O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI
GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI
MATEMATIKA KAFEDRASI

EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA fanidan O’QUV-USLUBIY MAJMUA

Bilim sohasi: **100000-Gumanitar fanlar**
Ta’lim sohasi: **130000 – Tabiiy fanlar**
Ta’lim yo’nalishi: **5130100 - Matematika**

Guliston – 2017

Ushbu o’quv-uslubiy majmua 5130100 - matematika bakalavryat ta’lim yo’nalishida ta’lim olayotgan talabalarga mo’ljallangan. O’quv- uslubiy majmua Oliy va o’rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan 07.01.2015 yil tasdiqlangan ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani namunaviy dasturi (№ BD – 5130100- 3.09) talablari asosida tayyorlangan.

Tuzuvchilar: X.Norjigitov – GulDU “Matematika” kafedrasi mudiri, f.–m. f.n.

F.Sh.Norboev – GulDU “Matematika” kafedrasi katta o’qituvchisi

O’quv-uslubiy majmua Guliston davlat universiteti Ilmiy kengashi tomonidan (1- bayonnoma 28.08.2017 yil) ko’rib chiqilgan va o’quv jarayonida qo’llashga tavsiya etilgan.

Taqrizchilar: A.A. Abdushukurov– O’zMU «Ehtimolar nazariyasi va matematik statistika» kafedrasi mudiri, f.–m. f.d.

K. Jamuratov. – Guliston davlat universiteti “Matematika” kafedrasi dotsenti, f.m.f.n.

MUNDARIJA

1. MA’RUZALAR MATNI

I bob. Tasodifiy hodisalar

1-mavzu: Ehtimollar nazariyasining predmeti. Stoxastik tajriba.

Reja:

1.Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanini o’rganish bo’limning asosiy maqsad va vazifalari

2. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanining rivojlanish tarixi.

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Tasodifiy tajribalar, kompleks sharoit yaratish, tasodifiy hodisa, elementar hodisalar va elementar hodisalar fazosi

Ehtimollar nazariyasi “tasodifiy tajribalar”, ya’ni natijasini oldindan aytib bo‘lmaydigan tajribalardagi qonuniyatlatni o‘rganuvchi matematik fandir. Bunda shunday tajribalar qaraladiki, ularni o‘zgarmas (ya’ni, bir xil) shartlar kompleksida hech bo‘lmaganda nazariy ravishda ixtiyoriy sonda takrorlash mumkin, deb hisoblanadi. Bunday tajribalar har birining natijasi *tasodifiy hodisa* ro‘y berishidan iboratdir. Insoniyat faoliyatining deyarli hamma sohalarida shunday holatlar mavjudki, u yoki bu tajribalarni bir xil sharoitda ko‘p matra takrorlash mumkin bo‘ladi. Ehtimollar nazariyasini sinovdan-sinovga o‘tishida natijalari turlicha bo‘lgan tajribalar qiziqtiradi. Biror tajribada ro‘y berish yoki bermasligini oldindan aytib bo‘lmaydigan hodisalar tasodifiy hodisalar deyiladi. Masalan, tanga tashlash tajribasida har bir tashlashga ikki tasodifiy hodisa mos keladi: tanganing gerb tomoni tushishi yoki tanganing raqam tomoni tushishi. Albatta, bu tajribani bir marta takrorlashda shu ikki tasodifiy hodisalardan faqat bittasigina ro‘y beradi. Tasodifiy hodisalarni biz tabiatda, jamiatda, ilmiy tajribalarda, sport va qimor o‘yinlarida kuzatishimiz mumkin. Umumlashtirib aytish mumkinki, tasodifiyat elementlarisiz rivojlanishni tasavvur qilish qiyindir. Tasodifiyatsiz umuman hayotning va biologik turlarning yuzaga kelishini, insoniyat tarihini, insonlarning ijodiy faoliyatini, sotsial-iqtisodiy tizimlarning rivojlanishini tasavvur etib bo‘lmaydi. Ehtimollar nazariyasi esa aynan mana shunday tasodifiy bog‘liqliklarning matematik modelini tuzish bilan shug‘illanadi. Tasodifiyat insoniyatni doimo qiziqtirib kelgandir. Shu sababli ehtimollar nazariyasi boshqa matematik fanlar kabi amaliyot talablariga mos ravishda rivojlangan. Ehtimollar nazariyasi boshqa matematik fanlardan farqli o‘laroq nisbatan qisqa, ammo o‘ta shijoatlik rivojlanish tarixiga ega. Endi qisqacha tarixiy ma’lumotlarni keltiramiz. Ommaviy tasodifiy hodisalarga mos masalalarni sistematik ravishda o‘rganish va ularga mos matematik apparatning yuzaga kelishi XVII asrga to‘g‘ri keladi. XVII asr boshida, mashhur fizik Galiley fizik o‘lchashlardagi xatoliklarni tasodifiy deb hisoblab, ularni ilmiy tadqiqot qilishga uringan. Shu davrlarda kasallanish, o‘lish, baxtsiz hodisalar statistikasi va shu kabi ommaviy tasodifiy hodisalardagi qonuniyatlarni tahlil qilishga asoslangan sug‘urtalanishning umumiy nazariyasini yaratishga ham urinishlar bo‘lgan. Ammo, ehtimollar nazariyasi matematik ilm sifatida murakkab tasodifiy jarayonlarning o‘rganishdan emas, balki eng sodda qimor o‘yinlarini tahlil qilish natijasida yuzaga kela boshlagan. Shu boisdan ehtimollar nazariyasining paydo bo‘lishi XVII asr ikkinchi yarmiga mos keladi va u Paskal (1623-1662), Ferma (1601-1665) va Gyuygens (1629-1695) kabi olimlarning qimor o‘yinlarini nazariyasidagi tadqiqotlari bilan bog‘liqdir. Ehtimollar nazariyasi rivojidagi katta qadam Yakov Bernulli (1654-1705) ilmiy izlanishlari bilan bog‘liqdir. Unga, ehtimollar nazariyasining eng muhim qonuniyati, deb hisoblanuvchi “katta sonlar qonuni” tegishlidir. Ehtimollar nazariyasi rivojidagi yana bir muhim qadam de Muavr (1667-1754) nomi bilan bog‘liqdir. Bu olim tomonidan normal qonun (yoki normal taqsimot) deb ataluvchi muhim qonuniyat mavjudligi sodda holda asoslanib berildi. Keyinchalik, ma’lum bo‘ldiki, bu qonuniyat ham, ehtimollar nazariyasida muhim rol' o'ynar ekan. Bu qonuniyat mavjudligini asoslovchi teoremalar "markaziy limit teoremalar" deb ataladi. Ehtimollar nazariyasi rivojlanishida katta hissa mashhur matematik Laplasga (1749-1827) ham tegishlidir. U birinchi bo'lib ehtimollar nazariyasi asoslarini qat'iy va sistematik ravishda ta'rifladi, markaziy limit teoremasining bir formasini isbotladi (Muavr-Laplas teoremasi) va ehtimollar nazariyasining bir necha tadbiqlarini keltirdi. Ehtimollar nazariyasi rivojidagi etarlicha darajada oldinga siljish Gauss (1777-1855) nomi bilan bog'liqdir. U normal qonuniyatga yanada umumiy asos berdi va tajribadan olingan sonli ma'lumotlarni qayta ishlashning muhim usuli – "kichik kvadratlar usuli"ni yaratdi. Puasson (1781-1840) katta sonlar qonunini umumlashtirdi va ehtimollar nazariyasini o'q uzish masalalariga qo'lladi. Uning nomi bilan ehtimollar nazariyasida katta rol' o'ynovchi taqsimot qonuni nomlangandir. XVII va XIX asrlar uchun ehtimollar nazariyasining keskin rivojlanishi va u bilan har tomonlama qiziqish xarakterlidir. Keyinchalik ehtimollar nazariyasi rivojiga Rossiya olimlari V.Ya. Bunyakovskiy (1804-1889), P.L. Chebishev (1821-1894), A.A. Markov (1856-1922), A.M. Lyapunov (1857-1918), A.Ya. Xinchin (1894-1959), V.I. Romanovskiy (1879-1954), A.N. Kolmogorov (1903-1987) va ularning shogirdlari bebaho hissa qo'shdilar. O'zbekistonda butun dunyoga taniqli Sarimsokov (1915-1995) va S.X. Sirojiddinov (1920-1988) larning muhim rollarini alohida ta'kidlab o'tish joizdir1], [2], [5], [7], [9].

2-mavzu: Elementar hodisalar fazosi va hodisalar algebrasi

Reja:

1.Tasodifiy hodisalar.
2. Hodisalar ustida amallar.
3.Hodisalar algebrasi.

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Tasodifiy hodisa, elementar hodisalar,elementar hodisalar fazosi, muqarrar hodisa, mumkin bo'lmagan hodisa, hodisalar yig'indisi, hodisalar ko'paytmasi, hodisalar ayirmasi, qarama – qarshi hodisalar, ergashtiruvchi hodisalar, teng hodisalar,Eyler – Venn diagrammasi, hodisalar algebrasi.

Dastlab ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri "tasodifiy hodisa" tushunchasini keltiramiz. Natijasini oldindan aytib bo'lmaydigan tajriba o'tkazilayotgan bo'lsin. Bunday tajribalar ehtimollar nazariyasida tasodifiy deb ataladi.

✓ *Tasodifiy hodisa*(yoki hodisa) deb, tasodifiy tajriba natijasida ro'y berishi oldindan aniq bo'lmagan hodisaga aytiladi.

Hodisalar, odatda, lotin alifbosining bosh harflari $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots$lar bilan belgilanadi.

✓ Tajribaning har qanday natijasi *elementar hodisa* deyiladi va ω orqali belgilanadi.

✓ Tajribaning natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha elementar hodisalar to'plami *elementar hodisalar fazosi* deyiladi va Ω orqali belgilanadi [1], [2], [3], [5], [7], [9], [11].

1.1-misol. Tajriba nomerlangan kub(o'yin soqqasi)ni tashlashdan iborat bo'lsin. U holda tajriba 6 elementar hodisadan hodisalar $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ lardan iborat bo'ladi. ω_i hodisa tajriba natijasida $i\ (i = 1,2,3,4,5,6)$ ochko tushishini bildiradi. Bunda elementar hodisalar fazosi: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

✓ Tajriba natijasida albatta ro'y beradigan hodisaga *muqarrar hodisa* deyiladi. Elementar hodisalar fazosi muqarrar hodisaga misol bo'la oladi.

Aksincha, umuman ro'y bermaydigan hodisaga mumkin bo'lmagan hodisa deyiladi va u $\varnothing$ orqali belgilanadi.

1.1-misolda keltirilgan tajriba uchun quyidagi hodisalarni kiritamiz:

A={5 raqam tushishi};

B={juft raqam tushishi};

C={7 raqam tushishi};

D={butun raqam tushishi};

Bu yerda A va B hodisalar tasodifiy, C hodisa mumkin bo‘lmagan va D hodisa muqarrar hodisalar bo‘ladi.

Hodisalar ustida amallar

Tasodifiy hodisalar orasidagi munosabatlarni keltiramiz:

✓ A va B *hodisalar yig‘indisi* deb, A va B hodisalarning kamida bittasi(ya’ni yoki A, yoki B, yoki A va B birgalikda) ro‘y berishidan iborat $C = A\cup B$ ($C = A + B$) hodisaga aytiladi.

A va B *hodisalar ko‘paytmasi* deb, A va B hodisalar ikkilasi ham(ya’ni A va B birgalikda)ro‘y berishidan iborat $C = A\cap B$ ($C = A\cdot B$)hodisaga aytiladi.

A hodisadan B *hodisaning ayirmasi* deb, A hodisa ro‘y berib, B hodisa ro‘y bermasligidan iborat $C = A\setminus B$ ($C = A - B$) hodisaga aytiladi.

✓ A hodisaga *qarama-qarshi* $\overline{A}$ hodisa faqat va faqat A hodisa ro‘y bermaganda ro‘y beradi(ya’ni $\overline{A}$ hodisa A hodisa ro‘y bermaganda ro‘y beradi). $\overline{A}$ ni A uchun teskari hodisa deb ham ataladi.

✓ Agar A hodisa ro‘y berishidan B hodisaning ham ro‘y berishi kelib chiqsa A hodisa B hodisani *ergashtiradi* deyiladi va $A\subseteq B$ ko‘rinishida yoziladi.

✓ Agar $A\subseteq B$ va $B\subseteq A$ bo‘lsa, u holda A va B hodisalar *teng*(*teng kuchli*) hodisalar deyiladi va $A = B$ ko‘rinishida yoziladi.

1.2-misol. A, B va C -ixtiyoriy hodisalar bo‘lsin. Bu hodisalar orqali quyidagi hodisalarni ifodalang: D={uchchala hodisa ro‘y berdi}; E={bu hodisalarning kamida bittasi ro‘y berdi}; F={bu hodisalarning birortasi ham ro‘y bermadi}; G={bu hodisalarning faqat bittasi ro‘y berdi}.

Hodisalar ustidagi amallardan foydalanamiz: $D = A\cap B\cap C (D = A\cdot B\cdot C)$;

$E = A + B + C$; $F = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$; $G = A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$.

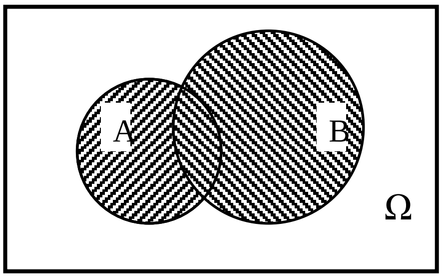
Demak hodisalarni to‘plamlar kabi ham talqin etish mumkin ekan.

Belgilash	To‘plamlar nazariyasidagi talqini	Ehtimollar nazariyasidagi talqini
Ω	Fazo (asosiy to‘plam)	Elementar hodisalar fazosi, muqarrar hodisa
ω, $\omega\in\Omega$	ω fazo elementlari	ω elementar hodisa
A, $A\subseteq\Omega$	A to‘plam	A hodisa
$A\cup B$, $A+B$	A va B to‘plamlarning yig‘indisi, birlashmasi	A va B hodisalar yig‘indisi (A va B ning kamida biri ro‘y berishidan iborat hodisa)
$A\cap B$, $A\cdot B$	A va B to‘plamlarning kesishmasi	A va B hodisalar ko‘paytmasi (A va B ning birgalikda ro‘y berishidan iborat hodisa)
$A\setminus B$, $A-B$	A to‘plamdan B to‘plamning ayirmasi	A hodisadan B hodisaning ayirmasi(A ning ro‘y berishi, B ning ro‘y bermasligidan iborat hodisa)
$\varnothing$	Bo‘sh to‘plam	Mumkin bo‘lmagan hodisa
$\overline{A}$	A to‘plamga to‘ldiruvchi	A hodisaga teskari hodisa(A ning ri’y bermasligidan iborat)
$A\cap B=\varnothing$, $A\cdot B=\varnothing$	A va B to‘plamlar kesishmaydi	A va B hodisalar birgalikda emas
$A\subseteq B$	A to‘plam B ning qismi	A hodisa B ni ergashtiradi
$A=B$	A va B to‘plamlar ustma-ust	A va B hodisalar teng kuchli

	tushadi	

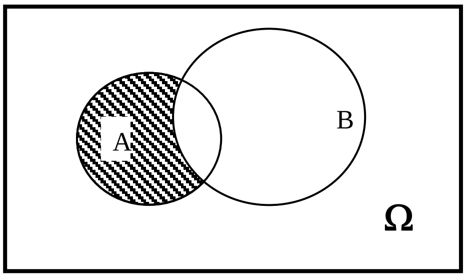
Hodisalar va ular ustidagi amallarni Eyler-Venn diarammalari yordamida tushuntirish(tasavvur qilish) qulay. Hodisalar ustidagi amallarni 1-5 rasmlardagi shakllar kabi tasvirlash mumkin.

$A+B$



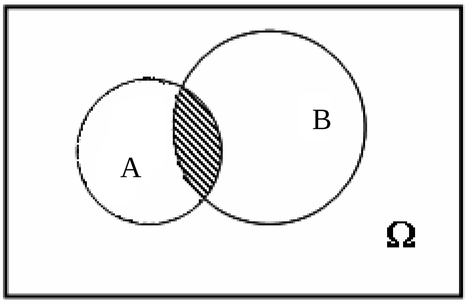
1-rasm.

A-B



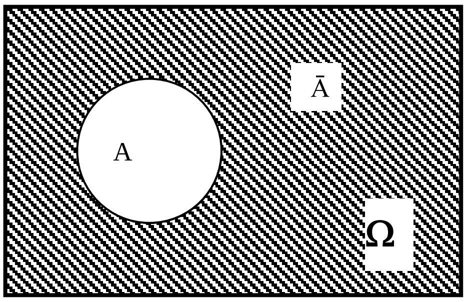
2-rasm.

$A{\cdot}B$



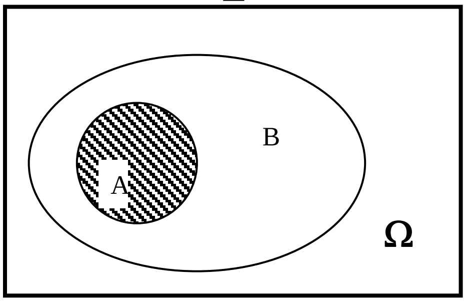
3-rasm.

$\overline{A}$



4-rasm.

$A \subseteq B$



5-rasm.

Hodisalar ustidagi amallar quyidagi xossalarga ega:

- $A+B=B+A, \quad A\cdot B=B\cdot A$;
- $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C,$;
- $(A+B)+C=A+(B+C), \quad (A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$;
- $A+A=A, \quad A\cdot A=A$;
- $\mathrm{A}+\Omega=\Omega, \quad A\cdot\Omega=A \quad A+\varnothing=A, \quad A\cdot\varnothing=\varnothing$;
- $A+\overline{A}=\Omega, \quad A\cdot\overline{A}=\varnothing$;
- $\overline{\varnothing}=\Omega, \quad \overline{\Omega}=\varnothing, \ \overline{\overline{A}}=A$;
- $A-B=A\cdot\overline{B}$;

  $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ va $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$ - de Morgan ikkilamchilik prinsipi [1], [2], [5].

1.3-misol.

a) $(A+B)\cdot(A+\overline{B})$ ifodani soddalashtiring.

Yuqoridagi xossalardan foydalanamiz:

$$(A+B)\cdot(A+\overline{B}) = A\cdot A + A\cdot\overline{B} + B\cdot A + B\cdot\overline{B} = A + A\cdot(\overline{B}+B) + \varnothing = A + A\cdot\Omega = A + A = A$$

Demak, $(A+B)\cdot(A+\overline{B}) = A$ ekan.

b) $A+B = A+\overline{A}\cdot B$ formulani isbotlang.

$$A+B = (A+B)\cdot\Omega = A\cdot\Omega + B\cdot\Omega = A\cdot\Omega + B\cdot(A+\overline{A}) = A\cdot\Omega + (A+\overline{A})\cdot B =$$

$$= A\cdot\Omega + A\cdot B + A\cdot\overline{B} = (\Omega+B)\cdot A + A\cdot\overline{B} = \Omega\cdot A + A\cdot\overline{B} = A + A\cdot\overline{B}.$$

Tasodifiy hodisalar. Hodisalar algebrasi

Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalarini keltiramiz.

Natijasi tasodifiy bo`lgan biror tajriba o`tkazilayotgan bo`lsin. $\Omega$-tajriba natijasida ro`y berishi mumkin bo`lgan barcha elementar hodisalar to`plami elementar hodisalar fazosi deyiladi; tajribaning natijasi ω esa elementar hodisa deyiladi.

✓ Agar Ω chekli yoki sanoqli to`plam bo`lsa (ya`ni elementlarini natural sonlar yordamida nomerlash mumkin bo`lsa), u holda uning ixtiyoriy qism to`plami A tasodifiy hodisa (yoki hodisa) deyiladi: $A \subseteq \Omega$.

Ω to`plamdagi A qism to`plamga tegishli elementar hodisalar A hodisaga qulaylik yaratuvchi hodisalar deyiladi.

✓ Ω to`plam muqarrar hodisa deyiladi. $\varnothing$-bo`sh to`plam mumkin bo`lmagan hodisa deyiladi.

S-Ω ning qism to`plamlaridan tashkil topgan sistema bo`lsin.

✓ Agar

1. $\varnothing \in S$, $\Omega \in S$;

2. $A \in S$ munosabatdan $\overline{A} \in S$ kelib chiqsa;

3. $A \in S$ va $B \in S$ munosabatdan $A+B \in S$, $A\cdot B \in S$ kelib chiqsa S sistema algebra tashkil etadi deyiladi.

Ta'kidlash joizki, $A+B = \overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}$, $A\cdot B = \overline{\overline{A}+\overline{B}}$ ekanligidan 3 shartdagi $A+B\in S$ va $A\cdot B \in S$ munosabatlardan ixtiyoriy bittasini talab qilish yetarlidir[1].

1.4-misol. $S=\{\varnothing,\Omega\}$ sistema algebra tashkil etadi: $\varnothing+\Omega=\Omega$, $\varnothing\cdot\Omega=\varnothing$, $\overline{\varnothing}=\Omega$, $\overline{\Omega}=\varnothing$.

Agar 3 shart o`rniga quyidagilarni talab qilsak $A_n \in S$, $n=1,2,...$, munosabatdan $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in S$ kelib chiqsa S sistema σ-algebra deyiladi.

Agar Ω chekli yoki sanoqli bo'lsa, Ω-to`plamning barcha qism to`plamlaridan tashkil topgan hodisalar sistemasi algebra tashkil etadi.

3-mavzu: Hodisa ehtimoli tushunchasi va uni klassik, geometrik, aksiomatik hamda statistik ta'riflari.

Reja:

1.Hodisa ehtimoli tushunchasi.
2. Ehtimolning statistik ta'rifi.
3. Ehtimolning klassik ta'rifi.

---

1. [1] Jun Shao Mathematikal Statistics. Springer. 2003. 591 p.

3. Ehtimolning geometrik ta’rifi.
4. Ehtimolning aksiomatik ta’rifi.

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Ehtimol tushunchasi,hodisalar chastotasi, nisbiy chastota, statistik ehtimollik, klassik ehtimollik, kombinatorika, qo’shish qoidasi, ko’paytirish qoidasi, gruppalashlar soni, o’rinlashtirishlar soni, o’rin almashtirishlar soni,geometrik ehtimollik, hodisalar algebrasi.

Ehtimollikning statistik ta’rifi

A hodisa n ta bog‘liqsiz tajribalarda n_A marta ro‘y bersin. n_A son A hodisaning chastotasi, $\frac{n_A}{n}$ munosabat esa A hodisaning nisbiy chastotasi deyiladi.

Nisbiy chastotaning statistik turg‘unlik xossasi deb ataluvchi xossasi mavjud, ya’ni tajribalar soni oshishi bilan nisbiy chastotasi ma’lum qonuniyatga ega bo‘ladi va biror son atrofida tebranib turadi.

Misol sifatida tanga tashlash tajribasini olaylik. Tanga A={Gerb} tomoni bilan tushishi hodisasini qaraylik. Byuffon va K.Pirsonlar tomonidan o‘tkazilgan tajribalar natijasi quyidagi jadvalda keltirilgan:

Tajriba o‘tkazuvchi	Tajribalar soni, n	Tushgan gerblar soni, n_A	Nisbiy chastota, n_A/n
Byuffon	4040	2048	0.5080
K.Pirson	12000	6019	0.5016
K.Pirson	24000	12012	0.5005

Jadvaldan ko‘rinadiki, n ortgani sari n_A/n nisbiy chastota $\frac{1}{2}=0.5$ ga yaqinlashar ekan.

✓ Agar tajribalar soni etarlicha ko‘p bo‘lsa va shu tajribalarda biror A hodisaning nisbiy chastotasi biror o‘zgarmas son atrofida tebransa, bu songa A hodisaning *statistik ehtimolligi* deyiladi.

A hodisaning ehtimolligi $\mathrm{P(A)}$ simvol bilan belgilanadi. Demak,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}=P(A)$ yoki yetarlicha katta n lar uchun $\frac{n_A}{n}\approx P(A)$.

Statistik ehtimollikning kamchiligi shundan iboratki, bu yerda statistik ehtimollik yagona emas. Masalan, tanga tashlash tajribasida ehtimollik sifatida nafaqat 0.5, balki 0.49 yoki 0.51 ni ham olishimiz mumkin. Ehtimollikni aniq hisoblash uchun katta sondagi tajribalar o‘tkazishni talab qiladi, bu esa amaliyotda ko‘p vaqt va xarajatlarni talab qiladi.

Statistik ehtimollik quyidagi xossalarga ega:

1. $0\le P(A)\le 1$;
2. $P(\varnothing)=0$;
3. $P(\Omega)=1$;
4. $A\cdot B=\varnothing$ bo‘lsa, u holda $P(A+B)=P(A)+P(B)$;

Isboti. 1) Ihtiyoriy A hodisaning chastotasi uchun $0\le n_A\le n\Rightarrow 0\le\frac{n_A}{n}\le 1$. Etarlicha katta n lar uchun $\frac{n}{n_A}\approx P(A)$ bo‘lgani uchun $0\le P(A)\le 1$ bo‘ladi.

2) Mumkin bo‘lmagan hodisa uchun n_A=0.
3) Muqarrar hodisaning chastotasi n_A=n.

4) Agar $A \cdot B = \varnothing$ bo‘lsa, u holda $n_{A+B} = n_A + n_B$ va

$$P(A+B) \approx \frac{n_{A+B}}{n} = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} \approx P(A) + P(B) \text{ [1], [2], [5], [6].}$$

Ehtimollikning klassik ta’rifi

Ω chekli *n* ta teng imkoniyatli elementar hodisalardan tashkil topgan bo‘lsin.

✓ A hodisaning ehtimolligi deb, A hodisaga qulaylik yaratuvchi elementar hodisalar soni *k* ning tajribadagi barcha elementar hodisalar soni *n* ga nisbatiga aytiladi.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{k}{n} \tag{1.6.1}$$

Klassik ta’rifdan foydalanib, ehtimollik hisoblashda kombinatorika elementlaridan foydalaniladi. Shuning uchun kombinatorikaning ba’zi elementlari keltiramiz. Kombinatirikada qo‘shish va ko‘paytirish qoidasi deb ataluvchi ikki muhim qoida mavjud.

$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ va $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ chekli to‘plamlar berilgan bo‘lsin.

✓ *Qo‘shish qoidasi:* agar A to‘plam elementlari soni *n* va B to‘plam elementlari soni *m* bo‘lib, $A \cdot B = \varnothing$ (A va B to‘plamlar kesishmaydigan) bo‘lsa, u holda $A + B$ to‘plam elementlari soni *n+m* bo‘ladi.

✓ *Ko‘paytirish qoidasi:* A va B to‘plamlardan tuzilgan barcha (a_i, b_j) juftliklar to‘plami $C = \{(a_i, b_j) : i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}\}$ ning elementlari soni *n·m* bo‘ladi.

n ta elementdan *m* ($0 < m \le n$)tadan tanlashda ikkita sxema mavjud: qaytarilmaydigan va qaytariladigan tanlashlar. Birinchi sxemada olingan elementlar qayta olinmaydi(orqaga qaytarilmaydi), ikkinchi sxemada esa har bir olingan element har qadamda o‘rniga qaytariladi.

I. Qaytarilmaydigan tanlashlar sxemasi

✓ *Guruhlashlar soni:* *n* ta elementdan *m* ($0 < m \le n$)tadan guruhlashlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{1.6.2}$$

C_n^m sonlar Nyuton binomi formulasining koeffisientlaridir:

$$(p+q)^n = p^n + C_n^1 p^{n-1} q + C_n^2 p^{n-2} q^2 + ... + q^n .$$

✓ *O‘rinlashtirishlar soni:* *n* ta elementdan *m* ($0 < m \le n$) tadan o‘rinlashtirishlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} . \tag{1.6.3}$$

✓ *O‘rin almashtirishlar soni:* *n* ta elementdan *n* tadan o‘rinlashtirish o‘rin almashtirish deyiladi va u quyidagicha hisoblanadi:

$$P_n = n! . \tag{1.6.4}$$

O‘rin almashtirish o‘rinlashtirishning xususiy holidir, chunki agar (1.6.3.)da $n=m$ bo‘lsa $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{n!}{0!} = n!$ bo‘ladi.

II. Qaytariladigan tanlashlar sxemasi

✓ *Qaytariladigan guruhlashlar soni: n* ta elementdan *m* ($0 < m \le n$) tadan qaytariladigan guruhlashlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m \qquad (1.6.5)$$

✓ *Qaytariladigan o‘rinlashtirishlar soni: n* ta elementdan *m* ($0 < m \le n$) tadan qaytariladigan o‘rinlashtirishlari soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$\overline{A}_n^m = n^m. \qquad (1.6.6)$$

✓ *Qaytariladigan o‘rin almashtirishlar soni: k* hil n ta elementdan iborat to‘plamda 1-element n_1 marta, 2-element n_2 marta,…, k- element n_k marta qaytarilsin va $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ bo‘lsin, u holda *n* ta elementdan iborat o‘rin almashtirish $P_n(n_1, n_2, ..., n_k)$ orqali belgilanadi va u quyidagicha hisoblanadi:

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}. \qquad (1.6.4)$$

Endi ehtimollik hisoblashga doir misollar keltiramiz [1], [2], [5], [7], [9], [11], [12].

.**1.5-misol.** Telefon nomerini terayotganda abonent oxirgi ikki raqamni eslay olmadi. U bu raqamlar har xil ekanligini eslab, ularni tavakkaliga terdi. Telefon nomeri to‘g‘ri terilganligi ehtimolligini toping.

Oxirgi ikki raqamni A_{10}^2 usul bilan terish mumkin. *A*={telefon nomeri to‘g‘ri terilgan} hodisasini kiritamiz. *A* hodisa faqat bitta elementdan iborat bo‘ladi(chunki kerakli telefon nomeri bitta bo‘ladi). Shuning uchun klassik ta’rifga ko‘ra $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{10 \cdot 9} = \frac{1}{90} \approx 0.011$.

1.6-misol. 100 ta lotoreya biletlarlaridan bittasi yutuqli bo‘lsin. Tavakkaliga olingan 10 lotoreya biletlari ichida yutuqlisi bo‘lishi ehtimolligini toping.
100 ta lotoreya biletlaridan 10 tasini C_{100}^{10} usul bilan tanlash mumkin. B={10 lotoreya biletlari ichida yutuqlisi bo‘lishi } hodisasi bo‘lsa, $N(B) = C_1^1 \cdot C_{99}^9$ va $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{C_1^1 \cdot C_{99}^9}{C_{100}^{10}} = \frac{1}{10} = 0.1$.

1.7-misol. Pochta bo‘limida 6 xildagi otkritka bor. Sotilgan 4 ta otkritkadan: a) 4 tasi bir xilda; b) 4 tasi turli xilda bo‘lishi ehtimolliklarini toping.

6 xil otkritkadan 4 tasini $\overline{C}_6^4$ usul bilan tanlash mumkin. a) *A*={4 ta bir xildagi otkritka sotilgan} hodisasi bo‘lsin. *A* hodisaning elementar hodisalari soni otkritkalar xillari soniga teng, ya’ni *N(A)*=6. Klassik ta’rifga ko‘ra $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{6}{\overline{C}_6^4} = \frac{6}{126} = \frac{1}{21}$ bo‘ladi. b) B={4 ta har

xil otkritka sotilgan} hodisasi bo‘lsin, u holda $\text{N(B)} = C_6^4$ ga teng va $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{C_6^4}{C_6^4} = \frac{15}{126} = \frac{5}{42}$.

Klassik ehtimollik quyidagi xossalarga ega:

1. $P(\varnothing) = 0$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $0 \le P(A) \le 1$;
4. Agar $A \cdot B = \varnothing$ bo‘lsa, u holda $P(A+B) = P(A) + P(B)$;
5. $\forall A, B \in \Omega$ uchun $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$

Isboti. 1) $N(\varnothing) = 0$ bo‘lgani uchun klassik ta’rifga ko‘ra $P(\varnothing) = \frac{N(\varnothing)}{N(\Omega)} = 0$.

2) Klassik ta’rifga ko‘ra $P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$.

3) Ihtiyoriy A hodisa uchun $\varnothing \subseteq A \subseteq \Omega$ ekanligidan $0 \le P(A) \le 1$ bo‘ladi.

4) Agar $A \cdot B = \varnothing$ bo‘lsa, u holda $N(A+B) = N(A) + N(B)$ va $P(A+B) = \frac{N(A+B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)+N(B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} = P(A) + P(B)$.

5) $A+B$ va B hodisalarni birgalikda bo‘lmagan ikki hodisalar yig‘ndisi shaklida yozib olamiz: $A+B = A + B\cdot\overline{A}\,(1.3-misol),\quad B = B\cdot\Omega = B\cdot(A+\overline{A}) = A\cdot B + B\cdot\overline{A}$, u holda 4-xossaga ko‘ra $P(A+B) = P(A) + P(B\cdot\overline{A})$ va $P(B) = P(A\cdot B) + P(B\cdot\overline{A})$. Bu ikki tenglikdan $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A\cdot B)$ kelib chiqadi. ■

Ehtimollikning geometrik ta’rifi

Ehtimolning klassik ta’rifiga ko‘ra Ω - elementar hodisalar fazosi chekli bo‘lgandagina hisoblashimiz mumkin. Agar Ω cheksiz teng imkoniyatli elementar hodisalardan tashkil topgan bo‘lsa, geometrik ehtimollikdan foydalanamiz.

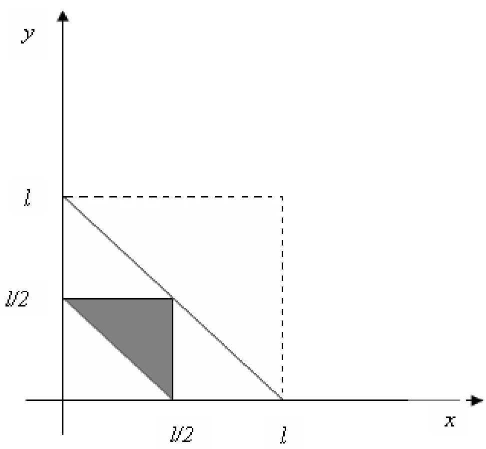
O‘lchovli biror G soha berilgan bo‘lib, u D sohani o‘z ichiga olsin. G sohaga tavakkaliga tashlangan X nuqtani D sohaga tushishi ehtimolligini hisoblash masalasini ko‘ramiz. Bu yerda X nuqtaning G sohaga tushishi muqarrar va D sohaga tushishi tasodifiy hodisa bo‘ladi. $A = \{X \in D\}$ - X nuqtaning D sohaga tushishi hodisasi bo‘lsin.

6-rasm.

✓ A hodisaning geometrik ehtimolligi deb, D soha o‘lchovini G soha o‘lchoviga nisbatiga aytiladi, ya’ni

$$P(A) = \frac{mes\{D\}}{mes\{G\}},$$

bu yerda *mes* orqali uzunlik, yuza, hajm belgilangan [1], [2], [5], [7], [9], [11], [12].



1.8-misol. *l* uzunlikdagi sterjen tavakkaliga tanlangan ikki nuqtada bo‘laklarga bo‘lindi. Hosil bo‘lgan bo‘laklardan uchburchak yasash mumkin bo‘lishi ehtimolligini toping.

Birinchi bo‘lak uzunligini *x*, ikkinchi bo‘lak uzunligini *y* bilan belgilasak, uchinchi bo‘lak uzunligi *l-x-y* bo‘ladi. Bu yerda $\Omega = \{(x, y): 0 < x + y < l\}$, ya’ni $0 < x + y < l$ sterjenning bo‘laklari uzunliklarining barcha bo‘lishi mumkin bo‘lgan kombinatsiyasidir. Bu bo‘laklardan uchburchak yasash mumkin bo‘lishi uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak: $x + y > l - x - y,$ $x + l - x - y > y,\ y + l - x - y > x$.

7-rasm.

Bulardan $x < \frac{l}{2},\quad y < \frac{l}{2},\quad x + y > \frac{l}{2}$ ekanligi kelib chiqadi.

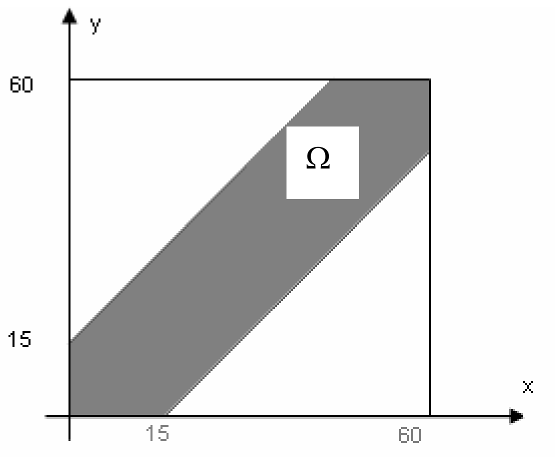
Bu tengsizliklar 7-rasmdagi bo‘yalgan sohani bildiradi. Ehtimollikning geometrik ta’rifiga ko‘ra:

$$P(A) = \frac{mes\{A\}}{mes\{G\}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2}}{\frac{1}{2}\cdot l\cdot l} = \frac{1}{4}.$$

1.9-misol. (Uchrashuv haqida)

Ikki do‘st soat 9 bilan 10 orasida uchrashishga kelishishdi. Birinchi kelgan kishi do‘stini 15 daqiqa davomida kutishini, agar shu vaqt mobaynida do‘sti kelmasa u ketishi mumkinligini shartlashib olishdi. Agar ular soat 9 bilan 10 orasida ixtiyoriy momentda kelishlari mumkin bo‘lsa, bu ikki do‘stning uchrashishi ehtimolini toping.

Birinchi kishi kelgan momentni *x*, ikkinchisinikini *y* bo‘lsin: $0 \le x \le 60$, $0 \le y \le 60$ U holda ularning uchrashishlari uchun $|x - y| \le 15$ tengsizlik bajarilishi kerak.



Demak, $\Omega = \{(x, y): 0 \le x \le 60, 0 \le y \le 60\}$, $A = \{(x, y): |x - y| \le 15\}$. *x* va *y* larni Dekart koordinatalar tekisligida tasvirlaymiz(8-rasm).

U holda

$$P(A) = \frac{mes\{A\}}{mes\{G\}} = \frac{60^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 45\cdot 45}{60^2} = \frac{7}{16}.$$

8-rasm.

Ehtimollikning aksiomatik ta’rifi

Ehtimollar nazariyasini aksiomatik qurishda A.N. Kolmogorov tomonidan 30-yillarning boshlarida asos solingan.

Ω - biror tajribaning barcha elementar hodisalar to‘plami, *S*-hodisalar algebrasi bo‘lsin.

✓ *S* hodisalar algebrasida aniqlangan, haqiqiy qiymatlar qabul qiluvchi $P(A)$ fuksiya ehtimollik deyiladi, agar u uchun quyidagi aksiomalar o‘rinli bo‘lsa:

A1: ihtiyoriy $A \in S$ hodisaning ehtimolligi manfiy emas $P(A) \ge 0$ (nomanfiylik aksiomasi);

A2: muqarrar hodisaning ehtimolligi birga teng $P(\Omega) = 1$ (normallashtirish aksiomasi);

A3: juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan hodisalar yig‘indisining ehtimolligi shu hodisalar ehtimollari yig‘indisiga teng, ya’ni agar $A_i \cdot A_j = \varnothing,\quad i \ne j$ bo‘lsa, u holda

$$P(\bigcup_k A_k) = \sum_k P(A_k)$$

(additivlik aksiomasi);

(Ω, S, P) uchlik ehtimollik fazosi deyiladi, bu yerda Ω-elementar hodisalar fazosi, *S*-hodisalar algebrasi, *P*- A1-A3 aksiomalarni qanoatlantiruvchi sanoqli funksiya [1], [2], [5], [7], [9], [10], [11].

4-mavzu: Ehtimolning xossalari. Shartli ehtimollik. Hodisalarning bog'liqsizligi.

Reja:

1. Ehtimolning xossalari. Ehtimollik fazosi.
2. Shartli ehtimollik.
3. Hodisalarning bog'liqsizligi.

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Mumkin bo'lmagan hodisa, qarama-qarshi hodisa, to'la gruppa, elementar hodisalar fazosi, Kolmogorov aksiomalari, ehtimolning xossalari, shartli ehtimol, bog'liq hodisalar, hodisalar bog'liqsizligi

Ehtimollikning xossalari

Kolmogorov aksiomalarining tatbiqi sifatida quyidagi xossalarni keltiramiz:

1. Mumkin bo‘lmagan hodisaning ehtimoli nolga teng

$$P(\varnothing) = 0.$$

2. Qarama-qarshi hodisalarning ehtimolliklari yig‘indisi birga teng

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

3. Ixtiyoriy hodisaning ehtimolligi uchun quyidagi munosabat o‘rinli:

$$0 \le P(A) \le 1$$

4. Agar $A \subseteq B$ bo‘lsa, u holda $P(A) \le P(B)$.

5. Agar birgalikda bo‘lmagan $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar to‘la gruppani tashkil etsa, ya'ni $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ va $A_i \cdot A_j = \varnothing, \quad i \ne j$ bo‘lsa u holda

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Isboti:

1. $A + \varnothing = A, \quad A \cdot \varnothing = \varnothing$ tengliklardan A3 aksiomaga ko‘ra $P(A) + P(\varnothing) = P(A) \Rightarrow P(\varnothing) = 0$

2. $A + \overline{A} = \Omega \quad A \cdot \overline{A} = \Omega$ tengliklardan $P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega)$ hamda A2 va A3 aksiomalardan esa $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ tenglik kelib chiqadi.

3. 2-xossaga ko‘ra $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ va A1 aksiomaga asosan $0 \le P(A) \le 1$.

4. $A \subseteq B$ ekanligidan $B = (B - A) + A$ va $(B - A)A = \varnothing$. A3 aksiomaga ko‘ra $P(B) = P(B - A) + P(A)$, ammo $P(B - A) \geq 0$ bo‘lgani uchun $P(A) \leq P(B)$.

5. $A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$ tenglik, A2 va A3 aksiomalarga ko‘ra $P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$ [2].

Ehtimolliklar fazosi

Elementar hodisalar fazosi cheksiz bo‘lsin: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$. S esa Ω ning barcha qism to‘plamlaridan tashkil topgan hodisalar algebrasi bo‘lsin. Har bir $\omega_i \in \Omega, \quad i = 1,2,...$ elementar hodisaga $p(\omega_i)$ sonni mos qo‘yamiz. $p(\omega_i)$ -elementar hodisaning ehtimoli deyiladi. Demak, Ω da quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi sonli $p(\omega_i)$ funksiya kiritamiz:

1. $\forall \omega_i \in \Omega, \quad P(\omega_i) \geq 0$;

2. $\sum_{i=1}^{\infty} p(\omega_i) = 1$.

U holda $A \in \Omega$ hodisaning ehtimolligi yig‘indi shaklida ifodalanadi:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) \tag{1.10.1}$$

Ehtimollikni bunday aniqlash Kolmogorov aksiomalarini qanoatlantiradi:

1. $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) \geq 0$, chunki har bir $P(\omega_i) \geq 0$;

2. $P(\Omega) = \sum_{\omega_i \in \Omega} p(\omega_i) = \sum_{i=1}^{n} p(\omega_i) = 1$;

3. Agar $A \cdot B = \varnothing$ bo‘lsa, u holda

$$P(A+B) = \sum_{\omega_i \in A+B} p(\omega_i) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i) + \sum_{\omega_i \in B} p(\omega_i) = P(A) + P(B).$$

Bunday aniqlangan $\{\Omega, S, P\}$ uchlik ehtimolliklar fazosi(yoki diskret ehtimolliklar fazosi) deyiladi.

Agar $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ - chekli fazo va tajribadagi barcha elementar hodisalar teng imkoniyatli bo‘lsa, ya’ni

$$p(\omega_1) = p(\omega_2) = ... = p(\omega_n) = \frac{1}{n}, \tag{1.10.2}$$

u holda (1.10.1) formula quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}}_{m} = \frac{m}{n}. \tag{1.10.3}$$

2. [2] Jun Shao Mathematikal Statistics. Springer. 2003. 591 p.

Bu yerda m A hodisaga tegishli elementar hodisalar soni. Bu esa ehtimollikni klassik ta'rifga ko'ra hisoblashdir. Demak, klassik ehtimol (1.10.1) formula orqali aniqlangan ehtimollikning xususiy holi ekan.

Shartli ehtimollik

A va B hodisalar biror tajribadagi hodisalar bo'lsin.

✓ B hodisaning A hodisa ro'y bergandagi *shartli ehtimolligi* deb,

$$\frac{P(A\cdot B)}{P(A)} \quad (P(A)\neq 0) \qquad (1.11.1)$$

nisbatga aytiladi. Bu ehtimollikni $P(B/A)$ orqali belgilaymiz.

Shartli ehtimollik ham Kolmogorov aksiomalarini qanoatlantiradi:

1. $P(B/A)\geq 0$;

2. $P(\Omega/A)=\dfrac{P(\Omega\cdot A)}{P(A)}=\dfrac{P(A)}{P(A)}=1$;

3. Agar $B\cdot C=\varnothing$ bo'lsa, u holda

$$P((B+C)/A)=\frac{P((B+C)\cdot A)}{P(A)}=\frac{P(B\cdot A+C\cdot A)}{P(A)}=\frac{P(B\cdot A)+P(C\cdot A)}{P(A)}=$$

$$=\frac{P(B\cdot A)}{P(A)}+\frac{P(C\cdot A)}{P(A)}=P(B/A)+P(C/A),$$

chunki $B\cdot C=\varnothing$ ekanligidan, $(B\cdot A)\cdot(C\cdot A)=B\cdot A\cdot A\cdot C=B\cdot C\cdot A=\varnothing\cdot A=\varnothing$

1.10-misol. Idishda 3 ta oq va 7 ta qora shar bor. Tavakkaliga ketma-ket bittadan 2 ta shar olinadi. Birinchi shar oq rangda bo'lsa ikkinchi sharning qora rangda bo'lishi ehtimolligini toping.

Bu misolni ikki usul bilan yechish mumkin:

1) *A*={birinchi shar oq rangda}, B ={ikkinchi shar qora rangda}. *A* hodisa ro'y berganidan so'ng idishda 2 ta oq va 7 ta qora shar qoladi. Shuning uchun $P(B/A)=\dfrac{7}{9}$.

2) (1.11.1) formuladan foydalanib, hisoblaymiz: $P(A)=\dfrac{3}{10}$, $P(AB)=\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{7}{9}=\dfrac{7}{30}$

Shartli ehtimollik formulasiga ko'ra: $P(B/A)=\dfrac{P(A\cdot B)}{P(A)}=\dfrac{7/30}{3/10}=\dfrac{7}{9}$.

Shartli ehtimollik formulasidan hodisalar ko'paytmasi ehtimolligi uchun ushbu formula kelib chiqadi:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B) \qquad (1.11.2)$$

(1.11.2) tenglik ko'paytirish qoidasi(teoremasi) deyiladi. Bu qoidani n ta hodisa uchun umumlashtiramiz:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\ldots\cdot P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}). \qquad (1.11.3)$$

✓ Agar $P(A/B)=P(A)$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda A hodisa B hodisaga bog'liq emas deyiladi va $A\perp B$ orqali belgilanadi.

