Квантовая микрофизика

к.ф.-м.н., доцент Андрей Юрьевич Антонов

направление 03.03.01 «Прикладные математика и физика»

Рекомендуемая литература

- И.В. Савельев. Курс общей физики. Том 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. — Издательство: Лань, 2008. — 500 с.
- И. В. Савельев. Курс общей физики. Том 3. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твёрдого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц. — Издательство: Лань, 2007. — 320 с.
- И.Е. Иродов. Квантовая физика. Основные законы. Издательство: Бином. Лаборатория знаний, 2010. — 256 с.

- И.Е.Иродов. Задачи по квантовой физике. Издательство: Бином. Лаборатория знаний, 2010. — 216 с.
- З. Флюгге. Задачи по квантовой механике. Издательство: «ЛКИ», 2010. — 2 тома.

- Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. 4-е издание. М.: Наука, 1989. 776 с.
- Э. Ферми. Лекции по квантовой механике. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000. — 246 с.
- 🖾 В. А. Фок. Начала квантовой механики. М.: Наука, 1976. 376 с.
- Л. Шифф. Квантовая механика. М.: Издательство иностранной литературы, 1959. — 472 с.
- 🖉 Д.Бом. Квантовая теория. М.: Наука, 1965. 727 с.
- В.В.Балашов, В.К.Долинов. Курс квантовой механики. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 336 с.





Рис.1.1. Векторное сложение.

Джеймс Клерк Максвелл; 1831–1879; английский физик

Рассмотрим две волны с амплитудами A_1 и A_2 , начальными фазами α_1 и α_2 , и одинаковыми круговыми частотами ω в виде

$$A_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \quad A_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

Амплитуда их суммы равна (см. рис. 1.1)

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta \tag{1.1}$$

где $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$. Это означает, что когерентные волны (т.е. волны, у которых разность начальных фаз δ сохраняется постоянной) будут иметь определённую интенсивность $I \sim A^2$. Если расстояние от источников волн до некоторой точки таково, что разность фаз кратна 2π (синфазные волны), то интенсивность окажется максимальной. Если волны находятся в противофазе, то интенсивность будет минимальной.

Длина когерентности (расстояние, на котором сохраняется свойство когерентности) и время когерентности (время, в течение которого сохраняется свойство когерентности) имеют следующие порядки

$$t_{\rm KOT} \sim \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}, \quad t_{\rm KOT} \sim \frac{1}{\Delta \nu}$$
 (1.2)

где λ — длина волны; $\Delta\lambda$ — ширина интервала длин волн, входящих в состав света; ν — частота света; $\Delta\nu$ — ширина интервала частот волн, входящих в состав света.

Уравнения Максвелла позволили установить связь показателя преломления среды nс её относительной диэлектрической проницаемостью ε

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon\mu} = \sqrt{\varepsilon},\tag{1.3}$$

где c = 299792458 м/с — скорость света в вакууме; v — скорость света в среде; μ — относительная магнитная проницаемость среды, для оптически прозрачных сред практически равная 1.

Амплитуда колебаний светового вектора есть максимальная напряжённость E_0 электрической составляющей волны. Вследствие чего справедливо соотношение $E\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}=H\sqrt{\mu\mu_0}~(H$ — напряжённость магнитного поля волны; $\varepsilon_0=[4\pi\cdot9\cdot10^9]^{-1}~\Phi/{\rm M}=8.854187817\cdot10^{-12}~\Phi/{\rm M}$ — электрическая постоянная; $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}~\Gamma{\rm H}/{\rm M}=1.2566370614\cdot10^{-6}~\Gamma{\rm H}/{\rm M}$ — магнитная постоянная).

Тогда закон преломления записывается как

$$\frac{\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1},$$
(1.4)

 ϑ_1 — угол падения; ϑ_2 — угол преломления (см. рис. 1.2).



Рис.1.2. Преломление плоской волны.

