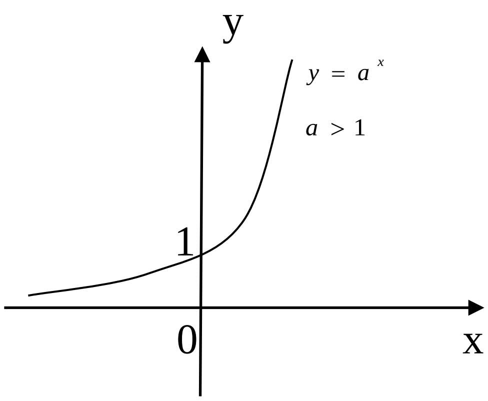
3. $x_1 < x_2$ bo‘lsin.

a) $a > 1$ bo‘lganda, $a^{x_1} < a^{x_2}$ bo‘ladi. Haqiqatda, bu tengsizlikning ikkala tomonini a^{x_1} ga bo‘lamiz $(a^{x_1} > 0)$ va $1 < \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}$ ni yoki $1 < a^{x_2 - x_1}$ ni hosil qilamiz. Shartga ko‘ra $x_2 - x_1 > 0$ va $a > 1$ bo‘lganidan bu tengsizlikning tog‘riligiga ishonch hosil qilamiz:

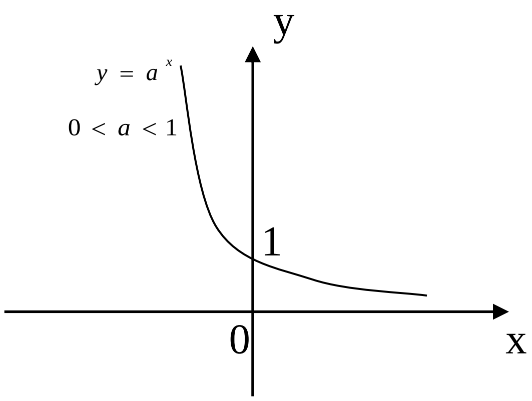
b) $0<a<1$ bo‘lsa, $a^{x_1} > a^{x_2}$ bo‘ladi, chunki $1 > \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}$ yoki $1 > a^{x_2 - x_1}$ (birdan kichik sonning musbat ko‘rsatkichli darajasi birdan kichikdir). Bu xossa-dan $a>1$ bo‘lganda, $y=a^x$ o‘suvchi va $0<a<1$ bo‘lganda – kamayuvchi funksiya ekanligi kelib chiqadi.

4. $x=0$ bo‘lganda $y=a^0=1$ bo‘ladi, demak $y=a^x$ funksiyaning grafigi *a* ning har qanday qiymatlarida (0,1) nuqtadan o‘tadi.

5. $0<a<1$ bo‘lganda x o‘sib borsa, *y* nolga yaqinlashib boradi, ya’ni $y=a^x$ funksiyaning grafigi *Ox* o‘qiga yaqinlashib boradi, lekin grafigi u bilan kesishmaydi. Xuddi shunday, $a>1$ bo‘lganda, funksiyaning grafigi *Ox* o‘qining manfiy qismiga yaqinlashib boradi. Bu funksiyaning grafigi quyidagicha bo‘ladi. (42, 43-rasmlar).



42-rasm.



43-rasm.

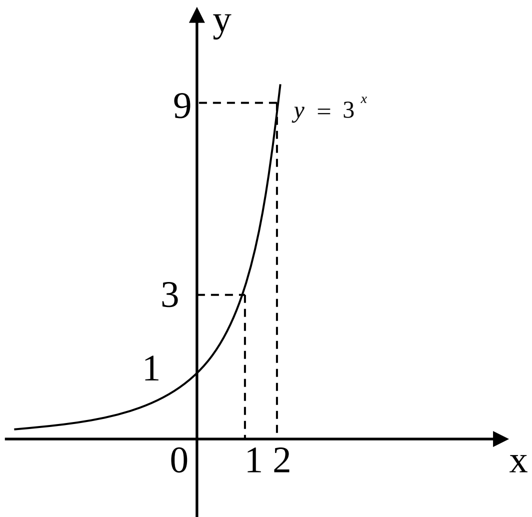
42-rasmda o‘suvchi, 43-rasmda kamayuchi funksiyalarning grafiklari tasvirlangan.

1-misol. $y=3^x$ va $y=(\frac{1}{3})^x$ funksiyalarning grafiklari yasalsin.

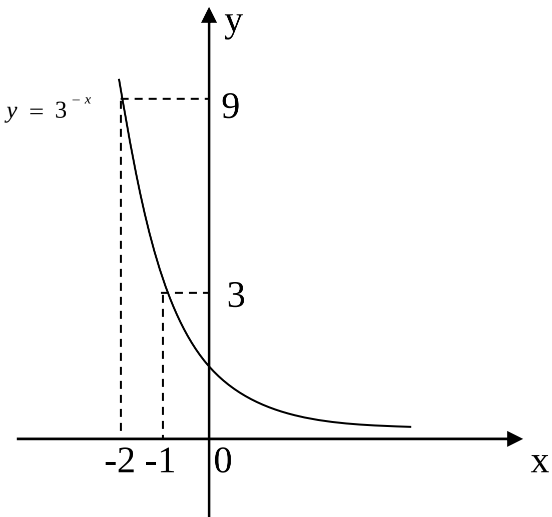
Yechish: Keltirilgan xossalardan foydalanib, grafikning aniqroq chiqishi uchun har bir grafikda bir necha nuqtalarni aniqlab, grafiklarni yasaymiz (44, 45-rasmlar).

2-misol. $2^x=8$ tenglamani yeching.

Yechish: $y=2^x$ va $y=8$ funksiyalarning grafiklarini bitta

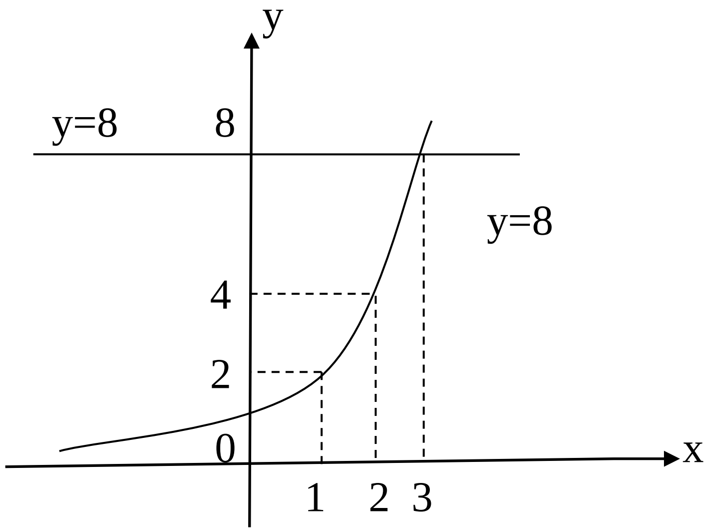


44-rasm.



45-rasm.

chizmada chizamiz. Ularning kesishish nuqtasining abssissasi $(x = 3)$ berilgan tenglamaning yechimi bo‘ladi (46-rasm). Bu tenglamani



46-rasm.

$x = 3$ dan boshqa yechimi yo‘q, chunki agar $x < 3$ bo‘lsa va $2^x > 8$, agar $x > 3$ bo‘lsa, $2^x < 8$. Bu chizmadan ham yaqqol ko‘rinadi: to‘g‘ri chiziq $(y = 8)$ va egri chiziq $(y = 2^x)$ faqat bitta nuqtada kesishadi.

Mashqlar

286. (Og‘zaki) Ko‘rsatkichli funksiyaning o‘sish yoki kamayish xossasidan foydalanib, quyidagi sonlarni taqqoslang:

1) 1 va $1{,}2^2$; 2) 1 va $0{,}7^2$; 3) $(\frac{3}{5})^{2.1}$ va $(\frac{3}{5})^{2.3}$;

4) $2{,}7^{1,7}$ va $2{,}7^{1,9}$; 5) 4^{-2} va 4^{-3}; 6. $4{,}2^2$ va $4{,}5^2$;

7) $0{,}6^{-2,2}$ va $0{,}8^{-2,2}$; 8) $0{,}7^{3,1}$ va $0{,}9^{3,1}$.

287. (Og‘zaki) Berilgan funksiyalarni o‘suvchi yoki kamayuvchi ekanligini aniqlang:

1) $y = 4^{2x}$; 2) $y = 4^{-3x}$; 3) $y = 0{,}7^{3x}$;

4) $y = 0{,}9^{-2x}$; 5) $y = (\frac{1}{2})^{2x}$; 6) $y = (\frac{1}{3})^{-3x}$.

288. Hisoblang: 1) $(2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$; 2) $4^{(1-\frac{\sqrt{3}}{2})(2+\sqrt{3})}$;

3) $3^{2\sqrt{3}-1} \quad 9^{\sqrt{3}+\frac{1}{2}}$; 4) $5^{2\sqrt{2}-3} \quad 25^{\sqrt{2}+1}$.