Agar $A \perp B$ bo‘lsa, u holda (1.11.2) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A / B) = P(B) \cdot P(A).$$

✓ A va B hodisalar o‘zaro bog‘liq emas deyiladi, agar

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa.

Lemma. Agar $A \perp B$ bo‘lsa, u holda $A \perp \overline{B}$, $\overline{A} \perp B$ va $\overline{A} \perp \overline{B}$ bo‘ladi.
Isboti: $A \perp B$ bo‘lsin. U holda $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. $P(B) + P(\overline{B}) = 1$ tenglikdan foydalanib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$P(A \cdot \overline{B}) = P(A \cdot (\Omega - B)) = P(A \cdot \Omega - A \cdot B) = P(A - A \cdot B) = P(A) - P(A \cdot B) =$$
$$= P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\overline{B}).$$

Demak, $P(A \cdot \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) \Rightarrow A \perp \overline{B}$. Qolganlari ham xuddi shunday isbotlanadi [1], [2], [6].

.

5-mavzu: To‘la ehtimollik va Bayes formulalari

Reja:

1. To’la ehtimol .
2. Beyes formulasi.

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Mumkin bo’lmagan hodisa, qarama-qarshi hodisa, to’la gruppa, elementar hodisalar fazosi, Kolmogorov aksiomalari, ehtimolning xossalari, shartli ehtimol, bog’liq hodisalar, hodisalar bog’liqsizligi, shartli ehtimol, to’la gruppa, bo’sh to’plam, Beyes formulasi

To‘la ehtimollik va Bayes formulalari

$A_1, A_2, ..., A_n$ juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan hodisalar to‘la gruppani tashkil etsin, ya’ni $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ va $A_i \cdot A_j = \varnothing, \quad i \neq j$. U holda $A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$ ekanligini hisobga olib, B ni $B = B \cdot \Omega = B \cdot (A_1 + A_2 + ... + A_n) = B \cdot A_1 + B \cdot A_2 + ... + B \cdot A_n$ ko‘rinishda yozamiz. $A_i \cdot A_j = \varnothing, \quad i \neq j$ ekanligidan $(B \cdot A_i) \cdot (B \cdot A_j) = \varnothing, \quad i \neq j$ ekani kelib chiqadi. B hodisaning ehtimolligini hisoblaymiz:

$$P(B) = P(B \cdot A_1 + B \cdot A_2 + ... + B \cdot A_n) =$$
$$= P(B \cdot A_1) + P(B \cdot A_2) + ... + P(B \cdot A_n). \qquad (1.12.1)$$

Ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra $P(B \cdot A_i) = P(A_i) \cdot P(B / A_i), i = \overline{1, n}$ bo‘ladi. Bu tenglikni (1.12.1) ga qo‘llasak,

$$P(B) = P(A_1)P(B / A_1) + P(A_2)P(B / A_2) + ... + P(A_n)P(B / A_n).$$

✓ Agar $B \subset \sum_{i=1}^{n} A_i$ bo‘lsa, u holda

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B / A_i) \qquad (1.12.2)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglik *to‘la ehtimollik formulas*i deyiladi [1], [2], [12].

.**1.11-masala.** Detallar partiyasi uch ishchi tomonidan tayyorlanadi. Birinchi ishchi barcha detallarning 25%ini, ikkinchi ishchi 35%ini, uchinchsi esa 40%ini tayyorlaydi. Bu uchchala ishchining tayyorlagan detallarining sifatsiz bo‘lish ehtimolliklari mos ravishda 0.05,0.04 va 0.02 ga teng bo‘lsa, tekshirish uchun partiyadan olingan detalning sifatsiz bo‘lish ehtimolligini toping.

A_i={detal *i*-ishchi tomonidan tayyorlangan} $i=\overline{1,3}$, *B*={tekshirish uchun olingan detal sifatsiz} hodisalarni kiritamiz va quyidagi ehtimolliklarni hisoblaymiz:

$$P(A_1)=\frac{25\%}{100\%}=0.25,\quad P(A_2)=\frac{35\%}{100\%}=0.35,\quad P(A_3)=\frac{40\%}{100\%}=0.4,$$

$P(B/A_1)=0.05,\quad P(B/A_2)=0.04,\quad P(B/A_3)=0.02$. To‘la ehtimollik formulasiga asosan $P(B)=0.25\cdot 0.05+0.35\cdot 0.04+0.4\cdot 0.02=0.0345$.

A_i va B hodisalar ko‘paytmasi uchun

$$P(A_i\cdot B)=P(B)\cdot P(A_i/B) \tag{1.12.3}$$

$$P(A_i\cdot B)=P(A_i)\cdot P(B/A_i) \tag{1.12.4}$$

tengliklar o‘rinli. (1.12.3) va (1.12.4) tengliklardan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$P(B)\cdot P(A_i/B)=P(A_i)\cdot P(B/A_i),$$

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)}. \tag{1.12.5}$$

Bu yerda $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i)$. (1.12.5) tenglik *Bayes formulasi* deyiladi. Bayes formulasi yana *gipotezalar teoremasi* deb ham ataladi. Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalarni gipotezalar deb olsak, u holda $P(A_i)$ ehtimollik A_i gipotezaning aprior(“a priori” lotincha tajribagacha), $P(A_i/B)$ shartli ehtimollik esa aposterior(“a posteriori” tajribadan keyingi) ehtimolligi deyiladi [2], [6].

.**1.12-masala.** 1.11-misolda sifatsiz detal ikkinchi ishchi tomonidan tayyorlangan bo‘lishi ehtimolligini toping. Bayes formulasiga ko‘ra:

$$P(A_2/B)=\frac{0.35\cdot 0.04}{0.25\cdot 0.05+0.35\cdot 0.04+0.4\cdot 0.02}=\frac{28}{69}\approx 0.4.$$

6-mavzu: Bog’liqsiz tajribalar ketma-ketligi. Bernulli sxemasi va formulasi. Binomial ehtimollar xossalari.

Reja:

1.Tajribalar ketma-ketligi.
2.Bernulli sxemasi. Bernulli formulasi.

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Tajribalarningbog’liqligi,tajribalarningbog’liqsizligi, tajribalar ketma-ketligi, Bernulli formulasi, qarama-qarshi hodisa ehtimoli.

Agar bir necha tajribalar o‘tkazilayotganida, har bir tajribada biror A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi boshqa tajriba natijalariga bog‘liq bo‘lmasa, bunday tajribalar bog‘liqsiz tajribalar deyiladi.

n ta bog‘liqsiz tagribalar o‘tkazilayotgan bo‘lsin. Har bir tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi $P(A)=p$ va ro‘y bermasligi ehtimolligi $P(\overline{A})=1-p=q$ bo‘lsin.

Masalan, 1) nishonga qarata o‘q uzish tajribasini ko‘raylik. Bu yerda A={o‘q nishonga tegdi}-muvaffaqqiyat va $\overline{A}$={o‘q nishonga tegmadi}-muvaffaqqiyatsizlik; 2) n ta mahsulotni sifatsizlikka tekshirilayotganda A={mahsulot sifatli}-muvaffaqqiyat va $\overline{A}$={mahsulot sifatsiz}-muvaffaqqiyatsizlik bo‘ladi.

Bu kabi tajribalarda elementar hodisalar fazosi Ω faqat ikki elementdan iborat bo‘ladi: $\Omega=\{\omega_0,\omega_1\}=\{\overline{A},A\}$, bu erda ω_0-A hodisa ro‘y bermasligini, ω_1-A hodisa ro‘y berishini bildiradi. Bu hodisalarning ehtimolliklari mos ravishda p va q $(p+q=1)$ lar orqali belgilanadi.

Agar n ta tajriba o‘tkazilayotgan bo‘lsa, u holda elementar hodisalar fazosining elementar hodisalari soni 2^n ga teng bo‘ladi. Masalan, $n=3$ da $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,...,\omega_7\}=\{\overline{A}\overline{A}\overline{A},\overline{A}\overline{A}A,\overline{A}A\overline{A},A\overline{A}\overline{A},\overline{A}AA,A\overline{A}A,AA\overline{A},AAA\}$, ya’ni Ω to‘plam $2^3=8$ ta elementar hodisadan iborat. Har bir hodisaning ehtimolligini ko‘paytirish teoremasiga ko‘ra hisoblash mumkin:

$$p(\omega_0)=P(\overline{A}\overline{A}\overline{A})=P(\overline{A})P(\overline{A})P(\overline{A})=q^3,$$
$$p(\omega_1)=P(\overline{A}\overline{A}A)=P(\overline{A})P(\overline{A})P(A)=pq^2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$p(\omega_7)=P(AAA)=P(A)P(A)P(A)=p^3.$$

n ta bog‘liqsiz tajribada A hodisa m marta ro‘y berish ehtimolligini hisoblaylik:

$$P_n(m)=P(\underbrace{A\cdot A\cdot...\cdot A}_{mta}\cdot\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot...\cdot\overline{A}}_{(n-m)ta})+P(\overline{A}\underbrace{A\cdot A\cdot...\cdot A}_{mta}\cdot\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot...\cdot\overline{A}}_{(n-(m-1))ta})+...+$$
$$P(\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot...\cdot\overline{A}}_{(n-(m-1))ta}\cdot\underbrace{A\cdot A\cdot...\cdot A}_{mta}\cdot\overline{A})+P(\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot...\cdot\overline{A}}_{(n-m)ta}\cdot\underbrace{A\cdot A\cdot...\cdot A}_{mta}).$$

Har bir qo‘shiluvchi ko‘paytirish teoremasiga ko‘ra p^mq^{n-m} ga teng. Demak,

$$P_n(m)=\underbrace{p^mq^{n-m}+p^mq^{n-m}+...+p^mq^{n-m}}_{C_n^m\ ta\quad qo'shiluvchi}=C_n^m p^mq^{n-m},\quad m=0,1,...n.$$

✓ Agar n ta bo‘g‘liqsiz tajribaning har birida A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi p ga, ro‘y bermasligi q ga teng bo‘lsa, u holda A hodisaning m marta ro‘y berish ehtimolligi quyidagi ifodaga teng bo‘ladi:

$$P_n(m)=C_n^m p^mq^{n-m},\quad m=0,1,...n. \qquad (1.13.1)$$

(1.13.1) formula Bernulli formulasi deyiladi. $P_n(m)$ ehtimolliklar uchun $\sum_{m=0}^{n} P_n(m)=1$ tenglik o'rinlidir. Haqiqatan ham,

$$(q+px)^n = q^n + C_n^1 q^{n-1} px + C_n^2 q^{n-2} p^2 x^2 + ... + p^n x^n$$

Nyuton binomi formulasida $x=1$ deb olsak,
$(q+p)^n = q^n + C_n^1 q^{n-1} p + C_n^2 q^{n-2} p^2 + ... + p^n$, ya'ni
$1 = P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(n) = \sum_{m=0}^{n} P_n(m)$ bo'ladi.

(1.13.1) ehtimolliklar xossalari:

1. $\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = 1$.

2. Agar $m_1 \le m \le m_2$ bo'lsa, $P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m)$.

3. n ta bog'liqsiz tajribada A hodisaning kamida 1 marta ro'y berishi ehtimolligi $P = 1 - q^n$ bo'ladi.
Chunki, $P_n(0) + \underbrace{P_n(1) + ... + P_n(n)}_{P} = 1 \Rightarrow P = 1 - P_n(0) = 1 - q^n$.

4. Agar $P_n(m)$ ehtimollikning eng katta qiymati $P_n(m_0)$ bo'lsa, u holda m_0 quyidagicha aniqlanadi: $np - q \le m_0 \le (n+1)p$, m_0-eng ehtimolli son deyiladi va
a) agar *np-q* kasr son bo'lsa, u holda m_0 yagonadir;
b) agar *np-q* butun son bo'lsa, u holda m_0 ikkita bo'lad[3].
i.

1.13-misol. Ikki teng kuchli shaxmatchi shaxmat o'ynashmoqda. Qaysi hodisaning ehtimolligi katta: 4 ta partiyadan 2 tasida yutishmi yoki 6 ta partiyadan 3 tasida yutish. Birinchi holda: n=4, m=2, $p=\frac{1}{2}$, Bernulli formulasiga ko'ra

$$P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-2} = 6 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{6}{16}.$$

Ikkinchi holda n=6, m=3, $p=\frac{1}{2}$ va Bernulli formulasiga ko'ra

$P_6(3) = C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1-\frac{1}{2}\right)^{6-3} = 20 \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{5}{16}$. $\frac{6}{16} > \frac{5}{16} \Rightarrow P_4(2) > P_6(3)$. Demak, 4 ta partiyadan 2 tasida yutish ehtimolligi katta ekan.

7-mavzu: Muavr – Laplasning lokal va integral limit teoremalari

Reja:

1.Muavr-Laplasning lokal teoremasi.
2.Muavr -Laplasning integral teoremasi.

---

3. [3] Jun Shao Mathematikal Statistics. Springer. 2003. 591 p.

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Asimptotik formula, Muav-Laplas lokal va integral teoremasi, funktsiyaning juft va toqligi, Stirling formulasi.

Agar n va m lar katta sonlar bo‘lsa, u holda Bernulli formulasidan foydalanib, $P_n(m)$ ehtimollikni hisoblash qiyinchilik tug‘diradi. Xuddi shunday, $p(q)$ ehtimollik juda kichik qiymatlar qabul qilsa ham qiyinchiliklarga duch kelamiz. Shu sababli, $n \to \infty$ da $P_n(m)$ uchun asimptotik(taqribiy) formulalar topish muammosini tug‘diradi.

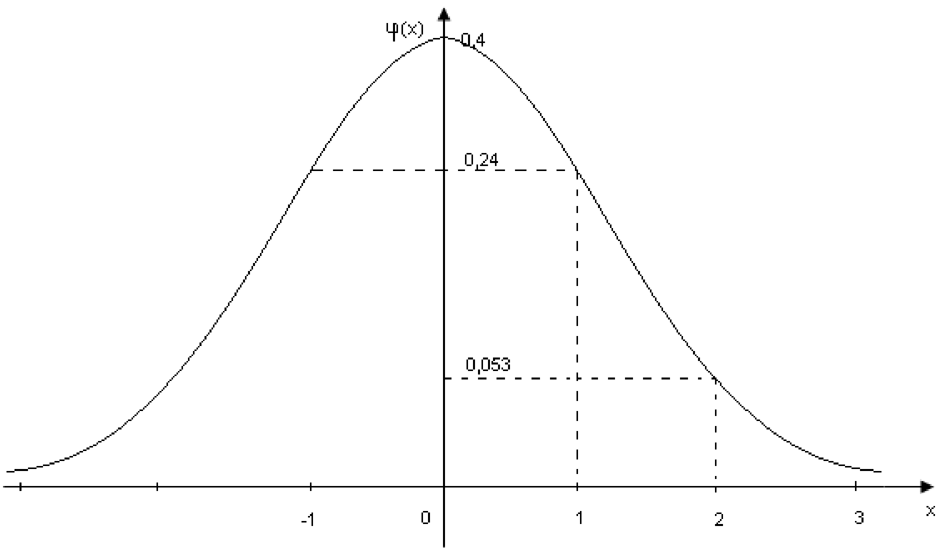
Muavr-Laplasning lokal teoremasi

Agar p ($p \neq 0,\ p \neq 1$)ehtimollik nol atrofidagi son bo‘lmasa va n etarlicha katta bo‘lsa, u holda $P_n(m)$ ehtimollikni hisoblash uchun Muavr-Laplas teoremasidan foydalanish mumkin.

Teorema(Muavr-Laplas) Agar n ta bog‘liqsiz tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi $0 < p < 1$ bo‘lsa, u holda yetarlicha katta n larda

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \qquad (1.14.4)$$

-taqribiy formula o‘rinli. Bu yerda $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiya Gauss funksiyasi deyiladi(9-rasm).



9-rasm.

$\varphi(x)$ funksiya uchun x argument qiymatlariga mos qiymatlari jadvali tuzilgan(1-ilova). Jadvaldan foydalanayotganda quyidagilarni e’tiborga olish kerak:

1) $\varphi(x)$ funksiya juft funksiya, ya’ni $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

2) agar $x \geq 4$ bo‘lsa, $\varphi(x) = 0$ deb olish mumkin.

1.15-misol. Bitta o‘q otilganda o‘qning nishonga tegish ehtimolligi 0.7 ga teng. 200 ta o‘q otilganda nishonga 160 ta o‘q tegishi ehtimolligini toping.

Bu yerda n=200, p=0.7, q=1-p=0.3, m=160. (1.14.4) ga ko'ra $\sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0.7 \cdot 0.3} = \sqrt{42} \approx 6.48$, $x = \frac{160 - 200 \cdot 0.7}{\sqrt{42}} = \frac{20}{6.48} \approx 3.09$. Agar $\varphi(3.09) \approx 0.0034$ ekanligini hisobga olsak, u holda $P_{200}(160) \approx \frac{1}{6.48} \cdot 0.0034 \approx 0.0005$.

Muavr-Laplasning integral teoremasi

Agar n yetarlicha katta va A hodisa n ta tajribada kamida m_1 va ko'pi bilan m_2 marta ro'y berish ehtimolligi $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ ni topish talab etilsa, u holda Muavr-Laplasning integral teoremasidan foydalanish mumkin.

Teorema(Muavr-Laplas) Agar A hodisaning ro'y berish ehtimolligi($0 < p < 1$) o'zgarmas bo'lsa, u holda

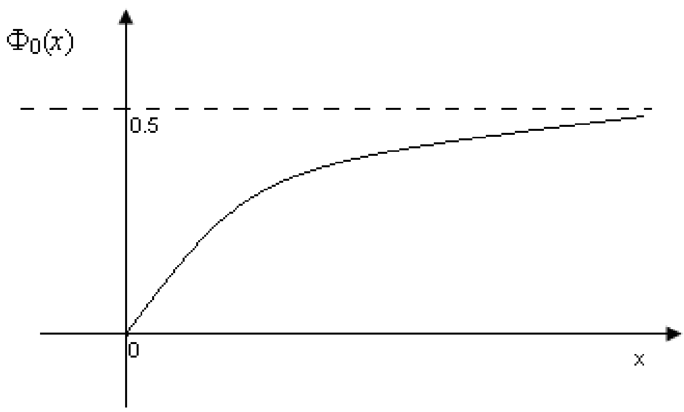
$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-x^2/2} dx, \qquad (1.14.5)$$

taqribiy formula o'rinli, bu yerda $x_i = \frac{m_i - np}{\sqrt{npq}}, \quad i = 1,2$.

(1.14.5) formuladan foydalanilganda hisoblashlarni soddalashtirish uchun maxsus funksiya kiritiladi:

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt. \qquad (1.14.6)$$

(1.14.6)-Laplas funksiyasi deyiladi[4].



10-rasm.

$\Phi_0(x)$ funksiya toq funksiya:

$$\Phi_0(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-x} e^{-t^2/2} dt = [t = -z] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x} e^{-z^2/2} dz = -\Phi_0(x).$$

4. [4] Jun Shao Mathematikal Statistics. Springer. 2003. 591 p.

Agar $x \geq 5$ bo‘lsa, u holda $\Phi_0(x) = 0.5$ deb hisoblash mumkin; $\Phi_0(x)$ funksiya grafigi 10-rasmda keltirilgan.

(1.14.5) dagi tenglikning o‘ng qismini $\Phi_0(x)$ funksiya orqali ifodalaymiz:

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-x/2} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-t/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{0} e^{-x/2} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_2} e^{-x/2} dx = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1). \quad (1.14.7)$$

$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ -Laplasning funksiyasi bilan bir qatorda Gauss funksiyasi deb nomlanuvchi funksidan ham foydalaniladi:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt \,. \quad (1.14.8)$$

Bu funksiya uchun $\Phi(-x) + \Phi(x) = 1$ tenglik o‘rinli va u $\Phi_0(x)$ funksiya bilan

$$\Phi(x) = 0.5 + \Phi_0(x) \quad (1.14.9)$$

formula orqali bog‘langan.

1-misol. Sex ishlab chiqargan mahsulotining o‘rtacha 96% i sifatli. Bazada mahsulotni qabul qilib oluvchi sexning 200 ta mahsulotini tavakkaliga tekshiradi. Agar tekshirilgan mahsulotlardan sifatsizlari soni 10 tadan ko‘p bo‘lsa butun mahsulotlar partiyasi sifatsiz deb, sexga qaytariladi. Mahsulotlar partiyasining qabul qilinishi ehtimolligini toping.

Bu yerda n=200, p=0.04(mahsulotning sifatsiz bo‘lish ehtimolligi), q=0.96, m_1=0, m_2=10 va mahsulotlar partiyasining qabul qilinishi ehtimolligi $P_{200}(0 \leq m \leq 10)$ ni (1.14.7) formula orqali hisoblaymiz:

$$x_1 = \frac{0 - 200 \cdot 0.04}{\sqrt{200 \cdot 0.04 \cdot 0.96}} \approx -2.89, \quad x_2 = \frac{10 - 200 \cdot 0.04}{\sqrt{200 \cdot 0.04 \cdot 0.96}} \approx 0.72,$$

$$P_{200}(0 \leq m \leq 10) = \Phi_0(0.72) - \Phi_0(-2.89) = 0.26424 + 0.49807 = 0.7623.$$

Agar $\Phi(x)$ funksiyadan foydalansak, $P_{200}(0 \leq m \leq 10) = \Phi(0.72) - \Phi(-2.89) =$
$= 0.7642 - (1 - \Phi(2.89)) = 0.7642 - (1 - 0.998074) = 0.7623$.

Laplas funksiyasi yordamida n ta bog‘liqsiz tajribada nisbiy chastotaning ehtimollikdan chetlashishi ehtimolligini hisoblash mumkin.

- ✓ Biror $\varepsilon > 0$ son uchun

$$P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} = 2\Phi_0\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \quad (1.14.10)$$

tenglik o‘rinli.

Haqiqatan ham, buni isbotlash uchun $\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\le\varepsilon$ tengsizlik ehtimolligini hisoblash kerak. Buning uchun bu tengsizlikni unga teng kuchli $-\varepsilon\le\frac{n_A}{n}-p\le\varepsilon$ yoki $-\varepsilon\le\frac{n_A-np}{n}\le\varepsilon$ tengsizliklar bilan almashtiramiz. Bu tengsizliklarni musbat $\sqrt{\frac{n}{pq}}$ songa koʻpaytiramiz:

$$-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\le\frac{n_A-np}{\sqrt{npq}}\le\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

Agar $m=\frac{n_A-np}{\sqrt{npq}}$ belgilashni kiritsak, u holda (1.14.5) formulaga asosan:

$$P_n\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\le m\le\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-t^2/2}dt=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-t^2/2}dt=2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$ [1], [2]

2-misol. Detalning nostandart boʻlishi ehtimolligi 0.6 ga teng. n=1200 ta detal ichida nostandart detallar boʻlishi nisbiy chastotasining p=0.6 ehtimollikdan chetlashishi absolut qiymati $\varepsilon=0.05$ dan katta boʻlmasligi ehtimolligini toping.
(1.4.10) ga asosan,

$$P_{1200}\left\{\left|\frac{n_A}{n}-0.6\right|\le 0.05\right\}=2\Phi_0\left(0.05\sqrt{\frac{1200}{0.6\cdot 0.4}}\right)=2\Phi_0(3.54)\approx 0.9996.$$

8-mavzu: Puasson teoremasi. Integral limit teorema tadbiqlari.

Reja:

1.Puasson formulasi.
2.Puasson formulasining isboti.

Asosiy tushuncha va iboralarlar

$\mathrm{P}_n(m)$**,** $p\to 0$**,** $np_n=a$**,**Puasson formulasi va hodisalar seriyasi.

Puasson formulasi

✓ Agar $n\to\infty$ da A hodisaning roʻy berish ehtimolligi p har bir tajribada cheksiz kamaysa(ya’ni $np\to a>0$), u holda

$$\lim_{n\to\infty}P_n(m)=\frac{a^m\cdot e^{-a}}{m!},\ m=0,1,2,\dots\,. \qquad (1.14.1)$$

(1.14.1) formula Puassonning asimptotik formulasi deyiladi.

$p=\frac{a}{n}$ belgilash kiritib, Bernulli formulasidan

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\left(\frac{a}{n}\right)^m\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m}=$$

$$=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(m-1))}{m!}\cdot\frac{a^m}{n^m}\cdot\left(1-\frac{a}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m}=$$

$$=\frac{a^m}{m!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-(m-1)}{n}\cdot\left(1-\frac{a}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m}=$$

$$=\frac{a^m}{m!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{a}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m} \qquad (1.14.2)$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n=e^{-a}$ ekanligini e’tiborga olib, (1.14.2) tenglikdan limitga o‘tamiz:

$$\lim_{n\to\infty}P_n(m)=\frac{a^m}{m!}e^{-a}.$$

Demak, yetarlicha katta n larda (kichik p da)

$$P_n(m)\approx\frac{a^m\cdot e^{-a}}{m!},\quad a=np,\quad m=0,1,\ldots,n \qquad (1.14.3)$$

(1.14.3) formula Puasson formulasi deyiladi. Odatda Puasson formulasidan $n\geq 50,\quad np\leq 10$ bo‘lgan hollarda foydalaniladi [1], [2], [6].

. **1-misol.** Telefon stansiyasi 2000 ta abonentga xizmat ko‘rsatadi. Agar har bir abonent uchun unig bir soatning ichida qo‘ng‘iroq qilishi ehtimolligi 0.003 bo‘lsa, bir soatning ichida 5 ta abonent qo‘ngiroq qilishi ehtimolligini toping.

n=2000, p=0.003, m=5, a=np=2000·0.003=6<10. Demak, Puasson formulasiga ko‘ra $P_{2000}(5)=\frac{6^5\cdot e^{-6}}{5!}\approx 0{,}13$.

9-mavzu: Tasodifiy miqdor va taqsimot funktsiya. Taqsimot funktsiya xossalari.

Reja:

1.Tasodifiy miqdorlar.
2.Taqsimot funktsiya.

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Elementar hodisalar fazosi, o’lchovli funktsiya, akslantirish, tasodifiy miqdor, taqsimot qonun va taqsitmot funktsiya.

Tasodifiy miqdor tushunchasi

Ehtimollar nazariyasining muhim tusunchalaridan biri tasodifiy miqdor tushunchasidir.

✓ Tajriba natijasida u yoki bu qiymatni qabul qilishi oldindan ma’lum bo‘lmagan miqdor *tasodifiy miqdor* deyiladi.

Tasodifiy miqdorlar lotin alifbosining bosh harflari $X,Y,Z,\ldots$(yoki grek alifbosining kichik harflari ξ(ksi), η(eta), ζ(dzeta),…) bilan qabul qiladigan qiymatlari esa kichik harflar $x_1,x_2,\ldots,y_1,y_2,\ldots,z_1,z_2,\ldots$ bilan belgilanadi.

Tasodifiy miqdorlarga misollar keltiramiz: 1) X-tavakkaliga olingan mahsulotlar ichida sifatsizlari soni; 2) Y-n ta o‘q uzilganda nishonga tekkanlari soni; 3) Z-asbobning beto‘htov ishlash vaqti; 4) U-[0,1] kesmadan tavakkaliga tanlangan nuqtaning koordinatalari; 5) V-bir kunda tug‘iladigan chaqaloqlar soni va h.k..

✓ Agar tasodifiy miqdor(t.m.) chekli yoki sanoqli qiymatlar qabul qilsa, bunday t.m. *diskret tipdagi t.m.* deyiladi.

✓ Agar t.m. qabul qiladigan qiymatlari biror oraliqdan iborat bo‘lsa *uzluksiz tipdagi t.m.* deyiladi.

Demak, diskret t.m. bir-biridan farqli alohida qiymatlarni, uzluksiz t.m. esa biror oraliqdagi ihtiyoriy qiymatlarni qabul qilar ekan. Yuqoridagi X va Y t.m.lar diskret, Z esa uzluksiz t.m. bo‘ladi.

Endi t.m.ni qat’iy ta’rifini keltiramiz.

✓ Ω elementar hodisalar fazosida aniqlangan X sonli funksiya t.m. deyiladi, agar har bir ω elementar hodisaga $X(\omega)$ conni mos qo‘ysa, yani $X=X(\omega)$, $\omega\in\Omega$.

Masalan, tajriba tangani 2 marta tashlashdan iborat bo‘lsin. Elementar hodisalar fazosi $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}, \quad \omega_1=GG, \omega_2=GR, \omega_3=RG, \omega_4=RR$ bo‘ladi. X-gerb chiqishlari soni bo‘lsin, u holda X t.m. qabul qiladigan qiymatlari: $X(\omega_1)=2$, $X(\omega_2)=1$, $X(\omega_3)=1$, $X(\omega_4)=0$.

Agar Ω chekli yoki sanoqli bo‘lsa, u holda Ω da aniqlangan ixtiyoriy funksiya t.m. bo‘ladi. Umuman, $X(\omega)$ funksiya shunday bo‘lishi kerakki: $\forall x\in R$ da $A=\{\omega: X(\omega)<x\}$ hodisa S σ-algebrasiga tegishli bo‘lishi kerak.

Taqsimot funksiyasi va uning xossalari

Diskret va uzluksiz t.m.lar taqsimotlarini berishning universal usuli ularning taqsimot funksiyalarini berishdir. Taqsimot funksiya $F(x)$ orqali belgilanadi.

✓ $F(x)$ funksiya X t.m.ning *taqsimot funksiyasi* $\forall x\in R$ son uchun quyidagicha aniqlanadi:

$$F(x)=P\{X<x\}=P\{\omega: X(\omega)<x\}. \qquad (2.3.1)$$

Taqsimot funksiyasi quyidagi xossalarga ega:

1. $F(x)$ chegaralangan:

$$0\le F(x)\le 1.$$

2. $F(x)$ kamaymaydigan funksiya: agar $x_1<x_2$ bo‘lsa, u holda $F(x_1)\le F(x_2)$.

3. $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0, \quad F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1.$

4. $F(x)$ funksiya chapdan uzluksiz:

$$\lim_{x\to x_0-0}F(x)=F(x_0).$$

Isboti: 1. Bu xossa (2.3.1) va ehtimollikning xossalaridan kelib chiqadi.

2. $A=\{X<x_1\}, B=\{X<x_2\}$ hodisalarni kiritamiz. Agar $x_1<x_2$ bo‘lsa, u holda $A\subseteq B$ va $P(A)\le P(B)$, ya’ni $P(X<x_1)\le P(X<x_2)$ yoki $F(x_1)\le F(x_2)$.

3. $\{X<-\infty\}=\varnothing$ va $\{X<+\infty\}=\Omega$ ekanligi va ehtimollikning xossasiga ko‘ra

$$F(-\infty)=P\{X<-\infty\}=P\{\varnothing\}=0$$
$$F(+\infty)=P\{X<+\infty\}=P\{\Omega\}=1.$$

4. $A=\{X<x_0\}$, $A_n=\{X<x_n\}$ hodisalarni kiritamiz. Bu yerda $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton o‘suvchi, $x_n\uparrow x_0$. A_n hodisalar ketma-ketligi ham o‘suvchi bo‘lib, $\bigcup_n A_n=A$. U holda $P(A_n)\to P(A)$, ya’ni $\lim_{x\uparrow x_0}F(x)=F(x_0)$. ■

Diskret t.m. taqsimot funksiyasi quyidagicha ifodalanadi:

$$F(x)=\sum_{x_i<x}p_i\,. \qquad (2.3.2)\ [6].$$

2-misol. 2.1-misoldagi *X* t.m. taqsimot funksiyasini topamiz.

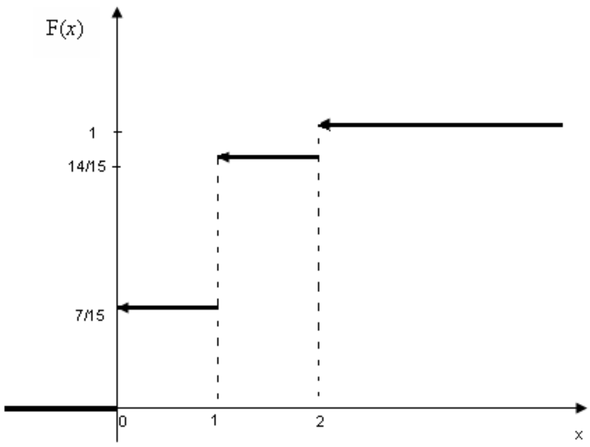
X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

1. Agar $x\le 0$ bo‘lsa, $F(x)=P\{X<0\}=0$;
2. Agar $0<x\le 1$ bo‘lsa, $F(x)=P\{X<1\}=P\{X=0\}=\frac{7}{15}$;
3. Agar $1<x\le 2$ bo‘lsa, $F(x)=P\{X=0\}+P\{X=1\}=\frac{7}{15}+\frac{7}{15}=\frac{14}{15}$;
4. Agar $x>2$ bo‘lsa, $F(x)=P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}=\frac{7}{15}+\frac{7}{15}+\frac{1}{15}=1$.

Demak,

$$F(x)=\begin{cases}0, \ agar\ x\le 0\\ 7/15, \ agar\ 0<x\le 1\\ 14/15, \ agar\ 1<x\le 2\\ 1, \ agar\ x>2\end{cases}$$

$F(x)$ taqsimot funksiya grafigi 13-rasmda keltirilgan.



13-rasm.

10-mavzu: Diskret va uzluksiz tipdagi tasodifiy miqdorlar.

Reja:

1. Diskret tasodifiy miqdor.
2. Uzluksiz tasodifiy miqdor.

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Elementar hodisalar fazosi, o’lchovli funktsiya, akslantirish, tasodifiy miqdor, taqsimot qonun va taqsitmot funktsiya, diskret tasodifiy miqdor, uzluksiz tasodifiy miqdor, zichlik funktsiya.

Diskret tasodifiy miqdor va uning taqsimot qonuni

X-diskret t.m. bo‘lsin. *X* t.m. $x_1, x_2, ..., x_n, \cdots$ qiymatlarni mos $p_1, p_2, ..., p_n, \cdots$ ehtimolliklar bilan qabul qilsin:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

jadval diskret t.m. taqsimot qonuni jadvali deyiladi. Diskret t.m. taqsimot qonunini $p_i = P\{X = x_i\},\ i = 1, 2, ..., n, ...$ ko‘rinishda yozish ham qulay.

$\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, ...$ hodisalar birgalikda bo‘lmaganligi uchun ular to‘la gruppani tashkil etadi va ularning ehtimolliklari yig‘indisi birga teng bo‘ladi, ya’ni $\sum_i p_i = \sum_i P\{X = x_i\} = 1$.

✓ *X* t.m. *diskret t.m.* deyiladi, agar $x_1, x_2, \cdots$ chekli yoki sanoqli to‘plam bo‘lib, $P\{X = x_i\} = p_i > 0\ (i = 1, 2, ...)$ va $p_1 + p_2 + ... = 1$ tenglik o‘rinli bo‘lsa.

X va *Y* diskret t.m.lar *bog‘liqsiz* deyiladi, agar $A_i = \{X = x_i\}$ va $B_i = \{Y = y_j\}$ hodisalar $\forall i = 1, 2, ..., n,\ j = 1, 2, ..., m$ da bog‘liqsiz bo‘lsa, ya’ni $P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}, n, m \geq \infty$. [5], [11].

1-misol. 10 ta lotoreya biletida 2 tasi yutuqli bo‘lsa, tavakkaliga olingan 3 ta lotoreya biletlari ichida yutuqlilari soni X t.m.ning taqsimot qonunini toping.

X t.m.ni qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$. Bu qiymatlarning mos ehtimolliklari esa

$$p_1 = P\{X = 0\} = \frac{C_2^0 \cdot C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15};$$

$$p_2 = P\{X = 1\} = \frac{C_2^1 \cdot C_8^2}{C_{10}^3} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15};$$

$$p_3 = P\{X = 2\} = \frac{C_2^2 \cdot C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}.$$

X t.m. taqsimot qonunini jadval ko‘rinishida yozamiz:

X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = \frac{7}{15} + \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = 1$$

Uzluksiz tasodifiy miqdor

✓ X t.m. uzluksiz deyiladi, agar uning taqsimot funksiyasi ixtiyoriy nuqtada uzluksiz bo‘lsa.

Agar $F(x)$ taqsimot funksiya uzluksiz t.m. taqsimot funksiyasi bo‘lsa, taqsimot funksiyaning 1-4 xossalaridan quyidagi natijalarni keltirish mimkin:

1. X t.m.ning [a,b) oraliqda yotuvchi qiymatni qabul qilish ehtimolligi taqsimot funksiyaning shu oraliqdagi orttirmasiga teng:

$$P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a). \tag{2.3.3}$$

2. X uzluksiz t.m.ning tayin bitta qiymatni qabul qilishi ehtimolligi nolga teng:

$$P\{X = x_i\} = 0$$

1-natijada [a,b], (a,b], (a,b) oraliqlar uchun ham (2.3.3) tenglik o‘rinli, ya’ni

$$P\{a \le X < b\} = P\{a \le X \le b\} = P\{a < X \le b\} = P\{a < X < b\} = F(b) - F(a).$$

Masalan, $P\{a \le X < b\} = P\{X = a\} + P\{a < X < b\} = P\{a < X < b\}$.

Isboti. 1. $a<b$ bo‘lgani uchun $\{X < b\} = \{X < a\} + \{a \le X < b\}$. $\{X < a\}$ va $\{a \le X < b\}$ hodisalar birgalikda bo‘lmagani uchun $P\{X < b\} = P\{X < a\} + \ +P\{a \le X < b\}$. $P\{a \le X < b\} = P\{X < b\} - P\{X < a\} = F(b) - F(a)$.

2. (2.3.3.) tenglikni [a,x) oraliqqa tatbiq etamiz: $P\{a \le X < x\} = F(x) - F(a)$. $F(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz bo‘lgani uchun $\lim\limits_{x \to a} F(x) = F(a)$.

$\lim\limits_{x \to a} P\{a \le X < x\} = P\{X = a\} = \lim\limits_{x \to a} F(x) - F(a) = F(a) - F(a) = 0$. ■

Zichlik funksiyasi va uning xossalari

Uzluksiz t.m.ni asosiy xarakteristikasi zichlik funksiya hisoblanadi.

✓ Uzluksiz t.m. *zichlik funksiyasi* deb, shu t.m. taqsimot funksiyasidan olingan birinchi tartibli hosilaga aytiladi.

Uzluksiz t.m. zichlik funksiyasi $f(x)$ orqali belgilanadi. Demak,

$$f(x) = F'(x). \tag{2.4.1}$$

Zichlik funksiyasi quyidagi xossalarga ega:

1. $f(x)$ funksiya manfiy emas, ya’ni

$$f(x) \ge 0.$$

2. X uzluksiz t.m.ning [a,b] oraliqqa tegishli qiymatni qabul qilishi ehtimolligi zichlik funksiyaning a dan b gacha olingan aniq integralga teng, ya’ni

$$P\{a \le X \le b\} = \int_a^b f(x)dx.$$

3. Uzluksiz t.m. taqsimot funksiyasi zichlik funksiya orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \qquad (2.4.2)$$

4. Zichlik funksiyasidan $-\infty$ dan $+\infty$ gacha olingan xosmas integral birga tengdir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1.$$

Isbotlar: 1. $F(x)$ kamaymaydigan funksiya bo‘lgani uchun $F'(x)\geq 0$, ya’ni $f(x)\geq 0$.

2. $P\{a\leq X<b\}=F(b)-F(a)$ tenglikdan Nyuton-Leybnis formulasiga asosan:

$$F(b)-F(a)=\int_a^b F'(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

Bu yerdan $P\{a\leq X\leq b\}=\int_a^b f(x)dx$.

3. 2-xossadan foydalanamiz:

$$F(x)=P\{X<x\}=P\{-\infty<X<x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

4. Agar 2-xossada $a=-\infty$ va $b=+\infty$ deb olsak, u holda muqarrar $X\in(-\infty,+\infty)$ ga hodisaga ega bo‘lamiz, u holda

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=P\{-\infty<X<+\infty\}=P\{\Omega\}=1.$$

3-misol. X t.m. zichlik funksiyasi $f(x)=\dfrac{a}{1+x^2}$ tenglik bilan berilgan. O‘zgarmas a parametrni toping.

Zichlik funksiyaning 4-xossasiga ko‘ra $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{a}{1+x^2}dx=1$, ya’ni

$a\cdot\lim\limits_{\substack{d\to+\infty\\ c\to-\infty}}\int_c^d\dfrac{1}{1+x^2}dx=a\cdot\lim\limits_{\substack{d\to+\infty\\ c\to-\infty}} arctgx\,|_c^d=a\cdot\left(\dfrac{\pi}{2}-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=a\cdot\pi=1$. Demak, $a=\dfrac{1}{\pi}$.

11-mavzu: Ba’zi muhim taqsimotlar

Reja:

1.Ba’zi muhim diskret taqsimotlar
2.Ba’zi muhim uzluksiz taqsimotlar

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Elementar hodisalar fazosi, o’lchovli funktsiya, akslantirish, tasodifiy miqdor, taqsimot qonun va taqsitmot funktsiya, diskret tasodifiy miqdor, uzluksiz tasodifiy miqdor, zichlik funktsiya, binomial taqsimot, puasson taqsimoti, geometrik taqsimot, ko’rsatkichli taqsimot, tekis taqsimot, normal taqsimot.

Binomial taqsimot

✓ X diskret t.m. *binomial qonun* bo‘yicha taqsimlangan deyiladi, agar u 0,1,2,…n qiymatlarni

$$p_m=P\{X=m\}=C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (2.6.1)$$

ehtimollik bilan qabul qilsa.
Bu yerda $0 < p < 1,\ q = 1 - p,\ m = 0,1,...,n$.

Binomial qonun bo‘yicha taqsimlangan X diskret t.m. yaqsimot qonuni quyidagi ko‘rinishga ega:

X=m	0	1	2	…	m	…	n
$p_m = P\{X = m\}$	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^m p^m q^{n-m}$	…	p^n

Nyuton binomiga asosan $\sum_{m=0}^{n} p_m = (p+q)^n = 1$. Bunday taqsimotni $Bi(n, p)$ orqali belgilaymiz.

Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ agar\ x \le 0 \\ \sum\limits_{m<x} C_n^m p^m q^{n-m},\ agar\ 0 < x \le n \\ 1,\ agar\ n < x. \end{cases}$$

Endi bu taqsimotning sonli xarakteristikalarini hisoblaymiz.

$$MX = \sum_{m=0}^{n} m \cdot P\{X = m\} = \sum_{m=1}^{n} m \cdot P\{X = m\} = \sum_{m=1}^{n} m \cdot C_n^m p^m q^{n-m} = np \sum_{m=1}^{n} C_{n-1}^{m-1} p^{m-1} q^{n-m} =$$
$$= np(p+q)^{n-1} = np.$$

$DX = \sum_{m=0}^{n} m^2 P\{X = m\} - (np)^2 = \sum_{m=1}^{n} m^2 C_n^m p^m q^{n-m} - (np)^2 = |\, m^2 = m(m-1) + m$ almashtirish bajaramiz$| = n(n-1)p^2 \sum_{m=2}^{n} C_{n-2}^{m-2} p^{m-2} q^{n-m} + np \sum_{m=1}^{n} C_{n-1}^{m-1} p^{m-1} q^{n-m} - (np)^2 =$

$$n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = npq.$$

Demak, $MX = np;\quad DX = npq$.

Puasson taqsimoti

- ✓ Agar X t.m. 0,1,2,…m,… qiymatlarni

$$p_m = P\{X = m\} = \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!} \qquad (2.6.2)$$

ehtimolliklar bilan qabul qilsa, u *Puasson qonuni* bo‘yicha taqsimlangan t.m. deyiladi. Bu yerda a biror musbat son.

Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan X diskret t.m.ning taqsimot qonuni quyidagi ko‘rinishga ega:

X=m	0	1	2	…	m	…
$p_m = P\{X = m\}$	e^{-a}	$\frac{a \cdot e^{-a}}{1!}$	$\frac{a^2 \cdot e^{-a}}{2!}$	…	$\frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}$	…

Teylor yoyilmasiga asosan, $\sum_{m=0}^{\infty} p_m = e^{-a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!} = e^{-a}\cdot e^{a} = 1$. Bu taqsimotni $\Pi(a)$ orqali belgilaymiz. Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \; agar \; m \le 0 \\ \sum\limits_{m<x}\dfrac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}, \; agar \; 0 < m \le x \end{cases}$$

Endi bu taqsimotning sonli xarakteristikalarini hisoblaymiz:

$$MX = \sum_{m=0}^{\infty} m\cdot\frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!} = e^{-a}\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot\frac{a^m}{m!} = a\cdot e^{-a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!} = a\cdot e^{-a}\cdot e^{a} = a,$$

$$DX = \sum_{m=0}^{\infty} m^2\cdot\frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!} - a^2 = a\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot\frac{a^{m-1}\cdot e^{-a}}{(m-1)!} - a^2 =$$
$$= a\cdot\left[\sum_{k=0}^{\infty} k\,\frac{a^k\cdot e^{-a}}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k\cdot e^{-a}}{k!}\right] - a^2 = a(a+1) - a^2 = a$$

Demak, $MX = a$; $DX = a$.

Geometrik taqsimot

✓ Agar *X* t.m. 1,2,…m,… qiymatlarni

$$p_m = P\{X = m\} = q^{m-1}p \tag{2.6.3}$$

ehtimolliklar bilan qabul qilsa, u *geometrik qonuni* bo‘yicha taqsimlangan t.m. deyiladi. Bu yerda $p = 1 - q \in (0,1)$.

Geometrik qonun bo‘yicha taqsimlangan t.m.larga misol sifatida quyidagilarni olish mumkin: sifatsiz mahsulot chiqqunga qadar tekshirilgan mahsulotlar soni; gerb tomoni tushgunga qadar tashlangan tangalar soni; nishonga tekkunga qadar otilgan o‘qlar soni va hokazo.

Geometrik qonun bo‘yicha taqsimlangan *X* diskret t.m. taqsimot qonuni quyidagi ko‘rinishga ega:

X=m	1	2	…	m	…
$p_m = P\{X = m\}$	p	qp	…	$q^m p$	…

$$\sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1}p = p\sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1} = p\cdot\frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1,$$

chunki p_m ehtimolliklar geometrik progressiyani tashkil etadi: $p, qp, q^2p, q^3p, \ldots$. Shuning uchun ham (2.6.3) taqsimot geometrik taqsimot deyiladi va $Ge(p)$ orqali belgilanadi.

Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$F(x)=\begin{cases}0, \ agar \ m<1\\ \sum\limits_{m<x} q^{m-1}p, \ agar \ 1\le m\le x\end{cases}$$

Endi bu taqsimotning sonli xarakteristikalarini hisoblaymiz:

$$MX=\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot q^{m-1}p=p\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot q^{m-1}=p\left(\sum_{m=0}^{\infty} q^m\right)_q'=p\left(\frac{1}{1-q}\right)_q'=$$

$$=p\cdot\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{p}{p^2}=\frac{1}{p},$$

$$DX=\sum_{m=1}^{\infty} m^2\cdot q^{m-1}p-\frac{1}{p^2}=(m^2=m(m-1)+m \text{ almashtirishni bajaramiz})=$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot(m-1)q^{m-1}p+\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot q^{m-1}p-\frac{1}{p^2}=pq\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot(m-1)q^{m-2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}=$$

$$q\left(\sum_{m=0}^{\infty} q^m\right)_{q^2}''+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}=pq\frac{2}{(1-q)^3}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}=\frac{2pq}{p^3}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}=\frac{q}{p^2}.$$

Demak, $MX=\dfrac{1}{p}$; $DX=\dfrac{q}{p^2}$.

Tekis taqsimot

- ✓ Agar uzluksiz *X* t.m. zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, \text{ agar } x\in[a,b],\\ 0, \text{ agar } x\notin[a,b]\end{cases} \qquad (2.6.4)$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, u *[a,b] oraliqda tekis taqsimlangan* t.m. deyiladi.
Bu t.m.ning grafigi 14-rasmda berilgan. [*a*,*b*] oraliqda tekis taqsimlangan X t.m. ni $X \sim R[a,b]$ ko‘rinishda belgilanadi. $X \sim R[a,b]$ uchun taqsimot funksiyasini topamiz. (2.4.2) formulaga ko‘ra agar $a\le x\le b$ bo‘lsa

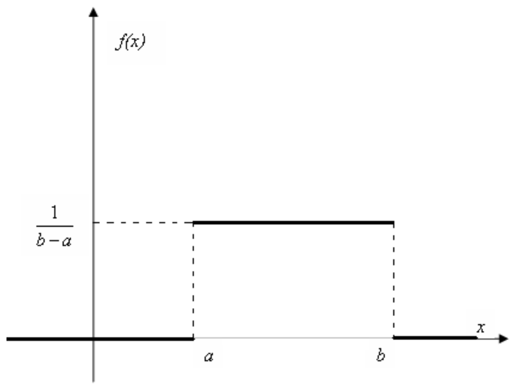
$$F(x)=\int_a^x \frac{dt}{b-a}=\frac{t}{b-a}\bigg|_a^x=\frac{x-a}{b-a},$$

agar $x<a$ bo‘lsa, $F(x)=0$ va $x>b$ bo‘lsa,

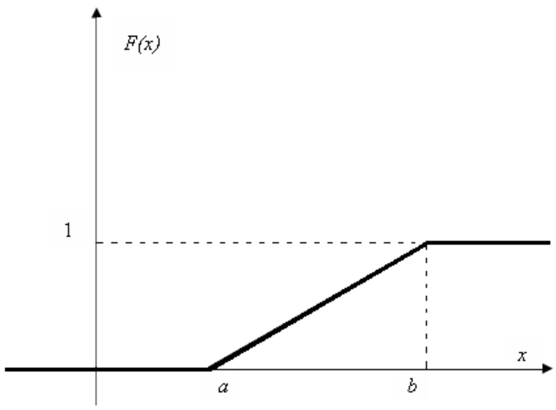
$$F(x)=\int_{-\infty}^{a} 0dt+\int_a^b \frac{dt}{b-a}+\int_b^x 0dt=\frac{t}{b-a}\bigg|_a^b=1 \text{ bo‘ladi. Demak,}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, \quad \text{agar } x<a \text{ bo'lsa,}\\ \dfrac{x-a}{b-a}, \ \text{agar } a\le x\le b \text{ bo'lsa,}\\ 1, \quad \text{agar } b<x \text{ bo'lsa,}\end{cases}$$

F(*x*) taqsimot funksiyaning grafigi 15-rasmda keltirilgan.



14-rasm.



15-rasm.

$X \in R[a,b]$ t.m. uchun MX va DX larni hisoblaymiz:

$$MX = \int_{-\infty}^{a} x\cdot 0dx + \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a}dx + \int_{b}^{+\infty} x\cdot 0dx = \left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},;$$

$$DX = \int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{3}\left.\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\right|_a^b =$$

$$= \frac{1}{3(b-a)}\left(\frac{(b-a)^3}{8} - \frac{(a-b)^3}{8}\right) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

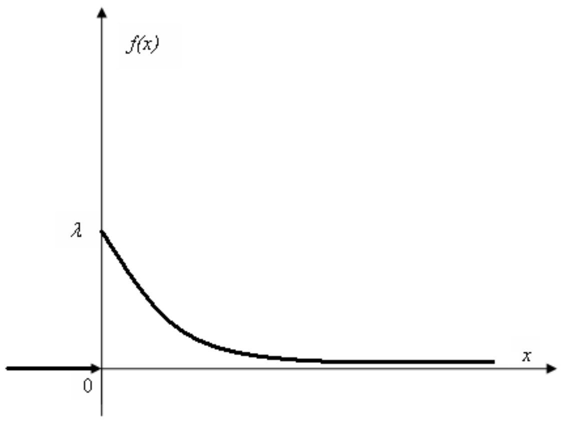
Demak, $MX = \dfrac{a+b}{2}$, $DX = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Ko‘rsatkichli taqsimot

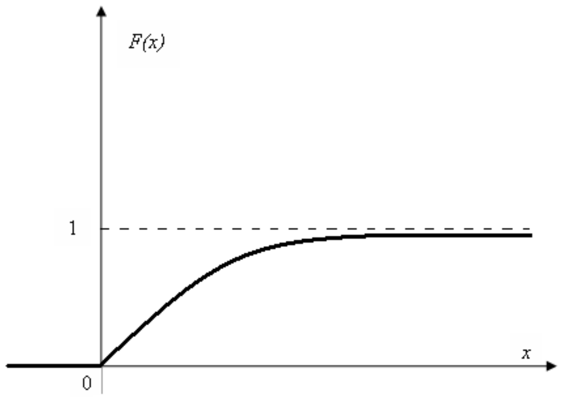
✓ Agar uzluksiz X t.m. zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \text{ agar } x \ge 0, \\ 0, \text{ agar } x < 0 \end{cases} \qquad (2.6.5)$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, X t.m. *ko‘rsatkichli qonun* bo‘yicha taqsimlangan t.m. deyiladi. Bu yerda λ biror musbat son. λ parametrli ko‘rsatkichli taqsimot $E(\lambda)$ orqali belgilanadi. Uning grafigi 16-rasmda keltirilgan.



16-rasm.



17-rasm.

Taqsimot funksiyasi quyidagicha ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, \text{ agar } x\ge 0,\\ 0, \text{ agar } x<0.\end{cases}$$

Uning grafigi 17-rasmda keltirilgan.

Endi ko‘rsatkichli taqsimotning matematik kutilmasi va dispersiyasini hisoblaymiz:

$$MX=\int_0^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\lim_{b\to\infty}\left(-\int_0^b x de^{-\lambda x}\right)=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-x\cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^b+\int_0^b e^{-\lambda x}dx\right)=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^b\right)=\frac{1}{\lambda},$$

$$DX=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-(MX)^2=\lambda\int_0^{+\infty} x^2\cdot e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=$$

$$=[\text{bo'laklab integrallash formulasini ikki marta qo'llaymiz}]=$$

$$=\lambda\left(\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{x^2}{\lambda}e^{-\lambda x}+\frac{2}{\lambda}\left(-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}-\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\right)\right)\Bigg|_0^b\right)-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Demak, agar $X \sim E(\lambda)$ bo‘lsa, u holda $MX=\frac{1}{\lambda}$ va $DX=\frac{1}{\lambda^2}$.

Normal taqsimot

Normal taqsimot ehtimollar nazariyasida o‘ziga xos o‘rin tutadi. Normal taqsimotning xususiyati shundan iboratki, u limit taqsimot hisoblanadi. Ya’ni boshqa taqsimotlar ma’lum shartlar ostida bu taqsimotga intiladi. Normal taqsimot amaliyotda eng ko‘p qo‘llaniladigan taqsimotdir.

✓ X uzluksiz t.m. *normal qonun* bo‘yicha taqsimlangan deyiladi, agar uning zichlik funksiyasi quyidagicha ko‘rinishga ega bo‘lsa

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ x\in R \tag{2.6.6}$$

a va $\sigma>0$ parametrlar bo‘yicha normal taqsimot $N(a,\sigma)$ orqali belgilanadi. $X\sim N(a,\sigma)$ normal t.m.ning taqsimot funksiyasi

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt. \tag{2.6.7}$$

Agar normal taqsimot parametrlari a=0 va $\sigma=1$ bo‘lsa, u standart normal taqsimot deyiladi. Standart normal taqsimotning zichlik funksiyasi quyidagicha ko‘rinishga ega:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Bu funksiya bilan 1.14 paragrafda tanishgan edik(uning grafigi 9-rasmda keltirilgan). Taqsimot funksiyasi

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt$$

ko‘rinishga ega va u Laplas funksiyasi deyiladi(uning grafigi 10-rasmda keltirilgan).

a va σ parametrlarni ma’nosini aniqlaymiz. Buning uchun $X\sim N(a,\sigma)$ t.m.ning matematik kutilmasi va dispersiyasini hisoblaymiz:

$$MX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\left[\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}=\text{t almashtirish bajaramiz}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\sqrt{2}\sigma t+a)e^{-t^2}\sqrt{2}\sigma dt=\frac{\sigma\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}te^{-t^2}dt+\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=0+\frac{a}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi}=a$$

Birinchi integral nolga teng, chunki integral ostidagi funksiya toq, integrallash chegarasi esa nolga nisbatan simmetrikdir. Ikkinchi integral esa Puasson integrali deyiladi,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}\,.$$

Shunday qilib, *a* parametr matematik kutilmani bildirar ekan. Dispersiya hisoblashda $\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}$ =t almashtirish va bo‘laklab integrallashdan foydalanamiz:

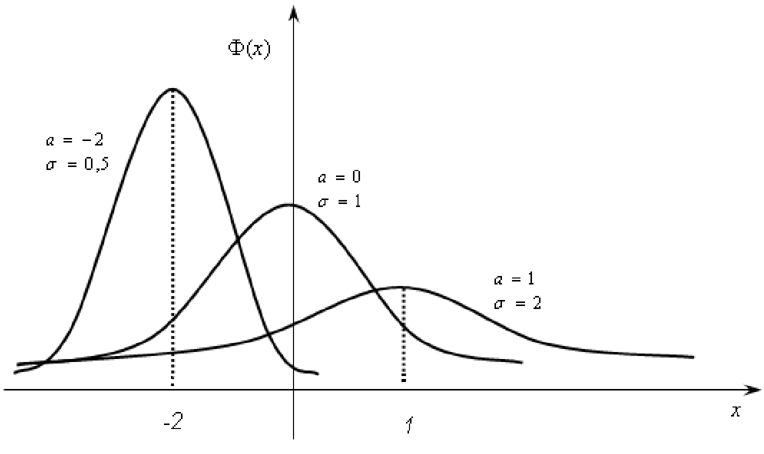
$$DX=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\cdot f(x)dx=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}2\sigma^2t^2e^{-t^2}\sigma\sqrt{2}dt=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}dt=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2}te^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt\right)=$$

$$=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\sigma^2\,.$$

Demak, $DX=\sigma^2$ va σ o‘rtacha kvadratik tarqoqlikni bildirar ekan[5].

18-rasmda a va σ larning turli qiymatlarida normal taqsimot grafigining o‘zgarishi tasvirlangan:



18-rasm.

$X \sim N(a,\sigma)$ t.m.ning (α,β) intervalga tushishi ehtimolligini hisoblaymiz. Avvalgi mavzulardan ma’lumki,

5. [5] Jun Shao Mathematikal Statistics. Springer. 2003. 591 p.

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \int_\alpha^\beta f(x)dx = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \left[\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}=\text{t}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Laplas funksiyasidan foydalanib((1.14.6) formula), quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi_0\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \tag{2.6.8}$$

Normal taqsimot taqsimot funksiyasini Laplas funksiyasi orqali quyidagicha ifodalasa bo‘ladi:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt = P\{-\infty < X < x\} = \Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\infty-a}{\sigma}\right) =$$

$$\Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) + \Phi_0(+\infty) = \Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) + \frac{1}{2} \tag{2.6.9}$$

Agar Laplas funksiyasi $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$ bo‘lsa, u holda $F(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ va (2.6.8) formulani quyidagicha yozsa bo‘ladi:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \tag{2.6.10}$$

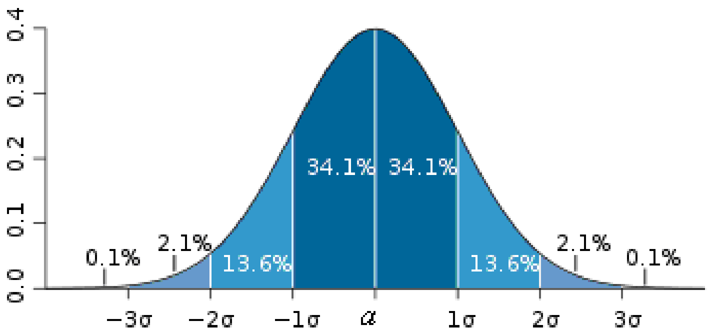
Amaliyotda ko‘p hollarda normal t.m.ning a ga nisbatan simmetrik bo‘lgan intervalga tushishi ehtimolligini hisoblashga to‘gri keladi. Uzunligi $2l$ bo‘lgan $(a-l, a+l)$ intervalni olaylik, u holda $P\{a-l \le X \le a+l\} = P\{|X-a| \le l\} =$

$$\Phi_0\left(\frac{a+l-a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-l-a}{\sigma}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{l}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right) - 1.$$

Demak,

$$P\{|X-a| \le l\} = 2\Phi_0\left(\frac{l}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right) - 1. \tag{2.6.11}$$

(2.6.11) da $l = 3\sigma$ deb olsak, $P\{|X-a| \le 3\sigma\} = 2\Phi_0(3)$ bo‘ladi. $\Phi_0(x)$ funksiyaning qiymatlari jadvalidan $\Phi_0(3) = 0.49865$ ni topamiz. U holda $P\{|X-a| \le 3\sigma\} \approx 0.9973$ bo‘ladi. Bundan quyidagi muhim natijaga ega bo‘lamiz: Agar $X \sim N(a,\sigma)$ bo‘lsa, u holda uning matematik kutilishidan chetlashishining absolut qiymati o‘rtacha kvadratik tarqoqligining uchlanganidan katta bo‘lmaydi. Bu qoida “*uch sigma qoidasi*” deyiladi(19-rasm).



19-rasm.

12-mavzu: Tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari

Reja:

1.Matematik kutilma va uning xossalari.
2.Dispersiya va uning xossalari.

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Matematik kutilma, yaqinlashuvchi qatorlar, muhim taqsimotlar, chetlanish, o’rtacha kvadratik chetlanish, dispersiya, normallashgan va markazlashgan tasodifiy miqdor.

X diskret t.m. taqsimot qonuni berilgan bo‘lsin: $\{\, p_i = P\{X = x_i\},\ i = 1, 2, ..., n, ... \,\}$.

Matematik kutilma

✓ *X* t.m. *matematik kutilmasi* deb, $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ qator yig‘indisiga aytiladi va

$$MX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \tag{2.5.1}$$

orqali belgilanadi.

Matematik kutilmaning ma’nosi shuki, u t.m. o‘rta qiymatini ifodalaydi. Haqiqatan ham $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ ekanligini hisobga olsak, u holda

$$MX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{\infty} p_i} = x_{o'rtacha}\,.$$

✓ Uzluksiz t.m. *matematik kutilmasi* deb

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx \tag{2.5.2}$$

integralga aytiladi. (2.5.2) integral absolut yaqinlashuvchi, ya’ni $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot f(x)dx < \infty$ bo‘lsa matematik kutilma chekli, aks holda matematik kutilma mavjud emas deyiladi.

Matematik kutilmaning xossalari:

1. O‘zgarmas sonning matematik kutilmasi shu sonning o‘ziga teng, ya’ni
$$MC=C.$$
2. O‘zgarmas ko‘paytuvchini matematik kutilish belgisidan tashqariga chiqarish mumkin,
$$M(CX)=CMX.$$
3. Yig‘indining matematik kutilmasi matematik kutilmalar yig‘indisiga teng,
$$M(X+Y)=MX+MY.$$
4. Agar X⊥Y bo‘lsa,
$$M(X\cdot Y)=MX\cdot MY.$$

Isbotlar: 1. O‘zgarmas C sonni faqat 1 ta qiymatni bir ehtimollik bilan qabul qiluvchi t.m. sifatida qarash mumkin. Shuning uchun $MC=C\cdot P\{X=C\}=C\cdot 1=C$.

2. $C\cdot X$ diskret t.m. $C\cdot x_i\ (i=\overline{1,n})$ qiymatlarni p_i ehtimolliklar bilan qabul qilsin, u holda $MCX=\sum_{i=1}^{n}C\cdot x_i p_i=C\sum_{i=1}^{n}x_i p_i=C\cdot MX$.

3. $X+Y$ diskret t.m. x_i+y_i qiymatlarni $p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}$ ehtimolliklar bilan qabul qiladi, u holda ixtiyoriy n va m lar uchun
$$M(X+Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i+y_j)p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i p_{ij}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j p_{ij}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{m}p_{ij}+\sum_{j=1}^{m}y_i\sum_{i=1}^{n}p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i+\sum_{j=1}^{m}y_j p_j=MX+MY$$
Bu yerda $\sum_{j=1}^{m}p_{ij}=p_i$ va $\sum_{i=1}^{n}p_{ij}=p_j$ bo‘ladi. Chunki,
$$\bigcup_{j=1}^{m}\{X=x_i;Y=y_j\}=\{X=x_i\}\bigcup_{j=1}^{m}\{Y=y_j\}=\{X=x_i\}\cap\Omega=\{X=x_i\},$$
$$p_i=P\{X=x_i\}=P\left(\bigcup_{j=1}^{m}\{X=x_i;Y=y_j\}\right)=\sum_{j=1}^{m}P\{X=x_i;Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\ .$$
4. Agar $X\perp Y$ bo‘lsa, u holda

$$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}=p_i\cdot p_j \text{ va}$$
$$MXY=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_i\underbrace{P\{X=x_i,Y=y_j\}}_{p_{ij}}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_i\underbrace{P\{X=x_i\}}_{p_i}\underbrace{P\{Y=y_j\}}_{p_j}=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i\sum_{j=1}^{m}y_i p_j=MX\cdot MY.$$
■

Matematik kutilmaning xossalari t.m. uzluksiz bo‘lganda ham hiddi shunga o‘xshash isbotlanadi. Masalan, $MCX=\int_{-\infty}^{+\infty}C\cdot x\cdot f(x)dx=C\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=C\cdot MX$.

2.4.-misol. X diskret t.m. taqsimot qonuni berilgan bo‘lsa, X t.m.ning matematik kutilmasini toping.

X	500	50	10	1	0
P	0.01	0.05	0.1	0.15	0.69

MX=500·0.01+50·0.05+10·0.1+1·0.15+0·0.69=8.65.

2.5.-misol. X uzluksiz t.m. zichlik funksiyasi berilgan $f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0,1)\\ C\cdot x^2, & x\in(0,1)\end{cases}$.
C va MX ni toping.

Zichlik funksiyaning 4-xossasiga ko‘ra $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$. Demak,

$C\int_0^1 x^2dx = C\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = C\cdot\frac{1}{3}=1, \quad C=3$ va $f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0,1)\\ 3x^2, & x\in(0,1)\end{cases}$.

Endi matematik kutilmani hisoblaymiz:

$$MX=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx = 3\int_0^1 x\cdot x^2dx=\frac{3}{4}.$$

Dispersiya

✓ X t.m. dispersiyasi deb, $M(X-MX)^2$ ifodaga aytiladi.
Dispersiya DX orqali belgilanadi. Demak,

$$DX=M(X-MX)^2. \tag{2.5.3}$$

Agar X dickret t.m. bo‘lsa,

$$DX=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-MX)^2\cdot p_i\,, \tag{2.5.4}$$

Agar X uzluksiz t.m. bo‘lsa,

$$DX=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-MX)^2\cdot f(x)dx \tag{2.5.5}$$

T.m. dispersiyasini hisoblash uchun quyidagi formula qulaydir:

$$DX=MX^2-(MX)^2 \tag{2.5.6}$$

Bu formula matematik kutilma xossalari asosida quyidagicha keltirib chiqariladi:

$$DX=M(X-MX)^2=M(X^2-2XMX+(MX)^2)=MX^2-M(2XMX)+M(MX)^2=$$
$$=MX^2-2MXMX+(MX)^2=MX^2-(MX)^2$$

Dispersiyaning xossalari:

1. O‘zgarmas sonning dispersiyasi nolga teng $DC=0$.
2. O‘zgarmas ko‘paytuvchini kvadratga ko‘tarib, dispersiya belgisidan tashqariga chiqarish mumkin,

$$D(CX)=C^2DX.$$

3. Agar $X\perp Y$ bo‘lsa,

$$D(X+Y)=DX+DY.$$

Isbotlar: 1. $DC=M(C-MC)^2=M(C-C)^2=M0=0$.

2. $D(CX)=M(CX-M(CX))^2=M(CX-CMX)^2=M(C^2(X-MX)^2)=$
$=C^2M(X-MX)^2=C^2DX$.

3. (2.5.6.) formulaga ko‘ra

$$D(X+Y)=M(X+Y)^2-(M(X+Y))^2=MX^2+2MXY+MY^2-(MX)^2-2MXMY-(MY)^2=$$
$$=MX^2-(MX)^2+MY^2-(MY)^2+2(MXY-MXMY)=DX+DY+2(MXMY-MXMY)=DX+DY \ \blacksquare$$

2.6.-misol. *X* diskret t.m. taqsimot qonuni berilgan:

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.4

MX va *DX* ni hisoblaymiz:
MX=-1·0.2+0·0.1+1·0.3+2·0.4=0.9,

$$DX=(-1)^2\cdot 0.2+1^2\cdot 0.3+2^2\cdot 0.4-(0.9)^2=1.29.$$

✓ *X* t.m. *o'rtacha kvadratik tarqoqligi*(*chetlashishi*) deb, dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma_X=\sqrt{DX} \qquad (2.5.7)$$

Dispersiyaning xossalaridan oʻrtacha kvadratik tarqoqlikning xossalari kelib chiqadi: 1. $\sigma_C=0$; 2. $\sigma_{CX}=|C|\sigma_X$ [1], [2].

III bob. Koʻp oʻlchovli tasodifiy miqdorlar

13-mavzu: Ko'p o'lchovli taqsimotlar.

Reja:

1.Koʻp oʻlchovli tasodifiy miqdorlar
2.Koʻp oʻlchovli tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimot funksiyasi

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Koʻp oʻlchovli tasodifiy miqdorlar, $(\Omega,\mathcal{A},P)$ ehtimollik fazosi, tasodifiy vector, Ikki oʻlchovli diskret tasodifiy miqdor, hodisalar toʻla gruppasi, Ikki oʻlchovli diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni, taqsimot funksiyasi, zichlik funksiya.

Koʻp oʻlchovli tasodifiy miqdorlar va ularning birgalikdagi taqsimot funksiyasi

Bir oʻlchovli t.m.lardan tashqari, mumkin boʻlgan qiymarlari 2 ta, 3 ta, ..., n ta son bilan aniqlanadigan miqdorlarni ham oʻrganish zarurati tugʻiladi. Bunday miqdorlar mos ravishda ikki oʻlchovli, uch oʻlchovli, … , *n* oʻlchovli deb ataladi.

Faraz qilaylik, $(\Omega,\mathcal{A},P)$ ehtimollik fazosida aniqlangan $X_1,X_2,...,X_n$ t.m.lar berilgan boʻlsin.

✓ $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ vektorga tasodifiy vektor yoki *n*-oʻlchovli t.m. deyiladi.

Koʻp oʻlchovli t.m. har bir elementar hodisa ω ga n ta $X_1,X_2,...,X_n$ t.m.larning qabul qiladigan qiymatlarini mos qoʻyadi.

✓ $F_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1,x_2,...,x_n)=P\{X_1<x_1,X_2<x_2,...,X_n<x_n\}$ n oʻlchovli funksiya $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi yoki $X_1,X_2,...,X_n$ t.m.larning birgalikdagi taqsimot funksiyasi deyiladi.

Qulaylik uchun $F_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1,x_2,...,x_n)$ taqsimot funksiyani $X_1,X_2,...,X_n$ indekslarini tushirib qoldirib, $F(x_1,x_2,...,x_n)$ koʻrinishida yozamiz.

$F(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi boʻlsin. Koʻp oʻlchovli $F(x_1,x_2,...,x_n)$ taqsimot funksiyaning asosiy xossalarini keltiramiz:

1. $\forall x_i: \quad 0 \le F(x_1, x_2, ..., x_n) \le 1$, ya'ni taqsimot funksiya chegaralangan.

2. $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya har qaysi argumenti bo'yicha kamayuvchi emas va chapdan uzluksiz.

3. Agar biror $x_i \to +\infty$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{x_i \to +\infty} F(x_1, x_2, ..., x_n) = F(x_1, ..., x_{i-1}, \infty, x_{i+1}, ..., x_n) = \\ = F_{X_1, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_n}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \tag{3.1.1}$$

4. Agar biror $x_i \to -\infty$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x_i \to -\infty} F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$.

3-xossa yordamida keltirib chiqarilgan (3.1.1) taqsimot funksiyaga marginal(xususiy) taqsimot funksiya deyiladi. $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ tasodifiy vektorning barcha marginal taqsimot funksiyalari soni $k = C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{n} C_n^m - C_n^0 - C_n^n = 2^n - 2$ ga tengdir.

Masalan, $X = (X_1, X_2)$ (n=2) ikki o'lchovlik tasodifiy vektorning marginal taqsimot funksiyalari soni $k = 2^2 - 2 = 2$ ta bo'lib, ular quyidagilardir: $F(x_1, +\infty) = F_1(x_1) = P(X_1 < x_1); \quad F(+\infty, x_2) = F_2(x_2) = P(X_2 < x_2)$.

Soddalik uchun n=2 bo'lgan holda, ya'ni (X,Y) ikki o'lchovlik tasodifiy vector bo'lgan holni ko'rish bilan cheklanamiz [6], [12], [13].

.

14-mavzu:Тасодифий миқдорлардан олинган функцияларнинг тақсимотлари. Композитцион формулалар.

Reja:

1. Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor va uning taqsimot qonuni
2. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi va uning xossalari
3. Ikki o'lchovlik uzluksiz tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi va uning xossalari
4.Tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligi
5.Shartli taqsimot qonunlari

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ehtimollik fazosi, tasodifiy vector, Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor, hodisalar to'la gruppasi, Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni, taqsimot funksiyasi, zichlik funksiya, tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligi,shartli taqsimot qonunlari.

Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor va uning taqsimot qonuni

(X,Y) ikki o'lchovli t.m. taqsimot qonunini

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}; \; i = \overline{1, n}, \; j = \overline{1, m} \tag{3.2.1}$$

formula yordamida yoki quyidagi jadval ko'rinishida berish mumkin:

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}

x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_n	p_{n1}	p_{21}	$\cdots$	p_{nm}

(3.2.2)

bu yerda barcha p_{ij} ehtimolliklar yig‘indisi birga teng, chunki $\{X = x_i, Y = y_j\}$ $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ birgalikda bo‘lmagan hodisalar to‘la gruppani tashkil etadi $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$. (3.2.1) formula ikki o‘lchovli diskret t.m.ning taqsimot qonuni, (3.2.2) jadval esa birgalikdagi taqsimot jadvali deyiladi.

(X,Y) ikki o‘lchovli diskret t.m.ning birgalikdagi taqsimot qonuni berilgan bo‘lsa, har bir komponentaning alohida (marginal) taqsimot qonunlarini topish mumkin. Har bir $i = \overline{1,n}$ uchun $\{X = x_i, Y = y_1\}, \{X = x_i, Y = y_2\}, ..., \{X = x_i, Y = y_m\}$ hodisalar birgalikda bo‘lmagani sababli: $p_{x_i} = P\{X = x_i\} = p_{i1} + p_{i2} + ... + p_{im}$. Demak, $p_{x_i} = P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$, $i = \overline{1,n}$, $p_{y_j} = P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$ $j = \overline{1,m}$.

3.1-misol. Ichida 2 ta oq, 1 ta qora, 1 ta ko‘k shar bo‘lgan idishdan tavakkaliga ikkita shar olinadi. Olingan sharlar ichida qora sharlar soni X t.m. va ko‘k rangdagi sharlar soni Y t.m. bo‘lsin. (X,Y) ikki o‘lchovli t.m.ning birgalikdagi taqsimot qonunini tuzing. X va Y t.m.larning alohida taqsimot qonunlarini toping.

X t.m. qabul qilishi mumkin qiymatlari: 0 va 1: Y t.m.ning qiymatlari ham 0 va 1. Mos ehtimolliklarni hisoblaymiz: $p_{11} = P\{X = 0, Y = 0\} = \frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{6}$ (yoki $\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$);

$p_{12} = P\{X = 0, Y = 1\} = \frac{C_2^1}{C_4^2} = \frac{2}{6}$; $p_{21} = P\{X = 1, Y = 0\} = \frac{2}{6}$; $p_{22} = P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{1}{6}$

.

(X,Y) vaktorning taqsimot jadvali quyidagicha ko‘rinishga ega:

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
1	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Bu yerdan $P\{X = 0\} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$, $P\{X = 1\} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$; $P\{Y = 0\} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$, $P\{Y = 1\} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ kelib chiqadi. X va Y t.m.larning alohida taqsimot qonunlari quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\begin{cases} X: 0, & 1 \\ p: \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \end{cases} \text{ va } \begin{cases} Y: 0, & 1 \\ p: \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \end{cases}.$$

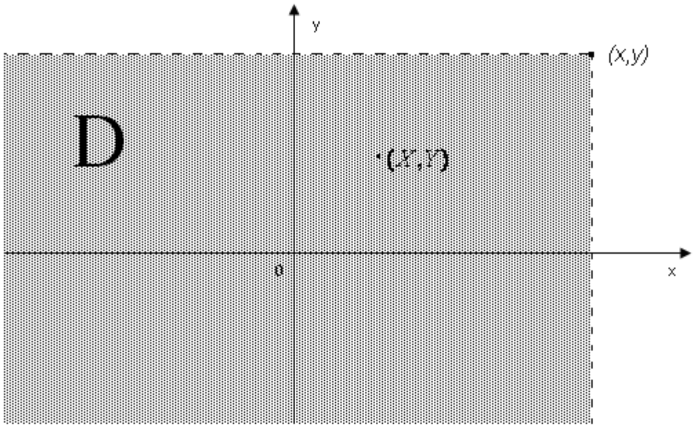
Ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi va uning xossalari

Ikki o‘lchovli t.m. taqsimot funksiyasini $F(x,y)$ orqali belgilaymiz.

✓ *Ikki o‘lcholi (X,Y) t.m.ning taqsimot funksiyasi*, x va y sonlarning har bir jufti uchun $\{X \le x\}$ va $\{Y \le y\}$ hodisalarning birgalikdagi ehtimolligini aniqlaydigan $F(x,y)$ funksiyasidir: ya’ni

$$F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\} = P\big((X.Y) \in (-\infty, x) \times (-\infty, y) = D\big). \qquad (3.3.1)$$

(3.3.1.) tenglikning geometrik tasviri 21-rasmda keltirilgan.



21-rasm.

(X,Y) ikki o‘lchovlik diskret t.m. taqsimot funksiyasi quyidagi yig‘indi orqali aniqlanadi:

$$F(x,y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{ij}. \qquad (3.3.2)$$

Ikki o‘lchovlik t.m. taqsimot funksiyasining xossalari:

1. $F(x,y)$ taqsimot funksiya chegaralangan: $0 \le F(x,y) \le 1$.

2. $F(x,y)$ funksiya har qaysi argumenti bo‘yicha kamayuvchi emas:

agar $x_2 > x_1$ bo‘lsa, $F(x_2, y) \ge F(x_1, y)$,

agar $y_2 > y_1$ bo‘lsa, $F(x, y_2) \ge F(x, y_1)$.

3. $F(x,y)$ funksiyaning biror argumenti $-\infty$ bo‘lsa(limit ma’nosida), u holda $F(x,y)$ funksiya nolga teng, $F(x,-\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty,-\infty) = 0$.

4. Agar $F(x,y)$ funksiyaning bitta argumenti $+\infty$ bo‘lsa(limit ma’nosida), u holda

$$F(x,+\infty) = F_1(x) = F_X(x);\ F(+\infty, y) = F_2(y) = F_Y(y). \qquad (3.3.3)$$

4'. Agar ikkala argumenti $+\infty$ bo‘lsa(limit ma’nosida), u holda $F(+\infty,+\infty) = 1$.

5. $F(x,y)$ funksiya har qaysi argumenti bo‘yicha chapdan uzluksiz, ya’ni $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x,y) = F(x_0, y)$, $\lim\limits_{y \to y_0 - 0} F(x,y) = F(x, y_0)$.

Isboti. 1. $F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\}$ ehtimollik bo‘lgaligi uchun $0 \le F(x,y) \le 1$.

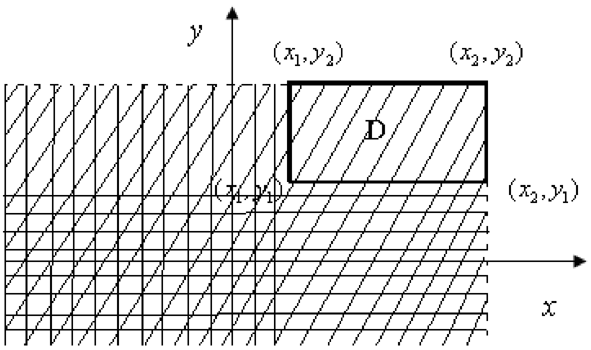
2. (x,y) argumentlarning birortasini kattalashtirsak, 21-rasmda bo‘yalgan D soha kattalashadi, demak bu sohaga (X,Y) tasodifiy nuqtaning tushishi ehtimolligi kamaymaydi.

3. $\{X<-\infty\},\{Y<-\infty\}$ hodisalar va ularning ko‘paytmasi mumkin bo‘lmagan hodisalardir. Demak, bu hodisalarning ehtimolligi nolga teng.
4. $\{X<+\infty\}$ muqarrar hodisa bo‘lgani uchun $\{X<+\infty\}\cdot\{Y\le y\}=\{Y\le y\}$ bo‘ladi. Demak, $F(+\infty,y)=P\{X<+\infty;Y\le y\}=P\{Y\le y\}=F_Y(y)$. Xuddi shunday $F(x,+\infty)=P\{X\le x;Y<+\infty\}=P\{X\le x\}=F_X(x)$.
4'. $\{X<+\infty\}$ va $\{Y<+\infty\}$ hodisalar muqarrar hodisalar bo‘lganligi uchun $\{X<+\infty\}\cdot\{Y<+\infty\}$ ham muqarrar hodisa bo‘ladi va bu hodisaning ehtimolligi 1 ga teng. ■

$F(x,y)$ taqsimot funksiya yordamida (*X*,*Y*) t.m. biror $D=\{(x,y):x_1\le x\le x_2, y_1\le y\le y_2\}$ sohaga tushishi ehtimolligini topish mumkin:

$$P\{(X,Y)\in D\}=P\{x_1\le X\le x_2, y_1\le Y\le y_2\}= \\ =F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1). \qquad (3.3.4)$$

22-rasmda (3.3.4) tenglikning geometrik isboti keltirilgan.



22-rasm.

3.2-misol. 3.1-misoldagi (*X*,*Y*) ikki o‘lchovlik t.m.ning hamda *X* va *Y* t.m.larning taqsimot funksiyalarini toping.
Avvalgi bobdagi (2.3.2) formuladan:

$$F_1(x)=\begin{cases}0, \text{ agar } x\le 0,\\ 0.5, \text{ agar } 0<x\le 1,\\ 1, \text{ agar } x>1,\end{cases} \qquad F_2(y)=\begin{cases}0, \text{ agar y}\le 0,\\ 0.5, \text{ agar } 0<y\le 1,\\ 1, \text{ agar y}>1.\end{cases}$$

(*X*,*Y*) ikki o‘lchovlik t.m.ning $F(x,y)$ taqsimot funksiyasini (3.3.2) formulaga ko‘ra topamiz:

Y / X	$y\le 0$	$0<y\le 1$	$y>1$
$x\le 0$	0	0	0
$0<x\le 1$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\left(=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\right)$
$x>1$	0	$\frac{1}{2}\left(=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\right)$	$1\left(=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)$

Ikki o‘lchovlik uzluksiz tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi va uning xossalari

✓ Ikki o‘lchovlik t.m. uzluksiz deyiladi, agar uning taqsimot funksiyasi $F(x,y)$: 1. uzluksiz bo‘lsa;

2. har bir argumenti bo‘yicha differensiyallanuvchi;

3. $F''_{xy}(x,y)$ ikkinchi tartibli aralash hosila mavjud bo‘lsa.

✓ *Ikki o‘lchovlik (X,Y) t.m.ning zichlik funksiyasi*

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=F''_{xy}(x,y) \qquad (3.4.1)$$

Tenglik orqali aniqlanadi.

(X,Y) t.m.ning G sohaga(23-rasm) tushishi ehtimolligi (3.3.4) formulaga ko‘ra: $P\{x\le X<x+\Delta x, y\le Y<y+\Delta y\}=$

$$=F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)+F(x,y),$$

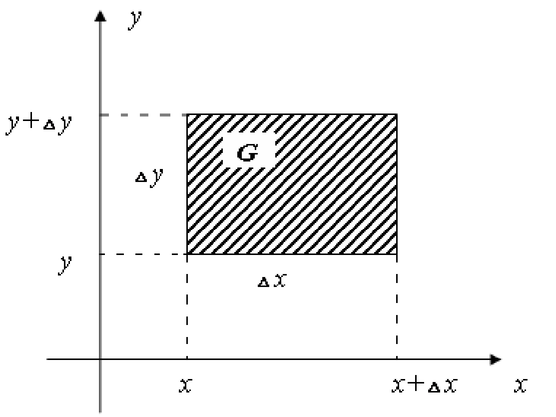
$$f_{\text{o'rtacha}}=\frac{P\{x\le X<x+\Delta x, y\le Y<y+\Delta y\}}{\Delta x\cdot\Delta y}=$$

$$=\frac{1}{\Delta y}\left(\frac{F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y+\Delta y)}{\Delta x}-\frac{F(x+\Delta x,y)-F(x,y)}{\Delta x}\right).$$

$\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$ da limitga o‘tamiz,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_{\text{o'rtacha}}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{F'_x(x,y+\Delta y)-F'_x(x,y)}{\Delta y},$$

ya’ni $f(x,y)=\left(F'_x(x,y)\right)'_y=F''_{xy}(x,y)$.



23-rasm.

Demak, (X,Y) ikki o‘lchovli tasodifiy vektorning zichlik funksiyasi deb,

$$P\{x \le X < x+dx, y \le Y < y+dy\} \approx f(x,y)dxdy \qquad (3.4.2)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi funksiya ekan.

$f(x,y)$ zichlik funkiyasi quyidagi xossalarga ega:

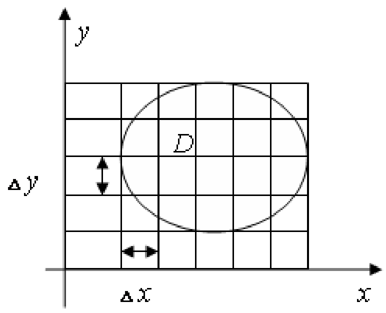
1. $f(x,y) \ge 0$.
2. $P\{(X,Y) \in D\} = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$. (3.4.3)
3. $F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$. (3.4.4)
4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$.
5. X va Y t.m.larning bir o‘lchovlik zichlik funksiyalarini quyidagi tengliklar yordamida topish mumkin:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = f_X(x); \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = f_Y(y). \qquad (3.4.5)$$

Isboti. 1. Bu xossa $F(x,y)$ funksiyaning har qaysi argumenti bo‘yicha kamaymaydigan funksiya ekanligidan kelib chiqadi.

2. $f(x,y)dxdy$ ifoda (X,Y) tasodifiy nuqtaning tomonlari dx va dy bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakka tushish ehtimolligini bildiragi. D sohani to‘g‘ri to‘rtburchaklarga ajratamiz(24-rasm) va har biri uchun (3.4.2) formulani qo‘llaymiz:

$P\{(X,Y) \in D\} \approx \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x\Delta y$ bo‘ladi. Endi $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ da limitga o‘tib, $P\{(X,Y) \in D\} = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ ni hosil qilamiz.



24-rasm.

3. (3.4.3) formuladan:

$$F(x,y) = P\{X < x, Y < y\} = P\{-\infty < X < x, -\infty < Y < y\} = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv.$$

4. $F(+\infty,+\infty) = 1$ va (3.4.4) formulada $x = y = +\infty$ deb olsak(limit ma’nosida),

$$F(+\infty,+\infty) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1.$$

5. Avval X va Y t.m.larning taqsimot funksiyalarini topamiz:

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dudv=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)dy\right)du,$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv=\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)dx\right)dv. \qquad (3.4.5)$$

Birinchi tenglikni x bo'yicha, ikkinchisini y bo'yicha differensiyallasak, X av Y t.m.larnin zichlik funksiyalarini hosil qilamiz:

$$f_X(x)=F_X'(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

va

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx.$$

■

Izoh. Agar X va Y t.m.larning alohida zichlik funksiyalari berilgan bo'lsa, (umumiy holda) ularning birgalikdagi zichlik funksiyalarini topish mumkin emas.

Tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligi

✓ X va Y t.m.lar *bog'liqsiz* deiladi, agar $\forall x,y\in R$ uchun $\{X<x\}$ va $\{Y<y\}$ hodisalar bog'liqsiz bo'lsa.

Endi t.m.lar bog'liqsizligining zarur va yetarli shartini keltiramiz.

Teorema. X va Y t.m.lar bog'liqsiz bo'lishi uchun

$$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y) \qquad (3.5.1)$$

tenglik bajarilishi zarur va yetarlidir[6].

Isboti. Zarurligi. Agar X va Y t.m.lar bog'liqsiz bo'lsa, $\{X<x\}$ va $\{Y<y\}$ hodisalar ham bog'liqsiz bo'ladi. U holda $P\{X<x,Y<y\}=P\{X<x\}\cdot P\{Y<y\}$, ya'ni $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$.

Yetarliligi. (3.5.1) tenglik o'rinli bo'lsin, u holda $P\{X<x,Y<y\}=P\{X<x\}\cdot P\{Y<y\}$ bo'ladi. Bu tenglikdan X va Y t.m.lar bog'liqsizligi kelib chiqadi. ■

1-natija. X va Y uzluksiz t.m.lar bog'liqsiz bo'lishi uchun

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y) \qquad (3.5.2)$$

tenglik bajarilishi zarur va yetarlidir.

6. [6] Jun Shao Mathematikal Statistics. Springer. 2003. 591 p.

Isboti. Zarurligi. Agar X va Y t.m.lar bog‘liqsiz bo‘lsa, u holda (3.5.1) tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglikni x bo‘yicha, keyin esa y bo‘yicha differensiyallab, $f(x,y)=\frac{d}{dx}F_X(x)\cdot\frac{d}{dy}F_Y(y)$ tengliklarni, ya’ni $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$ hosil qilamiz.

Yetarliligi. (3.5.2) tenglik o‘rinli bo‘lsin. Bu tenglikni x bo‘yicha va y bo‘yicha integrallaymiz:

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv=\int_{-\infty}^{x} f_X(u)du\cdot\int_{-\infty}^{y} f_Y(v)dv.$$

Bu esa $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$ tenglikning o‘zidir. Teoremaga ko‘ra X va Y t.m.lar bog‘liqsizligi kelib chiqadi. ■

2-natija. X va Y diskret t.m.lar bog‘liqsiz bo‘lishi uchun ihtiyoriy $i=1,2,...n,\ j=1,2,...m$ larda

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\} \qquad (3.5.3)$$

tengliklarning bajarilishi zarur va yetarlidir.

3.4-misol. a) 3.1-misoldagi X va Y t.m.lar bog‘liqmi? b) 3.3-misoldagi X va Y t.m.lar bog‘liqsizmi?

a) $p_{11}=P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{6}$, $P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, ya’ni $P\{X=0,Y=0\}\neq P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}$. Demak, X va Y t.m.lar bog‘liq.

b) $f(x,y)=\begin{cases} e^{-x-y}, & \text{agar } x\geq 0, y\geq 0\\ 0, & \text{aks holda,}\end{cases}$ $\quad f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y\geq 0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$

$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$ tenglik o‘rinli, demak, X va Y t.m.lar bog‘liqsiz.

Shartli taqsimot qonunlari

(X,Y) ikki o‘lchovlik t.m.ni tashkil etuvchi X va Y t.m.lar bog‘liq bo‘lsa, ularning bog‘liqligini xarakterlovchi shartli taqsimot qonunlari tushunchalari keltiriladi.

✓ (X,Y) ikki o‘lchovli diskret t.m. birgalikdagi taqsimot qonuni $p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}$, $i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$ bo‘lsin. U holda

$$P\{Y=y_j/X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}},\ i=1,2,...n,\ j=1,2,...m \qquad (3.6.1)$$

ehtimolliklar to‘plami, ya’ni $p(y_1/x_i), p(y_2/x_i),...p(y_m/x_i)$ lar Y t.m.ning $X=x_i$ dagi *shartli taqsimot qonuni* deyiladi. Bu yerda

$$\sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_i)=\sum_{j=1}^{m}\frac{p_{ij}}{p_{x_i}}=\frac{1}{p_{x_i}}\sum_{j=1}^{m}p_{ij}=\frac{p_{x_i}}{p_{x_i}}=1.$$

Xuddi shunday,

$$P\{X=x_i/Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_i\}},\ i=1,2,...n,\ j=1,2,...m \qquad (3.6.2)$$

ehtimolliklar to‘plami, ya’ni $p(x_1/y_j), p(x_2/y_j),...p(x_n/y_j)$ lar X t.m.ning $Y=y_j$ dagi shartli taqsimot qonuni deyiladi.

3.5-misol. (X,Y) ikki o‘lchovlik t.m.ni birgalikdagi taqsimot jadvali berilgan:

$X \setminus Y$	1	2	3
0.1	0.12	0.08	0.40
0.2	0.16	0.10	0.14

Quyidagilarni toping: a) X av Y t.m.larning alohida taqsimot qonunlari; b) X t.m.ning Y=2 dagi shartli taqsimot qonuni.

a) $p_{x_i}=\sum_{j=1}^{m}p_{ij}$ va $p_{y_j}=\sum_{i=1}^{n}p_{ij}$ tengliklardan:

X	0.1	0.2
P	0.60	0.40

,

Y	1	2	3
P	0.28	0.10	0.54

b) (3.6.2) formulaga asosan: $P\{X=0.1/Y=2\}=\frac{0.08}{0.18}=\frac{4}{9}$,

$P\{X=0.2/Y=2\}=\frac{0.10}{0.18}=\frac{5}{9}$. X t.m.ning Y=2 dagi shartli taqsimot qonuni quyidagiga teng:

X	0.1	0.2
$P_{Y=2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$

Endi (X,Y) ikki o‘lchovli t.m. uzluksiz bo‘lgan holni ko‘ramiz. $f(x,y)$ (X,Y) t.m.ning birgalikdagi zichlik funksiyasi, $f_X(x)$ va $f_Y(y)$ lar esa X va Y t.m.larning alohida zichlik funksiyalari bo‘lsin.