Волну, распространяющуюся в направлении, задаваемым волновым вектором \vec{k} , описывают функцией

$$A\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}),$$
 или $Ae^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}.$ (1.5)

Приведём некоторые соотношения

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}, \quad \lambda = v_{\Phi}T, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v_{\Phi}}, \tag{1.6}$$

где T — период колебаний; v_{Φ} — фазовая скорость волны. Ширина волнового пакета и интервал, в который укладываются волновые числа, связаны соотношением (рис. 1.3)

$$\Delta x \Delta k = 2\pi. \tag{1.7}$$

Пакет обладает групповой скоростью

$$v_{\rm rp} = \frac{d\omega}{dk}.\tag{1.8}$$



§1. Предварительные замечания

При наложении монохроматических волн должна возникать интерференционная картина. Если два источника расположены на расстоянии d друг от друга и на расстоянии l от экрана, то максимумы и минимумы перераспределённой интенсивности будут наблюдаться в точках

$$x_{\max} = \pm n \frac{l}{d} \lambda, \quad x_{\min} = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{l}{d} \lambda, \quad n = 0, 1, \dots$$
 (1.9)

При этом ширина интерференционной полосы имеет постоянное значение $\lambda l/d-$ рис. 1.4.



Puc.1.4. Интерференция двух волн.

§1. Предварительные замечания

Аналогичным образом происходит перераспределение светового потока при дифракции (рис. 1.5). Если свет проходит щель толщиной d под углом φ , то при его фокусировке на экран условие минимумов интенсивности имеет вид

$$d\sin\varphi = \pm\lambda n, \quad n = 1, 2, \dots \tag{1.10}$$



Puc.1.5. Дифракция на щели.



Георгий Викторович Вульф; 1863–1925; российский физик



William Henry Bragg; 1862–1942; английский физик



William Lawrence Bragg; 1890–1971; английский физик

Рассматривая расстояние между атомами материала как щель, а сам материал как пространственную дифракционную решётку (рис. 1.6), можно показать, что дифракционные максимумы при отражении света от среды определяются условием Вульфа—Брэггов. Выполняется

$$2d\sin\vartheta = \pm\lambda n, \quad n = 1, 2, \dots \tag{1.11}$$

здесь ϑ — угол скольжения (дополнительный к углу падения); d — расстояние между атомными слоями.



Рис.1.6. Дифракция на кристаллической решётке.

Интерференционные и дифракционные явления приводят к тому, что появляется ограниченная величина разрешающей способности оптических приборов. Если линза, через которую фокусируется свет, обладает диаметром D, то дифракция приводит к угловому расхождению пучка света на величину порядка λ/D . В результате можно ожидать светового пятна размером $\lambda f/D$, где f — фокусное расстояние линзы. Так как $f \sim D$, имеем пятно размером порядка λ . Это приводит к тому, что для повышения эффективности наблюдения (измерения) следует брать излучение с как можно более низкой длиной волны. Последнее обстоятельство сначала выводит нас за пределы оптического диапазона, а затем требует уже совершенно иного подхода.



Max Planck; 1858–1947; немецкий физик

Несмотря на успех волнового подхода в описании теории света, существует ряд опытов, объяснить которые намного проще, если поставить в соответствие электромагнитной волне частицу (фотон). Впервые гипотезу о том, что взаимодействие света с веществом осуществляется порциями энергии (квантами) выдвинул Планк в 1900 году. Гипотеза стала следствием стремления объяснить равновесие излучения и осциллятора.

Размер кванта света пропорционален его частоте, а именно

$$E = h\nu = \hbar\omega, \tag{1.12}$$

где $h = 6.6261937 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка, $\hbar = h/2\pi = 1.0545915 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — приведённая постоянная Планка.



Воспользовавшись соотношением между полной энергией E и импульсом \vec{p} движущейся частицы $(m_0 - \text{масса покоя})$

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4, (1.13)$$

приходим к выводу, что фотон, обладая нулевой массой, тем не менее, обладает импульсом, модуль которого равен

Albert Einstein; 1879–1955; немецкий физик

$$p = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}.$$
 (1.14)

Гипотеза Планка нашла последователя в лице Эйнштейна. Он предположил, что свойство дискретности присуще самому свету. С помощью соотношения (1.12) в 1905 году Эйнштейн объяснил явление фотоэффекта. Электрон, вышедший из материала при облучении имеет максимально возможную кинетическую энергию K_{\max} , выражаемую формулой

$$\hbar\omega = K_{\max} + \Phi, \tag{1.15}$$

где Φ — работа выхода материала. По своей сути данная формула является отражением закона сохранения энергии, который работает в обе стороны. Так, если электрон, ускоренный разностью потенциалов V, попадает на металл, то он естественным образом тормозится. Процесс можно рассматривать как движение с отрицательным ускорением. Но тогда электрон должен излучать энергию. Если его кинетическая энергия много больше работы выхода металла, то справедливо

$$\omega_{\max} = \frac{eV}{\hbar}, \quad \lambda_{\min} = \frac{2\pi\hbar c}{eV} = \frac{hc}{eV},$$
(1.16)

где λ_{\min} называется коротковолновой границей сплошного рентгеновского спектра.