289. 1) $y = 2^x$; 2) $y = 2^{-x}$; 3) $y = 2^{2x}$;

4) $y = 2^{\frac{x}{2}}$; 5) $y = 0{,}3^x$; 6) $y = (3)^x$ funksiyalarning grafiklarini yasang.

290. $y = 2^x$ funksiyaning grafigidan foydalanib

1) $\sqrt{2}$; 2) $2^{\frac{2}{3}}$; 3) $2^{-\frac{2}{3}}$; 4) $2^{-1,5}$ ning qiymatlarini taqribiy hisoblang.

291. Quyidagi funksiyalar grafiklarining kesishish nuqtalarining koordinatalarini toping:

1) $y = 2^x$ va $y = 4$; 2) $y = 2^{-2x}$ va $y = 8$;

3) $y = (\frac{1}{3})^x$ va $y = 9$; 4) $y = 5^x$ va $y = \frac{1}{5}$.

292. 1) $y = 2^x + 1$; 2) $y = -3^x$; 3) $y = (\frac{1}{3})^{2x} - 2$;

4) $y = 2^{x+1}$; 5) $y = 3^{x-2}$; 6) $y = 2^{2|x|}$;

7) $y = 2^{-|x|}$; 8) $y = 3 - 2^x$; 9) $y = |2 - 2^x|$.

10) $y = \frac{2^x}{5}$ funksiyalarning grafiklarini yasang.

Javoblar. 288. 2) 2; 4) $\frac{1}{5}$. 291. 2) (-1;5;8); 4) (-1;0;2).

11.2. Ko‘rsatkichli tenglamalar

Ko‘p hollarda ko‘rsatkichli tenglama $a^x = a^b$ ko‘rinishga keltiriladi. Bu yerda $a > 1$ $a \neq 1$. Bu tenglama yagona yechim $x = b$ ga ega, chunki quyidagi teorema o‘rinli.

Teorema. Agar $a > 0$ va $a \neq 1$ bo‘lsa, $a^{x_1} = a^{x_2}$ tenglikdan $x_1 = x_2$ hosil bo‘ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, $x_1 = x_2$ tenglik bajarilmasin, ya’ni $x_1 < x_2$ yoki $x_1 > x_2$ bo‘lsin. U holda $x_1 < x_2$ va $a > 1$ bo‘lganda $y = a^x$ funksiya o‘suvchiligidan $a^{x_1} < a^{x_2}$ kelib chiqadi, $0 < a < 1$ bo‘lganda esa, $a^{x_1} > a^{x_2}$ bo‘ladi. Ikkala holda ham $a^{x_1} = a^{x_2}$ shart bajarilmadi, demak farazimiz noto‘g‘ri va teorema isbotlandi.

1-misol. $\sqrt{3} \cdot 3^x = 1$ tenglamani yeching.

Yechish: Tenglamani $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^x = 1$ yoki $3^{\frac{1}{2}+x} = 3^0$ shaklda yozamiz va $\frac{1}{2} + x = 0$ ni hosil qilib, bundan $x = -\frac{1}{2}$ ni topamiz.

Javob: $x = -\frac{1}{2}$.

2-misol. $2^{2x}\cdot 3^x = 144$ tenglamani yeching.

Yechish: $2^{2x} = (2^2)^x = 4^x$ va $144 = 12^2$ bo‘lgani uchun, tenglamani $4^x\cdot 3^x = 12^2$ yoki $12^x = 12^2$ ko‘rinishda yozib, $x = 2$ ni topamiz.

Javob: $x = 2$.

3-misol. $4^x = 3^{2x}$ tenglamani yeching.

Yechish: Tenglamani $4^x = 9^x$ shaklda yozamiz va $9 \neq 0$ ekanligini hisobga olib, ikkala tomonini 9^xga bo‘lamiz:

$\frac{4^x}{9^x} = 1 \Rightarrow (\frac{4}{9})^x = \left(\frac{4}{9}\right)^0$, bundan $x = 0$ ni topamiz:

Javob: $x = 0$

4-misol. $3^{x^2-2x-1} = 9$ tenglamani yeching.

Yechish: Bu tenglamani $3^{x^2-2x-1} = 3^2$ ko‘rinishda yozamiz. Ko‘rsatkichlarni tenglashtirib, $x^2-2x-1 = 2$ni yoki $x^2-2x-3 = 0$ni hosil qilamiz. Buni yechib $x_1 = -1$ va $x_2 = 3$ni topamiz. Ikkala ildiz ham tenglamani qanoatlantiradi.

Javob: $x_1 = -1$ va $x_2 = 3$

5-misol. $2^{8-x} + 7^{3-x} = 7^{4-x} - 2^{3-x}\cdot 11$ tenglamani yeching.

Yechish: Tenglamani quyidagicha yozamiz:

$2^{8-x} - 2^{3-x}\cdot 11 = 7^{4-x} - 7^{3-x}$ bundan

$2^{3-x}(2^5 - 11) = 7^{3-x}(7-1)$ yoki

$2^{3-x}\cdot 21 = 7^{3-x}\cdot 6$ yoki

$\left(\frac{2}{7}\right)^{3-x} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$ni hosil qilamiz va $3 - x = 1$, $x = 2$ ni topamiz.

Javob: $x = 2$.

6-misol. $49^x - 8\cdot 7^x + 7 = 0$ tenglamani yeching.

Yechish: Tenglamani $7^{2x} - 8\cdot 7^x + 7 = 0$ shaklda yozib $7^x = t$ deb belgilaymiz va kvadrat tenglama $t^2 - 8t + 7 = 0$ni hosil qilamiz. Uning ildizlari $t_1 = 1$ va $t_2 = 7$ bo‘ladi.

Bularni $7^x = t$ tenglikka qo‘yib,

$7^x = 1 = 7^0 \Rightarrow x_1 = 0$,

$7^x = 7 \Rightarrow x_2 = 1$ ni hosil qilamiz.

Javob: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

Mashqlar

293. Tenglamalarni yeching:

1) $8^{x-1}=2$; 2) $3^{2x}=1$; 3) $0{,}5^{x^2-x}=1$;

4) $2^{2x-1}=\frac{1}{4}$; 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}=9$; 6) $25^{x}=\sqrt{5}$;

7) $4\cdot 2^{2x}=16$; 8) $\frac{3^x}{27}=9$; 9) $0{,}7^{x-1}=0{,}7^{2x+3}$;

10) $\left(\frac{2}{9}\right)^x\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{81}{256}$; 11) $\sqrt{2^x}\cdot\sqrt{3^x}=216$; 12) $5^{2x}\cdot 3+5^{2x+1}=40$.

13) $7^x+7^{x-1}=56$; 14) $5^{x-1}=4^{x-1}$; 15) $2^{\frac{x+1}{2}}=3^{x+1}$;

16) $3^{x+1}+3^{x-1}=2^{x+1}+7\cdot 2^{x-1}$; 17) $3^{x+1}+3^{x-1}=7^{x+1}+5\cdot 7^x$;

18) $4^x+2^x-6=0$; 19) $100^x-11\cdot 10^x+10=0$;

20) $\sqrt{2^x\sqrt[3]{4^x\cdot 0{,}125^{\frac{1}{x}}}}=4\sqrt[3]{2}$; 21) $2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}=0{,}01\cdot 10^{3(x-1)}$.

Javoblar: 293. 2.0; 4) $-\frac{1}{2}$; 6) $-\frac{1}{4}$; 8) 5 ; 10) 4; 12 $\frac{1}{2}$; 14) 1; 16) 1; 18) 1; 20) $-\frac{1}{5}$, 3.

11.3. Ko‘rsatkichli tengsizliklar va ularni yechish usullari

Ko‘rsatkichli tengsizlik ko‘p holatlarda ma’lum soddalashtirishlardan keyin $a^x>a^b$ yoki $a^x<a^b$ ko‘rinishiga keltiriladi. Bu tengsizliklar ko‘rsatkichli funksiyaning o‘suvchi yoki kamayuvchi xossasini hisobga olgan holda yechiladi:

$$a^x>a^b\Rightarrow\begin{cases}x>b, & \text{agar } a>1 \text{ bolsa,}\\ x<b, & \text{agar } 0<a<1 \text{ bo' lsa,}\end{cases}$$

yoki

$$a^x<a^b\Rightarrow\begin{cases}x<b, & \text{agar } a>1 \text{ bolsa,}\\ x>b, & \text{agar } 0<a<1 \text{ bo' lsa}\end{cases}$$

Misollar: 1. $2^{x^2}>4$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Asos 2>1 bo‘lgani uchun $2^{x^2}>2^2$ dan $x^2>2$ ni hosil qilamiz. Bundan esa $|x|>\sqrt{2}$ yoki $x<-\sqrt{2}$ va $x>\sqrt{2}$ hosil bo‘ladi.

Javob: $x\in\left(-\infty,\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},\infty\right)$.

2. $0{,}5^{2-3x}<4$ 2. tengsizlikni yeching.