- ✓ Y t.m.ning $X=x$ bo‘lgandagi *shartli zichlik funksiyasi*

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy},\ f_X(x)\neq 0 \qquad (3.6.3)$$

ifodaga orqali aniqlanadi.

Shartli zichlik funksiyasi zichlik funksiyasining $f(y/x)\geq 0,\ \int_{-\infty}^{+\infty}f(y/x)dy=1$ kabi xossalariga egadir.

- ✓ Xuddi shunday, X t.m.ning $Y=y$ bo‘lgandagi shartli zichlik funksiyasi

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx},\ f_y(y)\neq 0, \qquad (3.6.4)$$

tenglik orqali aniqlanadi.

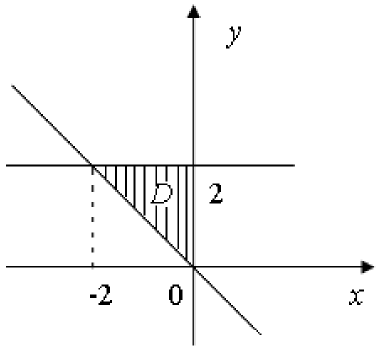
(3.6.3) va (3.6.4) tengliklarni hisobga olib, $f(x,y)$ zichlik funksiyani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$f(x,y) = f_X(x)\cdot f(y/x) = f_Y(y)\cdot f(x/y)\,. \qquad (3.6.5)$$

(3.6.5) tenglik zichlik funksiyalarning ko‘paytirish qoidasi(teoremasi) deyiladi.

3.6-misol. (X,Y) ikki o‘lchovli uzluksiz t.m.ning birgalikdagi zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x,y) = \begin{cases} Cxy, & \text{agar } (x,y)\in D, \\ 0, & \text{agar } (x,y)\notin D, \end{cases}$$



25-rasm.

bu yerda $D=\{(x,y): y>-x,\ y<2,\ x<0\}$ (25-rasm). 1) $f_X(x)$ va $f(x/y)$ larni toping. 2) X va Y t.m.larning bog‘liqligini ko‘rsating.

1) Avval o‘zgarmas son C ni topamiz:

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_{-2}^{0}dx\int_{-x}^{2}Cxydy = C\int_{-2}^{0}xdx\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{-x}^{2}\right) = C\int_{-2}^{0}x\left(2-\frac{x^2}{2}\right)dx = -2C\,.$$

Bundan $C=\frac{1}{2}$. $f_X(x)$ ni topamiz:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{-2}^{0}\left(-\frac{1}{2}xy\right)dy = -\frac{1}{4}x(4-x^2),\ x\in(-2,0)\,.$$

$f(x/y)$ ni (3.6.4) formulasidan foydalanamiz, buning uchun dastlab $f_Y(y)$ ni hisoblash kerak:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{-y}^{0}\left(-\frac{1}{2}xy\right)dx = \frac{y^3}{4},\ y\in(0,2),$$

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{-\frac{1}{2}xy}{\frac{y^3}{4}} = -\frac{2x}{y^2},\ (x,y)\in D.$$

2) X va Y t.m.lar bog‘liqsiz bo‘lsa, $f(x/y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{f_X(x)\cdot f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$ tenglik o‘rinli.

$f_X(x)=-\dfrac{1}{4}x(4-x^2)$, $x\in(-2,0)$ va $f(x/y)=-\dfrac{2x}{y^2}$, $(x,y)\in D$ funksiyalarlar bir-biridan farqli bo‘lganligi uchun X va Y t.m.lar bog‘liq.

15-Mavzu: Yuqori tartibli momentlar

Reja:

1.Yuqori tartibli momentlar
2.Boshqa sonli harakteristikalar

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Boshlang'ich, markaziy, absolyut momentlar, moda, mediana, variatsiya koeffitsienti, kovaratsiya.

Tarif. $\xi-(\Omega, A, \text{P})$ ehtimolliklar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdor va k>0 qandaydir son bo`lsin Agar $M|\xi|^k$ matematik kutilma mavjud bo`lsa, u holda $a_k = M\xi^k$ songa ξ tasodifiy miqdorning **k-tartibli boshlang`ich momenti**, $m_k = M|\xi|^k$ songa esa, uning **k-tartibli absolyut momenti** deyiladi.

$\xi - M\xi$ tasodifiy miqdorning momentlarini **markaziy momentlar** deyiladi.

Agar $M\xi = 0$ bo`lsa, u holda markaziy moment boshlang`ich momentga teng bo`ladi. $\xi$ tasodifiy miqdorning birinchi tartibli boshlang`ich momenti uning matematik kutilmasi bilan, ikkinchi tartibli markaziy momenti esa dispersiyasi bilan ustma-ust tushadi [3], [6].

.

1- Misol. Normal taqsimotning markaziy momentlari. $\xi-(a,\sigma^2)$ parametrli normal taqsimotga ega bo`lsin. U holda $M\xi = a, D\xi = \sigma^2$ ekanligi bizga malum. ξ tasodifiy miqdorning markaziy momentlarini hisoblaymiz.

$$\beta_m = M(\xi-a)^m = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^m \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}dx.$$

Bu erda $z = \dfrac{x-a}{\sigma}$ almashtirish bajarib, topamiz

$$\beta_m = \frac{\sigma^m}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z^m \exp\left\{-z^2/2\right\}dz.$$

Agar m toq bo`lsa, u holda $\beta_m = 0$ bo`ladi, agar m –juft bo`lsa (m=2k) , u holda $\beta_{2k} = M(\xi-a)^{2k} = \dfrac{2\sigma^{2k}}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{\infty} z^{2k}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz$ da $\dfrac{z^2}{2} = t$ almashtirish bajarib, topamiz

$$\beta_{2k} = M(\xi-a)^{2k} = \frac{2^k\sigma^{2k}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} t^{k-1/2}e^{-t}dt = \frac{2^k\sigma^{2k}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(k+1/2\right) = 1\cdot 3\cdots(2k-1)\sigma^{2k} = (2k-1)!!\sigma^{2k}.$$

2-Misol. λ - parametrli ko`rsatkichli taqsimotga ega bo`lgan ξ tasodifiy miqdorning yuqori tartibli momentlari hisoblansin.

Echish. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}, x \ge 0; \\ 0, x<0 \end{cases}$$

formula orqali ifodalanishi bizga malum. ξ tasodifiy miqdorning k –tartibli momentini 7-teoremadagi (10) formuladan foydalanib topamiz.

$$a_k = M\xi^k = \int_0^\infty x^k \lambda \cdot e^{-k\lambda} dx = \lambda \int_0^\infty x^k e^{-\lambda \cdot x} dx = \frac{1}{\lambda^k} \int_0^\infty t^k e^{-t} dt = \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda^k}.$$

16-mavzu: Korrelyatsiya koeffitsienti va xossalari

Reja:

1.Kovariatsiyasi va uning xossalari
2. Korrelatsiya koeffitsienti va uning xossalari

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Boshlang'ich, markaziy, absolyut momentlar, matematik kutilmasi, kovariatsiya, korrelatsiya koeffitsienti

(X,Y) tasodifiy vektorning sonli xarakteristikalari sifatida turli tartibdagi momentlar ko'riladi. Amaliyotda eng ko'p I va II – tartibli momentlar bilan ifodalanuvchi matematik kutilma, dispersiya va korrelatsion momentlardan foydalaniladi.

- ✓ Ikki o'lchovli diskret (X,Y) t.m.ning *matematik kutilmasi* (MX,MY) bo'lib, bu yerda

$$MX = m_x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij}, \quad MY = m_y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_i p_{ij} \tag{3.7.1}$$

va $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$.

Agar (X,Y) t.m. uzluksiz bo'lsa, u holda

$$MX = m_x = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x,y)dxdy, \quad MY = m_y = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(x,y)dxdy. \tag{3.7.2}$$

- ✓ X va Y t.m.larning *kovariatsiyasi*

$$K_{XY} = \text{cov}(X,Y) = M\left((X-m_x)(Y-m_y)\right) = \mu_{1,1} \tag{3.7.3}$$

tenglik bilan aniqlanadi. Agar (X,Y) t.m. diskret bo'lsa, uning kovariatsiyasi

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij}, \tag{3.7.4}$$

agar uzluksiz bo'lsa,

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_x)(y-m_y) f(x,y)dxdy \tag{3.7.5}$$

formulalar orqali hisoblanadi.

Kovariatsiyani quyidagicha hisoblash ham mumkin:

$$K_{XY} = \text{cov}(X,Y) = MXY - MX \cdot MY. \tag{3.7.6}$$

Bu tenglik (3.7.3) formula va matematik kutilmaning xossalaridan kelib chiqadi:

$$K_{XY} = M\Big((X-m_x)(Y-m_y)\Big) = M(XY - Xm_y - Ym_x + m_x m_y) =$$
$$= MXY - m_y MX - m_x MY + m_x m_y = MXY - m_y m_x - m_x m_y + m_x m_y = MXY - MXMY.$$

Kovariatsiya orqali *X* va *Y* t.m.larning dispersiyalarini aniqlash mumkin:

$$DX = \operatorname{cov}(X,X) = M(X-MX)^2 = MX^2 - (MX)^2,$$

$$DY = \operatorname{cov}(Y,Y) = M(Y-MY)^2 = MY^2 - (MY)^2.$$

(*X*,*Y*) vektorning kovariatsiya matritsasi

$$C = M\left\{(X,Y)^{\mathrm{T}} \cdot (X,Y) - (m_x, m_y)^{\mathrm{T}}(m_x, m_y)\right\} =$$

$$= \begin{Vmatrix} DX & \operatorname{cov}(X,Y) \\ \operatorname{cov}(Y,X) & DY \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{Vmatrix}$$ - ifoda bilan aiqlanadi.

Kovariatsiyaning xossalari:

1. $K_{XY} = K_{YX}$;
2. Agar $X \perp Y$ bo‘lsa, u holda $K_{XY} = 0$;
3. Agar *X* va *Y* ixtiyoriy t.m.lar bo‘lsa, u holda $D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2K_{XY}$;
4. $K_{CX,Y} = CK_{XY} = K_{X,CY}$ yoki $\operatorname{cov}(CX,Y) = C\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(X,CY)$;
5. $K_{X+C,Y} = K_{XY} = K_{X,Y+C} = K_{X+C,Y+C}$ yoki $\operatorname{cov}(X+C,Y) = \operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(X,Y+C) = \operatorname{cov}(X+C,Y+C)$;
6. $|K_{XY}| \le \sigma_X \cdot \sigma_Y$.

Isboti. 1. (3.7.3) dan kelib chiqadi.

2. Agar $X \perp Y$ bo‘lsa, u holda $X - m_x$ va $Y - m_y$ lar ham bog‘liqsiz bo‘ladi va matematik kutilmaning xossasiga ko‘ra $K_{XY} = 0$.

3. $D(X \pm Y) = M((X \pm Y) - M(X \pm Y))^2 = M((X - MX) \pm (Y - MY))^2 =$
$= M(X-MX)^2 \pm 2M(X-MX)(Y-MY) + M(Y-MY)^2 = DX + DY \pm 2K_{XY}$.

4. $K_{CX,Y} = M(CX - MCX)(Y-MY) = M\left[C(X-MX)(Y-MY)\right] = CK_{XY}$.

5. $K_{X+C,Y} = M((X+C) - M(X+C))(Y-MY) = M(X + C - MX - C)(Y-MY) =$
$= M(X-MX)(Y-MY) = K_{XY}$

6. 3-xossani $\dfrac{X-m_x}{\sigma_x}$ va $\dfrac{Y-m_y}{\sigma_y}$ t.m.larga qo‘llasak,

$$D\left(\frac{X-m_x}{\sigma_x} \pm \frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right) = D\left(\frac{X-m_x}{\sigma_x}\right) + D\left(\frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right) \pm$$

$$\pm 2M\left[\left(\frac{X-m_x}{\sigma_x} - M\left(\frac{X-m_x}{\sigma_x}\right)\right)\left(\frac{Y-m_y}{\sigma_y} - M\left(\frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right)\right)\right] =$$

$$=1+1\pm 2M\left(\frac{X-m_x}{\sigma_x}\cdot\frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right)=2\left(1\pm\frac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}\right).$$

Dispersiya manfiy bo‘lmasligidan $2\left(1\pm\frac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}\right)\geq 0$, ya’ni $|K_{XY}|\leq\sigma_X\cdot\sigma_Y$.■

3-xossaga ko‘ra, agar $K_{XY}\neq 0$ bo‘lsa, *X* va *Y* t.m.lar bo‘gliq bo‘ladi. Bu holda *X* va *Y* t.m.lar korrelatsiyalangan deyiladi. Lekin $K_{XY}=0$ ekanligidan *X* va *Y* t.m.larning bog‘liqsizligi kelib chiqmaydi. Demak, *X* va *Y* t.m.larning bog‘liqsizligida ularning korrelatsiyalanmaganligi kelib chiqadi, teskarisi esa har doim ham o‘rinli emas.

✓ *X* va *Y* t.m.larning *korrelatsiya koeffitsienti*

$$r_{XY}=\frac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} \tag{3.7.7}$$

formula bilan aniqlanadi.

Korrelyatsiya koeffisiyentining xossalari:

1. $|r_{XY}|\leq 1$, ya’ni $-1\leq r_{XY}\leq 1$;

2. Agar $X\perp Y$ bo‘lsa, u holda $r_{XY}=0$;

3. Agar $|r_{XY}|=1$ bo‘lsa, u holda *X* va *Y* t.m.lar chiziqli funksional bog‘liq bo‘ladi, teskarisi ham o‘rinli.

Shunday qilib, bogliqsiz t.m.lar uchun $r_{XY}=0$, chiziqli bog‘langan t.m.lar uchun $|r_{XY}|=1$, qolgan hollarda $-1<r_{XY}<1$. Agar $r_{XY}>0$ bo‘lsa, t.m.lar musbat korrelatsiyalangan va aksincha agar $r_{XY}<0$ bo‘lsa, ular manfiy korrelyatsialangan deyiladi [3], [6], [9].

.

17-mavzu: Katta sonlar qonuni. Chebishev teoremasi va tengsizligi. Katta sonlar qonunining tadbiqlari.

Reja:

1.Chebishev tengsizligi

2. Katta sonlar qonuni.

3. Chebishev va Bernulli teoremalari

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Tasodifiy miqdor, taqsimot funktsiya, matematik kutilma, dispersiya, katta sonlar qonuni, Shebishev tengsizligi, Markov tengsizligi, Chebishev va Bernulli teoremalari

Ehtimollar nazariyasining limit teoremalari deb nomlanuvchi qator tasdiq va teoremalarni keltiramiz. Ular yetarlicha katta sondagi tajribalarda t.m.lar orasidagi bog‘lanishni ifodalaydi. Limit teoremalar shartli ravishda ikki guruhga bo‘linadi. Birinchi guruh teoremalar katta sonlar qonunlari(KSQ) deb nomlanadi. Ular o‘rta qiymatning turg‘unligini ifodalaydi: yetarlicha katta sondagi tajribalarda t.m.larning o‘rta qiymati tasodifiyligini yo‘qotadi. Ikkinchi guruh teoremalar markaziy limit teoremalar(MLT) deb nomlanadi. Yetarlicha katta sondagi tajribalarda t.m.lar yig‘indisining taqsimoti normal taqsimotga intilishi shartini ifodalaydi. KSQ ni keltirishdan avval yordamchi tengliklarni isbotlaymiz.

Chebishev tengsizligi

Teorema(Chebishev). Agar *X* t.m. *DX* dispersiyaga ega bo‘lsa, u holda $\forall \varepsilon > 0$ uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli:

$$P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}. \qquad (5.1.1)$$

(5.1.1) tengsizlik Chebishev tengsizligi deyiladi.

Isboti. $P\{|X-a| \geq \varepsilon\}$ ehtimollik *X* t.m.ning $[a-\varepsilon; a+\varepsilon]$ oraliqqa tushmasligi ehtimolligini bildiradi bu yerda $a = MX$. U holda

$$P\{|X-a| \geq \varepsilon\} = \int_{-\infty}^{a-\varepsilon} dF(x) + \int_{a+\varepsilon}^{+\infty} dF(x) = \int_{|x-a|\geq\varepsilon} dF(x) =$$

$$= \int_{|x-a|\geq\varepsilon} 1 \cdot dF(x) \leq \int_{|x-a|\geq\varepsilon} \frac{(x-a)^2}{\varepsilon^2} dF(x),$$

chunki $|x-a| \geq \varepsilon$ integrallash sohasini $(x-a)^2 \geq \varepsilon^2$ ko‘rinishda yozish mumkin. Bu yerdan $\frac{(x-a)^2}{\varepsilon^2} \geq 1$ ekanligi kelib chiqadi. Agar integrallash sohasi kengaytirilsa, musbat funksiyaning integrali faqat kattalashishini hisobga olsak,

$$P\{|X-a| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x-a|\geq\varepsilon} (x-a)^2 dF(x) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 dF(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} DX . \qquad \blacksquare$$

Chebishev tengsizligini quyidagi ko‘rinishda ham yozish mumkin:

$$P\{|X - MX| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}. \qquad (5.1.2)$$

Chebishev tengsizligi ihtiyoriy t.m.lar uchun o‘rinli. Xususan, *X* t.m. binomial qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘lsin, $P\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m},\ m = 0,1,...,n, \quad q = 1 - p \in (0,1)$. U holda $MX = a = np,\ DX = npq$ va (5.1.1) dan

$$P\{|m - np| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2}; \qquad (5.1.3)$$

n ta bog‘liqsiz tajribalarda ehtimolligi $p = M\left(\frac{m}{n}\right) = a$, dispersiyasi $D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{qp}{n}$ bo‘lgan hodisaning $\frac{m}{n}$ chastotasi uchun,

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{qp}{n\varepsilon^2}. \qquad (5.1.4)$$

X t.m.ni $[\varepsilon;+\infty)$ oraliqga tushushi ehtimolligini baholashni Markov tengsizligi beradi.

Teorema(Markov). Manfiy bo‘lmagan, matematik kutilmasi *MX* chekli bo‘lgan *X* t.m. uchun $\forall\varepsilon>0$ da

$$P\{X\geq\varepsilon\}\leq\frac{MX}{\varepsilon} \qquad (5.1.5)$$

tengsizlik o‘rinli [1], [2], [5], [7], [9], [10], [11].

.

Isboti. Quyidagi munosabatlar o‘rinlidir:

$$P\{X\geq\varepsilon\}=\int_{\varepsilon}^{+\infty}dF(x)\leq\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{x}{\varepsilon}dF(x)=\frac{1}{\varepsilon}\int_{0}^{+\infty}xdF(x)=\frac{MX}{\varepsilon}.$$

(5.1.5) tengsizlikdan (5.1.1) ni osongina keltirib chiqarish mumkin.

(5.1.5) tengsizlikni quyidagi ko‘rinishda ham yozish mumkin:

$$P\{X<\varepsilon\}\geq 1-\frac{MX}{\varepsilon}. \qquad (5.1.6)$$

Katta sonlar qonuni. Chebishev va Bernulli teoremalari

Ehtimollar nazariyasi va uning tadbiqlarida ko‘pincha yetarlicha katta sondagi t.m.lar yig‘indisi bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Yig‘indidagi har bir t.m.ning tajriba natijasida qanday qiymatni qabul qilishini oldindan aytib bo‘lmaydi. Shuning uchun katta sondagi t.m.lar yig‘indisining taqsimot qonunini hisoblash burmuncha qiyinchilik tug‘diradi. Lekin ma’lum shartlar ostida yetarlicha katta sondagi t.m.lar yig‘indisi tasodifiylik xarakterini yo‘qotib borar ekan. Amaliyotda juda ko‘p tasodifiy sabablarning birgalikdagi ta’siri tasodifga deyarli bog‘liq bo‘lmaydigan natijaga olib keladigan shartlarni bilish juda muhimdir. Bu shartlar “Katta sonlar qonuni” deb ataluvchi teoremalarda keltiriladi. Bular qatoriga Chebishev va Bernulli teoremalari kiradi.

✓ $X_1, X_2, ...X_n, ...$ t.m.lar o‘zgarmas son *A* ga ehtimollik bo‘yicha yaqinlashadi deyiladi, agar $\forall\varepsilon>0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty}P\{|X_n-A|<\varepsilon\}=1$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa. Ehtimollik bo‘yicha yaqinlashish $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} A$ kabi belgilanadi.

✓ $X_1, X_2, ...X_n, ...$ t.m.lar ketma-ketligi mos ravishda $MX_1, MX_2, ...MX_n, ...$ matematik kutilmalarga ega bo‘lib, $\forall\varepsilon>0$ son uchun $n\to\infty$ da

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}MX_i\right|<\varepsilon\right\}=1$$

munosabat bajarilsa, $X_1, X_2, ...X_n$ t.m.lar ketma-ketligi *katta sonlar qoniniga bo'ysunadi* deyiladi.

Teorema(Chebishev). Agar bog'liqsiz $X_1, X_2, ...X_n, ...$ t.m.lar ketma-ketligi uchun shunday $\exists C > 0$ bo'lib $DX_i \le C, i = 1, 2, ...$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, u holda $\forall \varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1 \qquad (5.2.1)$$

munosabat o'rinli bo'ladi[7].

Isboti. $DX_i \le C, i = 1, 2, ...$ bo'lgani uchun

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{1}{n^2}\left(DX_1 + ... + DX_n\right) \le \frac{1}{n^2}\left(C + ... + C\right) =$$

$= \frac{1}{n^2} Cn = \frac{C}{n}$. U holda Chebishev tengsizligiga ko'ra:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right\} \ge 1 - \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\varepsilon^2} \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}. \qquad (5.2.2)$$

Endi $n \to \infty$ da limitga o'tsak, $\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1$. ■

Natija. Agar $X_1, X_2, ...X_n, ...$ bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan t.m.lar va $MX_i = a, DX_i = \sigma^2$ bo'lsa, u holda $\forall \varepsilon > 0$ uchun quyidagi munosabat o'rinli

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right\} = 1. \qquad (5.2.3)$$

Bernulli teoremasi katta sonlar qonuninig sodda shakli hisoblanadi. U nisbiy chastotaning turg'unligini asoslaydi.

Teorema(Bernulli). Agar *A* hodisaning bitta tajribada ro'y berishi ehtimolligi *p* bo'lib, *n* ta bog'liqsiz tajribada bu hodisa n_A marta ro'y bersa, u holda $\forall \varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1 \qquad (5.2.4)$$

munosabat o'rinli.

7. [7] Jun Shao Mathematikal Statistics. Springer. 2003. 591 p.

Isboti. $X_1, X_2, ...X_n$ indikator t.m.larni quyidagicha kiritamiz: agar *i*-tajribada *A* hodisa ro‘y bersa, $X_i = 1$; agar ro‘y bermasa $X_i = 0$. U holda n_A ni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin: $n_A = \sum_{i=1}^{n} X_i$. X_i t.m.ning taqsimot qonuni ixtiyoriy *i* da: $\begin{cases} X_i : 0 & 1 \\ P : 1-p & p \end{cases}$ bo‘ladi. X_i t.m.ning matematik kutilmasi $MX_i = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$ ga, dispersiyasi $DX_i = (0-p)^2(1-p) + (1-p)^2 p = \; = p(1-p) = pq$. X_i t.m.lar bog‘liqsiz va ularning dispersiyalari chegaralangan, $p(1-p) = p - p^2 = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$. U holda Chebishev teoremasiga asosan: $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1$ va $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{n_A}{n}$; $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i = \frac{1}{n} np = p$ bo‘lgani uchun $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$. [1], [2], [5], [7], [9], [10], [11] [13].

19-mavzu: Markaziy limit teorema. Lyapunov teoremasi. Markaziy limit teorema tadbiqlari.

Reja:

1.Markaziy limit teorema
2.Lyapunov teoremasi. Markaziy limit teorema tadbiqlari.

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Tasodifiy miqdor, taqsimot funktsiya, matematik kutilma, dispersiya, katta sonlar qonuni, Shebishev tengsizligi, Markov tengsizligi, Chebishev va Bernulli teoremalari, Markaziy limit teorema, Lyapunov teoremasi

Markaziy limit teorema t.m.lar yig‘indisi taqsimoti va uning limiti – normal taqsimot orasidagi bog‘lanishni ifodalaydi. Bir xil taqsimlangan t.m.lar uchun markaziy limit teoremani keltiramiz.

Teorema[8]. $X_1, X_2, ...X_n$ bog‘liqsiz, bir xil taqsimlangan, $MX_i = a$ chekli matematik kutilma va $DX_i = \sigma^2, i = \overline{1,n}$ dispersiyaga ega bo‘lsin, $0 < \sigma^2 < \infty$ u holda $Z_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}}$ t.m.ning taqsimot qonuni $n \to \infty$ da standart normal taqsimotga intiladi

8. [8] Jun Shao Mathematikal Statistics. Springer. 2003. 591 p.

$$F_{Z_n}(x) = P\{Z_n < x\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt. \qquad (5.3.1)$$

Demak, (5.3.1) ga ko‘ra yetarlicha katta n larda $Z_n \sim N(0,1)$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ yig‘indi esa quyidagi normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi: $S_n \sim N(na, \sqrt{n}\sigma)$. Bu holda $\sum_{i=1}^{n} X_i$ t.m. asimptotik normal taqsimlangan deyiladi.

Agar X t.m. uchun $MX = 0, DX = 1$ bo‘lsa X t.m. markazlashtirilgan va normallashtirilgan(yoki standart) t.m. deyiladi. (5.3.1) formula yordamida yetarlicha katta n larda t.m.lar yig‘indisi bilan bog‘liq hodisalar ehtimolligini hisoblash mumkin. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ t.m.ni standartlashtirsak, yetarlicha katta n larda

$$P\left\{\alpha \le \sum_{i=1}^{n} X_i \le \beta\right\} = P\left\{\frac{\alpha - na}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{\beta - na}{\sigma\sqrt{n}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{\beta - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - na}{\sigma\sqrt{n}}\right),$$

yoki

$$P\{\alpha \le S_n \le \beta\} \approx \Phi\left(\frac{\beta - MS_n}{\sqrt{DS_n}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - MS_n}{\sqrt{DS_n}}\right). \qquad (5.3.2)$$

MATEMATIK STATISTIKA

VI bob. Tanlanma va uning xarakteristikalari

Matematik statistika predmeti

Oldingi bo`limlardan ma`lumki, ehtimollar nazariyasi tasodifiy hodisalar bilan bog`liq jarayonlarning matemetik modellarini o`rganish bilan shug`ullanadi. Ixtiyoriy tasodifiy jarayonlarga mos matematik modellar yordamida bizni qiziqtirayotgan u yoki bu hodisalarning ro`y berish ehtimolligini topishimiz mumkin.

Matematik statistika tasodifiy hodisalar yoki jarayonlar haqida shu hodisalarni kuzatish yoki tajribalar natijasida olingan ma’lumotlar asosida umumiy xulosalar chiqaradigan matematik fandir. Bu xulosalar umumiylik xususiyatlariga ega bo‘lib, kuzatilayotgan tasodifiy holatlarning barchasiga taaluqlidir. Matematik statistika ehtimollar nazariyasiga tayangan holda, uning usullari va nazariy hulosalari asosida o‘rganilayotgan obyekt haqida xulosalar chiqaradi. Agarda ehtimollar nazariyasida biz o‘rganayotgan matematik model to‘la-to‘kis berilgan deb hisoblab, bu model bizni qiziqtirayotgan holatlarni o‘rgansak, matematik statistikada biz qandaydir tasodifiy hodisalar natijalaridan kelib chiqqan holda(bular ko‘pchilik hollarda sonlardan iborat bo‘ladi), tasodifiy jarayonlarning matematik modelini tuzishga harakat qilamiz. Matematik statistika o‘zining xulosa chiqarish usullari yordamida o‘rganilayotgan obyektning nazariy ehtimoliy modelini tuzishga qaratilgan. Masalan, Bernulli sxemasida biz kuzatayotgan A hodisaning bitta tajribada ro‘y berish ehtimolligi p bo‘lsin. Bizni n ta bog‘liqsiz tajribalar natijasida A hodisasining k($k \le n$) marta ro‘y berish ehtimolligi qiziqtirsin. Bu masala ehtimollar nazariyasining usullari bilan to‘liq hal etiladi. Endi shunday masala qo‘yilsin: n ta bog‘liqsiz tajribalarda bizni qiziqtiradigan A hodisa k marta ro‘y bersin. U holda shu hodisaning bitta tajribada ro‘y berish ehtimolligi p deb qanday miqdorni olish kerak? Bu hol matematik statistikaning namunaviy masalasidir. Ko‘rinib turibdiki, matematik statistika masalalari ehtimollar nazariyasi masalalariga teskari masalalar ekan.

Matematik statistika o‘z hulosalarida biz qiziqayotgan tasodifiy hodisalarni tavsiflaydigan, odatda sonlardan iborat bo‘lgan statistic ma’lumotlar asosida o‘rganilayotgan tasodifiy jarayonning nazariy-ehtimoliy qonuniyatlarini tuzish uchun turli usullarni ishlab chiqishga qaratilgandir.

Endi Bernulli sxemasi misolida matematik statistika shug‘ullanadigan va hal qilinadigan asosiy masalalarni ko‘rib chiqaylik.

I. Noma’lum parametrni statistik baholash. n ta tajriba natijasida biz kuzatayotgan A hodisa m marta ro‘y bersin. U holda, shu ma’lumotlar asosida biz shunday $\hat{p}$ miqdorni aniqlaylikki, uni $p = P(A)$ sifatida qabul qilish mumkin bo‘lsin. Bizning holimizda A hodisaning chastotasini $\hat{p} = \frac{m}{n}$ deb qabul qilishimiz tabiiy. Albatta, biz statistik baho deb taklif etayotgan $\hat{p}$ miqdor ma’lum ma’noda noma’lum parametr p ga yaqin bo‘lishi kerak.

II.Ishonchlilik oralig‘i. Ba’zi hollarda noma’lum parametr p ning aniq qiymati emas, balki 1 ga yetarlicha yaqin ehtimollik bilan uning qiymatini statistik ma’lumotlar asosida aniqlanadigan biror $[\hat{p}_1; \hat{p}_2]$ oraliqqa tegishli bo‘lishi qiziqtiradi. Bunda oraliq chegaralari $\hat{p}_1$ va $\hat{p}_2$ - t.m.lar faqat m ga bog‘liq bo‘ladi. Tajriba natijasida to‘liq aniqlanadigan $[\hat{p}_1; \hat{p}_2]$ oraliq - ishonchlilik oralig‘i deyiladi.

III. Statistik gipotezalarni tekshirish. Faraz qilatlik, qandaydir (aprior) mulohazalar asosida $p = p_0$ degan xulosaga keldik. Bu yerda p_0 - aniq miqdor. Nisbiy chastota $\frac{m}{n}$ asosida biz statistik gipoteza $p = p_0$ ning to‘g‘ri yoki noto‘g‘riligini tekshirishimiz kerak. Yetarli katta n lar uchun $\frac{m}{n}$ nisbiy chastota p ehtimollikka yaqin bo‘lgani uchun, statistik gipoteza $p = p_0$ ni tekshiruvchi alomat $\left|\frac{m}{n} - p_0\right|$ ayirma asosida quriladi. Agarda bu ayirma katta bo‘lsa, asosiy gipoteza $p = p_0$ rad etiladi, agarda bu ayirma yetarlicha kichik bo‘lsa, statistik gipotezani rad etishga asos bo‘lmaydi.

Yuqorida ko‘rsatilgan va boshqa statistik ma’lumotlarni hal etish matematik statistikaning vazifasidir. Matematik statistika bu masalalarni o‘zining tushunchalari va statistik usullari bilan hal etadi [3], [5], [6], [8], [9], [11].

Bosh va tanlanma to‘plam

Aytaylik, ishlab chiqarilgan mahsulotlarning katta to‘piga tegishli biron-bir xususiyat (masalan, mahsulotning o‘lchami, og‘irligi, narxi va hokazo) o‘rganilayotgan bo‘lsin. To‘pga tegishli barcha mahsulotlar *bosh to‘plamni* tashkil qiladi deyiladi. Ko‘p hollarda , bosh to‘plamga mahsulotlar juda ko‘p miqdorda bo‘lib, ularning barchasini uzluksiz o‘lchash amaliyotda mumkin bo‘lmaydi. Ba’zi hollarda bu umuman mumkin bo‘lmasa, ayrim hollarda juda katta xarajatlarni talab qiladi. Bunday hollarda bosh to‘plamdan tasodifiy ravishda chekli sondagi mahsulot ajratib olinadi va ularning xususiyatlari o‘rganiladi. Bu jarayon tanlanmalarga olib keladi. Demak, *tanlanma* bosh to‘plamdan tasodifiy ravishda olingan elementlar. Tanlanmalar usuli deganda biz bosh to‘plamdan tasodifiy ravishda olingan elementlarga xos bo‘lgan qaralayotgan xususiyatlarni statistik tahlil qilib, shular asosida bosh to‘plam elementlariga xos bo‘lgan xususiyatlar haqida umumiy xulosalar chiqarishni tushunamiz.

Matematik statistikada har qanday mulohaza va xulosalar statistik ma’lumotlarga yoki boshqacha qilib aytganda tajriba natijalariga tayanadi. Odatda tajriba natijalari taqsimoti $F(x)$ bo‘lgan X t.m.ning $X_1, X_2, ..., X_n$ kuzatilmalaridan iborat bo‘ladi. Demak, kuzatilmalar bog‘liqsiz va X t.m. bilan bir xil taqsimlangan t.m.lar ekan.

✓ Kuzatilmalardan tuzilgan $(X_1, X_2, ..., X_n)$ vektor hajmi *n* ga teng bo‘lgan t*anlanma* deyiladi.

Endi X bilan X t.m. qabul qiladigan qiymatlar to‘plami bo‘lsin. X to‘plam bosh to‘plamdan iborat bo‘ladi. X to‘plam chekli yoki cheksiz bo‘lishi mumkin. Mavzu boshida ko’rilgan misoldagi barcha mahsulotlarning xususiyatlaridan iborat to‘plam-bosh to‘plam va shu xususiyatlarning sonli ifodasi esa *X* t.m. qiymatlaridan iborat bo‘ladi. Bosh to‘plam X dan qiymatlar qabul qiluvchi *X* t.m.ning taqsimot funksiyasini va sonli xarakteristikalarini (masalan, matematik kutilma, dispersiya, yuqori tartibli momentlar va hokazo) mos ravishda nazariy taqsimot va nazariy sonli xarakteristikalar deyiladi. Kuzatishlar asosida aniqlangan taqsimot funksiya va unga mos sonli xarakteristikalar empirik yoki tanlanma taqsimot funksiyasi va sonli xarakteristikalari deyiladi.

Empirik taqsimot funksiya

Faraz qilaylik, taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo‘lgan X t.m. kuzatilayotgan bo‘lsin. ($X_1, X_2, ..., X_n$) – vektor esa unga mos hajmi *n* ga teng bo‘lgan tanlanma bo‘lsin. Shu vektorning biron-bir aniq qiymati:

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \tag{6.3.1}$$

X t.m.ning amalga oshgan qiymati deyiladi. Har qanday tajriba natijalari (6.3.1) qatordan iborat bo‘lgan sonlar to‘plami bo‘ladi.

✓ Birinchi satri tajriba nomerlari, ikkinchisi esa X ning mos amaldagi qiymatlaridan iborat bo‘lgan quyidagi jadvalga

1	2	3	…	*n*
x_1	x_2	x_3	…	x_n

statistik qator deb ataladi. Statistik qator turli maqsadlarda va turli usullar bilan tahlil qilinishi mumkin. Mana shunday tahlilning maqsadi *X* t.m.ning empirik(yoki statistik) taqsimot funksiyasini tuzishdan iborat bo‘lishi mumkin.

(6.3.1) qatorni kamaymasligi bo‘yicha tartiblaymiz:

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(n)} \tag{6.3.2}$$

hosil bo‘lgan (6.3.2) qator *variatsion qator* deyiladi.

Ixtiyoriy statistik qator (6.3.1) yordamida empirik yoki tanlanma taqsimot funksiyasi aniqlanishi mumkin.

✓ Quyidagicha

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \le x) \tag{6.3.3}$$

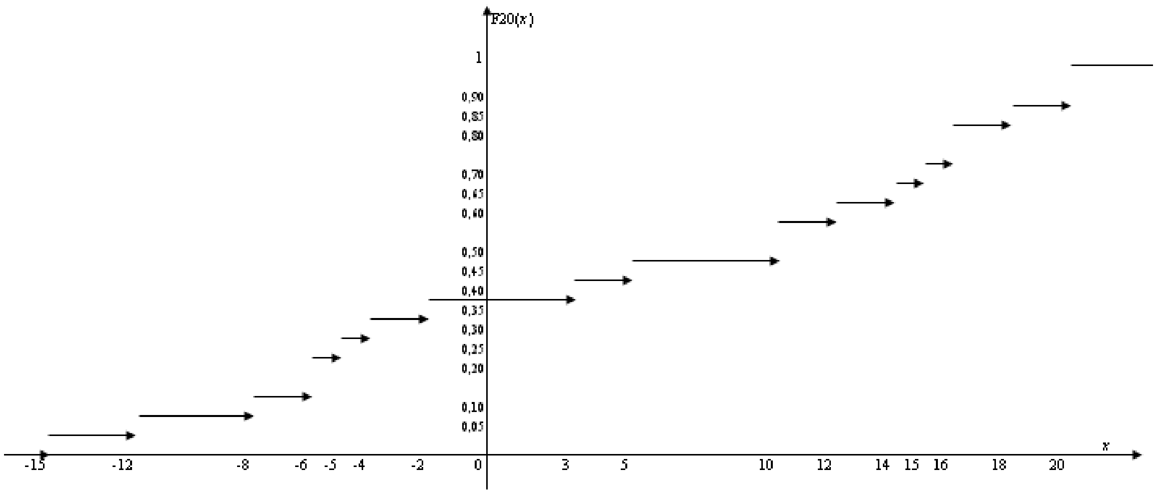
aniqlangan funksiya *empirik*(yoki tanlanma) *taqsimot funksiyasi* deyiladi. Bu yerda $I(A)$ orqali A hodisa indikatori belgilangan. Statistik qator (6.3.1) t.m.lardan iborat bo‘lgani uchun, empirik taqsimot funksiya ham har bir tayinlangan x da t.m. bo‘ladi [3], [6].

6.1-misol. Uzoqlikni o‘lchovchi asbob bilan ma’lum masofa o‘lchanganda tasodifiy xatolikka yo‘l qo‘yildi. Tajriba 20 marta takrorlanganda yo‘l qo‘yilgan xatoliklar statistik taqsimot funksiyasini tuzing. Statistik qator quyidagicha bo‘lsin:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	5	-8	10	15	3	-6	-15	20	12	15

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	-4	-2	20	14	-8	-12	16	10	-5	18

Eng kichik kuzatilma -15. Demak, $\hat{F}_{20}(-15)=0$. -15 bir marta kuzatildi, demak, uning chastotasi $\frac{1}{20}$. Shuning uchiun, -15 nuqtada empirik taqsimot funksiya $\frac{1}{20}$ ga teng bo‘lgan sakrashga ega, -15 nuqtadan -12 nuqtagacha bo‘lgan oraliqda $\hat{F}_n(x)$ funksiya $\frac{1}{20}$ ga teng. -12 niqtada empirik taqsimot funksiya $\frac{1}{20}$ ga teng bo‘lgan sakrashga ega, -12 nuqtadan -8 nuqtagacha bo‘lgan oraliqda $\hat{F}_n(x)$ funksiya $\frac{2}{20}$ ga teng. -8 niqtada empirik taqsimot funksiya $\frac{2}{20}$ ga teng bo‘lgan sakrashga ega, chunki -8 qiymat ikki marta uchraydi va hokazo. Empirik taqsimot funksiya grafigini chizamiz.



34-rasm.

Har qanday t.m.ning empirik taqsimot funksiyasi kuzatilgan nuqtalarda shu kuzatilmaning chastotasiga teng va sakrashga ega bo‘lgan pog‘onali, uzlukli funksiyadan iborat bo‘ladi.

Bernulli teoremasiga asosan tajribalar soni n cheksiz o‘sganda $\{X<x\}$ hodisaning chastotasi shu hodisaning ehtimolligiga intiladi. Bu esa empirik taqsimot funksiyaning n cheksizlikka intilganda haqiqiy taqsimot funksiya $F(x)=P\{X<x\}$ ga istalgancha yaqin bo‘lishini anglatadi.

Empirik taqsimot haqida quyidagi tasdiqni keltirish mumkin.

Teorema(Glivenko-Kantelli)[9]. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun quyidagi munosabat o‘rinli

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\sup_x \left|\hat{F}_n(x) - F(x)\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Demak n ortgani sari $\hat{F}_n(x)$ funksiya $F(x)$ ga barcha x larda 1 ehtimollik bilan tekis yaqinlashar ekan.

Gistogramma va poligon

Tajribalar soni katta bo‘lsa, tajriba natijalari statistik qatori ham katta bo‘ladi. Shuning uchun, ko‘p hollarda intervallik statistik qatordan foydalanish maqsadga muvofiq bo‘ladi.

Faraz qilaylik, biron-bir usul bilan tajriba natijalari intervallarga ajratilgan bo‘lsin. Har bir intervaldagi kuzatilmalarning chastotasini hisoblaymiz. Olingan ma’lumotlar asosida jadval tuzamiz. Hosil bo‘lgan jadval tanlanma majmua deyiladi.

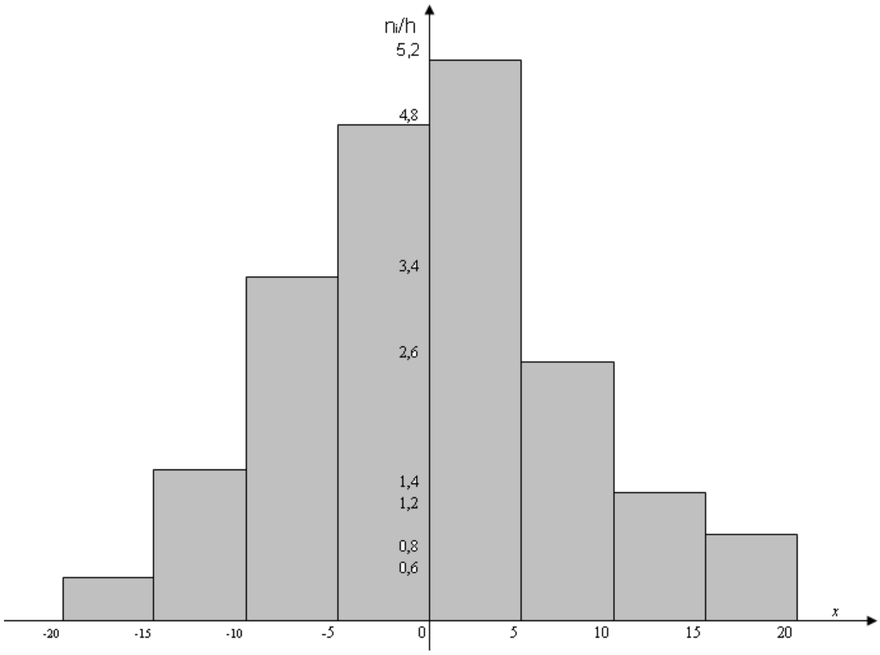
6.2-misol. Ma’lum masofa 100 marta o‘lchanganda yo‘l qo‘yilgan xatolar quyidagilardan iborat:

Guruhlar	[-20;-15)	[-15;-10)	[-10;-5)	[-5;0)	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20]
Guruhlardagi xatolar soni	2	8	17	24	26	13	6	4
Chastotalar	0.02	0.08	0.17	0.24	0.26	0.13	0.06	0.04

✓ Statistik majmuaning grafik tasviri *gistogramma* deyiladi. Uni qurish uchun t.m.ning qiymatlar sohasini uzunligi h ga teng bo‘lgan k ta oraliqlarga bo‘linadi va kuzatilmalarning har bir oraliqqa tushgan sonlari aniqlanadi. Masalan, n_i - soni i- oraliqqa tushgan kuzatilmalar soni bo‘lsin, u holda $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Chastotalar gistogrammasi deb asoslari oraliq uzunligi h ga teng bo‘lgan va balandliklari $\frac{n_i}{h}$ bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan tuzilgan shaklga aytiladi. Chastotalar gistogrammasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

9. [9] Jun Shao Mathematikal Statistics. Springer. 2003. 591 p.



35-rasm.

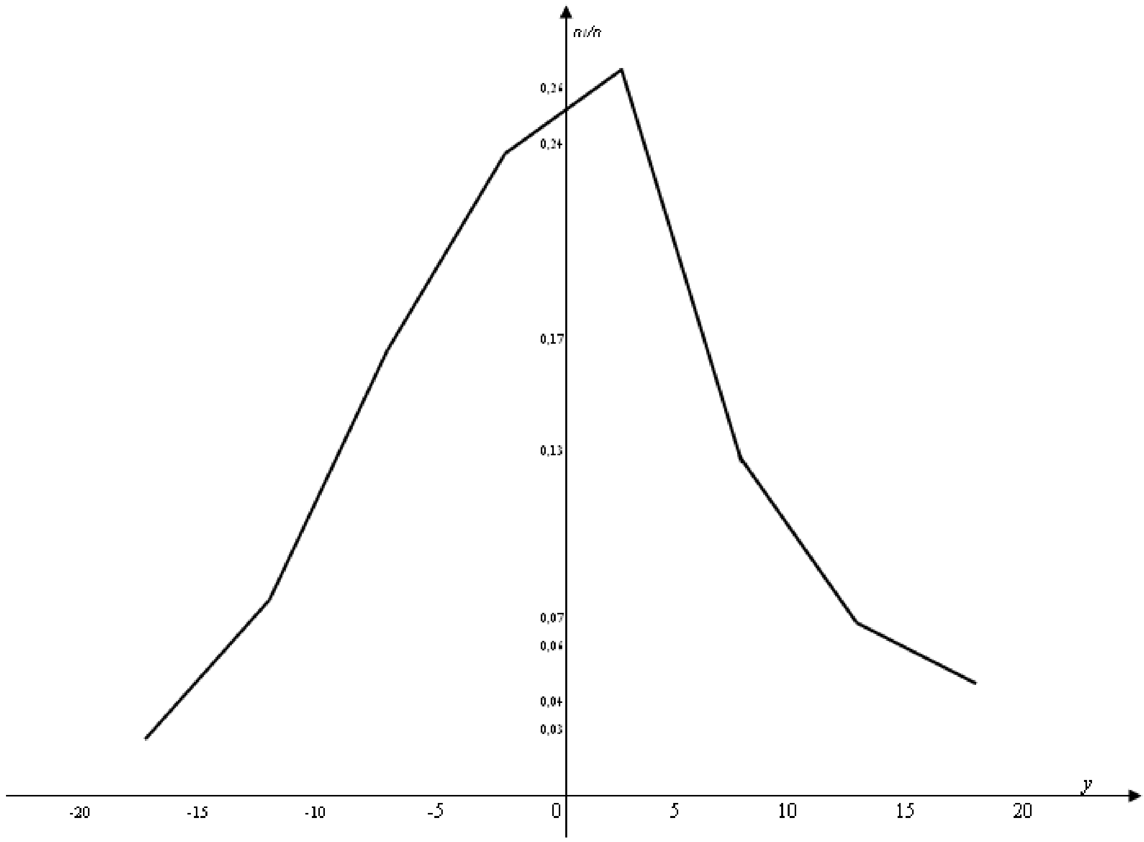
Hosil bo‘lgan fuguraning yuzasi n ga teng, chunki $\frac{n_i}{h} \cdot h = n_i$, $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb asoslari h bo`lgan, balandliklari $\frac{n_i}{h}$ bo`lgan to`rtburchaklardan tuzilgan pog`onali figuraga aytiladi. Bu holda hosil bo`lgan figura yuzasi 1 ga teng.