1891–1957; немецкий физик



Рис.1.7. Схема опыта Боте.

Любопытный опыт проделал Боте в 1924 году. Тонкая металлическая фольга облучалась слабым рентгеновским излучением, в результате чего сама становилась источником вторичного излучения — рис. 1.7. По обе стороны от фольги располагались счётчики излучения, которые реагирования асинхронно, доказывая концепцию кванта.



Arthur Holly Compton; 1892—1962; американский физик



Рис.1.8. Комптоновское рассеяние.

При облучении материала рентгеновским облучением в рассеянном излучении появляется смещённая линия с длиной волны $\lambda' > \lambda$.

Законы сохранения энергии и импульса дают выражение согласующееся с экспериментом

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C (1 - \cos \vartheta), \quad \lambda_C = \frac{h}{mc},$$
 (1.17)

 λ_C — комптоновская длина волны частицы с массой m (рис. 1.8).

Модель Бора



Niels Bohr; 1885–1962; датский физик



James Franck; 1882–1964; немецкий физик



Gustav Ludwig Hertz; 1887–1975; немецкий физик

В 1913 году Бор сделал успешную попытку построения теории атома. По предположению электроны атома проводят время на стационарных орбитах. Переход с орбиты на орбиту осуществляется скачкообразно, т. е. с помощью поглощения или выделения квантов энергии. Эта гипотеза получила подтверждение в опытах Франка и Герца в том же году.

Модель Бора

Стационарные состояния Бор получил из закона Ньютона! Запишем его,

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2},\tag{2.1}$$

здесь r — радиус орбиты; Z — зарядовое число ядра. Далее следовало предположить, что момент импульса квантуется:

$$M_n = mv_n r_n = \hbar n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Полная энергия равна (с использованием правила квантования и (2.1))

$$E_n = \frac{mv_n^2}{2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Ze^2}{r_n} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Ze^2}{2r_n} = -\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{Z^2}{n^2}.$$
 (2.3)

Для радиусов орбит справедливо

$$r_n = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2} \frac{n^2}{Z} = r_1 n^2, \quad r_1 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2} \frac{1}{Z}.$$
 (2.4)



Louis de Broglie; 1892–1987; французский физик

После того, как была раскрыта двойственная природа света, де Бройль в 1924 году высказал гипотезу, согласно которой волновыми свойствами должны обладать все объекты. В соответствии с идеей де Бройля объектам корпускулярной природы, обладающим импульсом p и энергией E, следует сопоставить волну с характеристиками (см. формулы (1.12) и (1.14))

$$\lambda = \frac{h}{p},\tag{3.1}$$

$$\omega = \frac{E}{\hbar}.\tag{3.2}$$

§3. Гипотеза де Бройля



Clinton Joseph Davisson; 1881–1958; американский физик



Lester Halbert Jermer; 1896–1971; американский физик

При отражении моноэнергетического пучка электронов от граней монокристалла никеля (Ni) Дэвиссон и Джермер обнаружили неравномерность интенсивности отражённого пучка в зависимости от угла скольжения. Формула (3.1) была применена для вычисления длины волны электронов, отвечающих конкретному ускоряющему напряжению. Она оказалась равной 0.167 нм. Брэгговская длина волны — 0.165 нм.

§3. Гипотеза де Бройля



Puc.3.1. Различные атомные плоскости в кристалле.

Стоит отметить, что параметр d (расстояние между атомными плоскостями) может варьироваться в рамках одного материала, что отражено на рис. 3.1.



George Paget Thomson; 1892–1975; английский физик



Петр Саввич Тартаковский; 1895–1939; российский физик



Otto Stern; 1888–1969; немецкий физик

Следующее подтверждение волновой природы частиц было обнаружено Томсоном и Тартаковским в том же году. При прохождении электронного пучка через металлическую фольгу на фотопластинке (см. рис. 3.2) была обнаружена дифракционная картина. Несколько позже Штерн с коллегами показали, что дифракционные явления наблюдаются также у атомных и молекулярных пучков.

§3. Гипотеза де Бройля



Puc.3.2. Дифракция электронов при прохождении через фольгу.