Yechish. Tengsizlikni $0{,}5^{2-3x} < 2^2 = 0{,}5^{-2}$ ko‘rinishida yozamiz va asos 0,5<1 ekanligini hisobga olib, $2 - 3x > -2$ ni hosil qilamiz. Bundan -3x>-4 yoki $x < \frac{4}{3}$ hosil bo‘ladi.

Javob: $x \in \left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$.

3. $9^x + 3^x - 2 > 0$ tengsizlik yechilsin.

Yechish: $3^x=t$ deb qabul qilsak, $9^x=3^{2x}=t^2$ bo‘ladi va berilgan tengsizlikka teng kuchli $t^2+t-2>0$ tengsizlik hosil bo‘ladi. Uni $(t-1)(t+2)>0$ ko‘rinishida yozib yechim $t<-2$ va $t>1$ ni hosil qilamiz. x o‘zgaruvchiga o‘tsak, $3^x<-2$ va $3^x>1$ ni hosil qilamiz. Birinchi tengsizlik yechimga ega emas, chunki barcha haqiqiy x uchun $3^x>0$. Ikkinchi tengsizlikni $3^x>3^0$ ko‘rinishida yozib, bundan $x>0$ ni hosil qilamiz.

Javob: $x \in (0, \infty)$.

4. $\left(\frac{4}{3}\right)^{x+1} - \left(\frac{4}{3}\right)^x \geq \frac{3}{16}$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Qavsdan $\left(\frac{4}{3}\right)^x$ ni chiqarib, topamiz:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x\left(\frac{4}{3}-1\right) \geq \frac{3}{16} \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \frac{1}{3} \geq \frac{3}{16} \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x \geq \frac{9}{16} \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$$

asos $\frac{4}{3} > 1$ bo‘lgani uchun $x \geq -2$ ni topamiz.

Yechim: $x \in [-2, \infty)$.

5. $\left(\frac{1}{36}\right)^x - 5 \cdot 6^{-x} - 6 \geq 0$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Tengsizlikni $\frac{1}{6^{2x}} - \frac{5}{6^x} - 6 \geq 0$ ko‘rinishida yozamiz va $6^x=t$ deb belgilab, $\frac{1}{t^2} - \frac{5}{t} - 6 \leq 0$ ni hosil qilamiz. Ikkala tomonni $t^2 = 6^{6x} > 0$ ga ko‘paytirib, $1 - 5t - 6t^2 \leq 0$ yoki $6t2 + 5t - 1 \leq 0$ ni hosil qilamiz. Bu tengsizlikni yechamiz:

$6(t+1)(t-\frac{1}{6}) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq t \leq \frac{1}{6}$, noma’lumga o‘tsak, $-1 \leq 6^x \leq 6^{-1}$ hosil bo‘ladi. Chap tomondagi tengsizlik barcha x uchun bajariladi, o‘ng tomon esa $x \leq -1$ bo‘lganda bajariladi.

Javob: $x \in (-\infty, -1]$.

6. $5^x - 3^{x+1} > 2(5^{x-1} - 3^{x-2})$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Ketma-ket quyidagicha o‘zgartirib yozamiz:

$$5^x - 3\cdot 3^x > 2\cdot 5^x \cdot 5^{-1} - 2\cdot 3^x \cdot 3^{-2} \Rightarrow 5^x - \frac{2}{5}\cdot 5^x > 3\cdot 3^x - \frac{2}{9}\cdot 3^x \Rightarrow 5^x\cdot\frac{3}{5} > 3^x\cdot\frac{25}{9}.$$

Ikkala tomonni $\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{3^x}$ ga ko‘paytiramiz:

$\frac{5^x}{3^x} > \frac{5}{3} * \frac{25}{9} \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x > \left(\frac{5}{3}\right)^3 \Rightarrow x > 3$ hosil bo‘ladi.

Yechim: $x \in (3, \infty)$.

7. $2^{x^2+x-12} > 1$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Tengsizlikni $2^{x^2+x-12} > 2^0$ ko‘rinishida yozib, $x^2 + x - 12 > 0$ ni hosil qilamiz. Bundan (x +4)(x -3)>0 va x <-4, x >3 ni topamiz.

Javob: $x \in (-\infty, -4) \cup (3, \infty)$.

Mashqlar

Tengsizliklarni yeching.

294. 1) $2^x > \frac{1}{4}$, 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 27$, 3) $9^x > \frac{1}{2}$,

4) $3^{3x} \le \frac{1}{3}$, 5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} < 8$, 6) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2-x} > 27$.

295. 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3x} > 4$, 2) $\left(\frac{9}{7}\right)^{3x-2x^2} \le \frac{9}{7}$, 3) $4^{\frac{x}{2}} > 8$,

4) $3^{2x-3} < \sqrt{3}$, 5) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \le 448$

6) $5^{3x+1} - 5^{3x-3} \ge 624$, 7) $0{,}4^x - \left(\frac{5}{2}\right)^{x+1} > 1{,}5$,

8) $32\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^x > 0$.

296. 1) $3^{2x} - 3^x < 6$, 2) $2^{2x} - 2^x > 12$, 3) $3^{3x+6} > 2^{x+3}$,

4) $5^{x-2} < 4^{2x-4}$, 5) $2^x \cdot 3^x < 36^{x^2}$, 6) $27 < 9^{\sqrt{x-1}}$.

297. 1) $\frac{4^x}{4^x - 3^x} < 4$, 2) $3^{\frac{\frac{2}{3}x-1}{2x+3}} \le 3^{-\frac{4}{3}}$,

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-2|} > \frac{1}{27}$, 4) $\frac{3^x}{3^x - 2^x} < 3$.

Javoblar: 294. 2) $(-3, \infty)$. 4) $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$. 6) $(3{,}5; \infty)$.

295. 2) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [2, \infty)$; 4) $\left(-\infty, \frac{7}{4}\right)$; 6) $\left[\frac{4}{3}, \infty\right)$: 8) $\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$.

296. 2) $(2, \infty)$; 4) $(2, \infty)$; 6) $\left(\frac{13}{4}, \infty\right)$. 297. 2) $(-1{,}5; -0{,}9]$; 4) $(0, \infty)$.

§ 12. LOGARIFMIK FUNKSIYALAR, TENGLAMALAR VA TENGSIZLIKLAR

12.1. Logarifmlar va ularning asosiy xossalari

Quyidagi misollarni ko‘ramiz:

1. $2^x=4$ ni yechish uchun $2^x=2^2$ deb yozamiz va $x=2$ yechimni topamiz.

2. $2^x=5$ bo‘lsin. o‘ng tomondagi 5 ni asosi 2 bo‘lgan daraja ko‘rinishida tasvirlash mushkul. Lekin bu tenglamaning haqiqiy ildizi mavjudligi bizga ma’lum. Bunday tenglamalarni yechish uchun logarifm tushunchasi kiritiladi.

Umuman olganda, $a^x=b$ $(a>0,\ a\neq 1,\ b>0)$ tenglamaning ildizi a asosga ko‘ra b sonning logarifmi deyiladi.

Ta’rif: b sonning a asosga ko‘ra logarifmi deb b sonni hosil qilish uchun a sonni ko‘tarish kerak bo‘ladigan daraja ko‘rsatkichiga aytiladi va $\log_a b$ kabi belgilanadi. $a^x=b$ tenglamani ($x=\log_a b$ bo‘lgani uchun)

$$a^{\log_a b}=b \qquad (1)$$

ko‘rinishida yozish mumkin. (1) formula asosiy logarifmik ayniyat deyiladi, bu yerda

$$a>0 \qquad a\neq 1 \qquad \text{va} \qquad b>0$$

Misollar: 1) $\log_2 16$ 2) $\log_5 0{,}04$ ning qiymatini toping.

Yechish: 1) $16=2^4$ bo‘lgani uchun, 16 ni hosil qilish uchun ikkini to‘rtinchi darajaga ko‘tarish kerak, demak $\log_2 16=4$.

2) $0{,}04=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}=5^{-2}$ ekanligi ma’lum. Shuning uchun $\log_5 0{,}04=-2$

Misollar: 3. $\log_4 x=\frac{1}{2}$, 4) $\log_x 4=-\frac{3}{4}$ tenglamalarni qanoatlantiruvchi x larni topamiz.

Yechish: Asosiy logarifmik ayniyatdan foydalanib:

$$3)\ x=4^{\frac{1}{2}}=2$$

4) $x^{\log_x 4}=4$, ya’ni $x^{-\frac{3}{4}}=4,\ x=4^{-\frac{4}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{256}}$ larni topamiz.

Har qanday $a>0,\ b>0,\ a\neq 1,\ b\neq 1,\ x>0,\ y>0$ va haqiqiy istalgan n va m sonlar uchun quyidagi tengliklar bajariladi:

1) $\log_a 1 = 0$, 2) $\log_a a = 1$,

3) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$,

4) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$,

5) $\log_a x^n = n \log_a x$,

6) $\log_{a^m} x = \frac{1}{m} \log_a x$,

7) $\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \log_a x$,

8) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$,

9) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$,

Bu tengliklar ko‘rsatkichli funksiya xossalaridan kelib chiqadi. Bulardan ba’zilarini isbot qilamiz.