Misol. Masofa 100 marta o`lchanganda hosil bo`lgan xatolarning nisbiy chastotalar gistogrammasini yasang. Buning uchun 1-jadvaldan foydalanamiz.

35-rasmdan ko`rinib turibdiki, nisbiy chastotalar gistogrammasi xatolar taqsimotining zichlik funksiyasiga yaqin bo`ladi. Bu yaqinlik yanada aniqroq bo`lishi talab qilinsa, nisbiy chastotalar poligonidan foydalangan ma`qul.

- ✓ Tekislikda $\left(y_2, \frac{n_1}{n}\right), \left(y_2, \frac{n_2}{n}\right), ..., \left(y_k, \frac{n_k}{n}\right)$ nuqtalarni siniq chiziqlar bilan birlashtirishdan hosil bo`lgan figura *nisbiy chastotalar poligoni* deyiladi.



36-rasm.

Tanlanma xarakteristikalari

Ma`lumki, ehtimollar nazariyasida taqsimot funksiyani bilish shu taqsimot funksiyasiga ega bo`lgan t.m. haqida to`liq ma`lumotga ega bo`lishni anglatadi. Ammo juda ko`p amaliy masalalarni hal qilishda t.m.ni to`liq bilish shart bo`lmay, balki uning ayrim sonli xarakteristikalarini bilish kifoya bo`ladi. T.m.ning asosiy sonli xarakteristikalari bu-matematik kutilma va dispersiyalardir. Matematik kutilma t.m.ning qiymatlari zich joylashadigan o`rta qiymatni anglatsa, dispersiya esa t.m. qiymatlarini shu o`rta qiymat atrofida qanchalik tarqoqligini bildiradi. Shunga o`xshash sonli xarakteristikalarni statistik taqsimot funksiyasiga nisbatan ham kiritish mumkin. Matematik kutilmaning statistik o`xshashi empirik o`rta qiymat yoki tanlanma o`rta qiymatidan iborat bo`ladi va u (6.3.1) amaliy qiymat yordamida quyidagicha aniqlanadi

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ . \qquad (6.5.1)$$

O‘rta qiymatni quyidagi ko‘rinishda ham yozish mumkin:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i \ , \qquad (6.5.2)$$

bu yerda n_i har bir x_i variantaning mos chastotasidir.

Empirik dispersiya yoki tanlanma dispersiyasi esa quyidagicha aniqlanadi:

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right),\ \text{(yoki}\quad S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-\overline{x}\right)n_i\ \text{)} \qquad (6.5.3)$$

r-ichi tartibli tanlanma momentlar va markaziy momentlar ham shunga o`xshash aniqlanadi:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^r,\quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_k-\overline{x}\right)^r \qquad (6.5.4)$$

Agar tajribalar soni cheksiz katta bo`lsa barcha statistik taqsimot xarakteristikalari nazariy sonli xarakteristikalarga yaqin bo`ladi. Endi shu yaqinlikni o`rganishga kirishamiz [3], [5], [6], [8], [9], [11].

6.3 – misol. Test natijalariga ko‘ra talabalar quyidagi ballarni yig‘dilar: {5,3,0,1,4,2,5,4,1,5}. Ushbu tanlanmaning sonli xarakteristikalarini hisoblang.
Avval ushbu tanlanmaga mos chastotali taqsimot tuzamiz:

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	1	2	1	1	2	3

(6.5.2) va (6.5.3) formulalarga asosan:

$$\overline{x}=\frac{1}{10}\left(0\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot 1+4\cdot 2+5\cdot 3\right)=3,$$

$$S^2=\frac{1}{10}\left((0-3)^2\cdot 1+(1-3)^2\cdot 2+(2-3)^2\cdot 1+(3-3)^2\cdot 1+(4-3)^2\cdot 2+(5-3)^2\cdot 3\right)=3.2\,.$$

Noma’lum parametrlarni baholash

Statistik baholar va ularning xossalari

Faraz qilaylik, taqsimot funksiyasi noma`lum parametr $\theta$ ga bog`liq bo`lgan t.m. $X$ berilgan bo`lsin. Boshqacha qilib aytganda, kuzatilayotgan t.m. X ning taqsimot funksiyasi $f(x,\theta)$ bitta parametrli parametrik taqsimot funksiyalar oilasiga tegishli bo`lsin. Endi tajriba natijasida olingan ma`lumotlar yordamida noma`lum parametr $\theta$ ni “tiklash”, ya`ni ma`lum ma`noda unga yaqin bo`lgan va tajribalar asosida to`liq tiklanadigan biron-bir miqdorni tuzish masalasini ko`raylik. Θ orqali θ ning qiymatlari to‘plamini belgilaymiz.

Faraz qilaylik, $(X_1,\ldots,X_n)$ X t.m.ning xajmi n ga teng bo`lgan tanlanmasi bo`lsin.

- ✓ $X_1,\ldots,X_n$ kuzatilmalarning ixtiyoriy $T_n=T\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ funksiyasi *statistika* deyiladi.

Ta`rifdan kelib chiqadiki, statistika faqat kuzatilmalarga bog`liq bo`lgan tasodifiy miqdor bo`lib, u tajriba natijasida to`liq aniqlanadi.

- ✓ Agar $T_n\in\Theta$ bo‘lsa, u holda T_n statistika noma’lun parametr θ uchun *baho* deb ataladi.

Ta`rifdan kelib chiqadiki, bitta parametr uchun bir necha statistik baho taklif qilinishi mumkin. Shuning uchun, statistik baholardan ma`lum ma`noda “yaxshi” xossalarga ega bo`lishlari talab etiladi. Odatda har qanday statistik baholarning quyidagi xossalarga ega bo`lishligi maqsadga muvofiqdir.

Siljimagan baho

- ✓ Agarda statistik bahoning matematik kutilmasi noma`lum parametrga teng, ya`ni

$$MT_n = MT\left(X_1,\ldots,X_n\right)=\theta \qquad (7.1.1)$$

bo`lsa, statistik baho *siljimagan baho* deyiladi.

Agar statistik baho $T_n = T\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ uchun $b = MT\left(X_1,\ldots,X_n\right)-\theta \neq 0$ bo`lsa, u *siljigan baho* deyiladi va $b$ -siljish kattaligi bo`ladi.

Noma`lum parametr $\theta$ $X$ t.m.ning matematik kutilmasi va $X_1,\ldots,X_n$ lar unga mos kuzatilmalar bo`lsin. Quyidagi statistikani kiritamiz

$$T\left(X_1,\ldots,X_n\right)=a_1X_1+...+a_nX_n\,. \qquad (7.1.2)$$

Bu yerda $a_1,...,a_n$ -lar $a_1+...+a_n=1$ tenglikni qanoatlantiruvchi o`zgarmas sonlar. $MX=\theta$ va demak, $MX_1=...MX_n=\theta$ matematik kutilmani hisoblash qoidasidan

$$MT\left(X_1,\ldots,X_n\right)=M\left(a_1X_1+...+a_nX_n\right)=a_1\theta+...+a_n\theta=\left(a_1+...+a_n\right)\theta=\theta \qquad (7.1.3)$$

ega bo`lamiz. Bu tenglikdan (7.1.2) statistikaning noma`lum θ parametr uchun siljimagan baho ekanligi kelib chiqadi. Xususan, $a_1=1, a_2=...=a_n=0$ bo`lsa (7.1.2) dan $T\left(X_1,\ldots,X_n\right)=X_1$ statistikaga, agarda $a_1=...=a_n=\frac{1}{n}$ bo`lsa $T\left(X_1,\ldots,X_n\right)=\overline{x}$ statistikaga ega bo`lamiz. (7.1.3) munosabat $a_1+...+a_n=1$ tenglik bajariladigan ixtiyoriy $a_1,...,a_n$ lar uchun to`g`ri bo`lganligidan x_1 va $\overline{x}$ statistikalar ham noma`lum θ parametr uchun siljimagan baho ekanligi kelib chiqadi. Demak, bitta parametr uchun bir nechta siljimagan baho tuzish mumkin ekan. Bu xulosadan, tabiiy, siljimagan baholarni taqqoslash zaruriyati kelib chiqadi [6], [9], [11].

Optimal baho

Noma`lum parametr $\theta$ uchun siljimagan baholar to`plamini U bilan belgilaylik. Oldingi boblardan ma`lumki, t.m. dispersiyasi shu t.m.ning qiymatlari uning matematik kutilmasi atrofida qanchalik zich yoki tarqoq joylashganligining mezoni bo`ladi. Shuning uchun, tabiiy, siljimagan baholarni ularning dispersiyasiga ko`ra taqqoslaymiz.

Faraz qilaylik, $T_1(X_1,\ldots,X_n)$ va $T_2(X_1,\ldots,X_n)$ lar noma`lum $\theta$ parametr uchun siljimagan baholar bo`lsin, $T_1(X_1,\ldots,X_n)\in U$ va $T_2(X_1,\ldots,X_n)\in U$. Agarda shu statistikalar uchun

$$D\,T_1(X_1,\ldots,X_n)<D\,T_2(X_1,\ldots,X_n)$$

munosabat bajarilsa, $T_1(X_1,\ldots,X_n)$ baho $T_2(X_1,\ldots,X_n)$ bahodan aniqroq baho deyiladi.

Demak, bitta parametr uchun bir necha siljimagan baholar mavjud bo`lsa, uning statistik bahosi sifatida aniqroq bahoni qabul qilish maqsadga muvofiq bo`ladi. Yuqorida biz noma`lum matematik kutilma $\theta$ uchun ikkita siljimagan $X_1$ va $\overline{x}$ -lardan iborat bo`lgan baholarni ko`rdik. Endi ularni taqqoslaylik. Dispersiyani hisoblash qoidasiga asosan:

$$D\bar{x} = D\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Dx_i = \frac{1}{n}DX \qquad (7.1.4)$$

va $DX_1 = DX$ bo`ladi. yuqorida keltirilgan taqqoslash qoidasiga muvofiq, ko`rinib turibdiki $\bar{x}$ baho X_1 bahoga nisbatan aniqroq bo`ladi.

✓ Agar $\inf DT(X_1,\ldots,X_n) = DT^*(X_1,\ldots,X_n)$ $T\,(X_1,\ldots,X_n) \in U$ bo`lsa, $T^*(X_1,\ldots,X_n)$- statistik baho *optimal baho* deyiladi.

Ko`rsatish mumkinki $\bar{x}$ statistika noma`lum matematik kutilma θ uchun barcha siljimagan chiziqli baholar ichida eng aniq (optimal) bahodir.

Asosli baho

✓ Agarda n cheksizlikka intilganda $T\,(X_1,\ldots,X_n)$ statistika ehtimol bo`yicha noma`lum parametr θ ga yaqinlashsa, ya`ni ixtiyoriy kichik ε>0 son uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\,\{\left|T(X_1,\ldots,X_n)-\theta\right| < \varepsilon\} = 1$$

munosabat o'rinli bo`lsa, u holda $T\,(X_1,\ldots,X_n)$ statistik baho *asosli baho* deyiladi.

Demak, asosli baho $T_n(X_1,\ldots,X_n)$ tajribalar soni ortib borganida noma`lum $\theta$ parametrga ehtimol bo`yicha yaqinlashar ekan. Odatda har qanday statistik bahodan asosli bo`lish talab etiladi. Matematik ststistikada asosli bo`lmagan baholar o`rganilmaydi [3], [5], [6], [9], [11].

7.1 – misol. Tanlanma o`rta qiymat $\bar{x}$ noma`lum matematik qurilma $MX = \theta$ ga asosli baho ekanligini ko`rsating.
Chebishev tengsizligiga va (7.1.3) munosabatga ixtiyoriy kichik ε>0 son uchun

$$P\,\{\left|\bar{x}-\theta\right| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\bar{x}}{\varepsilon^2} = \frac{DX}{n\varepsilon^2}.$$

Oxirgi tengsizlikda dispersiya chekli bo`lsa, $n\to\infty$ da limitga o`tsak, haqiqatan ham $\bar{x}$ statistikaning asosli baholigi kelib chiqadi.

Umuman, ixtiyoriy siljimagan baho $T\,(X_1,\ldots,X_n)$ ning noma`lum $\theta$ parametrga asosli baho bo`lishlik shartini keltiramiz.

Teorema. Agar $T_n = T\,(X_1,\ldots,X_n)$ statistika θ parametr uchun siljimagan baho bo`lib, $n\to\infty$ uning dispersiyasi $DT_n \to 0$ bo`lsa, u holda u asosli baho bo`ladi[10].

Isbot. $T\,(X_1,\ldots,X_n)$ statistika siljimagan baho bo`lgani uchun $MT\,(X_1,\ldots,X_n) = \theta$. U holda ixtiyoriy ε>0 uchun Chebishev tengsizligidan quyidagi tengsizlikni yoza olamiz:

$$P\,\{\left|T_n-\theta\right| < \varepsilon\} \leq 1 - \frac{DT_n}{\varepsilon^2}. \qquad (7.1.5)$$

Ammo, shartga ko`ra, ixtiyoriy tayinlangan ε>0 uchun $n\to\infty$ da $\frac{DT_n}{\varepsilon^2} \to 0$.

---

10. [10] Jun Shao Mathematikal Statistics. Springer. 2003. 591 p.

Demak, (7.1.5) tengsizlikdan $T(X_1,...,X_n)$ statistikaning asosli baho ekanligi kelib chiqadi.

Nuqtaviy baholash usullari

Biz oldingi paragraflarda statistik baholar va ularning xossalari bilan tanishdik. Statistik baholar qanday topiladi? Mana shu savolga javob beramiz. Statistik baholar tuzishning ikki usulini ko`rib chiqamiz.

I. Momentlar usuli

Faraz qilaylik, X kuzatilmalari $X_1,...,X_n$ lardan iborat va taqsimot funksiyasi $F(x,\theta)$ noma`lum parametr $\theta=(\theta_1,...,\theta_r)$ ga bog`liq bo`lgan t.m. bo`lsin. Birinchi bobda tanlanma momentlar tushunchalarini kiritdik va ularning ayrim xossalari bilan tanishdik. Xususan, KSQ ga asosan tanlanma momentlar tajribalar soni katta bo`lganida nazariy momentlarga istalgancha yaqin bo`lishligini bildik. Momentlar usuli asosida mana shu yaqinlik g`oyasi yotadi.

Faraz qilaylik X tasodifiy miqdorning birinchi r ta $\alpha_k = MX^k,\quad k=1,...,r$ momentlari mavjud bo`lsin. Tabiiyki, ular noma`lum θ parametrning $\alpha_k=\alpha_k(\theta)$ funksiyalari bo`ladilar. $A_{nk}=\sum_{i=1}^{n} X_i^k,\ k=1,...,r$, tanlanma momentlarini mos ravishda $\alpha_k,\ k=1,...,r$, larda tenglashtirib r ta tenglamalar sistemasini tuzib olamiz:

$$\begin{cases} \alpha_1(\theta)=A_{n1}, \\ \alpha_2(\theta)=A_{n2}, \\ \vdots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_r(\theta)=A_{nr}. \end{cases} \tag{7.2.1}$$

Mana shu tenglamalar sistemasini $\theta_1,...,\theta_r$ larga nisbatan yechib, $\theta_k=\theta_k(X_1,\dots,X_n),\ k=1,...,r$ yechimlarga ega bo‘lamiz. Shunday topilgan θ_k, $k=1,...,r$ statistikalar *momentlar usuli* bilan noma’lum θ_k, $k=1,...,r$ paramertlar uchun tuzilgan statistik baholar bo‘ladi.

7.2 - misol. Matematik kutilmasi va dispersiyasi no‘malum bo‘lgan, zichlik funksiyasi $f(x,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}}e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_2}}$ bo‘lgan normal qonunni qaraylik. Noma’lum θ_1 va θ_2 parametrlarni momentlar usulida baholaylik. Bu holda (7.2.1) tenglamalar quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$\theta_1=A_{n1} \text{ va } \theta_2+\theta_1^2=A_{n2}.$$

Natijada momentlar usuli bilan tuzilgan statistik baholar

$$\tilde{\theta}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{x},\ \tilde{\theta}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{x})^2=S^2$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Momentlar usuli bilan topilgan statistik baholar ayrim hollarda siljimagan, asosli va eng aniq baholar bo‘ladi.

II. Haqiqatga maksimal o‘xshashlik usuli

Kuzatilmalari $X_1,...,X_n$ lardan va umumlashgan zichlik funksiyasi $p(x,\theta)$ dan iborat X t.m.ni olaylik. Agar X diskret t.m. bo‘lsa, $p(x,\theta)=P\{X=x;\theta\}$ ehtimolliklardan, X uzluksiz t.m. bo‘lgan holda esa $p(x,\theta)=f(x;\theta)$ zichlik funksiyadan iborat bo‘ladi. Quyidagi funksiyaga $L(x_1,...,x_n,\theta)=p(x_1,\theta)\cdot...\cdot p(x_n,\theta)$ haqiqatga maksimal o‘xshashlik funksiyasi deyiladi. Faraz qilaylik, $L(x_1,...,x_n,\theta)$ funksiya $\theta\in\Theta$ yopiq sohada biror θ^* nuqtada eng katta qiymatga erishsin:

$$L(x_1,...,x_n,\theta^*)=\max_{\theta\in\Theta} L(x_1,...,x_n,\theta).$$

Haqiqatga maksimal o‘xshashlik funksiyasi eng katta qiymatga erishadigan θ^* qiymat noma’lum θ parametr uchun haqiqatga maksimal o‘xshashlik usuli bilan tuzilgan statistik baholar deb ataladi. Ularni quyidagi tenglamalr sistemasidan ham topish mumkin:

$$\left.\frac{\partial L(x_1,...,x_n,\theta)}{\partial\theta_k}\right|_{\theta=\theta^*}=0,\ k=1,...r. \qquad (7.2.2)$$

(7.2.2) tenglamalar sistemasi haqiqatga maksimal o‘xshashlik tenglamalri deyiladi.

Ko‘p ollarda (7.2.2) tenglamalar sistemasi o‘rniga quyidagi tenglamar sistemasini yechish qulay bo‘ladi:

$$\left.\frac{\partial \ln L(x_1,...,x_n,\theta)}{\partial\theta_k}\right|_{\theta=\theta^*}=0,\ k=1,...r. \qquad (7.2.3)$$

7.3 -misol. Matematik kutilmasi va dispersiyasi noma’lum bo‘lgan, zichlik funksiyasi $f(x,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}}e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_2}}$ bo‘lgan normal qonunni olaylik. Haqiqatga maksimal o‘xshashlik funksiyasini tuzamiz:

$$L(x_1,...,x_n,\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(X_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta_2}e^{-\frac{(X_i-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}}=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\theta_2\right)^n}\exp\left\{-\frac{1}{2\theta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta_1)^2\right\}.$$

Bundan

$$\ln L(x_1,...,x_n,\theta)=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-n\ln\theta_2-\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}.$$

Avval (7.2.3) sistemaning birinchi tenglamasini qaraylik:

$$\frac{\partial \ln L(x_1,...,x_n,\theta)}{\partial \theta_1}=\frac{1}{2\theta_2}\sum_{i=1}^{n}2(X_i-\theta_1)=0.$$

Soddalashtirgandan so‘ng $\sum_{i=1}^{n}X_i-n\theta_1=0$ tenglamaga kelamiz.

Endi (7.2.3) sistemaning ikkinchi tenglamasini tuzamiz:

$$\frac{\partial \ln L(x_1,...,x_n,\theta)}{\partial \theta_k}=-n\cdot\frac{1}{\theta_2}+\frac{1}{\theta_2^3}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta_1)^2=0.$$

Soddalashtirgandan so‘ng $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta_1)^2-n\theta_2^2=0$ tenglamaga kelamiz.

Natijada θ_1 va θ_2^2 lar uchun

$$\widehat{\theta}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{x},\quad \widehat{\theta}_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{x})^2=S^2$$

Ko‘rinishdagi statistik baholarni topamiz.

Demak, normal qonun uchun momentlar va haqiqatga maksimal o‘xshashlik usullari bilan tuzilgan statistik baholar aynan bir xil ekan [6], [9], [11]..

Interval baholash

Ishonchlilik oralig‘i

Oldingi paragraflarda biz noma’lum parametrlarning nuqtaviy statistik baholari bilan tanishdik. Tuzilgan nuqtaviy baholar tanlanmaning aniq funksiyalari bo‘lgan t.m. bo‘lib, ular noma’lum parametrlarning asl qiymatiga yaqin bo‘lgan nuqtani aniqlab beradi xolos. Ko‘p masalalarda noma’lum parametrlarni statistik baholash bilan birgalikda bu bahoning aniqligini, ishonchliligini topish talab etiladi. Matematik statistikada statistik baholarning aniqligini topish ishonchlilik oralig‘i va unga mos ishonchlilik ehtimolligi orqali hal etiladi.

Faraz qilaylik, tanlanma yordamida noma’lum θ parametr uchun siljimagan $T(X_1,\ldots,X_n)$ baho tuzilgan bo‘lsin. Tabiiyki $|T(X_1,\ldots,X_n)-\theta|$ ifoda noma’lum θ parametr bahosining aniqlik darajasini belgilaydi. $T(X_1,\ldots,X_n)$ statistik bahoning noma’lum θ parametrga qanchalik yaqinligini aniqlash masalasi qo‘yilsin. Oldindan biron-bir β ($0<\beta<1$)- sonni 1 ga yetarlicha yaqin tanlab qo‘yaylik. Endi quyidagi

$$\mathrm{P}\{|T(X_1,\ldots,X_n)-\theta|<\delta\}=\beta$$

munosabat o‘rinli bo‘ladigan $\delta>0$ sonini topish lozim bo‘lsin. Bu munosabatni boshqa ko‘rinishda yozamiz

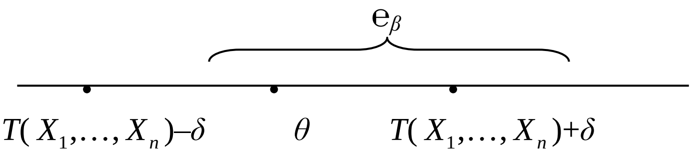
$$P\{T(X_1,\ldots,X_n)-\delta<\theta<T(X_1,\ldots,X_n)+\delta\}=\beta \qquad (7.3.1)$$

(7.3.1) tenglik noma'lum θ parametrning qiymati β ehtimollik bilan

$$e_\beta=(\,T(X_1,\ldots,X_n)-\delta\,;\,T(X_1,\ldots,X_n)+\delta\,) \qquad (7.3.2)$$

oraliqda ekanligini anglatadi.

Shuni aytish joizki, (7.3.2) dagi e_β – oraliq tasodifiy miqdorlardan iborat chegaralarga ega. Shuning uchun, β – ehtimollikni noma'lum θ parametrning aniq qiymati e_β – oraliqda yotish ehtimoli deb emas, balki e_β – oraliq θ nuqtani o'z ichiga olish ehtimoli deb talqin qilish to'g'ri bo'ladi (37 – rasm).



37 – rasm.

✓ Demak, aniqlangan e_β oralig'i ishonchlilik oralig'i, β – ehtimol esa *ishonchlilik ehtimoli* deyiladi.

Matematik kutilma uchun ishonchlilik oralig'i

Faraz qilaylik, X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi θ va dispersiyasi σ^2 bo'lsin. Noma'lum θ – parametr uchun ishonchlilik ehtimoli β – ga teng bo'lgan e_β – ishonchlilik oralig'ini tuzish masalasini qaraylik.

$X_1, \ldots, X_n$ – hajmi n – ga teng bo'lgan tanlanma va unga mos tanlanma o'rta qiymati va dispersiyasini tuzaylik:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\ ,\quad S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{x})^2\,.$$

Eslatib o'tamiz, $\bar{x}$ – bir xil taqsimlangan, bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar yig'indisidantuzilgandir. Shuning uchun, markaziy limit teoremaga asosan uning taqsimot funksiyasi normal qonunga yaqindir. $\bar{x}$ ning matematik kutilmasini va dispersiyasini hisoblaymiz:

$$M\bar{x}=\theta,\quad D\bar{x}=\frac{\sigma^2}{n}$$

Endi $\delta_\beta>0$ sonni shunday topaylikki, u uchun quyidagi munosabat o'rinli bo'lsin:

$$P\{|\bar{x}-a|<\delta_\beta\}=\beta\,. \qquad (7.3.3)$$

$\bar{x}$ - t.m.ning taqsimot funksiyasi normal qonunga yaqinligini hisobga olib, (7.3.3) – tengsizlikning o'ng tomondagi β – sonini Laplas funksiyasi bilan bog'laymiz:

$$P\{|\bar{x}-a|<\delta_\beta\}\approx\left[\Phi\left(\frac{\delta_\beta}{\sigma_{\bar{x}}\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(-\frac{\delta_\beta}{\sigma_{\bar{x}}\sqrt{2}}\right)\right]. \qquad (7.3.4)$$

Bu yerda $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}$ - o‘rta kvadratik chetlanish.

Laplas funksiyasining $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ xossasini inobatga olsak, (7.3.4) - tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$P\left\{\left|\bar{x}-a\right|<\delta_\beta\right\}=2\Phi\left(\frac{\delta_\beta}{\sigma_{\bar{x}}\sqrt{2}}\right)-1 \qquad (7.3.5)$$

(7.3.3) va (7.3.5) tengliklardan quyidagini hosil qilamiz:

$$\Phi\left(\frac{\delta_\beta}{\sigma_{\bar{x}}\sqrt{2}}\right)=\frac{1+\beta}{2}.$$

Oxirgi tenglikdan δ_β ni aniqlaymiz:

$$\delta_\beta=\sigma_{\bar{x}}\sqrt{2}\Phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right) \qquad (7.3.6)$$

Bu yerda $\Phi^{-1}(x)$ orqali Laplas funksiyasiga teskari funksiyani belgiladik. (7.3.6) – tenglik bilan aniqlangan δ_β – soni noma’lum $\sigma_{\bar{x}}$ miqdor orqali yoziladi. Yetarli katta n lar uchun tanlanma dispersiya S^2 nazariy dispersiyaga yaqin bo‘lgani uchun $\sigma_{\bar{x}}$ ni taqriban $\sqrt{\dfrac{S^2}{n}}$ ga teng deyish mumkin, ya’ni

$$\sigma_{\bar{x}}\approx\sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

Shunday qilib, noma’lum o‘rta qiymat θ – uchun β – ishonchlilik ehtimoliga teng e_β – ishonchlilik oralig‘i

$$e_\beta=\left(\bar{x}-\delta_\beta,\bar{x}+\delta_\beta\right) \qquad (7.3.7)$$

ga teng bo‘ladi. Bu yerda $\delta_\beta=\sqrt{\dfrac{2S^2}{n}}\Phi^{-1}(\beta)$ [6], [9], [11].

7.4 -misol. *X* t.m.ning tajriba natijasida 20 ta qiymati olindi.

i	X_i	i	X_i
1	10.9	11	10.8
2	10.7	12	10.3
3	11.0	13	10.5
4	10.5	14	10.8
5	10.6	15	10.9
6	10.4	16	10.6
7	11.3	17	11.3
8	10.8	18	10.8
9	11.2	19	10.9
10	10.9	20	10.7

X t.m.ning matematik kutilmasi θ uchun β = 0.86 ishonchlilik ehtimoliga mos keluvchi ishonchlilk oralig‘ini tuzing.

Tanlanma o‘rta qiymat va dispersiyani topamiz.

$$\overline{X} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} X_i = 10.78\,;\; S^2 = \frac{20}{19}\left(\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} X_i^2 - 10.78^2\right) = 0.064\,;\; \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{S^2}{n}} = 0.0564.$$

(7.3.7) formula bo‘yicha ishonchlilik oralig‘ini tuzamiz:

$$\delta_\beta = 0.0564\sqrt{2}\Phi^{-1}(0.86) = 0.083 \text{ va } \bar{x} - \delta_\beta = 10.78 - 0.083 \approx 10.70\,;$$

$$\bar{x} + \delta_\beta = 10.78 + 0.083 \approx 10.86\,,$$

u holda ishonchlilk oralig‘i e_β=(10.70; 10.86) ekan.

Normal taqsimot matematik kutilmasi uchun ishonchlilik oralig‘i. Styudent taqsimoti

Oldingi paragraflarda biz taqsimoti funksiyasi ixtiyoriy bo‘lgan t.m. matematik kutilmasi uchun taqribiy ishonchlilik oralig‘i tuzdik. Agarda tanlanma o‘rta qiymatining taqsimoti ma’lum bo‘lsa, aniq ishonchlilik oralig‘ini tuzish mumkin.

Faraz qilaylik, $X_1, \ldots, X_n$ lar matematik kutilmasi θ va dispersiyasi σ^2 bo‘lgan normal qonun bo‘yicha taqsimlangan X t.m.ning tajribalar natijasida olingan hajmi n – ga teng bo‘lgan tanlanmasi bo‘lsin.

Quyidagi statistikani kiritamiz:

$$t = \sqrt{n-1}\,\frac{\bar{x} - \theta}{\overline{S}} \tag{7.3.8}$$

Bu yerda,

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\;, \qquad \overline{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\,.$$

Teorema. Agarda $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – bog‘liqsiz va (θ, σ^2) parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlan statistik tanlanma bo‘lsa, u holda t – statistika erkinlik darajasi n-1 ga teng bo‘lgan Styudent taqsimotiga ega bo‘ladi.

Styudent taqsimotining zichlik funksiyasi quydagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$S_{n-1}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}du$ - gamma funksiya yuqoridagi formuladan ko‘rinib turibdiki, Styudent taqsimoti $\bar{x}$ va $\overline{S}$ statistikalarga bog‘liq bo‘lmay, faqat kuzatilmalar hajmi n ga bog‘liqdir[11]

Endi Styudent taqsimotining ishonchlilik oralig‘i qurishga tadbiqini ko‘raylik.

11. [11] Jun Shao Mathematikal Statistics. Springer. 2003. 591 p.

Normal qonun bo‘yich taqsimlangan X t.m.ning tajribalar natijasida $X_1,\ldots,X_n$ qiymatlari topilgan bo‘lsin. Bular asosida $\overline{x}$ va $\overline{S}$ statistikalarni hisoblaymiz. T.m. noma’lum matematik kutilmasi θ – uchun ishonchlilik ehtimoli β $(0<\beta<1)$ bo‘lgan e_β ishonchlilik oralig‘ini qurish masalasini qaraylik.

Quyidagi ehtimolni ko’raylik:

$$P\{|\overline{x}-\theta|<\delta_\beta\}=\beta\,.$$

Bu tenglikning chap tomonida $\overline{x}$ t.m.dan t – statistikaga o‘tamiz. Buning uchun $|\overline{x}-\theta|<\delta_\beta$ tengsizlikning ikkala tomonini $\frac{\sqrt{n}}{\overline{S}}$ ga ko‘paytiramiz.U holda,

$$P\left\{\frac{\sqrt{n}\,|\overline{x}-\theta|}{\overline{S}}<\frac{\delta_\beta}{\frac{\overline{S}}{\sqrt{n}}}\right\}=\beta$$

tenglik hosil bo‘ladi. (7.3.8) formuladan foydalansak,

$$P\left\{|t|<\frac{\delta_\beta}{\frac{\overline{S}}{\sqrt{n}}}\right\}=\beta$$

munosabatga kelamiz.

Styudent taqsimoti zichlik funksiyasining juftligidan foydalanib quyidagini hosil qilamiz:

$$P\{|t|<t_\beta\}=2\int_0^{t_\beta}S_{n-1}(t)dt=\beta \qquad (7.3.9)$$

Endi (7.3.9) tenglikdan t_β ni topishiniz mumkin. Styudent taqsimoti qiymatlari jadvaldan foydalanib, ishonchlilik ehtimoli β va erkinlik darajasi n-1 ga mos t_β ni aniqlaymiz:

$$\delta_\beta=t_\beta\frac{\overline{S}}{\sqrt{n}}$$

Bu esa e_β ishonchlilik oralig‘i uzunligining yarmiga teng

Demak,

$$e_\beta=\left(\overline{x}-t_\beta\frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}},\overline{x}+t_\beta\frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}}\right).$$

7.5 - misol. $(\theta,\ \sigma^2)$ parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan X t.m.ning 10 ta bog‘liqsiz tajribalar natijasida quyidagi qiymatlari topildi:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	2.5	2	-2.3	1.9	-2.1	2.4	2.3	-2.5	1.5	-1.7

matematik kutilma θ uchun ishonchlilik ehtimoli $\beta=0.95$ bo‘lgan e_β– ishonchlilik oralig‘ini toping.

Tanlanmaning o‘rta qiymati va dispersiyasini topamiz:

$$\bar{x}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=0.4, \quad \bar{S}=\frac{10}{9}\left[\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i^2-(0.4)^2\right]\approx 4.933.$$

Jadvaldan erkinlik darajasi n-1=9 va ehtimollik β = 0.95 bo‘yicha Styudent taqsimotining (1-t_β) – kvantilini topamiz t_β=2.26. Demak,

$$\delta_\beta=t_\beta\frac{\bar{S}}{\sqrt{n}}\approx 1.58$$

va izlanayotgan ishonchlilik oralig‘i e$_\beta$=$\left(\bar{x}-\delta_\beta,\bar{x}+\delta_\beta\right)$ = (-1.18; 1.98) ko‘rinishda bo‘lar ekan.

Statistik gipotezalarni tekshirish

Statistik gipotezalar. Statistik gipotezalarni tekshirish alomatlari va ularning xossalari

Ko‘p hollarda tajribalardan olingan ma’lumotlar asosida o‘rganilayotgan tasodif bilan bog‘liq bo‘lgan jarayonlar xarakteristikalari haqida bir yoki bir necha turli gipotezalar(tahminlar) qilish mumkin. Statistik ma’lumotlar asosida tasodifiy jarayon taqsimoti yoki boshqa xarakteristikalari haqida aytilgan gipotezalarni tekshirishni matematik statistikaning statistik gipotezalar nazariyasi bo‘limi o‘rganadi.

✓ Kuzatilayotgan t.m. haqida aytilgan ixtiyoriy fikrga *statistik gipoteza* deyiladi.

8.1-misol. Hosildorligi a_0 bo‘lgan bug‘doy navini hosildorligi a_1 bo‘lgan bug‘doy navi bilan solishtirilmoqda. Ma’lum tumanda birinchi nav bug‘doy ikkinchi navga qaraganda ko‘proq hosil beradi degan gipotezani tekshirish kerak.

Keltirilgan misoldan ko‘rinib turibdiki, mavjud bo‘lishi mumkin bo‘lgan gipotezalar turlicha bo‘lishi mumkin. Biron – bir obyekt haqida aytilgan gipoteza statistik ma’lumotlar asosida tekshirilishi mumkin.

✓ Tekshirilishi kerak bo‘lgan gipoteza *asosiy gipoteza* deyiladi va u H_0 bilan belgilanadi. Asosiy gipotezadan qarama-qarshi bo‘lgan ixtiyoriy gipotezaga *raqobatlashuvchi* yoki *alternativ gipoteza* deb ataladi.

Afsuski, statistik ma’lumotlar asosida aniq va qat’iy bir yechimga kelish qiyin, shuning uchun har qanday yechimda ma’lum xatolikka yo‘l qo‘yish mumkin. Matematik statistikada statistik gipotezalarni tekshirishda ikki xil xatolikka yo‘l qo‘yishi mumkin. Statistik yechim asosida asosiy faraz u to‘g‘ri bo‘lgan holda ham rad etilishi mumkin. Bunday xatolik *birinchi tur xatolik* deyiladi. Statistik yechim asosida alternativ gipoteza to‘g‘ri bo‘lsa ham rad etilishi mumkin. Bunday xatolik *ikkinchi tur xatolik* deyiladi. Tabiiyki, xatoliklarni imkon qadar kamaytirish lozim. Statistik gipotezalarni tekshirish iloji boricha bir emas, bir necha marotaba takrorlanishi va ular asosida xulosaga kelinishi maqsadga muvofiqdir.

Statistik gipotezalarni tekshirish statistik ma’lumotlarga asoslanadi. Faraz qilaylik, X_1, X_2, …, X_n lar n – ta bog‘liqsiz tajribalardagi X t.m.ning kuzatilmalari bo‘lsin. X t.m.ning biron – bir xarakteristikasi haqidagi asosiy H_0 gipoteza ko’rilayotgan bo‘lsin. Endi statistik ma’lumotlar asosida asosiy gipoteza H_0 ni qabul qilish yoki rad etish qoidasini tuzish kerak. Asosiy gipoteza H_0 ni qabul qilish yoki rad etish qoidasi - H_0 gipotezani tekshirishning statistik alomati deyiladi. Odatda statistik gipotezalarni tekshirish – statistik ma’lumotlar asosida asosiy gipotezani tasdiqlash yoki uni rad etishdan iborat bo‘ladi. Endi statistik alomatlarni tuzish qoidalari bilan tanishamiz. Odatda statistik alomatni qurish empirik ma’lumotarni asosiy H_0 gipoteza bo‘yicha tavsiflovchi statistika T = $T(X_1,\dots,X_n)$ ni tanlashdan boshlanadi. Bunday tanlashda ikki xossa bajarilishi talab etiladi: a) statistika manfiy qiymatlar qabul qilmaydi; b) asosiy gipoteza to‘g‘ri bo‘lganda statistikaning aniq yoki gipotezaiy taqsimoti ma’lum bo‘lishi kerak. Faraz qilaylik, bunday stastistika topilgan bo‘lib, S = {t: t = $T(X_1,\dots,X_n), X_1,\dots,X_n$ – tanlanma fazosiga tegishli} - statistikaning qiymatlar to‘plami bo‘lsin. Oldindan 0<α<1 – sonini tayinlaylik. Endi S sohani shunday kesishmaydigan $S_{1\alpha}$ va $S \setminus S_{1\alpha}$ sohalarga ajratamizki, bunda asosiy gipoteza H_0 to‘g‘ri bo‘lganida $T(X_1,\dots,X_n) \in S_{1\alpha}$ tasodifiy hodisaning ro‘y berish ehtimoli α dan oshmasin:

$$P\left\{T\left(X_1,\dots,X_n\right) \in S_{1\alpha}/H_0\right\} \le \alpha .$$

Asosiy gipoteza H_0 ni takshirish qoidasi quyidagicha bo‘ladi: x=(x_1, …, x_n) t.m. X ning biror tanlanmasi qiymati bo‘lsin. Agar $t = T(x)$ miqdor $S_{1\alpha}$ sohaga tegishli bo‘lsa: $T(x) \in S_{1\alpha}$, u holda asosiy gipoteza H_0 to‘g‘ri bo‘lganida rad etiladi. Aks holda, ya’ni $T(x) \notin S_{1\alpha}$ bo‘lsa asosiy gipoteza H_0 ni qabul qilishga asos bo‘ladi, chunki statistik ma’lumotlar asosida qilingan hulosalar asosiy gipotezani rad etmaydi. Shuni ta’kidlash lozimki, $t \in S \setminus S_{1\alpha}$ bo‘lishi asosiy gipoteza H_0 ni albatta to‘g‘ri bo‘lishini tasdiqlamaydi, balki bu holat statistik ma’lumotlar va nazariy gipotezaning yetarli darajada muvofiqligini ko‘rsatadi xalos. Yuqorida keltirilgan qoidada T=$T(X_1,\dots,X_n)$ statistikani statistik alomat statistikasi, $S_{1\alpha}$ - soha alomatning kritik sohasi deyiladi. Odatda α ning qiymatlari uchun 0.1; 0.05; 0.01 sonlari qabul qilinadi. Yuqorida keltirilgan qoidadan shu kelib chiqadiki, alomatning kritik sohasi asosiy gipoteza H_0 to‘g‘ri bo‘lganida alomat statistikasining barcha kichik ehtimolli qiymalari to‘plamini o‘z ichiga olishi lozim. Odatda kritik sohalar $\{t \ge t_\alpha\}$ yoki $\{|t| \ge t_\alpha\}$ ko‘rinishida bo‘ladi.

Asosiy gipoteza H_0 ni tekshirish uchun yuqorida keltirilgan qoidaga asoslanganimizda biz ikki turdagi xatolikka yo‘l qo‘yishimiz mumkin: aslida to‘g‘ri bo‘lgan asosiy gipoteza H_0 ni rad etishimiz mumkin, ya’ni H_0 to‘g‘ri bo‘lganida $t \in S_{1\alpha}$ hodisasi ro‘y beradi. Bunday xatolik birinchi turdagi xatolik deyiladi. Demak, shartga asosan birinchi turdagi xatolik α dan oshmaydi. Ammo aslida noto‘g‘ri bo‘lgan asosiy gipoteza H_0 ni qabul qilishimiz, ya’ni H_0 noto‘g‘ri bo‘lganida $t = T(x) \in S \setminus S_{1\alpha}$ bo‘lib biz H_0 ni qabul qilishimiz mumkin. Bunday xatolik ikkinchi turdagi xatolik deyiladi. Statistik alomatlarga qo‘yiladigan asosiy talablardan biri bu ikki turdagi xatoliklarni iloji boricha kichik bo‘lishini ta’minlamog‘i kerak.

Demak, asosiy gipoteza H_0 ni tekshirish uchun turli statistikalarga asoslangan statistik alomatlarni tuzish mumkin ekan. Tabiiyki, bunda statistik alomatlarni solishtirish masalasi kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, $S_{1\alpha}$ alomatning kritik sohasi bo‘lsin. U holda H gipoteza to‘g‘ri bo‘lganida statistikaning qiymati kritik sohaga tegishli bo‘lish ehtimolligi

$$W\left(H\right) = P\left\{T\left(X_1,...,X_n\right) \in S_1/H\right\}$$

alomatning quvvat funksiyasi deyiladi. Alomat quvvati H=H_1 bo‘lganida, ya’ni $W(H_1)$ ehtimollik asosiy gipoteza noto‘g‘ri bo‘lganida to‘g‘ri yechimni qabul qilishi ehtimolligini anglatadi. Alomatning siljimaganlik xossasi muhim o‘rin tutadi va bu xossa

$$P\{T(X_1,...,X_n) \in S_{1\alpha}/H_1\} \le \alpha$$

tengsizlik bilan aniqlanadi.

Asosiy gipoteza H_0 ni tekshirish uchun qiymatdorlik darajasi α bo‘lgan ikkita $S_{1\alpha}$ va $S_{1\alpha}^*$ - alomat to‘plamlari aniqlangan bo‘lsin. Mavjud statistik gipotezalarni ikki guruhga ajratish mumkin: parametrik va noparametrik gipoteza. T.m.larning taqsimot funksiyasi paramerli taqsimotlar oilasiga tegishli bo‘lsin. Ammo, taqsimotning parametrlari $\theta = (\theta_1,...,\theta_n)$

noma'lumdir. Masalan, t.m. normal qonunlar oilasiga tegishli bo'lsa, uning taqsimot funksiyasi ikkita: o'rta qiymat va dispersiya orqali to'liq aniqlanadi va H_0 gipoteza, bu holda matematik kutilma hamda dispersiya qiymatlari haqida bo'ladi. Demak H_0 gipoteza asosiy noma'lum parametr qiymatlari haqida bo'lar ekan. Bunday statistik gipotezaga *parametrik gipoteza* deb ataladi.

Agarda t.m.ning taqsimot funksiyasi umuman noma'lum bo'lsa, noparametrik gipoteza qabul qilinadi. Noparametrik gipoteza taqsimot funksiyasining ma'lum xossalarga ega ekanligi haqida bo'lishi mumkin.

Endi parametrik statistik alomatlarini qaraylik. X t.m.ning asl taqsimot funksiyasi quyidagi taqsimotlar oilasiga tegishli bo'lsin:

$$\mathrm{F} = \{F(x,\theta), \theta \in \Theta\}$$

Bu yerda $\theta=(\theta_1, \ldots, \theta_r)$ – r - o'lchovli vektor, $\Theta \subseteq R^r$ parametrlar qiymati to'plami bo'lsin. U holda asosiy gipoteza H_0 ga asosan $\theta \in \Theta_0$, alternativ gipotezaga asosan esa $\theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$. Asosiy gipoteza H_0 ni tekshirish uchun $S_{1\alpha}$ va $S_{1\alpha}^*$ ikkita kritik to'plamlar bo'lib, ular har birining qiymatdorlik darajasi α bo'lsin. Faraz qilaylik,

$$W(S_{1\alpha}^*, \theta) \le W(S_{1\alpha}, \theta), \quad \theta \in \Theta_0 \tag{8.1.1}$$

va

$$W(S_{1\alpha}^*, \theta) \ge W(S_{1\alpha}, \theta), \quad \theta \in \Theta_1 \tag{8.1.2}$$

bo'lsin.

Aytaylik, (8.1.2) tengsizlikda hech bo'lmaganda θ ning bitta qiymati uchun qat'iy tengsizlik o'rinli bo'lsin. U holda $S_{1\alpha}^*$ ga asoslangan statistik alomat $S_{1\alpha}$ nikiga nisbatan tekis quvvatliroq deyiladi. Tabiiyki, bu holda $S_{1\alpha}^*$ ga asoslangan statistik alomatni $S_{1\alpha}$ nikiga afzal ko'rmoq maqsadga muvofiq bo'ladi, chunki u alomat kam xatolikka yo'l qo'yadi.

Agarda (8.1.1) va (8.1.2) munosabatlar ixtiyoriy $S_{1\alpha}$ uchun o'rinli bo'lsalar, $S_{1\alpha}^*$ ga mos alomat tekis eng quvvatli (t.e.q.) alomat deyiladi [6], [9], [11].

Parametrik statistik alomat tuzish usullari

Oldingi paragrafda biz tekis eng quvvatli alomat haqida so'z yuritdik. Tabiiyki t. e. q. alomat har doim mavjud bo'lavermaydi. Endi parametrik statistik alomatlar orasida bo'ladigan holni ko'raylik. Faraz qilamiz, parametlar to'plam Θ ikki elementdan iborat bo'lsin: $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$. Asosiy gipoteza H_0 ga asosan $\theta=\theta_0$ bo'lsin. U holda alternativ H_1 gipotezaga ko'ra esa $\theta = \theta_1$ bo'ladi.

Demak, shartga binoan biz o'rganayotgan X t.m. H_0 gipotezaga asosan $F_0(x) = F(x, \theta_0)$ taqsimotga, ammo H_1 raqobatlashuvchi gipotezaga ko'ra esa $F_1(x) = F(x, \theta_1)$ taqsimotiga ega bo'ladi. Hajmi n – ga teng bo'lgan $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tanlanma asosida qaysi gipoteza to'g'ri ekanini aniqlash kerak. Bu statistik masala Yu. Neyman va E. Pirsonlar tomonidan hal qilingan.