Во всех перечисленных случаях наблюдаемые дифракционные картины соответствовали длине волны, определяемой формулой (3.1).



Дифракция на золотой (Au) плёнке.

Рассмотрим фазовую скорость дебройлевских волн:

$$v_{\Phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v} > c.$$

Отыщем теперь групповую скорость. Согласно формулам (1.8) и (1.13):

$$v_{\rm rp} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp}\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} = \frac{pc^2}{E} = \frac{p}{m} = v,$$

т. е. скорость волнового пакета есть обычная скорость. Можно ввести показатель преломления среды для дебройлевских волн (см. (1.3)):

$$n = \frac{v_{\Phi,\text{вак}}}{v_{\Phi,\text{ср}}}.$$

Тогда относительный показатель преломления примет вид:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{v_{\Phi,1}}{v_{\Phi,2}} = \frac{v_2}{v_1}$$

Пример (Иродов И. Е. Задачи по квантовой физике, 2001, 2.10)

Релятивистская частица массы m движется с кинетической энергией K. Найти: а) дебройлевскую длину волны частицы; б) значения K, при которых погрешность в длине волны, определяемой по нерелятивистской формуле, не превышает одного процента для электрона, для протона. Решение. а) Запишем нерелятивистскую и релятивистскую формулы для дебройлевской длины волны. Для этого найдём связь между импульсом и энергией:

$$p_{\rm nr} = \sqrt{2mK}, \quad p_{\rm r} = \frac{1}{c}\sqrt{K^2 + 2mKc^2};$$
$$\lambda_{\rm nr} = \frac{h}{p_{\rm nr}} = \frac{h}{\sqrt{2mK}}, \quad \lambda_{\rm r} = \frac{h}{p_{\rm r}} = \frac{hc}{\sqrt{K(K+2mc^2)}}.$$

Пример (продолжение)

б) Выразим погрешность в определении длины волны:

$$\delta \ge \frac{\lambda_{\rm nr} - \lambda_{\rm r}}{\lambda_{\rm r}} = \frac{\sqrt{K(K + 2mc^2)}}{c\sqrt{2mK}} - 1 = \frac{\sqrt{K + 2mc^2}}{c\sqrt{2m}} - 1,$$
$$K \le 2mc^2 \left[(1 + \delta)^2 - 1 \right] \approx 4mc^2\delta.$$

Подставим численные значения:

$$K_e \leq 4 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot (3.00 \cdot 10^8)^2 \cdot 10^{-2} \frac{1}{1.60 \cdot 10^{-19}} = 20.5 \text{ ksB},$$

$$K_p \leqslant 4 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \cdot (3.00 \cdot 10^8)^2 \cdot 10^{-2} \frac{1}{1.60 \cdot 10^{-19}} = 37.6 \text{ M} \Rightarrow \text{B}.$$

Отслеживая длину волны, энергию частицы и её массу, можно понять, когда есть возможность воспользоваться нерелятивистскими формулами. **Ответ:** а) $\lambda_{\rm r} = hc/\sqrt{K(K+2mc^2)}$; б) $K_e \leq 20.5$ кэВ, $K_p \leq 37.6$ МэВ.

§3. Гипотеза де Бройля

Результаты экспериментов по дифракции частиц показывают, что конкретный электрон может оказаться где угодно на проекционном экране. Отсутствие у электрона траектории лишает его и других динамических характеристик.

Рассмотрим процесс прохождения частиц через некоторое отверстие. Пусть пучок частиц является моноэнергетическим и направленным. Это позволяет считать, что импульс каждого электрона до прохождения отверстия нам известен. После прохождения частиц сквозь отверстие появляется неопределённость в импульсе каждого отдельного электрона. Процесс прохождения квантовых частиц через классическое отверстие есть ни что иное, как процесс измерения. После прохождения частиц отверстия шириной d мы определяем их координату с точностью до d/2. Этот процесс взаимодействия (измерения) сказался на частицах внесением неопределённости в их импульс (рис. 4.1).



Puc.4.1. Дифракция частицы на щели.

Получение экспериментальной информации об одних физических величинах, описывающих микрообъект, неизбежно связано с потерей информации о некоторых других её характеристиках, дополнительных к первым (канонически сопряжённых).