Logarifmik ayniyatdan foydalanib:

$x = a^{\log_a x}$, $y = a^{\log_a y}$ ni topamiz.

Bu tengliklarni hadlab ko‘paytirsak yoki bo‘lsak

$xy = a^{\log_a x} * a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$,

$\frac{x}{y} = a^{\log_a x} : a^{\log_a y} = a^{\log_a x - \log_a y}$, hosil bo‘ladi.

Bu tengliklardan logarifm ta’rifiga ko‘ra 3) va 4) tengliklar kelib chiqadi.

$x = a^{\log_a x}$ ayniyatning ikkala tomonini *n* – darajaga oshirsak, $x^n = a^{n \log_a x}$ hosil bo‘lib, bundan $\log_a x^n = n \log_a x$ ni topamiz.

Bir asosli logarifmdan boshqa asosli logarifmga o‘tish formulasi 8) ni xususiy holda 9) ni isbotlash uchun quyidagicha amal qilamiz:

$$\log_a x = b \Rightarrow x = a^b$$

Hosil bo‘lgan $x=a^b$ ifodaning ikkala tomonidan *b* asosga ko‘ra logarifm topamiz:

$$\log_b x = \log_b a^b = b \log_b a \Rightarrow b = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Chap tomonga b ning qiymatini qo‘yib, 8) formulani hosil qilamiz. Agar bu formuladan $x=b$ desak, 9) formula hosil bo‘ladi.

5-misol. Agar $\log_2 5 = a$ va $\log_2 3 = b$ bo‘lsa, $\log_2 3000$ ni a va b orqali ifodalang?

Yechish: $\log_2 3000 = \log_2(3\cdot 5^3\cdot 2^3) = \log_2 3 + 3\log_2 5 + 3\log_2 2 = b + 3a + 3$

6-misol. Agar $\log_3 x = \log_3 7 + 2\log_3 5 - 3\log_3 2$ bo‘lsa, x ni toping.

Yechish: $\log_3 x = \log_3 7 + \log_3 5^2 - \log_3 2^3 = \log_3 \frac{7\cdot 5^2}{2^3} = \log_3 \frac{175}{8}$,

Bundan $x = \frac{175}{8} = 21{,}875$

12.2. O‘nli va natural logarifmlar

1-ta’rif. Asosi $a=10$ bo‘lgan logarifmlar o‘nli logarifmlar deyiladi va lgx orqali ifodalanadi, ya’ni $log_{10}x=lgx$

7-misol. $lg100=lg10^2=2$
$8{:}\ lg0{,}01=lg10^{-2}=-2$

2-ta’rif. Natural logarifm deb asosi e son bo‘lgan logarifmga aytiladi va lnx bilan belgilanadi, ya’ni $log_e x=lnx$, e soni irratsional son bo‘lib, $e=2{,}7182818284$... amalda $e\approx 2{,}7$ deb qabul qilish mumkin.

O‘nli va natural logarifmlar orasida

$\lg x = \frac{1}{\ln 10}\cdot \ln x \approx 0{,}434294 \ln x$ va

$\ln x = \frac{1}{\lg e}\cdot \lg x \approx 2{,}302551 \lg x$ bog‘lanish mavjud. Amalda $\lg x \approx 0{,}4\ln x$ va $\ln x \approx 2{,}3\lg x$ tengliklardan foydalanish mumkin.

9-misol. $ln100$, lge^2 ni hisoblang.

Yechish: $\ln 100 \approx 2{,}3\cdot \lg 100 = 2{,}3\cdot 2 = 4{,}6.$
$\lg e^2 = 2\lg e \approx 2\cdot 0{,}4\ln e = 0{,}8.$

Mashqlar

Quyidagi logarifmlarni toping:

298) 1) $\log_3 9$; 2) $l\log_2 \frac{1}{16}$; 3) $\log_4 16$; 4) $\log_5 \frac{1}{25}$.

299) 1) $\log_3 3\sqrt[3]{3}$; 2) $\log_2 32^{-5}$; 3) $\log_7 7^0$; 4) $\log_3 27$.

300) 1) $\log_9 \frac{1}{81}$; 2) $\log_4 32$; 3) $\log_{\sqrt{2}} 8$; 4) $\log_{0,2} 125$.

Hisoblang:

301) 1) $2^{\log_2 13}$, 2) $3^{\log_3 9}$, 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{0,5} 3}$, 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{0,25} 3}$.

302) 1) $8^{\log_2 3}$, 2) $9^{\log_3 4}$, 3) $(0{,}25)^{\log_2 3}$, 4) $(0{,}04)^{\log_5 4}$.

303) 1) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{2}$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{9}$; 3) $\log_3 \log_2 2^9$;

4) $\log_9 \lg 1000$; 5) $\log_4 \log_{32} 1024 - \log_{\frac{1}{2}} 4$;

6) $\log_8 5 + \log_8 40 - \log_8 15$;

7) $\dfrac{\log_2 12 - \frac{1}{2}\log_2 36}{\log_3 9 - \frac{1}{3}\log_3 9}$; 8) $\dfrac{6\log_7 2 - \log_7 64}{8\log_5 2 + \frac{2}{3}\log_5 27}$;

9) $\dfrac{2\log_5 3}{\log_{25} 27}$; 10) $\dfrac{\log_{27} 8}{\log_9 2}$.

304) 1) $\log_3 4$; 2) $\log_7 15$; 3) $\log_{0,8} 9$; 4) $\log_{1,3} 12$.

Berilgan logarifmlarni natural logarifmlar bilan almashtirib, mikrokalkulatorda 0,01 aniqlik bilan hisoblang:

305) 1) $\log_2 5$; 2) $\log_5 4$; 3) $\log_7 25$; 4) $\log_{45} 9$.

306) 1) $\log_3 4$; 2) $\log_7 15$; 3) $\log_{0,8} 9$; 4) $\log_{1,3} 12$.

Javoblar: 298. 2) -4; 4) -2. 299. 2) -25; 4) 3. 300. 2) 3,5; 4) -3. 301. 2) 9; 4) 3. 302. 2) 16. 4) $\frac{1}{16}$; 303. 2) $-\frac{2}{3}$; 4) $\frac{1}{2}$.

6) $\log_8 \frac{40}{3}$; 8) 0; 10) 2.

12.3. Logarifmik funksiya va uning grafigi

Logarifmik funksiya deb,2

$$y=\log_a x$$

funksiyaga aytiladi. bu yerda $a>0$, $a\neq 1$. Funksiyaning ba’zi xossalarini ko‘rib chiqamiz:

1) Funksiyaning aniqlanish sohasi $x>0$. Bu logarifmning ta’rifidan kelib chiqadi.

2) Logarifmik funksiyaning qiymatlar sohasi barcha haqiqiy sonlardan iborat. Haqiqatda, har qanday haqiqiy son b uchun shunday musbat x mavjudki, $\log_a x=b$ bo‘ladi, ya’ni $\log_a x=b$ tenglama ildizga ega bo‘ladi.

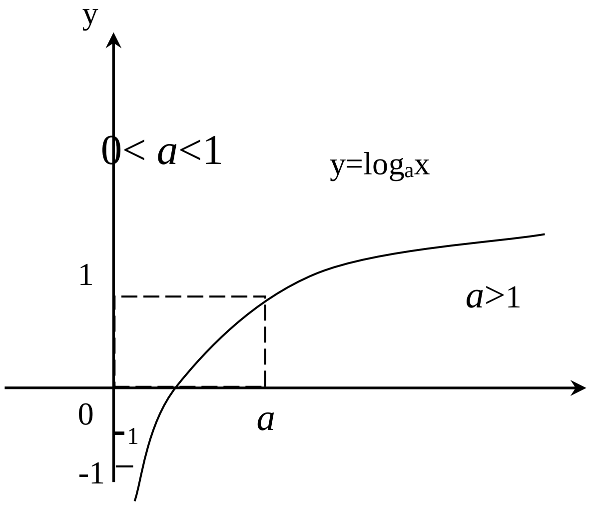
3) Barcha $x>0$ uchun agar $a>1$ bo‘lsa logarifmik funksiya o‘suvchi

bo‘ladi. Agar $0<a<1$ bo‘lsa, kamayuvchi bo‘ladi.

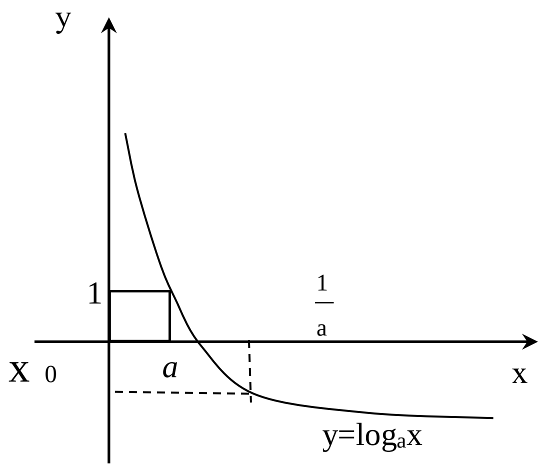
Haqiqatda $a>1$ bo‘lganda $x_2>x_1$ uchun $\log_a x_2 > \log_a x_1$ bo‘ladi va funksiya o‘sadi. Agar $0<a<1$ bo‘lsa, $a^{\log_a x_2} > a^{\log_a x_1}$ dan $\log_a x_2 > \log_a x_1$ kelib chiqadi. Bu funksiya kamayuvchiligini bildiradi.