Faraz qilaylik, $F_0(x)$ va $F_1(x)$ taqsimot funksiyalar absolut uzluksiz taqsimot funksiyalar bo'lib, mos ravishda $f_0(x)$ va $f_1(x)$ lar ularning zichlik funksiyalari bo'lsin. Quyidagi nisbatni ko'raylik

$$l(x)=\frac{\prod_{i=1}^{n} f_1(x_i)}{\prod_{i=1}^{n} f_0(x_i)}$$

Mana shunday aniqlangan $l(x)$ – haqiqatga o‘xshashlik nisbati deyiladi. Bu funksiya bilan bo‘g‘liq

$$\Psi(c)=P\{l(x)\geq c/H_0\}$$

ehtimollikni kiritamiz. Bu yerda c – soni $\Psi(c)=\alpha$ tenglama bilan aniqlanadi.

Teorema(Neyman – Pirson). Yuqorida keltirilgan shartlar bajarilganda har doim tekis eng quvvatli alomat mavjud va u quyidagi kritik to‘plam bilan aniqlanadi

$$S_{1\alpha}^{*}=\{x: l(x)\geq c\}.$$

Bu yerda c- kritik nuqta $\Psi(c)=\alpha$ tenglamadan topiladi[12].

T. e. q. alomat taqsimoti funksiyasi absolyut uzluksiz bo‘lgan hol uchun keltirildi. Ammo bunday alomat diskret taqsimotlar uchun ham mavjud bo‘ladi.

8.2 – misol. $X_1, X_2, ..., X_n$ lar noma’lum θ o‘rta qiymatli va ma’lum σ^2 dispersiyali normal taqsimlangan t.m.ning bog‘liqsiz tajribalar natijasida olingan kuzatilmalari bo‘lsin. Asosiy gipotezaga ko‘ra H_0 : $\theta=\theta_0$, raqobatlashuvchi gipoteza H_1 ga ko‘ra $\theta=\theta_1$ va $\theta_1>\theta_0$ bo‘lsin. Demak,

$$f_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\theta_0)}{2\sigma^2}},\quad f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\sigma^2}}$$

Endi haqiqatga o‘xshashlik statistik nisbati $l(x)$ ni topaylik

$$l(x)=\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-\theta_1)^2-(x_i-\theta_0)^2\right]\right\}=\exp\left\{\frac{n}{\sigma^2}(\theta_1-\theta_0)\bar{x}-\frac{n}{2\sigma^2}\left(\theta_1^2-\theta_0^2\right)\right\}$$

U holda $l(x)\geq c$ tengsizlik quyidagi

$$\bar{x}\geq\sigma^2\ln c/[n(\theta_1-\theta_0)]+(\theta_1-\theta_0)/2$$

tengsizlikka ekvivalent. Oxirgi tengsizlikni quyidagicha yozish mumkin.

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{x}-\theta_0)\geq\frac{\sigma}{\sqrt{n}(\theta_1-\theta_0)}\ln c+\frac{\sqrt{n}}{2\sigma}(\theta_1-\theta_0)=t(c)$$

$\bar{x}$ - tanlanma o‘rta qiymat θ_0 va σ^2/n - parametrlik normal qonun bo‘yicha taqsimlangani uchun

$$\Psi(c)=P\{l(x)\geq c/H_0\}=P\left\{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{x}-\theta_0)\geq t(c)\right\}=\Phi(-t(c))$$

12. [12] Jun Shao Mathematikal Statistics. Springer. 2003. 591 p.

Bu yerda $\Phi(x)$ - Laplas funksiyasi. Tanlangan ixtiyoriy $\alpha \in (0;1)$ ehtimollik uchun, $t(c_\alpha) = t_\alpha$, $\Phi(-t_\alpha) = \alpha$ tengliklar bajariladigan c_α soni har doim mavjud. Demak, Neyman – Pirson teoremasining barcha shartlari qanoatlantiriladi. Shu teoremaga asosan t. e. q. alomat mavjud va uning kritik to‘plami quyidagicha aniqlanadi.

$$S_{1\alpha}^* = \left\{x : \sqrt{n}\,(\bar{x} - \theta_0)/\sigma \ge t_\alpha\right\},\ \ \Phi(-t_\alpha) = \alpha$$

Mana shu alomatning quvvatini hisoblaylik. Alternativ H_1 gipotezaga ko‘ra $\bar{x}$ - tanlanmaning o‘rta qiymati θ_1 va σ^2/n - parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangandir. U holda

$$W(S_{1\alpha}^*, \theta_1) = P\left(\bar{x} \ge \theta_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\alpha / H_1\right) = P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{x} - \theta_1) \ge -\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta_1 - \theta_0) + t_\alpha / H_1\right) =$$
$$= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta_1 - \theta_0) - t_\alpha\right) \qquad (8.2.1)$$

(8.2.1) munosabatdan ikkinchi tur xatolik $\beta = \beta(\alpha, n) = \Phi\left(t_\alpha - \sqrt{n}(\theta_1 - \theta_0)\right)$ ekanligi kelib chiqadi.

Endi quyidagi masalani ko‘raylik. Aliomatning qiymatdorlik darajasi α ga teng bo‘lganida, ikkinchi tur xatolik β ga teng bo‘lishi uchun nechta kuzatilma kerak?; ya’ni tanlanmaning hajmi qanday bo‘lishi kerak? Kerakli n soni topish uchun ikkita tenglamaga egamiz. Bular

$$\Phi(-t_\alpha) = \alpha \text{ va } \Phi\left(t_\alpha - \sqrt{n}(\theta_1 - \theta_0)\right) = \beta \qquad (8.2.2)$$

$\Phi(y)=p$ tenglamaning yechimini ko‘raylik. Bu tenglamaning yechimi y_p normal qonunning p – chi kvantili deyiladi. U holda (8.2.2) ga asosan $-t_\alpha = y_\alpha$, $t_\alpha - \sqrt{n}\,(\theta_1 - \theta_0)/\sigma = y_\beta$. Oxirgi ikki tenglikdan $n = \dfrac{\sigma^2 (y_\alpha + y_\beta)^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} + 1$ munosabatga ega bo‘lamiz. Qidirayotgan son butun bo‘lishi lozim. Shuning uchun, $n^* = \left[\dfrac{\sigma^2 (y_\alpha + y_\beta)^2}{(\theta_1 - \theta_0)^2}\right] + 1$. Bu erda $[a]$ – a sonning butun qismi. Masalan, $\alpha=\beta=0.05$ va $\dfrac{\theta_1 - \theta_0}{\sigma} = 0.1$ bo‘lsa, u holda $n^*=1076$ bo‘ladi; agarda $\alpha=\beta=0.001$, $\dfrac{\theta_1 - \theta_0}{\sigma} = 1$ bo‘lsa, $n^*=39$ bo‘ladi.

Noparametrik muvofiqlik alomatlari

Faraz qilaylik, $X_1, X_2, ..., X_n$ lar bog‘liqsiz n ta tajriba natijasida X t.m.ning olingan kutilmalari bo‘lsin. X t.m.ning taqsimoti noma’lum $F(x)$ funksiyadan iborat bo‘lsin. Noparametrik asosiy gipotezaga ko‘ra $H_0: F(x)=F_0(x)$. Mana shu statistik gipotezani tekshirish talab etilsin.

1. **A. Kolmogorovning muvofiqlik alomati**

$X_1, X_2, ..., X_n$ kuzatilmalar asosida $F_n(x)$ empirik taqsimot funksiyasini tuzamiz. Faraz qilamiz, $F(x)$ uzluksiz taqsimot funksiyasi bo‘lsin. Quyidagi statistikani kiritamiz

$$D_n = D_n\left(X_1, X_2, ..., X_n\right) = \sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n(x) - F(x)\right|$$

Glivenko teoremasiga ko‘ra n yetarli katta bo‘lganda D_n kichik qiymat qabul qiladi. Demak, agar asosiy gipoteza H_0 o‘rinli bo‘lsa D_n statistika kichik bo‘lishi kerak. Kolmogorovning muvofiqlik alomati D_n statistikaning shu xossasiga asoslangandir.

Teorema(Kolmogorov). Ixtiyoriy uzluksiz $F(x)$ taqsimot funksiyasi va λ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\sqrt{n}D_n < \lambda\right\} = K(\lambda) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i e^{-2i^2\lambda^2}$$

bo‘ladi[13].

D_n – statistikaga asoslangan statistik alomat kritik to‘plami quyidagicha aniqlanadi

$$S_{1\alpha} = \left\{t : t = D_n(x_1, x_2, ..., x_n) > t_\alpha\right\}.$$

Bu yerdan $0<\alpha<1$ – alomatning qiymatdorlik darajasi.

Kolmogorov teoremasidan quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

a) D_n – statistikaning H_0 gipoteza to‘g‘ri bo‘lgandagi taqsimoti $F(x)$ bog‘liq emas;

b) Amaliy nuqtayi nazardan $n \geq 20$ bo‘lgandayoq teoremadagi yaqinlashish juda yaxshi natija beradi, ya’ni $P\left\{\sqrt{n}D_n < \lambda\right\}$ ni K(λ) bilan almashtirishdan yo‘l qo‘yiladigan xatolik yetarlicha kichikdir.

Bu xulosalardan kelib chiqadiki, $n \geq 20$ bo‘lsa kritik chegara t_α ni $\lambda_\alpha / \sqrt{n}$ ga teng deb olish mumkin. Bu yerda λ_α $K(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha$ tenglamaning ildizlaridan iborat. Haqiqatan ham berilgan $0< \alpha <1$ uchun

$$P\left\{D_n \in S_{1\alpha} / H_0\right\} = P\left\{\sqrt{n}D_n \geq \lambda_\alpha / H_0\right\} \approx 1 - K(\lambda_\alpha) = \alpha .$$

Shunday qilib, Kolmogorov alomati quyidagicha aniqlanadi:

1) berilgan α orqali K(λ_α) = 1- α tenglama yechimi λ_α jadval yordamida topiladi.
2) berilgan tajriba natijalari $x_1, x_2, ..., x_n$ larga ko‘ra $t=D_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ qiymati hisoblanadi,
3) $\sqrt{n}t$ va λ_α solishtiriladi, agar $\sqrt{n}t \geq \lambda_\alpha$ bo‘lsa asosiy gipoteza H_0 rad eriladi, aks holda tajriba H_0 ni tasdiqlaydi.

2. K. Pirsonning xi–kvadrat muvofiqlik alomati

Amaliyotda Kolmogorov statistikasini hisoblash ancha murakkab va undan tashqari Kolmogorov alomatini qo‘llash faqat taqsimot funksiya $F(x)$ uzluksiz bo‘lgandagina mimkindir. Shuning uchun, amaliyotda ko‘p hollarda Pirsonning xi – kvadrat alomati qo‘llaniladi. Bu alomat universal xarakterga ega bo‘lib, kuzatilmalarni guruhlash usuliga asoslangandir.

Faraz qilaylik, X – kuzatilayotgan va taqsimot funksiyasi noma’lum $F(x)$ bo‘lgan X t.m.ning qiymatlari to‘plami bo‘lsin. X ni k ta kesishmaydigan oraliqlarga ajratamiz:

$$\mathscr{X} = \bigcup_{i=1}^{k} \varepsilon_i, \ \ \varepsilon_i \bigcap \varepsilon_j = \emptyset, \ i \neq j, \ i, j = 1,2,...,k$$

13. [13] Jun Shao Mathematikal Statistics. Springer. 2003. 591 p.

Takrorlanishlar vektori deb ataladigan $\nu = (\nu_1,...,\nu_k)$ vektorni olaylik. Bu vektorning i – koordinatasi kuzatilmalardan ν_i tasi ε_i oraliqqa tushganligini anglatadi. Ko‘rinib turibdiki, takrorlanishlar vektori ν tanlanma ($X_1,\ldots,X_n$) orqali bir qiymatli aniqlanadi va $\nu_1+\nu_2+...+\nu_k = n$. Asosiy gipoteza H_0 to‘g‘ri, bo‘lgandagi kuzatilmaning ε_i oraliqqa tushish, ehtimolligini P_{i0} bilan belgilaylik:

$$P_{i0} = P\{X \in \varepsilon_i / H_0\},\ i = 1,2,...,k.$$

Quyidagi statistikani kiritamiz

$$\Upsilon_n^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\nu_k - nP_{i0})^2}{nP_{i0}}$$

va H_0: $F(x) = F_0(x)$ asosiy gipotezani to‘g‘riligini tekshiramiz.

Kuchaytirilgan katta sonlar qonuniga asosan nisbiy chastota ν_r/n bir ehtimollik bilan nazariy ehtimollik P_{r0} ga intiladi. Demak, agar H_0 gipoteza o‘rinli bo‘lsa, u holda Υ_n^2 statistikaning qiymati yetarli darajada kichik bo‘lishi kerak.Demak, Pirsonning χ^2 mezoni Υ_n^2 statistikaning katta qiymatlarida asosiy gipoteza H_0 ni rad etadi, ya’ni alomatning kritik sohasi $S_{1\alpha} = \{t : t > t_\alpha\}$ ko‘rinishda bo‘ladi. Asosiy gipoteza H_0 to‘g‘ri bo‘lganida Υ_n^2 statistikaning aniq taqsimotini hisoblash ancha murakkab, bu esa o‘z navbatida alomatning kritik chegarasi t_α ni topishda qiyinchilik tug‘diradi. Ammo, n yetarli katta bo‘lsa H_0 gipoteza to‘g‘ri bo‘lganida Υ_n^2 statistikaning taqsimotini limit taqsimot bilan almashtirish mumkin.

Teorema(Pirson). Agar 0< P_{i0} <1, $i = 1,2,...,k.$ bo‘lsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\Upsilon_n^2 < t/H_0\right) = P\left\{\chi_{k-1}^2 < t\right\}.$$

Bu yerda χ_{k-1}^2 erkinlik darajasi k-1 bo‘lgan xi – kvadrat taqsimotiga ega bo‘lgan t.m.dir:

$$P\{\chi_{k-1}^2 < t\} = \frac{1}{2^{\frac{k-1}{2}}\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \int_0^t x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \ ,$$

$\Gamma(n)$ - Gamma funksiya[14]. ■

Amaliyotda bu teorema natijasidan n≥50, $\nu_i \geq 45$, $i = 1,2,...,k.$ bo‘lganda foydalanish mumkin. Bu holda t_α $P\{\chi_{k-1}^2 > t_\alpha\} = \alpha$, $0 < \alpha < 1$ tenglamadan topiladi [6], [9], [11].

8.4 Matematik kutilma va dispersiyalar haqidagi statistik gipotezalarni tekshirish

Ikki bosh to‘plamlar matematik kutilmalari va dispersiyalarining tengligini tekshirish masalalariini ko‘raylik. Ikkala bosh to‘plam normal taqsimlangan deb faraz qilamiz. Demak, birinchi bosh to‘plamdan $X^{(n)}=(X_1, \ldots, X_n)$, ikkinchi bosh to‘plamdan esa $Y^{(m)}=(Y_1, \ldots, Y_m)$ tanlanmalari olingan bo‘lsin.

---

14. [14] Jun Shao Mathematikal Statistics. Springer. 2003. 591 p.

1. Matematik kutilmalar noma’lum bo‘lganida dispersiyalar tengligi haqidagi gipotezani tekshirish

$X_1, X_2, ..., X_n$ lar o‘rta qiymati noma’lum va dispersiyasi σ_x^2 bo‘lgan normal taqsimlangan X t.m. kuzatilmalari va $Y_1, Y_2, ..., Y_m$ lar esa o‘rta qiymati noma’lum va dispersiyasi σ_y^2 bo‘lgan normal taqsimlangan t.m.ning kuzatilmalari bo‘lsin. Asosiy gipoteza H_0 : $\sigma_x^2 = \sigma_y$ tasdiqdan, alternativ gipoteza H_1 : $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ tasdiqdan iborat bo‘lsin. Dispersiyalarining eng yaxshi statistik baholarini ko‘raylik:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{x}\right)^2 \quad \text{va} \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i - \overline{y}\right)^2$$

F – statistika deb ataluvchi quyidagi statistikani kiritamiz

$$F = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{x}\right)^2}{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i - \overline{y}\right)^2}$$

Teorema(Snedekor). Agarda X o‘rta qiymati θ_1 va dispersiyasi σ_x^2 bo‘lgan normal qonun bo‘yicha taqsimlangan t.m. va Y o‘rta qiymati θ_2 va dispersiyasi σ_y^2 bo‘lgan normal qonun bo‘yicha taqsimlangan t.m.lar bo‘lsa, u holda

$$\frac{\sigma_y^2 \sigma_x^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2}$$

t.m. erkinlik darajalari n-1 va m-1 bo‘lgan Snedekor taqsimotiga ega bo‘ladi[15]. ■

Snedekor taqsimotining zichlik funksiyasi

$$f_{n,m}(x) = \left(\frac{n}{m}\right)^{n/2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{\left(1+nx/m\right)^{\frac{n+m}{2}}}, x > 0$$

formula bilan aniqlanadi.

Alomatning kritik sohasi quyidagicha tiziladi. Agarda

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} < C_1 \text{ yoki } \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} > C_2 \qquad (C_1<1<C_2)$$

bo‘lsa, asosiy gipoteza H_0 ni rad etmoq lozim.

15. [15] Jun Shao Mathematikal Statistics. Springer. 2003. 591 p.

Yuqorida keltirilgan Snedekor teoremasidan foydalanib C_1 va C_2 –sonlarni aniqlaylik. Jadvaldan erkinlik darajasiga asosan Snedekor taqsimotining 1-α kvantili topiladi. Masalan, α = 0.15 va $n = m = 9$ bo‘lsa $C_1 = 3.44$, $C_1 = \frac{1}{C_2} = 0.29$.

2. Matematik kutilmalar ma’lum bo‘lganida dispersiyalar tengligi haqidagi gipotezani tekshirish

Bu gipoteza oldingi gipotezaga o‘xshash tekshiriladi. Ammo σ_x^2 va σ_y^2 dispersiyalar mos ravishda quyidagicha hisoblanadi:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \theta_x\right)^2, \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i - \theta_y\right)^2,$$

Bu yerda θ_x va θ_y lar X va Y t.m.lar o‘rta qiymatlaridir.

3. Dispersiyalar noma’lum bo‘lganida matematik kutilmalar tengligi haqidagi gipotezani tekshirish

Faraz qilaylik, X va Y t.m.lar mos ravishda o‘rta qiymatlari θ_x va θ_y, dispersiyalari $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$ bo‘lgan normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘lib, σ^2, θ_x va θ_y lar noma’lum bo‘lsin. $(X_1, \ldots, X_n)$ X t.m.ning tanlanmasi va $(Y_1, \ldots, Y_m)$ –Y t.m.ning tanlanmasi bo‘lsin. Asosiy gipoteza H_0 : $\theta_x = \theta_y$ va alternativ gipoteza H_1 : $\theta_x \neq \theta_y$ lardan biri o‘rinli ekanini tekshirish kerak. Tanlanmalar o‘rta qiymatlari ayirmasi $\bar{x} - \bar{y}$ ni qaraylik. Shartga ko‘ra

$$D\left(\bar{x} - \bar{y}\right) = \sigma^2 \frac{n+m}{n \cdot m}.$$

Quyidagi statistikani kiritamiz:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\left[(n-1)\sigma_x^2 + (m-1)\sigma_y^2\right] \Big/ (n+m-2)}} \cdot \sqrt{\frac{n \cdot m}{n+m}}$$

Bu statistika erkinlik darajasi $n + m - 2$ bo‘lgan Styudent taqsimotiga ega bo‘ladi. U holda asosiy gipoteza H_0 o‘rinli bo‘lishini tekshiruvchi statistik alomat quyidagicha tuziladi: agarda $|t| > t_\alpha(n+m-2)$ bo‘lsa gipoteza H_0 gipoteza rad etiladi. Bu yerda $t_\alpha(n+m-2)$ qiymatdorlik darajasi α – bo‘lgan Styudent taqsimotining kritik nuqtasidir [6], [9], [11].

4. Dispersiyalar ma’lum bolganida o‘rta qiymatlar tengligi haqidagi gipotezani tekshirish

Endi o‘rta qiymatlar tengligi haqidagi gipotezani dispersiyalar ma’lum bo‘lganida tekshiruvchi alomat ko‘rib o‘tamiz. Bu holda

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}$$

t.m. standart normal qonunga ega. Shuning uchun agarda $|t| > U_\alpha$ bo‘lsa H_0 : $\theta_x = \theta_y$ asosiy gipoteza rad etiladi. Bu yerda U_α– qiymatdorlik darajasi α ($0<\alpha<1$) bo‘lgan standart normal qonun kritik nuqtasidir [6], [9], [11].

2. AMALIY MAShG'ULOTLARNI BAJARISh BO'YIChA USLUBIY KO'RSATMALAR

1-amaliy mashg'ulot: Kombinatorika elementlari.

Reja:

1. Gruppalashlar
2. O'rinlashtirishlar
3. O'rin almashtirishlar

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Kombinatorika, qo'shish qoidasi, ko'paytirish qoidasi, gruppalashlar soni, o'rinlashtirishlar soni, o'rin almashtirishlar soni.

Kombinatorika – bu diskret matematikaning diskret to'plam elementlarini berilgan qoidalar asosida tanlash va joylashtirish bilan boq'liq masalalarni yechish usullarini o'rganuvch bo'limdir.

Qandaydir predmetlardan tashkil topgan guruhlar birikmalar yoki kombinatsiyalar deb ataladi.

Uch xil turdagi kombinatsiyalar bor: o'rin almashtirish, o'rinlashtirish va mosliklar.

O'rin almashtirishlar

n ta elementli o'rin almashtirishlar deb, bir-biridan faqat elementlarining tartibi bilan farq qiladigan n ta elementli birikmalarga aytiladi. Masalan, 3 ta A, B *va* C elementdan 6 ta o'rin almashtirish bajarish mumkun: ABC, BAC, ACB, CAB, CBA, BCA.

n ta elementli o'rin almashtirishlar soni quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$P_n = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n = n!$$

Namunaviy masala yechish

Masala: 1, 2 *va* 3 raqamlardan ularning har biri tarkibida faqat bir marta uchraydigan nechta 3 xonali son tuzish mumkin?

Yechish: $P_3 = 3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$ ta.

O'rinlashtirishlar

n ta elementdan m ta dan o'rinlashtirishlar deb, har birida berilgan n ta elementdan m tasi olingan shunday birikmalarga aytiladiki, ularning har biri hech bo'lmaganda bitta elementi bilan yoki faqat ularning joylashish tartidi bilan farq qiladi.

Masalan, 3 ta A, B *va* C dan ikkita elementli 6 ta *o'rinlashtirish mavjud:* AB, AC, BC, BA, CA, CB;

n ta elementda m ta dan o'rinlashtirishlar soni

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}; \quad (0 \le m \le n)$$

formulasi bilan hisoblanadi.

$$A_n^1 = n; \quad A_n^0 = 1.$$

Namunaviy masala yechish

Masala: Universitet Ilmiy Kengashi turli lavozimlarga 10 ta nomzoddan 3 tasini tanlanmoqda. Har bir nomzod bir xil imkoniyatga ega. 10 ta nomzoddan 3 kishidan iborat nechta guruh tuzish mumkin?

Yechish: $N = A_{10}^{3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ ta guruh tuzish mumkin.

Mosliklar

n ta element orasidan m ta element dan tuzilgan mosliklar deb, har birida berilgan n ta elementdan m tasi olingan shunday birikmalarga aytiladiki, ularning har biri hech bo'lmaganda bitta elementi bilan farq qiladi.

n ta element orasidan m ta element dan tuzilgan mosliklar soni

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \qquad (0 \le m \le n).$$

formulasi bilan hisoblanadi.

Xossalar:

$$1.\ C_n^0 = C_0^0 = 1. \qquad 2.\ C_n^1 = n. \quad 3.\ \ C_n^m = C_n^{n-m}, \quad (m \succ \frac{n}{2}).$$

$$4.\ C_n^0 = C_n^1 = \ldots = C_n^n = 2^n. \quad 5.\ C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1},\ (0 \le m \le n).$$

Namunaviy masala yechish

Masala: Universitet Ilmiy Kengashi turli lavozimlarga 10 ta nomzoddan 3 tasini tanlanmoqda. Har bir nomzod bir xil imkoniyatlga ega. 10 ta nomzoddan 3 kishidan iborat har xil tarkiblinechta guruh tuzish mumkin?

Yechish: $N = C_{10}^{3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$ ta guruh tuzish mumkin.

Takrorlanishli o'rin almashtirishlar

n ta $A, B, \ldots, C$ elementlar mavjud bo'lub, ularning ichida A element α marta, B element β marta va h.k. hamda C element γ marta takrorlansin va $n = \alpha + \beta + \ldots + \gamma$ bo'lsin. U holda, *takrorlanishli o'rin almashtirishlar*

$$P_{takr.} = \frac{n!}{\alpha! \cdot \beta! \cdot \ldots \cdot \gamma!}$$

formula yordamida topiladi.

Namunaviy masala yechish

Masala: 4 ta $A, \quad A, \quad B \quad va \quad C$ elementlardan nechta guruh tuzish mumkin?

Yechish: $P_{takr} = \frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} = 12$ ta.

Takrorlanishli o'rinlashtirishlar

n ta elementdan m ta dan takrorlanishli o'rinlashtirishlarda $(m < n)$ ixtiyoriy element 1 dan m martagacha uchrashi yoki umuman uchramasligi mumkin, ya'ni har bir n ta elementdan m ta dan takrorlanishli o'rinlashtirish nafaqat turli elementdan, balki m ta ixtiyoriy ravishda takrorlanuvchi ixtiyoriy elementlardan tashkil etilgan, hech bo'lmaganda elementlarining joylashish tartidi bilan farq qilivchi guruhlar har xil guruh hisoblanadi.

n ta elementdan m ta dan takrorlanishli o'rinlashtirishlar soni

$$A_{n,takr.}^m = n^m$$

formula yordamida topiladi.

Namunaviy masalalar yechish

Masala: Seyfning shifrli kodi 6 xonali sondan iborat. Kodlashtirganda nechta turli kombinatsiya tuzish mumkin?

Yechish: $A_{10,takr}^{6} = n^m = 10^6 = 1000000$.

Takrorlanishli mosliklar

n ta elementdan m ta dan takrorlanishli mosliklarda $(m < n)$ *ixtiyoriy element 1 dan m martagacha uchrashi yoki umuman uchramasligi mumkin, ya'ni har bir n ta elementdan m ta dan takrorlanishli o'rinlashtirish nafaqat turli elementdan, balki m ta ixtiyoriy ravishda takrorlanuvchi ixtiyoriy elementlardan tashkil tohishi mumkin. Tarkibi bir xil bo'lib, faqat elementlarining tartibi bilan farq qilivchi guruhlar farq qilinmaydi.*

n ta elementdan m ta dan takrorlanishli o'rinlashtirishlar soni

$$C_{n,takr.}^{m} = C_{n+m-1}^{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

formula yordamida topiladi.

Namunaviy masala yechish

Masala: 1-4 kurs talabalaridan 6 tasini necha xil usul bilan tanlash mumkin?

Yechish: $$C_{4,takr}^{6} = \frac{9!}{6!\cdot 3!} = 84.$$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Universitet bitiruvchilarni ishga taklif etilgan 9 ta yopiq konvert oldi. Konvertlarni ochish tartibining necha usuli mavjud? (J.: 362 880)

2. Universitetning 15 ta kafedrasining laboratoriyalari uchun uskunalar olishi kerak. Lekin universitetning 8 ta uskunalar olishga mablag'i etadi. Universitet 8 ta uskunalarni necha xil usul bilan tanlab olishi mumkin? (J.:6435)

3. Aviakopaniya Qarshi-Toshkent yo'nalishida 6 ta, Toshkent-Anqara yo'nalishida 2 ta reysga ega. Agar reyslar har xil kunlarda bajarilsa, Qarshidan Anqaragacha nechta usul bilan chipta buyurish mumkin?

4. 20 ta odam qatnashayotgan majlis 2 ta konferentsiyaga 2 ta vakilni saylamoqda. Buni necha usul bilan bajarish mumkin? Bitta konferentsiyaga 2 ta vakilni nechta usul bilan tanlash mumkin?

5. Kompyuter tarmoq'iga kirish uchun operator 4 ta raqamdan iborat kodni terishi kerak. Operator kerakli kodni unitib qo'ydi. Agar koddagi raqamlar: a) takrorlanmasa; b) takrorlansa u kodni terish uchun hammasi bo'lib nechta kombinatsiya tuzish mumkin?

6.8 ta ruxni shaxmat doskasida bir-birini urolmaydigan qilib necha xil usul bilan joylashtirish mumkin? [7], [10], [15].

2- amaliy mashg'ulot: Elementar hodisalar fazosi. Tasodifiy hodisalar ustida amallar

Reja:

1.Tasodifiy hodisalar.
2. Hodisalar ustida amallar.
3.Hodisalar algebrasi.

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Tasodifiy hodisa, elementar hodisalar,elementar hodisalar fazosi, muqarrar hodisa, mumkin bo'lmagan hodisa, hodisalar yig'indisi, hodisalar ko'paytmasi, hodisalar ayirmasi, qarama – qarshi hodisalar, ergashtiruvchi hodisalar, teng hodisalar,Eyler – Venn diagrammasi, hodisalar algebrasi.

Tajribaning har bir yaxlit natijasi *elementar hodisa* deb ataladi. Barcha *elementar hodisa*lar to'plamini $\Omega = \{\omega\}$ deb belgilaymiz. $\Omega = \{\omega\}$ to'plam elementar hodisalar fazosi deb ataladi.

Ω fazoning $\forall A$ qism to'plami *hodisa* deb ataladi.

A va B hodisaning *yig'indisi* $A \cup B$ deb yoki A hodisaga, yoki B hodisaga, yoki ularning ikkalasiga ham tegishli bo'lgan elementar hodisalardan iborat bo'lgan to'plamaga aytiladi.

A va B hodisalarning ko'paytmasi $A \cap B$ yoki $A \cdot B$deb, A va B larning har ikkalasiga tegishli bo'lgan elementar hodisalardan iborat bo'lgan hodisaga aytiladi.

A va B hodisalarning ayirmasi $A \setminus B$ deb A ga tegishli va B ga tegishli bo'lmagan elementar hodisalardan iborat bo'lgan hodisaga aytiladi.

Agar $A \cdot B = \varnothing$ bo'lsa, u holda A va B hodisalar birgalikda bo'lmagan hodisalar deyiladi hamda bu holda $A \cup B$ ning o'riniga $A + B$ yoziladi.

Ω to'plam *muqarrar* hodisa, $\varnothing$- to'plam *mumkun bo'lmagan* hodisa deyiladi.

Agar $A \cdot \overline{A} = \varnothing$ va $A + \overline{A} = \Omega$ bo'lsa, u holda $\overline{A}$ hodisa A hodisaga *qarama-qarshi* hodisa deyiladi.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Tanga ketma-ket 3 marta tashlandi. Tajriba natijasi (x_1, x_2, x_3) ketma-ketlikdan iborat bo'lib, har bir x_i "G" –gerb yoki "R" – raqam tushishini bildiradi.

a) Elementar hodisalar fazosini quring.

b) Kamida 2 marta tanga "gerb" tomoni bilan tushishidan iborat bo'lgan A hodisani ifodalang.

2. a). $A \cup A$ va $A \cdot A$ hodisalarni ta'riflang.

b) A va $\overline{A \cup B}$ hodisalar birgalikdami?

3. Tekislikka tasodifiy ravishda nuqta tashlanmoqda. A – "nuqta A doiraga tushishi" va B – "nuqta B doiraga tushishi"dan iborat hodisalar bo'lsin. $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \bigcup B$, $\overline{A \bigcup B}$, AB, $\overline{AB}$ hodisalarni izohlang.

4. Tasodifiy sonlar jadvalidan tasodifiy ravishda bir son olingan. A hodisa – "tanlangan son 5 ga bo'linadi"; B hodisa – "bu sonning oxirgi raqami nol" ekanini bildirsa, $A \setminus B$ va $\overline{AB}$ hodisalar nimani bildiradi?

5.5 ta bir xil sug'urta shartnomalari o'rganilayapti. Quyidagi hodisalarga qarama - qarshi hodisalarni ko'rsating:

a) A – 2 ta shartnomadan da'vo kelib tushdi;
b) B – kamida 2 ta shartnomadan da'vo kelib tushdi;
v) C – birorta ham da'vo kelib tushmadi;
g) D – shartnomalarning yarmidan ko'pidan da'vo kelib tushdi.

6.Avtomobilni sug'urtalash bo'yicha 4 ta shartnoma o'rganilmoqda. i – shartnomadan kelib tushgan da'vo bo'yicha sug'urta qoplamasi miqdori i – shartnomaga to'langan sug'urta badalidan ortiq bo'lishi hodisasini A_i bilan belgilaymiz. Quyidagi hodisalarni A_i orqali ifodalang:

a) A – barcha 4 ta shartnoma sug'urta badalidan ko'p bo'lgan da'vo kelib tushdi;
b) B – hech bo'lmaganda bitta shartnoma sug'urta badalidan ko'p bo'lgan da'vo kelib tushdi;
v) C – faqat bitta shartnoma sug'urta badalidan ko'p bo'lgan da'vo kelib tushdi;
g) D – kamida 3 ta shartnoma sug'urta badalidan ko'p bo'lgan da'vo kelib tushdi.

7.Ifodalarni soddalashtiring:

a) $(B + C) \cdot (B + \overline{C})$

b) $(B + C) \cdot (B + \overline{C}) \cdot (\overline{B} + C)$ [7], [10], [15].

3- amaliy mashg'ulot: Ehtimolning klassik ta'rifi. Ehtimolning boshqa ta'riflari

Reja:

1.Hodisa ehtimoli tushunchasi.
2. Ehtimolning statistik ta'rifi.
3. Ehtimolning klassik ta'rifi.
3. Ehtimolning geometrik ta'rifi.
4. Ehtimolning aksiomatik ta'rifi.

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Ehtimol tushunchasi,hodisalar chastotasi, nisbiy chastota, statistik ehtimollik, klassik ehtimollik, kombinatorika, qo'shish qoidasi, ko'paytirish qoidasi, gruppalashlar soni, o'rinlashtirishlar soni, o'rin almashtirishlar soni,geometrik ehtimollik, hodisalar algebrasi.

Hodisaning ehtimolligi bu hodisaning ro'y berishi imkonining miqdoriy ko'rsatgichidir.

Agar W - n ta o'zaro teng kuchli, ya'ni ro'y berish yoki bermasligining ehtimolligi bir xil bo'lgan hodisalardan tashkil topgan bo'lsa, u holda *A hodisaning $P(A)$ ehtimolligi A* hodisa ro'y berishiga qulaylik tug'diradigan elementar hodisalar soni m ning barcha elementar hodisalar soni n ga nisbatiga teng:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Barcha elementar hodisalar teng imkoniyatli bo'lgan hol "klassik" hol deb ataladi. Shuning uchun $P(A)$ ehtimollik ko'pincha "klassik" ehtimollik deb ataladi.

Ushbu $W(A) = \frac{m}{n}$ nisbat A hodisaning *nisbiy chastotasi* ham deb ataladi. Nisbiy chastota tajribalardan so'ng hisoblanadi. m - A hodisa ro'y bergan tajribalar soni; n - tajribalarning umumiy soni. Statistik ta'rifda hodisaning ehtimolligi sifatida uning nisbiy chastotasi olinadi.Shuning uchun klassik ta'rif statistic ta'rif deb ataladi.

Geometrik ehtimollik tajriba uchun elementar hodisalar soni cheksiz ko'p bo'lgan hollarda ishlatiladi. Geometrik ehtimollikning ma'nosini quyidagicha: Ixtiyoriy olingan nuqta $g \subset G$ sohaga tushish ehtimoli

$$P(g) = \frac{g}{G}$$

songa teng.

Namunaviy masalalar yechish

Masala: Shoshqol toshi bir marta tashlangan bo'lsa, juft ochko tushish ehtimolini toping.

Yechish: $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = 0{,}5$.

Masala: Tashish vaqtida 20 000 ta tarvuzdan 52 tasi yorilgan. Yorilgan tarvuzning nisbiy chastotasini toping.

Yechish: $W(A) = \frac{m}{n} = \frac{52}{20000} = 0{,}0026$.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Qutida 10 ta: 7 ta qora va 3 ta oq shar bor. Qutidan tasodifiy ravishda bir shar olindi. Bu shar: a) oq; b) qora bo'lishining ehtimolini toping.

2. “Daftar” so’zidan tasodifiy ravishda bir harf tanlandi. Bu harf “D” yoki unli harf bo’lish ehtimoli nimaga teng?

3. 3 ta tanga tashlandi. 2 ta tanga “gerb” tomoni bilan tushish ehtimoli nimaga teng?

4. Shoshqol toshi bir marta tashlanganda, 4 raqami yoki 4 dan katta raqam tushish ehtimoli nimaga teng?

5. Nishonga otishda tekkizishlar nisbiy chastotasi 0,6 bo’lgan. Agar mergan 12 marta nishonga tekkiza olmagan bo’lsa, jami bo’lib necha marta o’q otilgan?

6. 64 ta katakdan iborat shaxmat taxtasiga 2 ta shaxmat donasi – oq va qora ranqli fil qo’yildi. Ularning bir-birini “urish” ehtimoli nimaga teng?

7. Kitob javonining bir bo’limida 10 ta kitob tasodifiy ravishda taxlandi. 3 ta ma’lum bir kitoblar yonma-yon qo’yilishi ehtimolini toping.

8. Bo’rondan so’ng 40- va 70- kilometrlar orasida telefon simi uzildi. Uzilish 50- va 55- kilometrlar orasida sodir bo’lganligining ehtimolini toping.

9. Uzunligi 1 ga teng bolgan kesma tasodifiy ravishda 3 bo’lakka bo’lindi. Hosil bo’lgan bo’laklardan uchburchak yasash mumkinligining ehtimolini toping.

10.Seyfda 6 ta obligatsiya bo’lib, ular turlicha nomerlangan. Barcha obligatsiyalar seyfdan tasodifiy ravishda bittadan olinadi. Ketma-ket olingan obligatsiyalar nomerlari o’sib borish tartibida bo’lishi ehtimolini toping.

11. Sug’urta kompaniyasining 12 ta mijozidan kelib tushgan da’volar: a) yilning turli oylariga to’g’ri kelishi; b) hammasi bir oyga to’g’ri kelishi; v) sentyabr va oktyabr oylariga to’g’ri kelishi ehtimolini toping.

12. Kompaniya portfelida 10 ta bir guruhga tegishli va 20 ta ikkinchi guruhga tegishli shartnomalar bor. Tasodifiy ravishda kelib tushgan 7 ta da’vodan: a) 5 tasi birinchi guruh shartnomalaridan va 2 tasi ikkinchi guruh shartnomalaridan bo’lishi; b) kamida 5 tasi birinchi guruh shartnomalaridan bo’lishi; v) yarmidan ko’pi ikkinchi guruh shartnomalaridan bo’lishi; g) barchasi ikkinchi guruh shartnomalaridan bo’lishi ehtimolini toping [7], [10], [15]..

4-amaliy mashg’ulot: Ehtimolning xossalari. Ehtimollarning qo’shish teoremasi

Reja:

1. Ehtimolning xossalarini o’rgatish.
2.Ehtimollarni qo’shish teoremalarini o’rgatish.

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Mumkin bo’lmagan hodisa, qarama-qarshi hodisa, to’la gruppa, elementar hodisalar fazosi, Kolmogorov aksiomalari, ehtimolning xossalari, ehtimollarni qo’shish teoremalarini.

Teorema (qo’shish teoremasi): Birgalikda bo’lmagan 2 hodisadan hech bo’lmaganda bittasining ro’y berish ehtimoli bu hodisalar ehtimollarining yig’indisiga teng:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Umumiy holda, agar $A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_n$ birgalikda bo’lmagan hodisa bolsa,

$$P(A_1+\ldots+A_n)=P(A_1)+\ldots+P(A_n).$$

O’zaro birgalikda bo’lgan ikkita hodisadan hech bo’lmaganda bittasining ro’y berish ehtimoli ular har birining ehtimollari yig’indisidan ularning birgalikda ro’y berish ehtimolini ayirilganiga teng:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

O’zaro bog’liq bo’lmagan hodisalar uchun ehtimollarni qo’shish formulasi:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B).$$

Namunaviy masalalar yechish

Masala: Gulzorda 20 ta qizil, 30 ta binafsha rang va 40 ta oq rangli astra ochilgan. Agar kech tushgandan so'ng bitta gul uzilgan bo'lsa, uning qizil yoki binafsha rang bo'lish ehtimolini toping.

Yechish: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{20}{90}+\frac{30}{90}-0=\frac{5}{9}$.

Masala: 1- va 2- to'pdan otilganda, nishonga tegish ehtimoli mos ravishda 0,7 va 0,8 ga teng. Ikkala to'pdan bir vaqtda o'q otilganda hech bo'lmaganda bittasining nishonga tegish ehtimolini toping.

Yechish: $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}56$.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0{,}7+0{,}8-0{,}56=0{,}94$$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Kuzatuvchining taxminiga ko'ra, agar ma'lum muddatda foiz me'yori pasaysa, xuddi shu davrda aksiyalar bozorining o'sish ehtimoli 0,8 ga teng. Kuzatuvchi shu davrda foiz me'yori pasayishi ehtimoli 0,4 ga teng deb hisoblaydi. Aytilgan davrda aksiyalar bozori rivojlangan holda foiz me'yori pasayishi ehtimolini toping.

2. Har bir tajribada hodisaning ro'y berish ehtimoli bir xil va 0,2 ga teng. Tajribalar ketma-ket ravishda hodisa ro'y bergunga qadar o'tkazildi. Hodisaning 1-marta ro'y berish 4 - marta tajriba o'tkazishga to'g'ri kelish ehtimolililigini toping.

3. 1-dastgohda tayyorlangan mahsulotning 1-navli bo'lish ehtimoli 0,7 ga va 2-dastgohda shu mahsulotning 1-navli bo'lish ehtimoli 0,8 ga teng. Agar 1-dastgohda 2 ta, 2-dastgohda 3 ta mahsulot tayyorlangan bo'lsa, barcha mahsulotning 1-navli bo'lish ehtimolini toping.

4. Tasodifiy sonlar jadvalidan olingan sonlarning hech bo'lmaganda bittasi juft bo'lish ehtimoli kamida 0,9 ga teng bo'lishiga kafolot berish uchun tasodifiy sonlar jadvalidan nechta son olish kerak?

5. Korxonada ishlaydigan 550 ishchining 380 tasi oily, 412 tasi o'rta maxsus va 357 tasi ham oily, ham o'rta maxsus ma'lumotli. Tasodifiy ravishda tanlab olingan ishchining yoki oily, yoki o'rta maxsus, yoki ham oily, ham o'rta maxsus ma'lumotli bo'lishi ehtimolini toping.

6. Iste'mol bozorini o'rganish uchun tish pastasiga tegishli so'rov o'takazildi. Agar aholining 14% i A turdagi, 9% i B turdagi tish pastasidan foydalanishi ma'lum bo'lsa, tasodifiy ravishda tanlab olingan kishi A yoki B turdagi tish pastalaridan foydalanishi ehtimolini toping [7], [10], [15]..

5- amaliy mashg'ulot: Shartli ehtimollik. Asosiy teoremalar. Hech bo'lmaganda bitta hodisaning ro'y berish ehtimoli.

Reja:

1. Ehtimolning xossalari. Ehtimollik fazosi.
2. Shartli ehtimollik.
3. Hodisalarning bog'liqsizligi.

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Mumkin bo'lmagan hodisa, qarama-qarshi hodisa, to'la gruppa, elementar hodisalar fazosi, Kolmogorov aksiomalari, ehtimolning xossalari, shartli ehtimol, bog'liq hodisalar, hodisalar bog'liqsizligi

Agar ikkita A va B hodisalardan birining ro'y berishi ikkichisining ro'y berish yoki bermasligiga bog'liq bo'lmasa, bunday hodisalar *o'zaro bog'liq emas* deyiladi. Aks holda ular *o'zaro bog'liq* deyiladi.

$P(A\mid B)$ sartli **ehtimollik** deb B hodisa ro'y berganligi aniq bo'lganligida A hodisa ro'y berish ehtimolligiga aytiladi:

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}, \text{ bunda } P(B)>0.$$

Agar A va B hodisalar *o'zaro bog'liq* bo'lmasa, u holda $P(A\mid B)=P(A)$ va $P(B\mid A)=P(B)$ tengliklar bajariladi.

Teorema (ko'paytirish teoremasi): O'zaro bog'liq bo'lmagan hodisalarning birgalikda ro'y berish ehtimoli bu hodisalar har birining ro'y berish ehtimollarining ko'paytmasiga teng:

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

Umumiy holda

$$P(A_1\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot\ldots\cdot P(A_n).$$

O'zaro bog'liq bo'lgan ikki hodisaning bir vaqtda ro'y berish ehtimolligi quyidagiga teng:

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A\mid B); \qquad P(AB)=P(A)\cdot P(B\mid A);$$

Umumiy holda, agar $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ hodisalar o'zaro bog'liq bo'lsa,

$$P(A_1,A_2,\ldots,A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2\mid A_1)\cdot P(A_3\mid A_1A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n\mid A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1}).$$

Namunaviy masalalar yechish

Masala: Firma 2 ta yirik A va B korxonalardan 2 ta buyurtma olishga harakat qilmoqda. Ekspertlarning fikricha, A korxonadan buyurtma olish ehtimoli 0,45 ga teng. Agar firma A korxonadan buyurtma olsa, u holda B korxonadan ham buyurtma olish ehnimoli 0,9 ga teng. Firmaning ikkala buyurtmani ham olish ehnimolini toping.

Yechish: Shartga ko'ra $P(A)=0{,}45$ va $P(B\mid A)=0{,}9$;

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B\mid A)=0{,}45\cdot 0{,}9=0{,}405.$$

Teorema (qo'shish teoremasi): Birgalikda bo'lmagan 2 hodisadan hech bo'lmaganda bittasining ro'y berish ehtimoli bu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Umumiy holda, agar $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ birgalikda bo'lmagan hodisa bolsa,

$$P(A_1+\ldots+A_n)=P(A_1)+\ldots+P(A_n).$$

O'zaro birgalikda bo'lgan ikkita hodisadan hech bo'lmaganda bittasining ro'y berish ehtimoli ular har birining ehtimollari yig'indisidan ularning birgalikda ro'y berish ehtimolini ayirilganiga teng:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

O'zaro bog'liq bo'lmagan hodisalar uchun ehtimollarni qo'shish formulasi:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B).$$

Namunaviy masalalar yechish

Masala: Gulzorda 20 ta qizil, 30 ta binafsha rang va 40 ta oq rangli astra ochilgan. Agar kech tushgandan so'ng bitta gul uzilgan bo'lsa, uning qizil yoki binafsha rang bo'lish ehtimolini toping.

Yechish: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{20}{90}+\frac{30}{90}-0=\frac{5}{9}$.