Итак, после прохождения отверстия в импульсе появилась неопределённость

$$\Delta p_x = p \sin \varphi,$$

где $\varphi-$ угол, определяемый из соотношения для минимумов интенсивности (1.10),

$$d\sin\varphi = \pm\lambda n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Нас интересует первый минимум, т.е. n = 1. С учётом формулы (3.1) получаем

$$\Delta p_x \Delta x = \Delta p_x \frac{d}{2} = p \frac{\lambda}{d} \frac{d}{2} = \frac{h}{2}.$$

Полученное нами соотношение является приближённым.

Пусть теперь мы пытаемся определить местоположение электрона посредством его взаимодействия с излучением. Тогда неопределённость его местонахождения будет величиной порядка длины волны используемого света λ . Но если линза, через которую фокусируется свет, обладает диаметром D, то дифракция приводит к угловому расхождению пучка света на величину порядка λ/D . В результате можно ожидать светового пятна размером $\lambda f/D$, где f — фокусное расстояние линзы. Так как $f \sim D$, имеем пятно размером порядка λ . Это приводит к тому, что для повышения эффективности нашего наблюдения следует брать излучение с как можно более низкой длиной волны. Но формула (3.1) приводит к тому, что электрону посредством такого измерения будет сообщена дополнительная составляющая импульса $\Delta p_x = h/\lambda$. Таким образом, приходим к соотношению

$$\Delta p_x \Delta x \sim h.$$



Более строго связь неопределённостей в координате и импульсе будет выведена с использованием другого подхода. Она носит название соотношения неопределённостей Гейзенберга

$$\Delta p_x \Delta x \ge \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta p_y \Delta y \ge \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta p_z \Delta z \ge \frac{\hbar}{2}.$$
 (4.1)

Данное соотношение есть неотъемлемое свойство самих микрообъектов.

Werner Heisenberg; 1901–1976; немецкий физик

Становится понятно, почему у микрочастиц отсутствует понятие траектории. Решение дифференциального уравнения движения требует одновременного задания значений координаты и импульса частицы. Когда размеры объекта велики, то неопределённость в координате может быть достаточно большой для того, чтобы импульс можно было считать определённой величиной.

Согласно Бору можно вывести ещё одно соотношение, связывающее энергию частицы и время, необходимое для определения энергии. Имеем

$$E = \frac{p^2}{2m}, \quad \Delta E = \frac{p\Delta p}{m} = v\Delta p = \frac{\Delta x}{\Delta t}\Delta p.$$

Откуда получаем

$$\Delta E \Delta t \geqslant \frac{\hbar}{2},\tag{4.2}$$

Принципиально соотношение (4.2) означает, что нельзя сколь угодно точно измерить энергию системы за неограниченно малое время. Это означает, что отсутствует возможность проверки закона сохранения энергии с произвольной точностью! Другая трактовка заключается в том, что стационарному состоянию (т. е. состоянию с $\Delta E = 0$) соответствует бесконечное время пребывания в нём. Если система нестационарна, то её энергия может быть определена только с конечной точностью.

Соотношения (4.1) и (4.2) можно получить из оптических аналогий, вспоминая соотношение между шириной волнового пакета и интервалом волновых чисел (1.7)

$$\Delta x \Delta k = 2\pi.$$

а также связь времени когерентности волны с интервалом частот, представленных в волне (1.2)

$$t_{\text{ког}} \sim \frac{1}{\Delta \nu}.$$

Пример (Иродов И.Е. Задачи по квантовой физике, 2001, 2.42)

Прямолинейная траектория частицы в камере Вильсона представляет собой цепочку малых капелек тумана, размер которых $d \approx 1$ мкм. Можно ли, наблюдая след электрона с кинетической энергией K = 1 кэВ, обнаружить отклонение в его движении от классических законов?

Пример (продолжение)

Решение. Оценим через импульс угловой разброс в пучке частиц, положив $\Delta x = d/2$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta p}{\sqrt{2mK}} \geqslant \frac{\hbar}{2\Delta x \sqrt{2mK}} = \frac{\hbar}{d\sqrt{2mK}} = \frac{1.1 \cdot 10^{-34}}{10^{-6} \sqrt{2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 10^3 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}} = 6.2 \cdot 10^{-6}.$$

Выразим эту величину в угловых секундах и воспользуемся тем, что угол мал (нет необходимости вычислять арктангенс):

$$\alpha = 6.2 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot 60 \cdot 60 = 1.3''.$$

В принципе уже из первой формулы видно, что на треке длиной десять сантиметров погрешность укладывается в размер капли. **Ответ:** нельзя.

Спасибо за внимание!