4) $a>1$ bo‘lganda, $y=\log_a x$ funksiya $0<x<1$ uchun manfiy va $x>1$ uchun musbat qiymatlar qabul qiladi: $0<a<1$ bo‘lganda, $0<x<1$ uchun funksiya musbat va $x>1$ uchun manfiy qiymatlar qabul qiladi. Bu xossa $y=\log_a x$ funksiyaning o‘suvchi ($a>1$) va kamayuvchi ($0<a<1$) ekanligidan kelib chiqadi. $x=1$ bo‘lsa, $y=0$ grafik (1, 0) nuqtadan o‘tadi.

5) Keltirilgan xossalardan foydalanib, funksiya grafigini yasaymiz. Ko‘rinadiki grafik Oy o‘qdan o‘ngda joylashgan (47, 48 rasmlar).



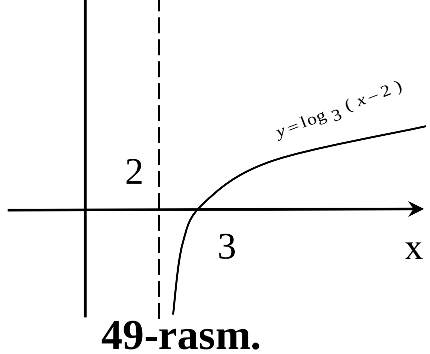
47-rasm.



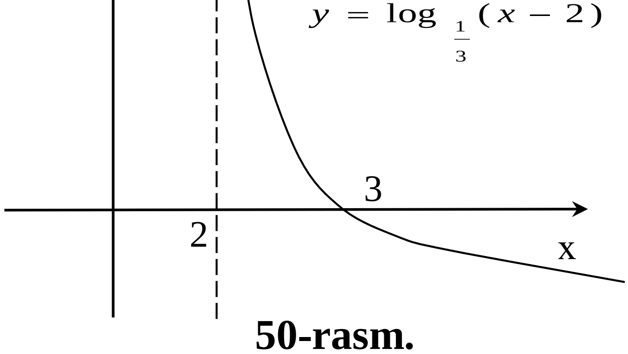
48-rasm.

Misollar. 1) $y=\log_3(x-2)$, 2) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$ funksiyaning grafiklarini yasang.

Yechish: Bu funksiyalarning grafiklari $y=\log_3 x$ va $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ funksiyalarning grafiklarini Ox o‘q bo‘yicha o‘ng tomonga ikki birlikka surishdan hosil bo‘ladi (49 va 50- rasmlar).



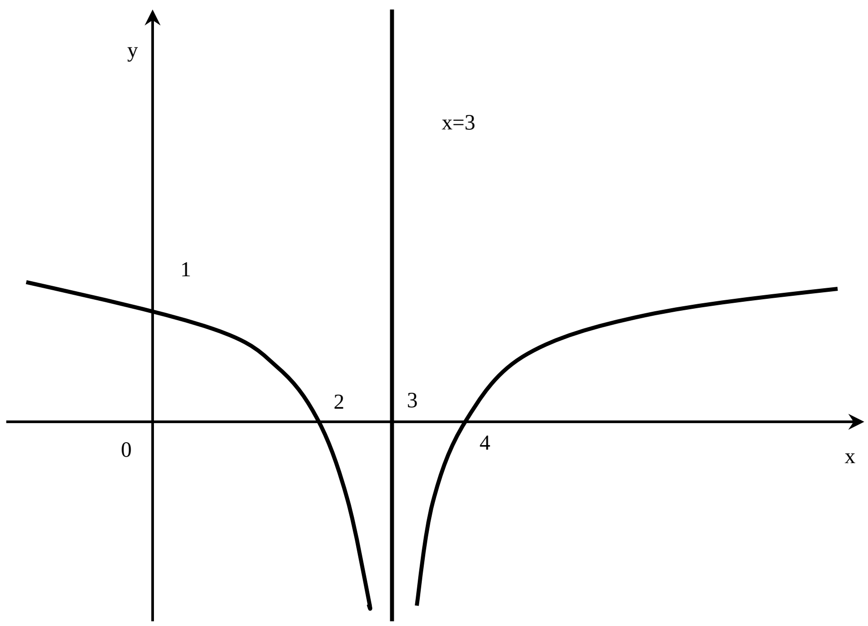
49-rasm.



50-rasm.

3-misol. $y=\log_3|3-x|$ funksiyaning grafigini yasang.

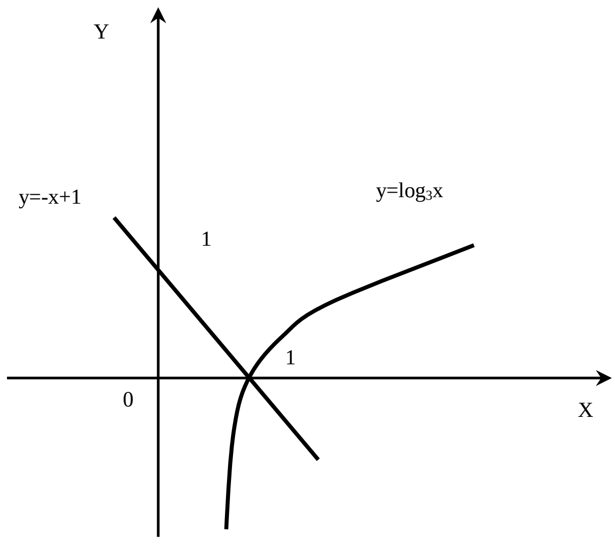
Yechish: $x\in(-\infty,3)\cup(3,\infty)$ $x=3$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan grafik simmetrik joylashgan. Shuning uchun grafikni *x>3* holat uchun yasab, uni *x=3* to‘g‘ri chiziqqa nisbatan akslantirsak, $y=\log_3|3-x|$ funksiyaning grafigi hosil bo‘ladi (51-rasm).



51-rasm.

4-misol. $\log_2 x=-x+1$ tenglamani grafik usulda yeching.

Yechish: bitta chizmada $y=\log_2 x$ va $y=-x+1$ funksiyalarning grafiklarini yasaymiz. Grafiklarning kesishish nuqtasining abssissasi berilgan tenglamaning yechimi bo‘ladi (52-rasm). Rasmda (1, 0) nuqtada grafiklar kesishadi. Demak *x=1* berilgan tenglama $\log_2 x=-x+1$ ning yechimi bo‘ladi.



52-rasm.

Mashqlar

306. Funksiyalarning aniqlanish sohalarini toping:

1) $y = \log_3(2x - 3)$; 2) $y = \lg(5 - 3x)$;

3) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 9)$; 4) $y = \ln(4 - x^2)$;

5) $y = \lg(x^2 + 5x + 4)$; 6) $y = \log_3(x^2 - 7x + 6)$.

307. Sonlarning ishorasini toping.

1) $\log_3 4{,}5$; 2) $\log_3 \frac{2}{3}$; 3) $\log_{0{,}3} 0{,}7$;

4) $\log_5 2{,}7$; 5) $\lg 0{,}96$; 6) $\ln 3{,}2$.

308. Funksiyaning o‘suvchi yoki kamayuvchi ekanligini aniqlang.

1) $y = \log_{0{,}75} x$; 2) $y = \log_{\frac{\sqrt{5}}{2}} x$;

3) $y = \ln x$; 4) $y = \lg x$.

1) $y = \log_2 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

309. Funksiyalarning grafiklarini yasang va bu grafiklardan foydalanib, $\log_2 3$; $\log_2 0{,}5$; $\log_2 5$ ni taqribiy hisoblang.

310. Funksiyalarning grafigini yasang.

1) $y = \log_2(x + 1)$; 2) $y = \log_2(x - 3)$;

3) $y = 2 + \log_3 x$; 4) $y = \log_3 x - 2$;

5) $y = 1 + \log_2(x + 1)$; 6) $y = \log_{\frac{1}{2}} x - 2$;

7) $y = |\log_2 x|$; 8) $y = |\log_2 x - 1|$.

311. Tenglamani grafik usulda yeching.

1) $\log_2 x = x - 1$, 2) $\log_2 x = 2x - 3$

3) $\log_{\frac{1}{2}} x = 2x^2$ 4) $\log_2 x = 1 - x^2$.

Javoblar: 306. 2) $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$; 4) $(-2, 2)$; 6) $(-\infty, 1) \cup (6, \infty)$.

307. 2) manfiy; 4) musbat; 6) musbat.

308. 2) o‘suvchi; 6) o‘suvchi.

309. 2) kamayuvchi.