Masala: 1- va 2- to'pdan otilganda, nishonga tegish ehtimoli mos ravishda 0,7 va 0,8 ga teng. Ikkala to'pdan bir vaqtda o'q otilganda hech bo'lmaganda bittasining nishonga tegish ehtimolini toping.

Yechish: $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}56$.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0{,}7+0{,}8-0{,}56=0{,}94$$

Hech bo'lmaganda bitta hodisaning ro'y berish ehtimoli. $A_1,A_2,\ldots,A_n$ hodisalar to'plami o'zaro bog'liqsiz va $P(A_i)=p_i,\ \ q_i=1-p_i$ bo'lsin. Aytaylik, sinov natijasida bu hodisalarning hech biri ro'y bermasligi yoki ularning bir qismi, yoki hammasi ro'y berishi mumkin bo'lsin. A

hodisa $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalarning hech bo'lmaganda bittasi ro'y berishidan iborat hodisa bo'lsin. U holda

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_n}) = 1 - q_1 \cdot \ldots \cdot q_n$$

Xususan, agar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalarning ehtimolliklari bir xil $P(A) = p, \quad q = 1 - p$ bo'lsa, u holda $P(A) = 1 - q^n$.

Namunaviy masalalar yechish

Masala: Dushman kemasi 3 to'pdan o'qqa tutilmoqda. Ularning nishonga tegish ehtimoli mos ravishda 0,8; 0,7; 0,9. Agar kemani cho'ktirish uchun bitta tekkizish etarli bo'lsa, dushman kemasi 3 to'pdan bir otishda cho'ktirish ehtimolini toping.

Yechish: $q_1 = 1 - p_1 = 0{,}2; \quad q_2 = 1 - p_2 = 0{,}3; \quad q_3 = 1 - p_3 = 0{,}1.$

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}994.$$

Masala: Basketbolchining bir tashlashda koptokni savatga tushirish ehtimoli 0,4 ga teng ekanligi ma'lum. 0,9 dan kam bo'lmagan ehtimollik bilan hech bo'lmaganda bir marta savatga tushirishi uchun basketbolchi koptokni necha marta tashlashi kerak?

Yechish: Hodisalar o'zaro bog'liq emas, shuning uchun $P(A) = 1 - q^n$. Masalaning shartiga ko'ra: $P(A) = 0{,}9; \quad p = 0{,}4$. Demak, $q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

$P(A) = 1 - q^n = 1 - 0{,}6^n \geq 0{,}9$ yoki $0{,}6^n \leq 0{,}1.$

$$n \lg 0{,}6 \leq \lg 0{,}1; \quad \lg 0{,}6 \leq 0; \quad n \geq \frac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}6} = \frac{-1}{-0{,}2218} = 4{,}5;$$

Shunday qilib, $n \geq 5$, ya'ni basketbolchi savatga koptokni kamida 5 marta tashlashi kerak ekan.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Kuzatuvchining taxminiga ko'ra, agar ma'lum muddatda foiz me'yori pasaysa, xuddi shu davrda aksiyalar bozorining o'sish ehtimoli 0,8 ga teng. Kuzatuvchi shu davrda foiz me'yori pasayishi ehtimoli 0,4 ga teng deb hisoblaydi. Aytilgan davrda aksiyalar bozori rivojlangan holda foiz me'yori pasayishi ehtimolini toping.

2. Har bir tajribada hodisaning ro'y berish ehtimoli bir xil va 0,2 ga teng. Tajribalar ketma-ket ravishda hodisa ro'y bergunga qadar o'tkazildi. Hodisaning 1-marta ro'y berish 4 - marta tajriba o'tkazishga to'g'ri kelish ehtimoliligini toping.

3. 1-dastgohda tayyorlangan mahsulotning 1-navli bo'lish ehtimoli 0,7 ga va 2-dastgohda shu mahsulotning 1-navli bo'lish ehtimoli 0,8 ga teng. Agar 1-dastgohda 2 ta, 2-dastgohda 3 ta mahsulot tayyorlangan bo'lsa, barcha mahsulotning 1-navli bo'lish ehtimolini toping.

4. Tasodifiy sonlar jadvalidan olingan sonlarning hech bo'lmaganda bittasi juft bo'lish ehtimoli kamida 0,9 ga teng bo'lishiga kafolot berish uchun tasodifiy sonlar jadvalidan nechta son olish kerak?

5. Iste'mol bozorini o'rganish uchun tish pastasiga tegishli so'rov o'takazildi. Agar aholining 14% i A turdagi, 9% i B turdagi tish pastasidan foydalanishi ma'lum bo'lsa, tasodifiy ravishda tanlab olingan kishi A yoki B turdagi tish pastalaridan foydalanishi ehtimolini toping [7], [10], [15].

6- amaliy mashg'ulot: To'la ehtimollik formulasi. Beyes formulasi

Reja:

1. To'la ehtimol .
2. Beyes formulasi.

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Mumkin bo'lmagan hodisa, qarama-qarshi hodisa, to'la gruppa, elementar hodisalar fazosi, Kolmogorov aksiomalari, ehtimolning xossalari, shartli ehtimol, bog'liq hodisalar, hodisalar bog'liqsizligi, shartli ehtimol, to'la gruppa, bo'sh to'plam, Beyes formulasi

$H_1, H_2, \ldots, H_n$ hodisalar to'la guruhni tashkil etsin, ya'ni sinov natijasida ularning faqat bittasi ro'y berushi mumkin va ular birgalikda emas:

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1, \quad H_i \cdot H_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

A hodisa ana shu hodisalardan bittasi ro'y bergandagina ro'y berishi mumkin bo'lsin. $H_1, H_2, \ldots, H_n$ hodisalarning qaysi biri ro'y berishi oldindan ma'lum bo'lmagani uchun ular ***gipotezalar*** deb ataladi. A hodisa ro'y berish ehtimoli t**o'la ehtimollik** deyiladi:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i).$$

Namunaviy masalalar yechish

Masala: Kelasi yilda mamlakat iqtisodiyoti ko'rsatkichlari yuqori bo'lsa, ma'lum bir kompaniya aksiyalari narxining oshish ehtimoli 0,75 ga, past bo'lsa oshish ehtimoli 0,3 ga teng ekan. Shu bilan birga kelasi yilda mamlakat iqtisodiyoti ko'rsatkichlari yuqori bo'lish ehtimoli 0,8 ga teng ekan. Kelasi yilda kompaniya aksiyalari narxining oshish ehtimolini toping?

Yechish: Masala shartiga ko'ra, $P(H_1) = 0{,}8$ va $P(H_2) = 1 - P(H_1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ $P(A \mid H_1) = 0{,}75$ va $P(A \mid H_2) = 0{,}3$. To'la ehtimollik formulasidan:

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) = 0.8 \cdot 0{,}75 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}66.$$

Masala: O'qituvchi imtihonga 50 ta masala tuzgan: 30 tasi ehtimolliklar nazariyasi, 20 tasi matematik statistika kursidan. Agar talaba ehtimolliklar nazariyasidan 15 ta, matematik statistikasidan 18 ta masala yechishni bilsa, uning imtihon topshirish ehtimolligini toping.

Yechish: $P(H_1) = 30/50 = 0{,}6;\quad P(H_2) = 20/50 = 0{,}4$**;**

$$P(A \mid H_1) = 15/30 = 0{,}5.; \quad P(A \mid H_2) = 18/20 = 0{,}9.$$

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}4 \cdot 0{,}9 = 0{,}66.$$

Ba'zan, A hodisa ro'y bergani ma'ium bo'lgandan so'ng H_k gipotezalarning $P(H_k \mid A)$ shartli ehtimolligini hisoblash zaruriyati tug'iladi. Bu ehtimolliklar Bayes formulasidan aniqlanadi:

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k)P(A \mid H_k)}{P(A)}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Bu yerda $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)$ bo'lib, H_k, $k = \overline{1, n}.$, gipotezalar to'la guruhni tashkil etadi.

H_k, $k = \overline{1, n}.$ - ehtimollik *aprior (sinovdan oldingi),*

$P(H_k \mid A)$, $k = \overline{1, n}.$ - ehtimollik *aposterior (sinovdan keyingi)* deyiladi.

Namunaviy masalalar yechish

Masala: Yuqori iqtisodiy o'sish davrida Amerika dollari kursining o'sish ehtimolligi 0,7, o'rtacha o'sish davrida 0,4, past ko'rsatkichli o'sish davrida esa 0,2 ga teng. Iqtisodiy o'sish davri ko'rsatkichlari yuqori, o'rtacha va past bo'lishi ehtimolliklari mos ravishda 0,3; 0,5 va 0,2 ga teng. Hozir dollarning narxi o'smoqda, u holda bu davr yuqori ko'rsatkichli o'sish davri bo'lishi ehtimolligi qancha?

Yechish: Masala shartiga ko'ra:

$$P(H_1) = 0{,}3; \quad P(H_2) = 0{,}5; \quad P(H_3) = 0{,}2.$$

Shuningdek, $P(A \mid H_1) = 0{,}7; \quad P(A \mid H_2) = 0{,}5; \quad P(A \mid H_3) = 0{,}2.$

Demak, Bayes formulasiga asosan

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1)}{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + P(H_3) \cdot P(A \mid H_3)} =$$

$$= \frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}2} = 0{,}467;$$

Masala: Telegraf xabari “nuqta” va “chiziq” signallaridan tashkil topgan. Signallarning statistik xossalari shundayki, “nuqta” signallarning o’rtacha 2/5 qismi, “chiziq” signallarning o’rtacha 1/3 qismi buzilganda qabul qilinar ekan. Jo’natilayotgan signallar ichida “nuqta” va “chiziq” signallari 5:3 nisbatda uchraydi. Agar a) “nuqta” signali; b) “chiziq” signali qabul qilingan bo’lsa, aynan jo’natilgan signal qabul qilinganligi ehtimolligini toping.

Yechish: Shartga ko’ra, $P(H_1):P(H_2)=5:3$; Undan tashqari $P(H_1)+P(H_2)=1$; Shuning uchun $P(H_1)=5/8,\quad P(H_2)=3/8$. Ma’lumki,

$$P(A\,|\,H_1)=3/5,\quad P(A\,|\,H_2)=1/3,\quad P(B\,|\,H_1)=2/5,\quad P(A\,|\,H_2)=2/3;$$

$$P(A)=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.\qquad P(B)=\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}.$$

$$P(H_1\,|\,A)=\frac{P(H_1)P(A\,|\,H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}}{1/2}=\frac{3}{4}.$$

$$P(H_1\,|\,B)=\frac{P(H_2)P(B\,|\,H_2)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}}{1/2}=\frac{1}{2}.$$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Iqtisodiy o’sish davrida mijozning bankdan olgan zayomini qaytarmaslik ehtimolligi 0,04 ga, iqtisodiy tanglik davrida esa 0,13 ga teng. Faraz qilaylik, iqtisodiy o’sish davri boshlanish ehtimolligi 0,65 ga teng. Tasodifiy ravishda tanlab olingan mijozning qarzini qaytarmaslik ehtimolligi nechaga teng?

2. 2 ta firma aksionerlik kapitallarini birlashtirish jarayonida aksiyalarning kontrol paketini olayotgan firmaning fikricha, qo’shib olinayotgan firma direktorlar kengashining raisi iste’foga chiqsa, bu birlashtirishning foyda keltirish ehtimoliigi 0,65 ga teng. Aks holda bu ehtimollik 0,3 ga teng ekan. Raisning iste’foga chiqish ehtimolligi 0,7 ga teng bo’lsa, birlashtirishning foyda keltirish ehtimolligini toping.

3. 2 ta bir xil quti bo’lib, ularning 1-sida 2 ta oq, 1 ta qora shar, 2-sida esa 1 ta oq va 4 ta qora shar bor. Tasodifiy ravishda bitta quti tanlanadi va undan shar olinadi. Olingan sharning oq bo’lish ehtimolligini toping.

4. 2 xil detallar to’plami bor. 1-to’plamdagi detallarning standart bo’lish ehtimolligi 0,8 ga, 2-siniki esa 0,9 ga teng. Tasodifiy tanlangan to’plamdan tasodifiy ravishda olingan detalning standart bo’lish ehtimolligini toping.

5. Dominoning to’la to’plamidan 2 tasi tanlab olindi. Ularning 2-sini 1-chisining yoniga qo’yish mumkin bo’lish ehtimolligini toping [7], [10], [15].

7- amaliy mashg’ulot: O’zaro bog’liq bo’lmagan takroriy tajribalar. Bernulli sxemasi.

Reja:

1.Tajribalar ketma-ketligi.
2.Bernulli sxemasi. Bernulli formulasi.

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Tajribalarningbog’liqligi,tajribalarningbog’liqsizligi, tajribalar ketma-ketligi, Bernulli formulasi, qarama-qarshi hodisa ehtimoli.

Aytaylik, biror A hodisaning ketma-ket o’tkazilayotgan bog’liqsiz tajribalarning har birida ro’y berishi ham bermasligi ham mumkun bo’lsin. Har bir tajribada A hodisaning ro’y berish ehtimolligi p ga teng va bu ehtimollik tajriba nomeriga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas son. Tabiiyki, har bir tajriba uchun A hodisaning ro'y bermaslik ehtimoli $q=1-p$ ga teng bo'ladi. Yuqoridagi shartlarnu qanoatlantiturvchi tajribalar ketma-ketligiga **Bernulli sxemasi** deyiladi.

Bernulli sxemasi 2 ta parametr uchun n- tajribalar soni va p- har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimolligi bilan aniqlanadi. Bernulli sxemasida A hodisaning m marta ro'y berish ehtimolligi **Bernulli formulasi** bilan aniqlanadi:

$$P_n(m)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m} \qquad \text{bunda} \quad p=1-q.$$

n ta tajriba o'tkazilganda hodisaning ro'y berishlar soni m_1, m_2 $(m_1<m_2)$ sonlar orasida bo'lish ehtimolligi quyidagi formuladan topiladi:

$$P_n(m_1;m_2)=P_n(m_1\le k\le m_2)=\sum_{k=m_1}^{m_2}P_n(k)$$

n ta tajriba o'tkazilganda hodisaning ko'pi bilan m marta ro'y berish ehtimolligi quyidagi formuladan topiladi:

$$P_n(0;m)=\sum_{k=0}^{m}P_n(k) \quad \text{yoki} \quad P_n(0;m)=1-\sum_{k=m+1}^{m}P_n(k)$$

n ta tajriba o'tkazilganida hodisaning kami bilan m marta ro'y berish ehtimolligi quyidagi formulala bilan topiladi:

$$P_n(m;n)=\sum_{k=m}^{m}P_n(k) \quad \text{yoki} \quad P_n(m;n)=1-\sum_{k=0}^{m-1}P_n(k).$$

n ta tajriba o'tkazilganida hodisaning hech bo'lmaganda bir marta ro'y berish ehtimolligi quyidagi formuladan topiladi:

$$P_n(1;n)=1-q^n.$$

P dan kichik bo'lmagan ehtimollik bilan hodisa hech bo'lmaganda bir marta ro'y berish uchun o'tkazish kerak bo'lgan tajribalar soni n:

$$P_n(1;n)=1-q^n\ge P$$

$$(1-p)^n\le 1-P$$

$$n\ln(1-p)\le\ln(1-P)$$

$$n\le\frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)};$$

$\ln x$ funksiyaning qiymatlari 10 – jadvalga keltirilgan.

Bernulli sxemasida hodisaning ro'y berishlar soni m ning *eng ehtimolliroq qiymati* μ quyidagicha hisoblanadi:

1. Agar $(n+1)p$ ko'paytmaning qiymati kasr bo'lsa, m kasrning butun qismiga teng: $\mu=[(n+1)p]$.

2. Agar $(n+1)p$ ko'paytmaning qiymati butun bo'lsa, ro'y berishlar soni m ning eng ehtimolliroq qiymati ikkita bo'ladi:

$$\mu_1=(n+1)p-1; \quad \mu_1=(n+1)p.$$

Namunaviy masalalar yechish

Masala: Ma'lum bir mahsulotlarning 5%i sifatsiz. Tasodifan olingan 5 ta mahsulot ichida 2 tasining sifatsiz bo'lish ehtimolligini toping.

Yechish: $P_3(2)=C_3^2(0,05)^2(0,95)^{5-2}=\frac{5!}{2!3!}(0,05)^2(0,95)^3=0,02$

Masala: 2 ta teng kuchli raqib shaxmat o'ynamoqda. 4 partiyadan kamida 2 tasini yutish ehtimolligi kattami yoki 5 partiyadan kamida 3 tasini yutish ehtimolligi kattami?

Yechish:

$$P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)=1-P_4(0)-P_4(1)=1-C_4^0\left(\frac{1}{2}\right)^4-C_4^1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{11}{16}$$

$$P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)=C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^5+C_5^4\left(\frac{1}{2}\right)^5+C_5^5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{8}{16}$$

Demak, $\frac{11}{16}>\frac{8}{16}$, ya'ni 4 partiyadan kamida 2 tasini yutish ehtimolligi kattaroq ekan.

Masala: Mahsulot katta partiyasining 1%i sifatsiz. Hech bo'lmaganda bitta sifatsiz mahsulot uchratish ehtimolligi 0,95 dan kichik bo'lmasligi uchun tasodifiy tanlanma hajmi qancha bo'lishi kerak?

Yechish: Ma'lumki, $n\geq\frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}$. Shartga ko'ra $P=0{,}95;\ \ p=0{,}5$. Demak, $n\geq\frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}95}\approx 296$. Ya'ni, tanlanma hajmi kamida 296 bo'lgan taqdirda tekshiruv davomida kamida bitta sifatsiz mahsulot uchrashi ehtimoli 0,95 dan kam bo'lmaydi.

Masala: Har bir otilgan o'qning nishonga tegish ehtimoli p=$\frac{2}{3}$ Otilgan 10 ta o'qdan uchtasining nishonga tegish ehtimolini toping.

Yechish: n=10; k=3; p=$\frac{2}{3}$; q=$\frac{1}{3}$. U holda Bernulli formulasiga asosan:

$$P_{10}(3)=C_{10}^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^7$$

Masala: Tanga 6 marta tashlandi. Gerbli tomon tushishlarning eng ehtimolli sonini toping.

Yechish: Berilgan masalaning shartlariga ko'ra n=6, p=q=1/2. U holda gerbli tomon tushishining eng ehtimolli soni k_0 ni

$$k_0=np=6\cdot\frac{1}{2}=3$$

yuqoridagi formuladan foydalanib topamiz.
Demak, eng ehtimolli son k_0=3 bo'ladi.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Auditor tekshirish paytida tasodifiy ravishda 5 ta hisob varaqasini tanladi. Agar hisob varaqalarining 3%i da xatolarga yo'l qo'yilgan bo'lsa, auditorning:

a) faqat bitta hisob varaqasida xato topishi;

b) hech bo'lmaganda bitta hisob varaqasida xato topishi ehtimolligini toping.

2. Guruhdagi 20 ta talabadan 10%i yakuniy nazoratda qoniqarsiz baho olar ekan. Bunday holda:

a) 2 ta talabaning yakuniy nazoratda qoniqarsiz baho olish ehtimollgi qancha?

b) 4 ta talabaning yakuniy nazoratda qoniqarsiz baho olish ehtimolligii qancha?

c) kamida 3 ta talabaning yakuniy nazoratda qoniqarsiz baho olish ehtimolligi qancha?

d) yakuniy nazoratda qoniqarsiz baho olmaydigan talabalar soni qancha?

3. Tanga 6 marta tashlandi:

a) Tanga "gerb" tomoni bilan 2 martadan kam tushishi;

b) “gerb” tomoni kamida 2 marta tushish ehtimolligini toping.

4. Sexda 6 ta motor ishlaydi. Ularning har biri uchun ayni paytda ishlayotganligi ehtimolligi 0,8 ga teng bo’lsa,

a) 4 ta motor ishlayotganligi;

b) Hamma motor o’chirilganligi;

c) Hamma motor ishlayotganligi ehtimolligini toping.

5.Savdo do‘koniga kirgan 8 ta xaridordan har birining xarid qilish ehtimoli 0,7 ga teng. Xaridorlardan beshtasining xarid qilish ehtimolini toping [7], [10], [15].

8- amaliy mashg’ulot: Muavr-Laplas lokal va integral teoremalari

Reja:

1.Muavr-Laplasning lokal teoremasi.
2.Muavr -Laplasning integral teoremasi.

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Asimptotik formula, Muav-Laplas lokal va integral teoremasi, funktsiyaning juft va toqligi, Stirling formulasi.

n ta o’zaro bog’liq bo’lmagan tajribalar ketma-ketligi ko’rilayotgan bo’lib, biror A hodisaning ro’y berish ehtimolligi har bir tajriba uchun p soniga teng bo’lsin. Muavr-Laplas teoremalari Bernulli sxemasida n, m, m_1, m_2 lar katta qiymatlar qabul qilgandagina quyidagi ehtimolliklarni taqribiy hisoblash uhun qo’llaniladi:

$$P_n(m) \approx C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} \quad \text{va} \quad P(m_1 \le k \le m_2) = \sum_{k=m_1}^{m_2} P_n(k)$$

Muavr-Laplasning lokal teoremasi: Agar n ta o’zaro bog’liq bo’lmagan tajribalar ketma-ketligida biror hodisaning ro’y berish ehtimolligi o’zgarmas p soniga teng bo’lsa, bu tajribalar hodisaning aynan m marta ro’y berish ehtimolligi

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

formula yordamida hisoblanadi. Bu yerda

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{x^2}{2}}$$

Laplas funktsiyasi deb ataladi, uning qiymatlari ilovadagi 3-jadvalda keltirilgan. Funktsiya juft bo’lganligi uchun manfiy qiymatlari ham ana shu jadvaldan topiladi ($x \ge 4$ qiymatlarda $\varphi(x) = 0$ deb olinadi).

Muavr-Laplasning integral teoremasi: Agar n ta o’zaro bog’liq bo’lmagan tajribalar ketma-ketligida biror hodisaning ro’y berish ehtimolligi o’zgarmas p soniga teng bo’lsa, bu tajribalarda hodisaning ro’y berishlar soni m ning m_1 va m_2 qiymatlar orasida bo’lish ehtimolligi

$$P(m_1; m_2) = P(m_1 \le m \le m_2) \approx \phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

formula yordamida hisoblanadi. Bunda

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad (1)$$

Laplasning integral funktsiyasi deb ataladi, bu funktsiyasining quymatlari 4-jadvalda keltirilgan.

$\Phi(x)$ toq funktsiya bo'lgani uchun x manfiy qiymatlari ana shu jadvaldan foydalaniladi. $x > 5$ da $\Phi(x) = 0.5$ bo'ladi.

Namunaviy masalalar yechish

Masala: Agar A hodisaning bitta tajribada ro'y berish ehtimolligi 0,2 ga teng bo'lsa, tajriba 400 marta o'tkazilganda uning aynan 80 martaba ro'y berish ehtimolligini toping.

Yechish: Shartga ko'ra $n = 400;\quad m = 80;\quad p = 0{,}2;\quad q = 0{,}8.$ Muavr-Laplasning lokal teoremasidan foydalanamiz:

$$P_{400}(80) = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\varphi\left(\frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\right) = \frac{1}{8}\varphi(0).$$

Ilovadagi Laplas funksiyasining qiymatlari keltirilgan 3-jadvaldan $\varphi(x)$ ning $x = 0$ ga mos qiymatini topamiz: $\varphi(0) = 0{,}3989$. U holda $P_{400}(80) = 0{,}4986$.

Masala: Tajriba vaqtida uskunaning ishda chiqish ehtimolligi 0,8 ga teng. 100 ta tajriba o'tkazilganda: a) kamida 75 ta uskunaning; b) ko'pi bilan 75 ta uskunaning; d) 75 tadan 90 tagacha uskunaning ishdan chiqish ehtimolliklarini toping.

Yechish: Shartga ko'ra $n = 100;\qquad p = 0{,}8;\quad q = 0{,}2.$

a) kamida 75 ta uskunaning ishda chiqish ehtimolligi:

$$P\{75 \le m\} = P\{75 \le m \le 100\} = \phi\left(\frac{100 - 0{,}8 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) - \phi\left(\frac{75 - 0{,}05 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) = \phi(5) - \phi(-1{,}25),$$

Ilovadagi Laplas funksiyasining qiymatlari keltirilgan 4-jadvaldan $\phi(x)$ funksiyasining $x = 1{,}25$ va $x = 5$ ga mos qiymatlarini topamiz: $\phi(1{,}25) = 0{,}3944,\quad \phi(5) = 0{,}5$. U holda

$$P\{75 \le m\} \approx \phi(5) - \phi(-1{,}25) = \phi(5) + \phi(1{,}25) = 0.5 + 0.3944 = 0.8944$$

bo'ladi.

b) ko'pi bilan 75 ta uskunaning ishda chiqish ehtimoli:

$$P\{m \le 74\} = 1 - P\{75 \le m\} = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056.$$

d) 75 tadan 90 tagacha uskunaning ishda chiqish ehtimoli:

$$P\{75 \le m \le 90\} = \phi\left(\frac{90 - 0{,}8 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) - \phi\left(\frac{75 - 0{,}05 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) = \phi(2{,}5) - \phi(-1{,}25) = \phi(2{,}5) + \phi(1{,}25)$$

Ilovadagi Laplas funksiyasining qiymatlari keltirilgan 4-jadvaldan $\phi(x)$ funksiyasining $x = 1{,}25$ va $x = 2{,}5$ ga mos qiymatlarini topamiz: $\iota(1{,}25) = 0{,}3944,\quad \phi(2{,}5) = 0{,}4938$. U holda

$$P\{75 \le m \le 90\} \approx 0{,}4938 + .3944 = 0.8882 \text{ bo'ladi.}$$

Masala: Bitta o'q uzilganda nishonga tegish ehtimoli 0,8 ga teng. 100 ta o'q uzilganda rosa 75 ta o'qning nishonga tegish ehtimolini toping.

Yechish:n=100; k=75; p=0,8; q=0,2

U holda,

$$\frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 * 0.8}{\sqrt{100 * 0.8 * 0.2}} = -1.25$$

jadvaldan

$$\varphi(-1{,}25) = 0{,}1826$$

Demak,

$$P_{100}(75) = \frac{0.1826}{4} = 0.04565$$

Masala: Agar biror hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,4 ga teng bo‘lsa, bu hodisaning 100 ta sinovdan

a) rosa 50 marta ro‘y berish ehtimolini;

b) kami bilan 30 marta, ko‘pi bilan 45 marta ro‘y berish ehti-molini toping.

Yechish: a) shartga ko‘ra n=100; p=0,4; q=0,6. Sinovlar soni n katta bo‘lganligi uchun, masalani lokal teoremaga ko‘ra yechamiz:

$$\frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{50-100*0.4}{\sqrt{100*0.4*0.6}} = \frac{10}{\sqrt{24}} \approx 2.04$$

$\varphi(\underline{x})$ -funksiyaning qiymatlar jadvalidan

$$\varphi(2.04)=0,0498$$

ekanligini topamiz.

Topilganlarni formulaga qo‘yib, izlanayotgan ehtimolni topamiz:

$$P_{100}(50) \approx \frac{1}{\sqrt{100\cdot 0.4\cdot 0.6}}\varphi(2.04) = \frac{0.0498}{\sqrt{24}} = 0.0102$$

b) Laplasning integral teoremasini qo‘llaymiz. n=100; k_1=30; k_2=45; p=0,4 va q=0,6 ekanligiga asosan:

$$\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}} = \frac{30-100\cdot 0.4}{\sqrt{100\cdot 0.4\cdot 0.6}} = \frac{-10}{\sqrt{24}} \approx -2.04$$

$$\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}} = \frac{45-100\cdot 0.4}{\sqrt{100\cdot 0.4\cdot 0.6}} = \frac{5}{\sqrt{24}} \approx 1.02$$

$\phi(x)$ ning qiymatlar jadvalidan

$$\phi(-2,04)= - \phi(2,04)= - 0,4793$$

$$\phi(1,02)=0,3461$$

Topilganlarni formulaga qo‘yib, talab qilingan ehtimollikni topamiz.

$$P_{100}(30;45) \approx \phi(1,02)-\phi(-2,04)=\phi(1,02)+\phi(2,04)=0,3461+0,4793=0,8254$$

Masala: A hodisaning 900 ta bog‘liqmas sinovning har birida ro‘y berish ehtimoli p=0,8 ga teng. A hodisa :

a) 750 marta ;

b) 710 dan 740 martagacha ro‘y berish ehtimolini toping.

Yechish: a) n=900; k=750; p=0,8; q=0,2

U holda:

$$\frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{750-900\cdot 0.8}{\sqrt{900\cdot 0.8\cdot 0.2}} = 2.5$$

jadvaldan

$$\varphi(2.5) \approx 0.0175$$

Demak, $P_{900}(750) \approx \frac{1}{12} 0{,}0175 \approx 0{,}00146$

b) $\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{710-720}{12} \approx -0.83$, $\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{740-720}{12} \approx 1.67$

jadvaldan

$\phi(-0{,}83) = -\phi(0{,}83) \approx -0{,}2967$;

$\phi(1{,}67) \approx 0{,}4525$

Demak,

$P_{900}(710;740) \approx 0{,}4525+0{,}2967=0{,}7492$ [7], [10], [15].

9- amaliy mashg'ulot: Puasson formulasi

Reja:

1.Puasson formulasi.
2.Puasson formulasining isboti.

Asosiy tushuncha va iboralarlar

$P_n(m)$**,** $p \to 0$**,** $np_n = a$**,**Puasson formulasi va hodisalar seriyasi.

Bernulli sxemasida n ning qiymati yetarlicha katta, m ning qiymati esa kichkina bo'lgan hollarda hodisaning m marta ro'y berishlar ehtimolligi **Puasson formulasi** yordamida hisoblanadi:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}, \quad \lambda = np$$

Puasson formulasiga asosan n ta tajriba o'tkazilganda hodisaning ro'y berishlar soni m_1, m_2 $(m_1 < m_2)$ sonlar orasida bo'lish ehtimolligi quyidagi formuladan topiladi:

$$P_n(m_1;m_2) \approx e^{-\lambda} \sum_{k=m_1}^{m_1} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}$ funktsiyasining qiymatlari 2-jadvalda keltiriladi.

Masala. Telefon stansiyasi 400 abonentga xizmat ko'rsatadi. Agar har bir abonent uchun uning bir soat ichida stansiyaga qo'ng'iroq qilish ehtimoli 0,01 ga teng bo'lsa, quyidagi hodisalarning ehtimolini toping:

a) bir soat davomida 5 abonent stansiyaga qo'ng'iroq qiladi;
b) bir soat davomida 4 tadan ko'p bo'lmagan abonent qo'ng'iroq qiladi;
c) bir soat davomida kamida 3 abonent stansiyaga qo'ng'iroq qiladi.

Yechish: p=0,01 juda kichik, n= 400 esa katta bo'lgani uchun $\lambda = 400 \cdot 0.01 = 4$ da Puassonning taqribiy formulasidan foydalanamiz:

$$\text{a) } P_{400}(5) \approx \frac{4^5}{5} e^{-4} \approx 0.156293.$$

$$b) P_{400}(0 \le k \le 4) = P_{400}(0) + P_{400}(1) + P_{400}(2) + P_{400}(3) + P_{400}(4) =$$
$$0.018316 + 0.073263 + 0.146525 + 0.195367 + 0.195367 = 0.628838$$

$$\text{c) } P_{400}(3 \le k \le 400) = 1 - P_{400}(0 \le k \le 2) = 1 - 0.018316 - 0.0732263 - 0.146525 = 0.761896$$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. 1-sinfga 200 ta o'quvchi qabul qilinishi kerak. Agar o'g'il bola tug'ilish ehtimolligi 0,515 bo'lsa, 1-sinfga qabul qilinganlarning roppa-rosa 100 tasi qiz bo'lishining ehtimolligini toping.

2. Agar hodisaning har bir tajribada ro'y berish ehtimolligi 0,2 ga teng bo'lsa, 400 ta tajriba o'tkazilganda uning aynan 104 marta ro'y berish ehtimolligini toping.

3. Tasodifiy ravishda 100 ta tanga ustma-ust qilib taxlandi. Ualrning ichida "gerb" tomoni tepaga qilib taxlanganlari 45 dan 55 tagacha bo'lish ehtimolligini toping.

4. Ishlab chiqarishdagi 1% mahsulot sifatsiz. Tekshirish uchun tasodifiy ravishda olingan 1100 ta mahsulotdan 17 tasining sifatsiz chiqish ehtimolligini toping.

5. Korxonada ishlab chiqarilgan buyumning 20% i yaroqsizdir. 400 ta buyum ichidan yaroqsizlari sonining 50 bilan 100 orasida bo'lish ehtimolini toping.

6. Maktabning birinchi sinfiga 260 ta bola qabul qilindi. Agar o'g'il yoki qiz tug'ilish ehtimollari bir-biriga teng bo'lsa, qabul qilinganlarning rosa 100 tasi qiz bola bo'lish ehtimolini toping.

7. Avtomat qurolidan otilgan har bir o'qning nishonga tegish ehtimoli 0,7 ga teng. Otilgan 60 ta o'qdan nishonga tekkanlari soni kamida 30 ta va ko'pi bilan 50 ta bo'lish ehtimolini toping [7], [10], [15].

10- amaliy mashg'ulot: Tasodifiy miqdor va taqsimot funktsiya. Taqsimot funktsiya xossalari.

Reja:

1.Tasodifiy miqdorlar.
2.Taqsimot funktsiya.

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Elementar hodisalar fazosi, o'lchovli funktsiya, akslantirish, tasodifiy miqdor, taqsimot qonun va taqsitmot funktsiya.

Tasodifiy miqdor tushunchasi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biridir. Masalan, o'yin soqqasini tashlaganda tushishi mumkin bo'lgan ochkolar soni, ishga kech qoluvchi xizmatchilar soni va hokazolar tasodifiy miqdorga misol bo'la oladi.

Ta'rif. Tasodifiy miqdor deb avvaldan noma'lum bo'lgan va oldin-dan inobatga olib bo'lmaydigan tasodifiy sabablarga bog'liq bo'lgan hamda sinash natijasida bitta mumkin bo'lgan qiymatni qabul qiluvchi miqdorga aytiladi.

Odatda, tasodifiy miqdorlar lotin alifbosining katta harflari X, Y, Z ... va h.k. uning mumkin bo'lgan qiymatlari kichik x,y,z... va h.k. harflar bilan belgilanadi.

Tasodifiy miqdorlar diskret yoki uzluksiz bo'lishi mumkin.

Ta'rif. Diskret tasodifiy miqdor deb ayrim, ajralgan qiymatlarni ma'lum ehtimollar bilan qabul qiluvchi miqdorga aytiladi.

Diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari soni chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin.

Ta'rif. Uzluksiz tasodifiy miqdor deb chekli yoki cheksiz oraliqdagi barcha qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan miqdorlarga aytiladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari soni cheksizdir.

Ta'rif. X **tasodifiy miqdorning taqsmot qonuni** deb uning qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlari x_i va mos $p_i = P(X = x_i)$ $(\sum_i p_i = 1)$ ehtimolliklari majmuiga aytiladi. Har qanday tasodifiy miqdor o'zinnig tagsimot qonuni bilan bir qiymatli aniqlanadi.

Deskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni jadval, formula yoki grafik ko'rinishida berilishi mumkin:

a) Birinchi satri mumkin bo'lgan X_k qiymatlardan, ikkinchi satri P_k ehtimollardan iborat jadval yordamida, yani:

$$X : x_1 \quad x_2 \ldots x_n$$
$$P : p_1 \quad p_2 \ldots p_n$$

bu yerda $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$

b) Grafik usulda - buning uchun to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida (x_k p_k) nuqtalar yasaladi, so'ngra ularni to'g'ri chiziq kesmalari bilan tutashtirib, taqsimot ko'pburchagi deb ataluvchi figura hosil qilinadi. Taqsimot qonunining $M_i(x_i, p_i)$ nugtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqdan iborat grafigi **taqsimot poligoni** deyiladi.

c) Analitik usulda (formula ko'rinishida).

Diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlariga mos ehtimollar

$$P_n(k) = C_n^k P^k q^{n-k}$$

Bernulli formulasi bilan aniqlanadigan bo'lsa, tasodifiy miqdor binomial taqsimot qonuniga bo'ysunadin deyiladi.

Agar diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlariga mos ehtimollar:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda = np$$

formula bilan aniqlanadigan bo'lsa, bunday tasodifiy miqdor «Puasson taqsimot qonuniga bo'ysunadi» deyiladi.

Agar diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlariga mos ehtimollar:

$$P_k = q^{k-1} p, \qquad k=1,2, \ldots$$

formula bilan aniqlanadigan bo'lsa, bunday diskret tasodifiy miqdor "Geometrik taqsimot qonuniga bo'ysunadi" deyiladi.

Agar X tasodifiy miqdor $x_1, x_2, \ldots$ qiymatlarni mos ravishda $p_1, p_2, \ldots$ ehtimolliklar bilan qabul qiladigan deskret tasodifiy miqdor bo'lsa, u holda uning **taqsimot funksiyasi** quyidagicha aniqlanadi:

$$F(x) = P\{X < x\} = \sum_{x_i < x} p_i$$

Bu yerda x_i ning x dan kichik bo'lgan qiymatlarining ehtimolliklari yig'indisi olinadi.

Quyida $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{pmatrix}$ diskret tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi ko'rinishi keltirilgan:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le x_1 \\ p_1 & x_1 < x \le x_2 \\ p_1 + p_2 & x_2 < x \le x_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 & x_3 < x \le x_4 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 & x_4 < x \le x_5 \\ 1 & x > x_5 \end{cases}$$

X diskret tasodifiy miqdorning $[a;b]$ oraliqdan qiymat qabul qilish ehtimolligi $P(a \le X \le b) = \sum_{a \le x_i \le b} p_i$ bo'ladi.

Namunaviy masalalar yechish

Masala: 10 ta detal ichida 8 ta nostandarti bor. Tasodifiy ravishda 2 ta detal tanlab olindi. Tanlab olingan detallar orasidagi standart detallar sonining taqsimot qonunini tuzing va poligonini yasang.

Yechish: X diskret tasodifiy miqdor – tanlangan 2 ta detal orasidagi standartlari soni. U $x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 2$ qiymatlarni qabul qiladi. X ning mumkin bo'lgan qiymatlari ehtimolliklarini topamiz.

$N = 10;\quad n = 8;\quad m = 2;\quad k = 0;1;2;$ bo'lganda:

$$P\{X = k\} = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m};\ P\{X = 0\} = \frac{C_8^0 \cdot C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45};$$

$$P\{X = 1\} = \frac{C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45};\ P\{X = 2\} = \frac{C_8^2 \cdot C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{28}{45};$$

Izlanayotgan taqsimot qonunini:

$$\begin{array}{llll} X: & 0 & 1 & 2 \\ P: & 1/45 & 16/45 & 28/45 \end{array}.$$

Masala: Talabaning imtihon biletidagi savollarning har biriga javob berish ehtimoli 0,7 ga teng. Imtihon biletidagi 4 ta savolga bergan javoblari sonining taqsimot qonunini tuzing.

Yechish: X tasodifiy miqdor orqali talabaning javoblari sonini belgilasak, uning qabul qiladigan qiymatlari x_1=0; x_2=1; x_3=2; x_4=3; x_5=4. Ko'rinib turibdiki, n=4; p=0,7; q=0,3. X ning yuqoridagi qiymatlarni qabul qilish ehtimollari Bernulli formulasi orqali topiladi.

$$P_1 = P_4(0) = C_4^0(0.7)^0(0.3)^4 = 0{,}0081$$
$$P_2 = P_4(1) = C_4^1(0.7)^1(0.3)^3 = 0{,}0756$$
$$P_3 = P_4(2) = C_4^2(0.7)^2(0.3)^2 = 0{,}2646$$
$$P_4 = P_4(3) = C_4^3(0.7)^3(0.3)^1 = 0{,}4116$$
$$P_5 = P_4(4) = C_4^4(0.7)^4(0.3)^0 = 0{,}2401$$

U holda X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo'ladi:

X	0	1	2	3	4
P	0,0081	0,0756	0,2646	0,4116	0,2401

Tekshirish: 0,0081 +0,0756 + 0,2646 +0,4116+0,2401 = 1

Masala: Qurilma bir-biridan erkli ishlaydigan uchta elementdan iborat. Har bir elementning bitta tajribada ishdan chiqish ehtimoli 0,1ga teng. Bitta tajribada ishdan chiqqan elementlar sonining taqsimot qonunini tuzing.

Yechish: X diskret tasodifiy miqdor orqali bitta tajribada ishdan chiqqan elementlar sonini belgilasak, u ushbu qiymatlarga ega:

X_1=0; X_2=1; X_3=2; X_4=3.

Bundan tashqari, n=3; p=0,1; q=0,9 ekanligini hisobga olsak,

$$P_1 = P_3(0) = C_3^0(0.1)^0(0.9)^3 = 0.729$$
$$P_2 = P_3(1) = C_3^1(0.1)^1(0.9)^2 = 0.243$$

$$P_3 = P_3(2) = C_3^2 (0.1)^2 (0.9)^1 = 0.027$$
$$P_4 = P_3(3) = C_3^3 (0,1)^3 (0,9)^0 = 0,001$$

U holda, taqsimot qonuni quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

Masala: Nishonga qarata 4 ta o‘q uziladi, bunda har qaysi o‘q uzishda nishonga tegish ehtimoli p=0,8 ga teng.
Quyidagilarni toping:

a) Nishonga tegishlar soniga teng bo‘lgan X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini;

b) $1 \le X \le 3$ va $X > 3$ hodisalarning ehtimolini;

v) Taqsimot ko‘pburchagini chizing.

Yechish: a) X tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari: 0, 1, 2, 3, 4.

Ehtimollarni Bernulli formulasi bo‘yicha hisoblaymiz:

$$P_1 = P(X=0) = C_4^0\, 0,8^0 \bullet 0,2^4 = 0,0016$$
$$P_2 = P(X=1) = C_4^1\, 0,8^1 \bullet 0,2^3 = 0,0256$$
$$P_3 = P(X=2) = C_4^2\, 0,8^2 \bullet 0,2^2 = 0,1536$$
$$P_4 = P(X=3) = C_4^3\, 0,8^3 \bullet 0,2^1 = 0,4096$$
$$P_5 = P(X=4) = C_4^4\, 0,8^4 \bullet 0,2^0 = 0,4096$$

U holda, X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni:

X	0	1	2	3	4
P	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

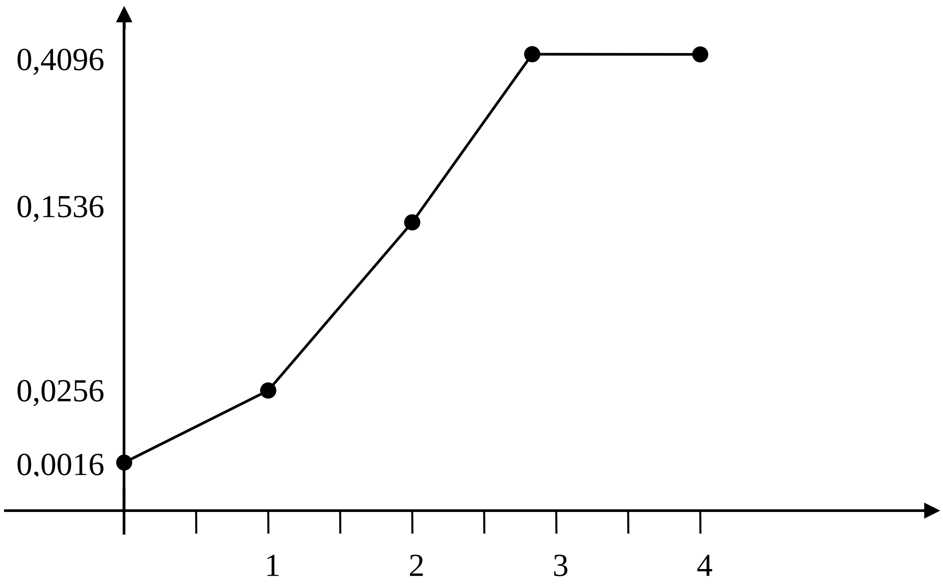
Tekshirish:

$$0,0016+0,0256+0,1536+0,4096+0,4096=1$$

b) $P(1 \le X \le 3) = P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) = 0,0256+0,1536+0,4096=$
$=0,5888$

$P(X>3)=P(X=4) = 0,4096;$

a) Taqsimot ko‘pburchagini yasaymiz:



Mustahkamlash uchun masalalar

1. Firma buxgalteriya hisoblarida 5% xatoga yo'l qo'yadi. Tekshiruvchi tasodifiy ravishda 3 ta hujjatni tanlab oldi:

a) X tasodifiy miqdorning, ya'ni tekshiruvchi topgan xatolar sonining taqsimot qonunini toping.

b) X tasodifiy miqdorning, ya'ni tekshiruvchi topgan xatolar sonining taqsimot funksiyasini toping.

d) Tekshirvchining bittadan ortiq xato topish ehtimolligini toping.

2. Ishlab chiqarilgan 25 ta mahsulotning 6 tasi sifatsizligi ma'lum bo'lsa, tasodifan tanlab olingan 3 ta mahsulot orasidagi X sifatsizlari sonining taqsimot qonunini toping.

3. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan:

$$\begin{array}{cccc} X: & 1 & 3 & 5 \\ p: & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{array}$$

$Y = 3X$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

4. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini berilgan:

$$\begin{array}{cccc} X: & p/4 & p/2 & 3p/4 \\ p: & 0{,}2 & 0{,}7 & 0.1 \end{array},$$

$Y = \sin X$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

5. X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Taqsimot ko‘pburchagini yasang.

6. Yashikda 5 ta oq va 25 ta qora shar bor. Yashikdan 1 ta shar olindi. X tasodifiy miqdor - olingan oq sharlar soni bo‘lsa, uning taqsimot qonunini tuzing.

7. 10 ta detal solingan yashikda 8 ta yaroqli detal bor. Tavakkaliga 2 ta detal olingan. Olingan detallar orasidagi yaroqli detallar sonining taqsimot qonunini tuzing.

8. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

a) X: 2 4 5 6
P: 0,3 0,1 0,2 0,6

b) X: 10 15 20
P: 0,1 0,7 0,2

Taqsimot ko‘pburchagini yasang.

9. X diskret tasodifiy miqdor tangani ikki marta tashlashda «gerbli» tomon tushish sonining binomial taqsimot qonunini yozing [7], [10], [15].

11- amaliy mashg'ulot: Deskret tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari

Reja:

1. Matematik kutilma(matematik kutilish)
2. Dispersiya

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Elementar hodisalar fazosi, o'lchovli funktsiya, akslantirish, tasodifiy miqdor, taqsimot qonun va taqsitmot funktsiya, diskret tasodifiy miqdor, matematik kutilish, dispersiya.

Matematik kutilma(matematik kutilish) tasodifiy miqdor o'rtacha qiymatining sonli xarakteristikasi sifatida xizmat qiladi.