12.4. Logarifmik tenglamalar va tengsizliklarni yechish usullari

12.4.1. Logarifmik tenglamalar

Logarifmik tenglama ma’lum almashtirishlardan keyin

$$\log_a x = \log_a b \qquad (1)$$

yoki

$$\log_a x = b \qquad (2)$$

ko‘rinishga keltiriladi. (1) dan $x=b$ va (2) dan $x=a^b$ yechimni topamiz.

1-misol. $\log_2(x^2+5x+2)=3$ tenglamani yeching.

Yechish: Berilgan tenglama x ning $x^2+5x+2=2^3$ tenglik bajariladigan qiymatlardagina qanoatlantiradi. Bundan $x^2+5x-6=0$ kvadrat tenglamaga ega bo‘lib, $x_1=1$, $x_2=-6$ yechimni topamiz.

2-misol. $\log_3(2x+3)=\log_3(x+1)$ tenglamani yeching.

Yechish: Bu tenglama x ning $2x+3>0$ va $x+1>0$ shartlarni qanoatlantiruvchi qiymatlari uchun aniqlangan. Bu tengsizliklarni yechib tenglamaning mavjudlik sohasi $x\in(-1,\infty)$ ni aniqlaymiz. Berilgan tenglama $2x+3=x+1$ tenglamaga teng kuchlidir. Bundan $x=-2$ ni topamiz. Ammo bu ildiz tenglamaning mavjudlik sohasiga kirmaydi. Binobarin, berilgan tenglamaning ildizlari mavjud emas.

3-misol. $\log_x(x^2-3x+3)=1$ tenglamani yeching.

Yechish: bu tenglama x ning $x>0,\ x\neq 1$ (x- logarifmning asosi bo‘lgani uchun) shartlar va $x^2-3x+3=x$ yoki $x^2-4x+3=0$ tenglik bajariladigan qiymatlardagina qanoatlantiriladi. Hosil bo‘lgan kvadrat tenglamaning ildizlari 1 va 3 bo‘lib, $x=1$ berilgan tenglamaning yechimi bo‘la olmaydi. Demak, berilgan tenglamaning ildizi faqat $x=3$.

4-misol. $\log_5 x-6\log_x 5=1$ tenglamani yeching.

Yechish: Bu tenglamaning mavjudlik sohasi $x\in(0,1)\cup(1,\infty)$ bo‘ladi. x asosli logarifmdan 5 asosli logarifmga o‘tib, $\log_5 x-\dfrac{6}{\log_5 x}-1=0$ ni, bundan $\log_5^2 x - \log_5 x - 6 = 0$ ni hosil qilamiz. Bu kvadrat tenglamani noma'lum $\log_5 x$ ga nisbatan yechib, $\log_5 x_1 = 3$ va $\log_5 x_2 = -2$ ni topamiz. Bu tenglamalardan $x_1=5^3=125$ va $x_2=5^{-2}=\frac{1}{25}$ larni topamiz. Bu ildizlarning ikkalasi ham tenglamani qanoatlantiradi.

5-misol. $\lg(2^x + x + 3) = x - x\lg 5$ tenglamani yeching.

Yechish: Ketma-ket teng kuchli tenglamalar bilan almashtirib, topamiz:

$$\lg(2^x + x + 3) = \lg 10^x - \lg 5^x$$

$$\lg(2^x + x + 3) = \lg\frac{10^x}{5^x} = \lg 2^x$$

$$2^x + x + 3 = 2^x; \qquad x + 3 = 0 \qquad x = -3$$

Javob: $x=-3$

12.4.2. Logarifmik tengsizlik

Logarifmik tengsizlik lozim bo‘lgan almashtirishlar bajarilgandan keyin

$$\log_a x \ge b \qquad (\log_a x \le b) \qquad \text{yoki} \qquad (3)$$

$$\log_a x \ge \log_a b \qquad (\log_a x \le \log_a b) \qquad (4)$$

ko‘rinishiga keladi.

Yechim: $\log_a x \ge b \Rightarrow \begin{cases} x \ge a^b, & \text{agar } a > 1 \text{ bo'lsa,} \\ x \le a^b, & \text{agar } 0 < a < 1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$

$\log_a x \ge \log_a b \Rightarrow \begin{cases} x \ge b, agar\ a > 1\, bo'lsa, \\ x \le b, agar\ 0 < a < 1\, bo'lsa, \end{cases}$ bo‘ladi.

6-misol. $lg(x+2)<1$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Tengsizlikning mavjudlik sohasi $x+2>0$, yechimi esa $x+2<10$ bo‘ladi. tengsizlik yechimini topish uchun

$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x + 2 < 10 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasiga ega bo‘lamiz,

Uni yechib $\begin{cases} x > -2 \\ x < 8 \end{cases}$ ni yoki $x \in (-2, 8)$ ni hosil qilamiz.

Yechim: $x \in (-2, 8)$.

7-misol. $\log_{\frac{1}{3}}(2x-4) > \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Mavjudlik sohasi uchun $2x-4>0$, $x+1>0$, tengsizlikning bajarilishi uchun $2x-4<x+1$ (asos $\frac{1}{3}<1$ bo‘lgani uchun tengsizlik ishorasi teskarisiga o‘zgaradi) tengsizliklarga, ya’ni

$$\begin{cases} 2x-4>0 \\ x+1>0 \\ 2x-4<x+1 \end{cases}$$ sistemaga ega bo‘lamiz.

Bundan $\begin{cases} x>2 \\ x>-1 \\ x<5 \end{cases}$ ni hosil qilamiz, demak yechim $x \in (2,5)$ bo‘ladi.

8-misol. $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) + \log_{\frac{1}{3}}(12-x) \geq -2$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Tengsizlikning mavjudlik sohasi

$\begin{cases} x-2>0 \\ 12-x>0 \end{cases}$ yoki $\begin{cases} x>2 \\ x<12 \end{cases}$ dan iborat.

Tengsizlikni $\log_{\frac{1}{3}}(x-2)(12-x) \geq \log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3})^{-2}$ teng kuchli tengsizlik bilan almashtirib, $\begin{cases} (x-2)(12-x) \leq 3^2 \\ 2<x<12 \end{cases}$ sistemaga ega bo‘lamiz.

Sistemani yechib, $\begin{cases} x \leq 3, x \geq 11 \\ 2<x<12 \end{cases}$ ni topamiz.

Javob: $x \in (2,3] \cup [11,12)$

9-misol. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x-6) \geq -3$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Tengsizlikning aniqlanish sohasi $x^2-5x-6>0$ yoki $(x+1)(x-6)>0$ yoki $x \in (-\infty,-1) \cup (6,\infty)$ bo‘ladi.

Tengsizlikni qanoatlantiruvchi x ni $x^2-5x-6 \leq (\frac{1}{2})^{-3}$ dan yoki $x^2-5x-6 \leq 8$ yoki (x+2)(x-7)≤0 dan topamiz: $-2 \leq x \leq 7$. Tengsizlikning mavjudlik sohasi bilan birlashtirib, yechim $x \in [-2,-1) \cup (6,7]$ ni topamiz.

Mashqlar

Tenglamalarni yeching:

1) $5^x = 0{,}3$; 2) $(0{,}2)^x = 3$; 3) $3^x = 10$; 4) $10^x = 0$;

312 5) $\log_3 x = 2$; 6) $\log_{0,7} x = -2$; 7) $\log_4 x = -\frac{1}{2}$; 8) $\ln x = 2$;

9) $\log_{\frac{1}{2}}(3x-1) = -3$; 10) $\log_{0,5}(5+3x) = 1$.

313. 1) $\log_6(x-3) + \log_6(x+2) = 1$;

2) $\log_3(x-2\sqrt{2}) + \log_3(x+2\sqrt{2}) = 0$;

3) $\lg(x-\sqrt{6}) + \log(x+6) = 0$;

4) $\ln(x-8) + \ln(x+6) = 0$.

314. 1) $\log_5(7x+5) = \log_5(5x+3)$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}(5x-2) = \log_{\frac{1}{3}}(3x+1)$;

3) $\log_5 x \times \log_5(x-3) = \log_5(x-3)$;

4) $\log_{\sqrt{2}}(x+2)\log_5 x = 2\log_2(x+2)$.

315. 1) $\log_2(x-4) + \log_2(2x-1) = 2\log_2 3$;

2) $\lg(3x^2+12x+19) - \lg(3x+4) = 1$;

3) $\lg(x^2+2x-8) - \lg(x-2) = 0$;

4) $\ln(2x^2-7x+6) - \ln(x-2) = \ln x$.

316. 1) $\log_2\frac{x+3}{x+4} + \log_2((x+3)(x+4)) = 2$;

2) $\log_2\frac{x+2}{2} + \log_2 x^2 = 3$;

3) $\frac{1}{\lg x - 6} + \frac{5}{\lg x + 2} = 1$;

4) $\frac{1}{5-\lg x} + \frac{2}{1+\lg x} = 1$.

Tengsizliklarni yeching

317. 1) $\log_2 x > 3$; 2) $\log x_3 < -2$; 3) $\log_{2,5} x > 1$;

4) $\log_3(x+5) > 2$; 5) $\log_{0,7}(2x-0{,}3) < 1$; 6) $\log_{\frac{1}{7}}(5x-6) > -2$.

318. 1) $\lg(4x-5) > \lg(x+1)$; 2) $\log_{0,3}(2x-3) > \log_{0,3}(x+2)$

3) $\log_{0,5} x > \log_2(3-2x)$; 4) $\log_\pi(x+3) + \log_\pi x < 2\log_\pi 2$.

319. 1) $\log_{1,2}(x^2-10x+10)>0;$ 2) $\log_{\frac{4}{5}}(x^2-3x-3)\ge 0;$

3) $\log_{0,6}(x^2-12x+21)>0;$ 4) $\log_{0,5}(x^2-5x-6)\ge -3.$

320. 1) $\log_2^2 x-4\le 0;$ 2) $\log_{\frac{1}{2}} x-9>0;$

3) $\log_{0,5} x>\log_2(3-2x);$ 4) $\left|2-\log_2 x\right|<1;$

5) $\left|3\log\ x-1\right|<2.$

Javoblar:

312. 2) $-\log_5 3$ 4) $\lg e$ 6) $2\frac{2}{49}$ 8) $e.$ 10) $-1{,}5.$

313. 2) 3. 4) $1+5\sqrt{2}$ 314. 1) 1,5. 4) 5. 315. 2) −1,7. 4) 2;3

316. 2) 2. 4) 100, 1000. 317. 2) $(9,\ \infty);$ 4) $(4,\ \infty);$ 6) $(-\infty,\ 11)$

318. 2) (1,5; 5). 4) (0, 1). 319. 2) [1,4]. 4) [−2, 7]

320. 2) $(0,\ \frac{1}{9})\cup(9,\ \infty).$ 4) (2, 8).

12.5. Ko‘rsatkichli va darajali tenglamalar va tengsizliklar sistemasini yechish

Mavzuni misollarda tushunib boramiz:

1-misol. $\begin{cases} y+3x=5 \\ 2^{x^2+y}=8 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish: Sistemadagi birinchi tenglama chiziqli tenglama bo‘lsa, ikkinchisi ko‘rsatkichli tenglamadir.

O‘rniga qo‘yish usuli bilan yechamiz. Birinchi tenglamadan *y=5-3x* ni topib, ikkinchi tenglamaga qo‘yamiz: $2^{x^2-3x+5}=2^3$ hosil bo‘ladi.

Bundan x^2-$3x+5=3$ va x^2-$3x+2=0$ hosil bo‘ladi. Buni yechib, $x_1=1$ va $x_2=2$ ni topamiz. *y* ning mos qiymatlarini *y=5-3x* dan topamiz: $y_1=2$, $y_2=-1$.

Javob: (1, 2), (2, -1)

2-misol. $\begin{cases} 2^{x+2y}=\frac{1}{8} \\ 4^{x-y}=16 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish: Ikkala tenglama ham ko‘rsatkichli tenglamadir. Ularda chap va o‘ng tomonlardagi asoslarni tenglashtiramiz. $\begin{cases} 2^{x+2y}=2^{-3} \\ 4^{x-y}=4^2 \end{cases}$ va daraja ko‘rsatkichlarini tenglashtirib teng kuchli $\begin{cases} x+2y=-3 \\ x-y=2 \end{cases}$ sistemani hosil qilamiz. Bu sistemani yechib $x=\frac{1}{3}, \quad y=-\frac{5}{3}$ ni topamiz.

Javob: $\left(\frac{1}{3};1\frac{2}{3}\right)$.

3-misol. $\begin{cases} 3^x+3^y=12 \\ 6^{x+y}=216 \end{cases}$ sistemasini yeching.

Yechish: Ketma-ket berilgan sistemani unga teng kuchli bo‘lgan sistema bilan almashtirib borib, topamiz:

$$\begin{cases} 3^x+3^y=12 \\ 6^{x+y}=6^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x+3^{3-x}=12 \\ y=3-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x+\frac{27}{3^x}-12=0 \\ y=3-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{2x}-12\times 3^x+27=0 \\ y=3-x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3^x=6\pm 3 \\ y=3-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x=3, \ 3^x=9 \\ y=3-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1, \ x_2=2 \\ y_1=2, \ y_2=1 \end{cases}$$

Javob: (1; 2); (2; 1).

4-misol. $\begin{cases} 2^{\frac{x}{2}}-3^y=-7 \\ 2^x-3^y=-5 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish: Ketma-ket amallarni bajarib topamiz:

$$\begin{cases} 2^{\frac{x}{2}}-(2^x+5)=-7 \\ 3^y=2^x+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x-2^{\frac{x}{2}}-2=0 \\ 3^y=2^x+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{\frac{x}{2}}\neq -1, 2^{\frac{x}{2}}=2, \\ 3^y=2^x+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ 3^y=4+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

Javob: (2;2)

5-misol. $\begin{cases} x^2-16\leq 0 \\ 3.5^{\frac{x^2+2x-15}{x-4}}>1 \end{cases}$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Sistemadagi har bir tengsizlikni alohida-alohida yechib, ularga umumiy bo‘lgan qismi sistemaning yechimi bo‘ladi.

1) $x^2-16\leq 0 \Rightarrow \qquad x^2\leq 16 \Rightarrow \qquad [x]\leq 4 \quad \Rightarrow \quad -4\leq x\leq 4$

2) $3.5^{\frac{x^2+2x-15}{x-4}} > 3,5^0 \Rightarrow \frac{x+2x-15}{x-4}>0 \Rightarrow \frac{(x+5)(x-3)}{x-4}>0 \Rightarrow -5<x<3, \ 4<x<\infty$

sistema uchun $\begin{cases} -4\leq x\leq 4 \\ -5<x<3, \ 4<x<\infty \end{cases}$ yoki $-4\leq x<3$ yechimni topamiz.

Javob: $-4\leq x<3$.

6-misol. $\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{-x} > \frac{27}{64} \\ 2^{x^2-6x-3.5} < 8\sqrt{2} \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish: Har bir tengsizlikni alohida-alohida o‘zgartirib boramiz:

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x \times \left(\frac{8}{9}\right)^{-x} > \frac{27}{64} \\ 2^{x^2-6x-3.5} < 2^{3,5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3} \times \frac{9}{8}\right)^x > \left(\frac{3}{4}\right)^3 \\ x^2 - 6x - 3.5 < 3.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^x > \left(\frac{3}{4}\right)^3 \\ (x+1)(x-7) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ -1 < x < 7 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 3$$

Javob: $x \in (-1, 3)$

Mashqlar

321. Tenglamalar sistemasini yeching:

1) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3^{x+y} = 27 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4^{x-y} = \frac{1}{8} \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 4^x - 4^y = 48 \\ 4^{x-1} + 4^{y-1} = 20 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} 2 \times 5^x - 9 \times 3^x = 23 \\ 5^x \times 3^{-x} = 8\frac{1}{3} \end{cases}$; 5) $\begin{cases} 3^{x+y} = 9 \\ 3^{x+2y-1} = 1 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} 3^{x+y} = 2187 \\ 7^{3x-2y-1} = 1 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{4x-y} = 9 \\ 5^{9x-y} = \sqrt{5} \end{cases}$; 8) $\begin{cases} 2^{x-y} = 128 \\ 0.5^{x-2y+1} = \frac{1}{8} \end{cases}$.

322. Tengsizliklar sistemasini yeching.

1) $\begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^{10x} > 64^{\frac{8}{3}-x^2} \\ x^2 - 25 < 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5^{-4x} < (\sqrt{5})^{x^{2+3.75}} = 6 \\ x^2 - 9 < 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x-1}{2-x} + \frac{1}{2} > 0 \\ 0{,}5^{1-x} > 1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3 \times (\sqrt{3})^{-3x-2} < 9^{-1} \\ 3^{x+2} + 3^{x-1} < 84 \end{cases}$.

323. Tenglamalar sistemasini yeching.

1) $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725 \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 25 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^{\frac{x+y}{3}} + 2^{\frac{x+y}{6}} \\ x^2 + 5y^2 - 6xy = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2^x \times 3^{2y} = 18 \\ 3^x \times 2^{2y} = 12 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3^{-x} \times 2^y = 112 \\ x + y = 5 \end{cases}$.

Javoblar: 321. 2) $\left(\frac{7}{6}; \frac{8}{3}\right)$; 4) $(2,1)$; 6) $(3, 4)$; 8) $(12, 5)$.

322. 2) $(-0{,}5; 3)$; 4) $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$. 323. 2) $(5,1)$, $(3,3)$; 4) $(-2, 7)$.

12.6. Logarifmik tenglamalar va tengsizliklar sistemasini yechish

1. Tenglamalar sistemasi.

Misollar yechish bilan tushuntiramiz.

1-misol. $\begin{cases} \log_3 x - \log_3 y = 1 \\ 2y^2 - x + 1 = 0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasi yechilsin.

Yechish: Tenglamalarning mavjudlik sohasini topamiz. Ikkinchi tenglama x va y ning barcha qiymatlarida aniqlangan. Birinchi tenglamadan $x>0$ va $y>0$ ni topamiz.

Birinchi tenglamadan $\log_3 \frac{x}{y} = 1,\ \frac{x}{y} = 3,\ x = 3y$ ni topib, ikkinchi tenglamaga qo'yamiz: $2y^2-3y+1=0$. Bundan $y_1 = \frac{1}{2},\ y_2 = 1$ ni topamiz. Bunga mos x ning qiymatlarini $x=3y$ dan topamiz: $x_1 = \frac{3}{2},\quad x_2 = 3$.

Javob: $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right),\ (3,1)$.

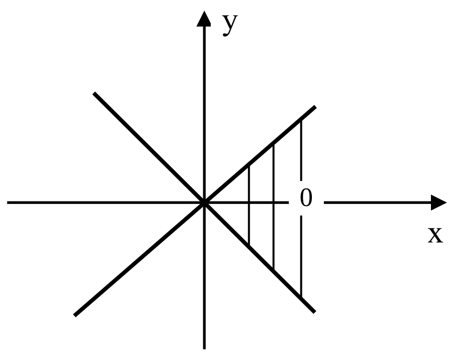
2-misol. $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x+y) = 2 \\ \log_2 (x-y) = 2 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish: Tenglamalarning mavjudlik sohasini aniqlovchi

$\begin{cases} x+y>0 \\ x-y>0 \end{cases}$ sistemasini yechib

$\begin{cases} x>+y \\ x>-y \end{cases}$ ni topamiz. Bu soha

53-rasmda shtrixlab ko'rsatilgan.



53-rasm.

Sistemani potensirlab quyidagi teng kuchli sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} x+y = \frac{1}{4} \\ x-y = 4 \end{cases}$$

Bu tenglamalarni qo'shib $x = 2\frac{1}{8}$ ni, ayirib esa $y = -1\frac{7}{8}$ ni topamiz.

Javob: $\left(2\frac{1}{8},\ -1\frac{7}{8}\right)$

3-misol. $\begin{cases} xy = 27 \\ \log_y x + \log_x y = \dfrac{5}{2} \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish: Birinchi tenglama *x* va *y* ning barcha qiymatlarida aniqlangan. Ikkinchi tenglamadan $x>0, y>0, x\neq 1, y\neq 1$ shartlarni aniqlaymiz.

Ikkinchi tenglamani quyidagicha o‘zgartirib yozamiz:

$2\log_y x + \dfrac{2}{\log_y x} - 5 = 0$ yoki

$2\log_y^2 x - 5\log_y x + 2 = 0$ hosil bo‘lgan kvadrat tenglamadan noma’lum $\log_y x$ ni topamiz.

$$(\log_y x)_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4};\ 1)\ (\log_y x)_1 = \frac{1}{2},\ x = y^{\frac{1}{2}}$$

$$2)\ (\log_y x)_2 = 2,\ x = y^2.$$

Bularni ketma-ket birinchi tenglamaga qo‘yib, topamiz:

$$1)\ y^{\frac{1}{2}} \cdot y = 27 \qquad y^{\frac{3}{2}} = 27 \qquad y_1 = (27)^{\frac{2}{3}} = 9, \qquad x_1 = \sqrt{9} = 3$$

$$2)\ y^2 \cdot y = 27 \qquad y^3 = 27 \qquad y_2 = \sqrt[3]{27} = 3 \qquad x_2 = 3^2 = 9$$

Javob: (3; 9), (9; 3)

4-misol. $\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 2 \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish: Birinchi tenglamadan $x\neq 0, y\neq 0$ ni ikkinchi tenglamadan sistemaning mavjudlik sohasi $x>0$ va $y>0$ ni topamiz. Tenglamalarni o‘zgartirib, topamiz: $\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 2 \\ \log_2(xy) = \log_2 16 + \log_2 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ xy = 48 \end{cases}$

Ikkinchi tenglamani 2 ga ko‘paytiramiz va tenglamalarni qo‘shib, $x^2+2xy+y^2=196$ yoki $(x+y)^2=196$ ni hosil qilamiz. Bundan $x+y=\pm 14$ ni topamiz.

Ikkinchi tenglamaga $y=-x-14$ va $y=-x+14$ ni qo‘yamiz.

1) $x(-x-14)=48$. Bundan $x^2+14x+48=0$ ni va $x_1=-6$, $x_2=-8$ ni topamiz.

Bu qiymatlar sistemaning mavjudlik sohasiga tegishli bo‘lmagani uchun sistemaning yechimi bo‘lmaydi.

2) $x(-x+14)=48$. Bundan $x^2-14x+48=0$ ni va $x_1=6$ va $x_2=8$ ni topamiz. Bu qiymatlarni $y=-x+14$ ga qo‘yib $y_1=8$ va $y_2=6$ ni topamiz.

Javob: (6, 8); (8, 6).

2. Tengsizliklar sistemasi.

5-misol. $\begin{cases} \log_2(x+2) < 3 \\ \log_3(x+1) > -1 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasini yeching.

Yechish: Sistemadan mavjudlik shartlari $\begin{cases} x+2>0 \\ x+1>0 \end{cases}$ va tengsizliklarni bajarilishi sharti $\begin{cases} x+2<2^3 \\ x+1>3^{-1} \end{cases}$ ni hosil qilamiz. Bu tengsizliklarni birgalikda yechib: $\begin{cases} x>-2 \\ x>-1 \\ x<6 \\ x>-\frac{2}{3} \end{cases}$ ni topamiz.

Bu tengsizliklarga umumiy qismi $-\frac{2}{3} < x < 7$ sistemaning yechimi bo‘ladi.

Javob: $x \in (-\frac{2}{3}, 7).$

6-misol. $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(7-3x) < -4 \\ \log_2(x+4) > 2 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish. Oldingi misolga o‘xshab, topamiz:

$$\begin{cases} 7-3x>0 \\ x+4>0 \\ 7-3x>16 \\ x+4>4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7-3x>16 \\ x+4>4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-3 \\ x>0 \end{cases}$$

-3 dan kichik, lekin 0 dan katta sonlar mavjud emas. Sistemaning yechimi bo‘sh to‘plamdan iborat.

Javob: Ø

Mashqlar

353. Sistemani yeching.

1) $\begin{cases} \log_7(x+y)=1 \\ \lg x + \lg y = 1, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_2 x + \log_7 y = 6 \\ x+y=34 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^y * 3^{2x} = 81 \\ \lg(x+y)^2 - \lg x = 2\lg 3, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3^x * 2^y = 576 \\ \log_2(y-x) = 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_3(x-y) = 5 - \log_2(x+y) \\ \lg x - \lg 4 = \lg y - \lg 3, \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \log_x y = 2 \\ \log_{x+1}(y+23) = 2 \end{cases}$

354. Tengsizliklar sistemasini yeching.

1) $\begin{cases} \log_4(4-2x) \geq 2 \\ \log_{\frac{1}{3}}(x+2) \leq -1, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \lg x < \lg 8 + 1 \\ \log_2(x-4) > 1, \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_3(5-4x) \geq \log_3(x-1) \\ \log_{0,3}(2x+5) \leq \log_{0,3}(x+1), \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2(x-3) < 2 \\ \log_2(x^2-1) < 3. \end{cases}$

Javoblar: 353. 2) (2; 32), (32; 2); 4) (2; 6); 6) (11; 121).

354. 2) (6; 80); 4) (-1; 3).

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Alimov Sh. A. va boshqalar. Algebra va analiz asoslari, o‘rta maktabning 10-11 sinflari uchun darslik. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1996-yil va keyingi nashrlari.
2. Kolmogorov A. N. tahriri ostida. Algebra va analiz asoslari. 10-11 sinflar uchun darslik. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1992-yil.
3. Vafoyev R. H. va boshqalar. Algebra va analiz asoslari. Akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun o‘quv qo‘llanma. Toshkent, “O‘qituvchi”, 2001-yil.
4. Abduhamidov A. U. va boshqalar. Algebra va analiz asoslari. Akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun sinov darsligi. Toshkent, “O‘qituvchi”, 2001 yil.
5. Antonov K. P. va boshqalar. Elementar matematika masalalari to‘plami. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1975-yil va keyingi nashrlari.
6. Skanavi M. N. tahriri ostida. Matematikadan masalalar to‘plami. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1983-yil va keyingi nashrlari.

MUNDARIJA

D.X.Turdiboyev

Maktab, akademik litsey va kasb-hunar kollejlari fanidan uchun o‘quv uslubiy majmua

I QISM

Muharrir D.Turdiboyev
Kompyuterda sahifalovchi D.Turdiboyev

Bosishga ruxsat etildi 09.07.2019 й. Qog‘oz bichimi 60x84 $^1/_{16}$.
Hisob-nashr tabog‘i 8,6 b.t. Adadi 500. Buyurtma № 142

“GulDU” nashriyoti,

Guliston Davlat universiteti bosmaxonasida rizografiya usulida chop etildi.