Deskret tasodifiy miqdorning **matematik kutilmasi** deb uning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini mos ehtimolliklariga ko'paytmasining yig'indisiga aytiladi.

$$MX = x_1 p_1 + x_2 p + \ldots x_n p_n$$

Agar tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari sanoqli bo'lsa, u holda

$$MX = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \ .$$

Ikki tasodifiy miqdor bog'liqsiz deyiladi, agar ulardan birining taqsimot qonuni ikkinchusining qanday qiymat qabul qilganligiga bog'liq bo'imasa va aksincha.

Matematik kutilish quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. O'zgarmas miqdorning matematik kutilishi uning o'ziga teng, ya'ni:

$$M(C)=C$$

2-xossa. O'zgarmas sonni matematik kutilish belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni:

$$M(CX) = CM(X)$$

3-xossa. Tasodifiy miqdorlar yig'indisining matematik kutilishi qo'shiluvchilarning matematik kutilishlari yig'indisiga teng:

$$M(X_1+X_2+\ldots+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)$$

4-xossa. O'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ko'payt-masining matematik kutilishi ko'paytuvchilar matematik kutilishlarining ko'paytmasiga teng:

$$M(X_1 \cdot X_2 \ldots X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \ldots M(X_n)$$

Tasodifiy miqdor qabul qila oladigan qiymatlarining o'zining matematik kutilmasi atrofida qanchalik sochilganini baholash uning **dispersiyasi** va **o'rtacha kvadratik chetlanishi** xizmat qiladi.

Dispersiya. X tasodifiy miqdorning **dispersiyasi** deb uning matematik kutilmasidan chetlanishi kvadratining matematik kutilmasiga aytiladi.

$$DX = M[X - MX]^2 = MX^2 - (MX)^2$$

Deskret tasodifiy miqdor uchun

$$DX = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - MX)^2 \cdot p_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \cdot p_k - (MX)^2$$

Dispersiya quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. O'zgarmas sonning dispersiyasi nolga teng:

$$D(C) = O$$

2-xossa. O'zgarmas ko'paytuvchini avval kvadratga oshirib, dispersiya belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$D(CX)=C^2D(X)$$

3-xossa. Bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar yig'indisi (ayir-masi) ning dispersiyasi qo'shiluvchilar dispersiyalarining yig'indisiga teng:

$$D(X\pm Y) = D(X) + D(Y)$$

O'rtacha kvadratik chetlanish. X tasodifiy miqdorning **o'rtacha kvadratik chetlanishi** deb dispersiyadan olingan kvadratik ildizga aytiladi.

$$\sigma(X) = \sqrt{DX} \ .$$

X tasodifiy miqdorning **modasi** deb, tasodifiy miqdorning eng ehtimolliroq qiymatiga, ya'ni eng katta ehtimollik $p^* = \max_i(p_i)$ ga mos kelgan x^* qiymatiga aytiladi.

Namunaviy masalalar yechish

Masala: Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan X tasodifiy miqdorning MX, DX va σX sonli xarakterisikalari topilsin:

$$X: \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$
$$R: \quad 0{,}1 \quad 0{,}2 \quad 0{,}3 \quad 0{,}3 \quad 0{,}1$$

Yechish:

$$MX = 1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}3 + 5\cdot 0{,}1 = 3{,}1$$
$$MX^2 = 1\cdot 0{,}1 + 2^2\cdot 0{,}2 + 3^2\cdot 0{,}3 + 4^2\cdot 0{,}3 + 5^2\cdot 0{,}1 = 10{,}9$$
$$DX = MX^2 - (MX)^2 = 10{,}9 - 3{,}1^2 = 1{,}29;$$
$$\sigma(X) = \sqrt{DX} = \sqrt{1{,}29} = 1{,}1357\,.$$

Masala: $MX = 5;\quad DX = 7$**;** $Z = 4X + 3$**;** $M(Z) = ?;\quad D(X) = ?$

Yechish: $M(4X+3) = M(4X) + M(3) = 4\cdot MX + 3 = 4\cdot 5 + 3 = 23$

$$D(4X+3) = 4^2 DX + 0 = 16\cdot 7 = 112\,.$$

Masala: X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	0	1	2	3	4
P	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

M(X), D(X) va σ (X) larni toping.

Yechish: M(X)=0·0,2+1·0,4+2·0,3+3·0,08+4·0,02=1,32

X^2 tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo‘ladi:

X^2	0	1	4	9	16
P	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

$$M(X^2) = 0\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0{,}4 + 2\cdot 0{,}3 + 9\cdot 0{,}08 + 16\cdot 0{,}02 = 1{,}64$$

U holda:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 2{,}64 - (1{,}32)^2 = 2{,}64 - 1{,}7424 = 1{,}8976$$
$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1.8976} = 1.3775$$

Masala: X va Y tasodifiy miqdorlar erkli. Agar D(X)=5, D(Y) =6 ekanligi ma’lum bo‘lsa, Z=3X+2Y tasodifiy miqdorning disper-siyasini toping.

Yechish: D(Z)=D (3X+2Y)=D(3X)+D(2Y)=9D(X)+4D(Y)=9·5+4·6=69

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Kompaniya bitta aksiyasini 16 shartli pul birligi narxida sotmoqda. Investor aksiyalar paketini sotib olib, ularni 1 yil davomida saqlamoqchi. X bitta aksiyaning 1 yildan keyingi narxini bildiruv tasodifiy miqdor. X ning taqsimot qonuni quyidagicha:

$$X: \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19 \quad 20$$
$$P(X): \quad 0{,}35 \quad 0{,}25 \quad 0{,}25 \quad 0{,}1 \quad 0{,}05\,.$$

a) Berilgan qatorning taqsimot qonuni barcha xossalariga ega ekanini ko’rsating.

b) 1 yildan so’ng aksiyaning kutilayotgan o’rtacha qiymati nimaga teng?

d) 1 yildan so’ng aksiyadan kutilayotgan o’rtacha yutuq nimaga teng?

e) 1 yildan so’ng $DX = ?$

2. $\begin{matrix} X: & 0{,}21 & 0{,}54 & 0{,}61 \\ P: & 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \end{matrix}$ bo’lganda $MX = ?$

3. $MX = 2;\quad MY = 6;\quad Z = 3X + 4Y;\quad MZ = ?$

4. $DX = 4;\quad DY = 5;\quad Z = 2X + 3Y;\quad DZ = ?$

5. Ushbu:

X:	-5	2	3	4
P:	0,4	0,3	0,1	0,2

taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning dispersi-yasini va o‘rtacha kvadratik chetlanishini toping.

6. X tasodifiy miqdor – o‘yin soqqasi bir marta tashlanganda tushadigan ochkolar soni. M(X), D(X) va σ (X) larni toping.

7. Qutida 7 ta shar bo‘lib, ularning to‘rttasi oq qolganlari qora. Qutidan tavakkaliga 3 ta shar olinadi. X – olingan oq sharlar soni. M(X)ni toping.

8. Ikkita o‘yin soqqasi baravariga 2 marta tashlanadi. X – ikkala o‘yin soqqasidagi tushgan juft ochkolar soni. M(X), D(X) va σ (X) larni toping.

9. 10 ta detaldan iborat partiyada 3 ta yaroqsiz detal bor. Tavakkaliga 2 ta detal olingan. X – diskret tasodifiy miqdor olingan 2 ta detal orasidagi yaroqsiz detallar soni bo‘lsa, uning matematik kutilishini toping [7], [10], [15].

12– amaliy mashg’ulot: Ba’zi muhim deskret tasodifiy miqdorlar

Reja:

1.Ba’zi muhim deskret tasodifiy miqdorlar

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Elementar hodisalar fazosi, o’lchovli funktsiya, akslantirish, tasodifiy miqdor, taqsimot qonun va taqsitmot funktsiya, diskret tasodifiy miqdor, tekis taqsimlangan deskret tasodifiy miqdor, binominal taqsimot, puasson taqsimot, geometrik taqsimot, gipergeometrik taqsimot

.

Tekis taqsimlangan deskret tasodifiy miqdor deb, chekli sondagi $x_1, x_2, \ldots x_n$ qiymatlari teng ehtimolliklar $p_n = \frac{1}{n}$ bilan qabul qiluvchi tasodifiy miqdorga aytiladi. Tekis taqsilangan tasodifiy miqdorning matematik kutulishi qabul qiladigan qiymatlarining o’rtacha arifmetigiga teng.

Masala: X tasodifiy miqdor o’yin soqqasi tashlanganda ustki yog’da tushgan ochkolar soni va Y tasodifiy miqdor tanga tashlanganda gerb tomoni bilan tushsa 1, raqam tomoni bilan tushsa 0 qiymat qabul qiluvchi tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlari tuzilsin.

Yechish: $\begin{pmatrix} X: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ P: & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ **va** $\begin{pmatrix} Y & 0 & 1 \\ P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Binominal taqsimot. n ta o’zaro bog’liq bo’lmagan tajribalar ketma-ketligi o’tkazilayotganida biror A hodisa ro’y berishi yoki bermasligi mumkin. A hodisaning ro’y berish ehtimolligi p tajribadan tajribaga o’zgarmas bo’lib qoladi. Teskari hodisaning ehtimolligi esa $q = 1 - p$ gat eng. Tajribalarning o’zaro bog’liq emasligi har tajribada A hodisaning ro’y berish yoki bermasligi qolgan tajribalar natijalariga bog’liq emasligini bildiradi.

X deskret tasodifiy miqdor n ta o’zaro bog’liq bo’lmagan tajribalar ketma-ketligida A hodisaning ro’y berishlar soni p esa A hodisaning ehtimolligi bo’lsin, ya’ni Bernulli sxemasi o’rinli bo’lsin. Ana shu tasodifiy miqdor n va p parametrli **binominal taqsimot qonuniga** bo’ysunadi:

$$P(X = k) = P_k(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}; \quad k = \overline{1, n}.$$

Binominal taqsimotning matematik kutilmasi va dispersiyasi:

$$MX = np; \quad DX = npq.$$

Masala: Bir shaharda 30% aholi ish joyiga shaxsiy avtotransportida borishi afzal ko'radi. Tasodifiy ravishda 8 nafar odam tanlab olindi. X - shaxsiy avtomobilni afzal ko'radiganlar soni. Uning taqsimot qonunini toping.

Yechish: X ning mumkin bo'lgan qiymatlari 0,1,2, . . . ,8; ularda mos kelgan ehtimolliklar

$$P(X=k)=P_8(k)=C_8^k\cdot 0{,}3^k\cdot 0{,}7^{8-k}; \quad k=\overline{0{,}8}.$$

Puasson taqsimot qonuni

Puasson taqsimot qonuni ko'pincha ma'lum vaqt yoki uzunlik oralig'ida hodisaning ro'y berishlar soni ustida gap borganda va ehtimollik juda kichik bo'lganda ishlatiladi.

Masalan, 10 daqiqa davomida telefon stansiyasiga qilingan qo'ng'roqlar soni; 1 soat davomida YOQSH ga kelgan mashinalar soni.

Puasson taqsimot qonuni bilan taqsimlangan X deskret tasodifiy miqdor $0,1,2,...$ qiymatlarni $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$ ehtimolliklar bilan qabul qiladi. Bu yerda $\lambda=np$.

Puasson taqsimotining matematik kutilmasi va dispersiyasi:

$$MX=\lambda; \quad DX=\lambda.$$

Masala: O'rtacha hisobda bankka har 3 daqiqada bir mijoz kirsa:

a) Navbatdagi bir daqiqada bankka bir mijoz kirish ehtimolligini toping.

b) Navbatdagi bir daqiqada bankka kamida 3 kishi kirish ehtimolligini toping.

Yechish: $P(X=1)=\dfrac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}=\dfrac{e^{-1/3}}{3}=0{,}2388;$

b) $P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=e^{-\lambda}\left(1+\dfrac{\lambda}{1!}+\dfrac{\lambda^2}{2!}\right)=$

$$=e^{-1/3}\left(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{18}\right)=0{,}9951;$$

$$P(X\ge 3)=1-P(X\le 2)=1-0{,}9951=0{,}0048.$$

n sinovlar soni katta, har bir sinovda A hodisaning ro'y berish ehtimolligi esa yetarlicha kichik bo'lganida Puasson taqsimoti yordamida binomial taqsimotni taqribiy hisoblash mumkin:

$$P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-k}, \quad \lambda=np.$$

Geometrik taqsimot

X deskret tasodifiy miqdor $0,1,2,...$ qiymatlarni

$$P(X=k)=p(1-p)^k\ , \quad 0<p<1$$

ehtimollik bilan qabul qiluvchi tasodifiy miqdorga p parametrli **geometrik taqsimotga** ega bo'lgan tasodifiy miqdor deyiladi.

$P(X=k)$ - Bernulli sxemasida hodisaning aynan k ta sinovdan so'ng 1-chi marta (hodisaning 1- chi bor $(k+1)$ chi tajribada) ro'y berishi ehtimolligiga teng.

Geometrik taqsimotning matematik kutilmasi va dispersiyasi:

$$MX=\frac{1-p}{p}; \quad DX=\frac{1-p}{p^2}.$$

Masala: Uskuna mustahkamligi sinovlardan o'tkazilmoqda. Sinovlar uskunaning ishdan chiqishiga qadar o'tkaziladi. Har bir sinovda uskunaning ishdan chiqish ehtimoli 1,1 ga teng. Muvaffaqiyatli o'tgan tajribalar sonining matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

Yechish: $MX=\dfrac{1-p}{p}=\dfrac{1-0{,}1}{0{,}1}=9; \quad DX=\dfrac{1-p}{p^2}=\dfrac{1-0{,}1}{0{,}1^2}=90.$

Gipergeometrik taqsimot

Gipergeometrik taqsimot 3 ta parametr $N,\ \ M,\ \ n$ lar yordamida aniqlanadi.

Misol: N ta mahsulot partiyasida M ta sifatsizi bor. Tekishirish uchun partiyadan tasodifan n ta mahsulot olindi. X tasodifiy miqdor $m = 0,1,2,\ldots,\min(M,n)$ qiymatlarni quyidagi ehtimolliklar bilan qabul qiladi:

$$P(X = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \qquad m = \overline{1,n}$$

Gipergeometrik taqsimotning matematik kutilmasi va dispersiyasi:

$$MX = \frac{nM}{N}; \quad DX = n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right).$$

n va M parametrlar o'zgarmay qolganda $N \to \infty$ da gipergeometrik taqsimot binominal taqsimotga yaqinlashadi. $p = \frac{M}{N}$ sifatli mahsulotlar chastotasi bo'lsin. Agar $\frac{n}{M} < 0{,}1$ o'rinli bo'lsa, gipergeometrik taqsimotni binominal taqsimot bilan yaqinlashtirish mumkin, ya'ni

$$P(X = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \approx C_N^n p^k (1-p)^{n-k}$$

Masala: 25 ta mahsulotdan 6 tasi sifatsiz. Tasodifan 3 ta mahsulot olindi. X tasodifiy miqdor tanlanmadagi sifatli mahsulotlar sonining taqsimot qonunini tuzing. $MX = ?$ va $DX = ?$

Yechish: $(N = 25; M = 6; n = 3)$**;** $P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} = \frac{C_6^m C_{19}^{3-m}}{C_{25}^3}$**,** $m = 0,1,2,3$

$X:$	0	1	2	3
$p:$	0,421	0,446	0,124	0,008

$$MX = \frac{nM}{N} = \frac{18}{25}; \qquad DX = n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right) = \frac{3762}{7500} = 0{,}5016.$$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. 100 ta detaldan 10 tasi sifatsiz. 5 ta detal tasodifiy ravishda tanlab olindi. Tanlanmadagi sifatsiz detallarning matematik kutilmasini toping.

2. 10 ta o'zaro bog'liq bo'lmagan sinovda biror qurilmaning ishdan chiqishlari sonini bildiruvchi X -diskert tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping. Har bir sinovda qurilmaning ishdan chiqish ehtimolligi 0,9 ga teng.

3. $MX = 0{,}9$ ekanligi ma'lum bo'lganda 2 ta o'zaro bog'liq bo'lmagan sinovlarda A hodisaning ro'y berishlar soni X -diskert tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

4. 1000 ta elementdan tashkil topgan radioapparatning bir yil davomida bitta elementining ishdan chiqish ehtimoli 0,001 ga teng va qolganlari bunga bog'liq emas. 2 ta hamda kamida 2 ta elementning ishdan chiqish ehtimolligini toping [7], [10], [15].

13- amaliy mashg'ulot: Uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Taqsimot va zichlik funksiyalari

Reja:

1. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar.
2. Taqsimot va zichlik funksiyalari

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Elementar hodisalar fazosi, o'lchovli funktsiya, akslantirish, tasodifiy miqdor, taqsimot qonun va taqsimot funktsiya, uzluksiz tasodifiy miqdorlar, zichlik funksiya.

Uzluksiz tasodifiy miqdor uchun deskret tasodifiy miqdor kabi taqsimot qonunini aniqlab bo'lmaydi, chunki uzluksiz tasodifiy miqdor chekli yoki cheksiz oraliqning har bir qiymatini qabul qilishi mumkin va bunday qiymatlar soni sanoqsiz. Shu sabab uzluksiz tasodifiy miqdorlarni tasvirlashda t**aqsimot va zichlik funksiyalari**dan foydalaniladi.

Taqsimot funksiyasi. Barcha $-\infty < x < \infty$ uchun X tasodifiy miqdor (deskret yoki uzluksiz) ning x dan kichik qiymat qabul gilish ehtimoli kabi aniqlangan funksiyaga X tasodifiy miqdorning t**aqsimot** funksiyasi deyiladi:

$$P\{X < x\} = F(x).$$

Taqsimot funksiyasining xossalari:

1.Taqsimot funksiyasining o'zgarish sohasi: $[0;1]$.

2. X tasodifiy miqdorning $(a;b)$ oraliqda qiymat qabul qilish ehtimoli: $P\{a \le X \le b\} = F(b) - F(a)$

3. $F(x)$-kamaymaydigan funksiya, ya'ni agar $x_1 < x_2$ bo'lsa, u holda $F(x_1) \le F(x_2)$.

4. $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$.

5. Uzluksiz tasodifiy miqdor uchun: $\forall a$ da $P(X = a) = 0$ va quyidagi tengliklar o'rinli:

$$P\{a \le X \le b\} = P\{a \le X < b = P\{a < X \le b\} = P\{a < X < b\}\} = F(b) - F(a).$$

X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasidan olingan hosila tasodifiy miqdorning **zichlik funksiyasi** deyiladi.

$$f(x) = F'(x)$$

Zichlik funksiyasining xossalari:

1. $F(x)$ - kamaymaydigan funksiya bo'lgani uchun $f(x) \ge 0$.

2. **Z**ichlik funksiyasi berilgan bo'lsa, taqsimot funksiyasi $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$ formula bilan aniqlanadi.

3. X tasodifiy miqdorning $(a;b)$ oraliqdan qiymat qabul qilish ehtimolligi: $P\{a < X < b\} = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

4. **Z**ichlik funksiyasidan $(-\infty : \infty)$ oraliq bo'yicha olingan integral birga teng:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

X tasodifiy miqdor o'zining taqsimot funksiyasi $F(x)$ yoki zichlik funksiyasi $f(x)$ bilan bir qiymatli aniqlanadi.

$F(x_p) = p$ bilan aniqlanadigan x_p kattalik taqsimotning p - **tartibli kvantili** deyiladi. 0,5 - tartibli kvantili taqsimot **medianasi** deyiladi: $medX = x_0$.

Agar zichlik funksiyasi maksimum nuqtaga ega bo'lsa, $f(x)$ funksiyani maksimumga erishadigan x argumentning qiymati taqsimot **modasi** deyiladi.

Namunaviy masalalar yechish

Masala: X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x) = cx^2 e^{-kx}, \quad (k > 0; \quad 0 \le x < \infty).$$

a) c koeffitsientni aniqlang;

b) X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini toping.

d) X tasodifiy miqdorning $(0;1/k)$ oraliqqa tushish ehtimolligini toping.

Yechish: a) c koeffitsientni $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ tenglikdan aniqlaymiz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} cx^2 e^{-kx} dx = 1; \quad c = \left(\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-kx} dx \right)^{-1}$$

Ikki marta bo’laklab integrallasak, $c = k^3/2$ va zichlik funksiyasi $f(x) = \dfrac{k^3}{2} x^2 e^{-kx}$ hosil bo’ladi.

b) X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini quyidagicha topamiz:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \frac{k^3}{2} t^2 e^{-kt} dt = 1 - \frac{k^2x^2 + 2kx + 2}{2} e^{-kx}; \quad 0 \le x < +\infty.$$

c) X tasodifiy miqdorning $(0;1/k)$ oraliqqa tushish ehtimolligini topamiz:

$P(0;1/k) = F(1/k) - F(0) = 1 - 5/2e \approx 0{,}086$

Masala: X – diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan.

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Uning taqsimot funksiyasini toping.

Yechish: Ko‘rinib turibdiki, $x \in$ (-∞; -2] uchun X < x hodisa mumkin bo‘lmagan hodisa bo‘ladi, ya’ni:

F(x)=0

Endi $x \in$(-2;1] bo‘lsin. U holda:

F(x)=P(X<x)=P(X=-1)=0,1

Agar $x \in$ (-1;0] bo‘lsa,

F(x)=P(X<x)=P(X=-1)+P(X=0)=0,1+0,2=0,3

Huddi shuningdek, $x \in$ (0; 1] bo‘lsa,

F (x)= 0,1 +0,2 + 0,2 = 0,5.

Agar $x \in$ (1; 2] bo‘lsa,

F (x)= 0,1 + 0,2 + 0,2+0, 4= 0,9

Agar x > 2 bo‘lsa, F (x)= P(X< x) =1,

chunki ixtiyoriy x > 2 uchun X< x hodisa muqarrar hodisa bo‘ladi.

Shunday qilib, F(x) taqsimot funksiyaning analitik ifodasini quyidagi ko‘rinishda yozamiz.

$$F(x) = \begin{cases} 0, agar, x \le -2, bo'lsa, \\ 0.1, agar - 2 < x \le -1, bo'lsa, \\ 0.3, agar - 1 < x \le 0, bo'lsa, \\ 0.5, agar, 0 < x \le 1, bo'lsa, \\ 0.9, agar, 1 < x \le 2, bo'lsa, \\ 1, agar, x > 2, bo'lsa, \end{cases}$$

Masala: X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot funksiya bilan berilgan.

$$F(x)=\begin{cases}0, agar, x\le -1, bo'lsa\\ \frac{3}{4}x+\frac{3}{4}, agar\ -1<x\le\frac{1}{3}, bo'lsa\\ 1, agar, x>\frac{1}{3}, bo'lsa\end{cases}$$

Sinov natijasida X tasodifiy miqdorning (0; $\frac{1}{3}$) intervalda yotgan qiymatni qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish: Taqsimot funksiyaning 2-xossasiga asosan:

P (a < X < b)=F (b) – F (a).

Bu formulaga a = 0, b= $\frac{1}{3}$ ni qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P(0<X<\frac{1}{3})=F\left(\frac{1}{3}\right)-F(0)=\left[\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}\right]_{x=\frac{1}{3}}-\left[\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}\right]_{x=0}=\frac{1}{4}$$

Masala: X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$F(x)=\begin{cases}0, agar, x\le 0 bo'lsa\\ \sin 2x, agar 0<x\le\frac{\pi}{4} bo'lsa\\ 1, agar, x>\frac{\pi}{4} bo'lsa\end{cases}$$

taqsimot funksiyasi berilgan, f(x) zichlik funksiyani toping.

Yechish: Zichlik funksiya taqsimot funksiyadan olingan birinchi tartibli hosilaga teng:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, agar, x\le 0, bo'lsa\\ 2\cos 2x, agar, 0<x\le\frac{\pi}{2} bo'lsa\\ 0, agar, x>\frac{\pi}{4} bo'lsa,\end{cases}$$

Masala: X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x)=\begin{cases}0, agar, x\le 0, bo'lsa\\ \cos x, agar, 0<x\le\frac{\pi}{2} bo'lsa\\ 0, agar, x>\frac{\pi}{2} bo'lsa\end{cases}$$

F(x) taqsimot funksiyani toping.

Yechish: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(z)dz$

formuladan foydalanamiz. Agar $x \le 0$ bo‘lsa, F(x)=0
Demak,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dz=0$$

Agar $0< x \le \frac{\pi}{2}$ bo‘lsa,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dz+\int_{0}^{x}\cos zdz=\sin x$$

Agar $x>\frac{\pi}{2}$ bo‘lsa

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dz+\int_{0}^{\pi/2}\cos zdz+\int_{\pi/2}^{x} 0dx=\sin z\Big|_{0}^{\pi/2}=1$$

Demak, izlanayotgan taqsimot funksiya quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$F(x)=\begin{cases} 0, agar, x\le 0, bo'lsa \\ \sin x, agar, 0<x\le \frac{\pi}{2} bo'lsa \\ 1, agar, x>\frac{\pi}{2} bo'lsa, \end{cases}$$

Masala: X uzluksiz tasodifiy miqdor quyidagi zichlik funksiyaga ega.

$$f(x)=\begin{cases} 0, agar, x\le 0, bo'lsa \\ \frac{2}{3}\sin 3x, agar, 0<x\le \frac{\pi}{3} bo'lsa \\ 0, agar, x>\frac{\pi}{3} bo'lsa, \end{cases}$$

X tasodifiy miqdorning $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right)$ intervalga tegishli qiymatni qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish: P (a < X <b) = $\int_{a}^{b} f(x)dx$

formuladan foydalanamiz P($\frac{\pi}{6}$< x < $\frac{\pi}{4}$) = $\frac{2}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\sin 3xdx=\frac{\sqrt{2}}{9}$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. X tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasi berilgan:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<2 \\ (x-2)^2, & 2\le x\le 3 \\ 1, & x>3 \end{cases}$$

a) zichlik funksiyasini;

b) X ning (1; 1,25) oraliqqa tushish ehtimolligini toping.

2. X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x)=\frac{A}{1+x^2}, \quad (-\infty;\infty).$$

a) A koeffitsientni; b) taqsimot funksiyasini; d) $P(0<X<1)$ ehtimollikni toping.

3. X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 0{,}5\sin x, & 0\le x\le \pi \\ 0, & x>\pi \end{cases}$$

a) taqsimot funksiyasini; b) X ning (1; $\pi/4$) oraliqqa tushish ehtimolligini toping.

4. X tasodifiy miqdor $p(x)=ae^{-\lambda x}, \quad x>0$ zichlik funktsiyasiga ega.

a) a parametrni;

b) X tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasini toping.

5. X tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi berilgan:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ,x\le 1 \\ a+b\arcsin x, & -1<x<1 \\ 1 & , \quad x\ge 1 \end{cases}$$

a) a, b parametrlarni;

b) $P\left\{|X|\le\frac{1}{2}\right\}$ ehtimolni;

v) X ning zichlik funktsiyalarini toping [7], [10], [15].

14- amaliy mashg'ulot: Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteriatikalari

Reja:

1. Matematik kutilma(matematik kutilish)
2. Dispersiya

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Elementar hodisalar fazosi, o'lchovli funktsiya, akslantirish, tasodifiy miqdor, taqsimot qonun va taqsitmot funktsiya, uzluksiz tasodifiy miqdor, matematik kutilish, dispersiya.

Barcha OX sonlar o'qida qiymatlar qabul qiluvchi X uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi

$$MX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$$

bilan aniqlanadi.

Matematik kutilmaning xossalari:

1. $MC=C$; 2. $M(CX)=C\cdot MX$

3. $M(X+Y)=MX\cdot MX$;

Agar $Y=\varphi(X)$ barcha OX sonlar o'qida qiymatlar qabul qiluvchi X tasodifiy argumentning funksiyasi bo'lsa, u holda

$$M[\varphi(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx.$$

Butun OX sonlar o'qida qiymatlar qabul qiluvchi X uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^2 f(x)dx$$

kabi aniqlanadi.

X uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasining **xossalar:**

1. $DC = 0$; 2. $D(CX) = C^2 DX$; 3. $D(X \pm Y) = DX \pm DY$.

Agar $Y = \varphi(X)$ barcha OX sonlar o'qida qiymatlar qabul qiluvchi X tasodifiy argumentning funksiyasi bo'lsa, u holda

$$D[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x) - M[\varphi(X)])^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x) f(x)dx - [M[\varphi(X)]]^2$$

X uzluksiz tasodifiy miqdorning **o'rtacha kvadratik chetlanishi** deb dispersiyadan olingan kvadratik ildizga aytiladi.

$$\sigma(X) = \sqrt{DX} .$$

X uzluksiz tasodifiy miqdorning **modasi** deb, zichlik funksiyasi maxsimum qiymati erishadigan argumentning qiymatiga aytiladi.

Barcha OX sonlar o'qida qiymatlar qabul qiluvchi X uzluksiz tasodifiy miqdorning k-**tartibli boshlang'ich momenti** quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$$

Barcha OX sonlar o'qida qiymatlar qabul qiluvchi X uzluksiz tasodifiy miqdorning k-**tartibli markaziy momenti** quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^k f(x)dx$$

Ta'rifga ko'ra $k = 1$ da $\nu_1 = MX$, $\mu_1 = 0$ va $k = 2$ da

$$\mu_2 = DX = \nu_2 - \nu_1^2$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_1 + 2\nu_1^3;$$

Namunaviy masalalar yechish

Masala: X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x/2, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}, \quad MX = ? \quad DX = ? \quad \sigma(X) = ?$$

Yechish:

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = 0{,}5\int_0^2 x^2 dx = 4/3;$$

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - 4/3)^2 f(x)dx = 0{,}5\int_0^2 (x - 4/3)^2 xdx = 2/9;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{DX} \approx 0{,}47 .$$

Masala: X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x/4, & 0 \le x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

X tasodifiy miqdorning 3-tartibli boshlang'ich va markaziy momentlarini toping.

Yechish:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/4 & 0 \le x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = 0{,}25\int_0^4 x\ dx = 2;\quad \nu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x)dx = 0{,}25\int_0^4 x^3 dx = 16;$$

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^3 f(x)dx = 0{,}25\int_0^4 (x-2)^3 dx = 16/3.$$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Sotishga qo'yilgan har biri 100 sh.p.b. dan 10 ta motordan hech bo'lmaganda 1 ta nosozi chiqsa, xaridorga partiyaning 2 barobari miqdoridagi narxi qaytariladi. Har bir motorning nosoz bo'lish ehtimoli 0,08 ga teng bo'lsa, sotuvchining kutilayotgan daromadini toping.

2. Imtihon testlarida 15 ta savol bo'lib, ularning har birida 5 tadan javob variantlari bor. Javoblarning faqat bittasi to'g'ri. Aytaylik, talaba birorta ham savolga to'g'ri javobni bilmaydi. Uning hech bo'lmaganda 10 ta savolga to'g'ri javob berish ehtimolligii qancha?

3. X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2 \\ \dfrac{x}{4} + 0{,}5, & -2 \le x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases} \qquad MX = ? \qquad DX = ?$$

4.Agar X tasodifiy miqdorning λ va α parametrli Pareto taqsimotiga ega bo'lsa (170-masalaga qarang), u holda

$MX = \dfrac{\lambda}{\alpha - 1},\ DX = \dfrac{\lambda^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-1)}$ ni isbotlang.

5. X tasodifiy miqdor $[a, b]$ da tekis taqsimlangan.

a) MX , DX ni;

b) agar $a = 0,\ b = 2$ bo'lsa, $MX^2,\ M(X-1)^2,\ M\sin X$ ni;

v) agar $a = 0,\ b = 1$ bo'lsa, $M\ln\left(\dfrac{1}{X}\right),\ M\sin 2\pi X,\ Me^X$ ni;

g) radiusi X ga teng bo'lgan, aylana uzunligi Y ning matematik kutilmasini;

d) qirrasining uzunligi X ga teng bo'lgan muntazam piramida hajmi Y ning matematik kutilmasini toping.

6. X va Y bog'liqmas tasodifiy miqdorlar bo'lib, $[0; 1]$ da tekis taqsimlangan.

a) $M\min\{X, Y\}$ ni;

b) $M\max\{X, Y\}$ ni toping [7], [10], [15].

15- amaliy mashg'ulot: Ba'zi muhim uzluksiz tasodifiy miqdorlar

Reja:

1.Ko'rsatkichli taqsimot
2.Tekis taqsimot.
3.Normal taqsimot.

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Elementar hodisalar fazosi, o’lchovli funktsiya, akslantirish, tasodifiy miqdor, taqsimot qonun va taqsitmot funktsiya, diskret tasodifiy miqdor, uzluksiz tasodifiy miqdor, zichlik funktsiya, ko’rsatkichli taqsimot, tekis taqsimot, normal taqsimot.

Tekis taqsimot qonuni - $R(a;b)$**.** (a,b) chekli oraliqdan qiymatlar qabul qiluvchi X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi shu oraliqda o’zgarmas songa teng bo’lib, oraliq tashqarisida nolga teng bo’lsa, bunday tasodifiy miqdorga bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdor yoki t**ekis taqsimot qonuniga** bo’ysunuvchi tasodifiy miqdor deyiladi. Tekis taqsimot qonuniga bo’ysunuvchi tasodifiy miqdorning:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\notin(a;b) \\ \dfrac{1}{b-a}, & x\in(a;b) \end{cases}$$ - **z**ichlik funksiyasi

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b \\ 1, & x>b \end{cases}$$ - taqsimot funksiyasi

$$MX=\frac{b+a}{2}$$ - matematik kutilmasi;

$$DX=\frac{(b-a)}{12}$$ - dispersiyasi,

$$\sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$ - o’rtacha kvadratik chetlanishi.

Ko’rsatkichli taqsimot qonuni - $\Gamma_\lambda(x)$ $(\lambda>0)$**.** Musbat qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdor bo’lib, uning

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0 \end{cases}$$ - **z**ichlik funksiyasi;

$$\Gamma_\lambda(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0 \end{cases}$$ - taqsimot funksiyasi

$$MX=\frac{1}{\lambda}$$ - matematik kutilmasi;

$$DX=\frac{1}{\lambda^2}$$ - dispersiyasi;

$$\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}$$ - o’rtacha kvadratik chetlanishi

Normal taqsimot qonuni - $N(a,\sigma)$**.** Agar X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, X tasodifiy miqdor normal taqsimot qonuniga bo‘ysunadi deyiladi.

Normal taqsimlangan X uzluksiz tasodifiy miqdorning (α , β) oraliqqa tushish ehtimoli:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi(\frac{\beta-a}{\sigma})-\Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma})$$

formula bo‘yicha hisoblanadi, bu yerda

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

Laplas funksiyasi.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. X tasodifiy miqdor (a;b) oraliqda tekis taqsimlangan. $MX=?$ $DX=1/12$ bo’lsa, $a=?$ $b=?$

2. Kompyuter qattiq diskining xizmat muddati o’rtachasi 12 000 soatga teng bo’lgan ko’rsatkichli taqsimot qonuniga bo’ysunadigan tasodifiy miqdordan iborat. Xizmat muddati 20 000 soatdan oshadigan qattiq disklarning ulashi qancha?

3. Tomoshabinlarning reklama roligi mazmunini eslab turish muddati $\lambda=0{,}25$ parametrli eksponensial qonunga bo’ysunadi. 7 kundan so’ng reklamani eslay oladigan tomoshabinlar ulushini toping.

4.Yong’in natijasida ko’rilgan zarar miqdori (shartli pul birligida) $[0;c]$ oraliqda tekis taqsimlangan. $P\left\{0\le X\le\frac{c}{2}\right\}$ ni hisoblang.

5. X tasodifiy miqdor $\lambda>0,\ a>0$ parametrli Pareto taqsimotiga ega:

$$p(x)=\frac{a}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{a+1},\ x>0$$

a) $P\{1<X<2\}$ ni hisoblang;

6.Avariya natijasida ko’rilgan zarar miqdori X $\alpha=3$ va $\lambda=1000$ parametrli Pareto taqsimotiga ega. Avariya oqibatlari bo’yicha sug’urta shartnomasini tuzgan mijoz 500 pul birligida sug’urta to’lovini to’ladi.

a) Talab etilgan da’voning qiymati sug’urta badalidan 2 barobar kam bo’lish ehtimolini, ya’ni $P\{X<250\}$ ni toping;

b) Talab etilgan da’voning qiymati sug’urta badalidan 2 barobar ortiq bo’lish ehtimolini, ya’ni $P\{X>1000\}$ ni toping [7], [10], [15].

16- amaliy mashg’ulot: Ikki tasodifiy argument funksiyasi. Kompozitsiya formulasi

Reja:

1. Ikki o‘lchovli diskret tasodifiy miqdor va uning taqsimot qonuni
2. Ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi va uning xossalari
3. Ikki o‘lchovlik uzluksiz tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi va uning xossalari
4.Tasodifiy miqdorlarning bog‘liqsizligi
5.Shartli taqsimot qonunlari

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Ko‘p o‘lchovli tasodifiy miqdorlar, $(\Omega,\mathcal{A},P)$ ehtimollik fazosi, tasodifiy vector, Ikki o‘lchovli diskret tasodifiy miqdor, hodisalar to‘la gruppasi, Ikki o‘lchovli diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni, taqsimot funksiyasi, zichlik funksiya, tasodifiy miqdorlarning bog‘liqsizligi.

Agar tasodifiy miqdorning har bir (X,Y) juftligida biron Z tasodifiy miqdorning bitta qiymati mos kelsa, u holda Z i**kki tasodifiy argument funksiyasi** $Z=\varphi(X,Y)$ deyiladi.

2 ta bog'liqsiz X,Y tasodifiy miqdorlar yig'indasining $f_{X+Y}(z)$ zichlik funksiyasi qo'shiluvchilarning zichlik funksiyalari $f_X(x)$ va $f_Y(y)$ yordamida **kompazitsiya formulasidan** aniqlanadi:

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx \quad \text{yoki} \quad f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) f_X(z-y)dy.$$

Agar X,Y argumentlarning qiymatlar to'plami manfiy bo'lmasa, u holda $Z=X+Y$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi quyidagi formuladan topiladi:

$$f_{X+Y}(z)=\int_{0}^{z} f_X(x) f_Y(z-x)dx \quad \text{yoki} \quad f_{X+Y}(z)=\int_{0}^{z} f_Y(y) f_X(z-y)dy.$$

2 ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar yig'indisi $Z=X+Y$ ning taqsimot funksiyasi quyidagi formuladan topiladi:

$$F_{X+Y}(z)=\int_{x+y<z} f_X(x)\cdot f_Y(y)dxdy$$

2 ta o'zaro bog'liq bo'lmagan deskret tasodifiy miqdorlar uchun ham kompazitsiya formulasi mavjud:

$$P(X+Y=Z)=\sum_i P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=Z=x_i\}, \text{ bunda } P\{X=x_i\}>0.$$

Namunaviy masalalar yechish

Masala: O'zaro bog'liqbo'lmagan X va Y diskret tasodifiy miqdorlar taqsimot qonuni bilan berilgan:

$$\begin{array}{lll} X: & 1 & 3 \\ p: & 0,3 & 0,7 \end{array}, \qquad \begin{array}{lll} Y: & 2 & 4 \\ p: & 0,6 & 0,4 \end{array}$$

$Z=X+Y$ tasodifiy miqdorning taqsimoti topilsin.

Yechish: Z ning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini topamiz: $z_1=1+2=3$; $z_2=1+4=5$; $z_3=3+2=5$; $z_4=3+4=7$. Bu qiymatlarning ehtimolliklarini topamiz. $Z=3$ bo'lishi uchun $x_1=1, y_1=2$ bo'lishi yetarli. Tasodifiy miqdorning bu qiymatlarni qabul qilish ehtimolliklari taqsimot qonuniga asosan mos ravishda 0,3 va 0,6 ga teng. X va Y o'zaro bog'liq bo'lmagani uchun $X=1$ va Y=2 hodisalar ham o'zaro bog'liq emas. Demak, bu hodisalarning bir paytda ro'y berish ehtimolliklari $0.3\cdot 0.6=0{,}18$ gat eng. Xuddi shuningdek:

$$P\{Z=1+4=5\}=0{,}3\cdot 0{,}4=0{,}12$$
$$P\{Z=3+2=5\}=0{,}6\cdot 0{,}7=0{,}42$$
$$P\{Z=3+4=7\}=0{,}7\cdot 0.,=0{,}28$$

Izlanaayotgan taqsimot qonunini topamiz:

$$\begin{array}{llll} Z: & 3 & 5 & 7 \\ p & 0.16 & 0.54 & 0.28 \end{array}.$$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. O'zaro bog'liqbo'lmagan X va Y diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni bilan berilgan:

$$\begin{array}{llll} X: & 10 & 12 & 16 \\ p: & 0,4 & 0,1 & 0,5 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} Y: & 1 & 2 \\ p: & 0,2 & 0,8 \end{array}$$

$Z=X+Y$ tasodifiy miqdorning taqsimoti topilsin.

2. O'zaro bog'liqbo'lmagan X va Y diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni bilan berilgan:

$X:$	4	10		$Y:$	1	7
$p:$	0,7	0,3		$p:$	0,8	0,2

$Z = X + Y$ tasodifiy miqdorning taqsimoti topilsin [7], [10], [15].

17- amaliy mashg'ulot: Ikki tasodifiy muqdor sistemasi

Reja:

1. Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor va uning taqsimot qonuni
2. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi va uning xossalari
3. Ikki o'lchovlik uzluksiz tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi va uning xossalari
4. Tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligi

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ehtimollik fazosi, tasodifiy vector, ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor, hodisalar to'la gruppasi, ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni, taqsimot funksiyasi, zichlik funksiya, tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligi,matematik kutilma, dispersiya.

2 o'lchovli tasodifiy miqdor (X,Y) orqali belgilanadi. Bunda X va Y tasodifiy miqdorlarning har biri "tashkil etuvchilar" yoki "kompanentalar" deb, ular birgalikda esa "ikki tasodifiy miqdor sistemasi" deb ataladi.

2 o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi formulaga aytiladi:

$$F(x,y) = P\{X < x, Y < y\}$$

Taqsimot funksiyasining xossalari:

1. $0 \le F(x,y) \le 1.$

2. $F(x,y)$ ikkala argumenti bo'yicha kamaymaydigan funksiya:

$$F(x_2,y) \ge F(x_1,y), \quad \text{agar} \quad y_2 > y_1 \text{ bo'lsa;}$$
$$F(x,y_2) \ge F(x,y_1), \quad \text{agar} \quad x_2 > x_1 \text{ bo'lsa;}$$

3. $F(-\infty; y) = \quad F(x; -\infty) = \quad F(-\infty, -\infty) = 0, \quad F(\infty; \infty) = 1.$

4. $F(x;\infty) = F_X(x), \quad F(\infty, y) = F_Y(y);$

5. (X,Y) tasodifiy nuqtaning uchlari (x_1,y_1), (x_1,y_2), (x_2,y_1), (x_2,y_2), da bo'lgan D to'rtburchakka tushish ehtimolligi quyidagi formuladan topiladi:

$$P\{(X,Y) \in D\} = P\{x_1 \le X < x_2; y_1 \le Y < y_2\} = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1)$$

bu yerda $x_1 < x_2, \quad y_1 < y_2.$

2 o'lchovli deskret tasodifiy miqdor deb tashkil etuvchilari diskret bo'lgan (X,Y) tasodifiy miqdorlar sistemasiga aytiladi.

2 o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdor deb tashkil etuvchilari uzluksiz bo'lgan (X,Y) tasodifiy miqdorlar sistemasiga aytiladi.

2 o'lchovli deskret tasodifiy miqdor **taqsimot qonuni** deb ularning qabul qiluvchi qiymatlarining barcha juftliklari (x_i, y_j) va bu juftliklarning ehtimolliklari $p_{ij} = p(x_i, y_j)$ ko'rsatilgan jadvalga aytiladi.

2 o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorlar sistemasining zichlik funksiyasi deb sistemaning taqsimot funksiyasidan olingan 2-tartibli aralash hosilasiga aytiladi:

Zichlik funksiyasi xossalari:

1. $f(x,y) > 0.$

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$

3. $F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$.

4. (X,Y) tasodifiy nuqtaning uchlari (x_1,y_1), (x_1,y_2), (x_2,y_1), (x_2,y_2), da bo'lgan D to'rtburchakka tushish ehtimoli quyidagi formuladan topiladi:

$$P\{(X,Y)\in D\} = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$$

X va Y tasodifiy miqdorlar **bog'liqsiz** deyiladi, agar ulardan ixtiyoriy birining taqsimot qonuni ikkinchi tasodifiy miqdorning qanday qiymat qabul qilganiga bog'lig bo'lmasa.

Teorema (2 tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lishining zarur va yetarli sharti): Ikki X va Y tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lishi uchun (X,Y) - 2 o'lchovli tasodifiy miqdorning $F(X,Y)$ taqsimot funksiyasi tashkil etuvchilari taqsimot funksiyalarining ko'paytmasiga teng bo'lishi zarur va yetarli:

$$F(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y)$$

Natija: Ikki X va Y tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lishi uchun (X,Y)- 2 o'lchovli tasodifiy miqdorning $f(X,Y)$ birgalikdagi zichlik funksiyasi tashkil etuvchilari zichlik funksiyalarining ko'paytmasiga teng bo'lishi zarur va yetarli:

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y).$$

Ikki X va Y tashkil etuychilarning matematik kutilmasi va dispersiyasi hamda (X,Y) tasodifiy nuqtaning $\forall D$ sohaga tushush ehtimolini topish formulalari quyidagi jadvalda keltirilgan:

X va Y deskret tasodifiy miqdorlar	X va Y uzluksiz tasodifiy miqdorlar
$F(x,y) = \sum\limits_{x_i<x}\sum\limits_{y_i<y} p_{ij}$	$F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$
$MX = \sum\limits_{i}\sum\limits_{j} x_i \cdot p_{ij}$ $MY = \sum\limits_{i}\sum y_j \cdot p_{ij}$	$MX = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x,y)dxdy$ $MY = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y\cdot f(x,y)dxdy$
$DX = \sum\limits_{i}\sum\limits_{j}(x_i - MX)^2 p_{ij}$ $DY = \sum\limits_{i}\sum\limits_{j}(y_i - MY)^2 p_{ij}$	$DX = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-MX)^2 f(x,y)dxdy$ $DY = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(y-MY)^2 f(x,y)dxdy$
$P\{(X,Y)\in D\} = \sum\limits_{(x_i,y_j)\in D} p_{ij}$	$P\{(X,Y)\in D\} = \int\limits_{D} f(x,y)dxdy$

$\sigma(X) = \sqrt{DX}$, $\sigma(Y) = \sqrt{DY}$ sonlar X va Y tasodifiy miqdorlarning **o'rtacha kvadratik chetlashishi** deyiladi.

(MX,MY) nuqta (X,Y) - 2 o'lchovli tasodifiy miqdorning **sochilish markazi** deyiladi.

Namunaviy masalalar yechish

Masala: 2 o'lchovli tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

	X=2	X=5	X=10
Y=1	0,3	0,1	0,1

Y=4	0,15	0,25	0,1

Tashkil etuvchilarning taqsimot qonunlarini yozing va ularning miqdoriy xarakteristikalarini, hamda sochilish markazini toping.

Yechish:

$$P(x_1) = 0,3 + 0,15 = 0,45;$$
$$P(x_2) = 0,1 + 0,25 = 0,35;$$
$$P(x_3) = 0,1 + 0,1 = 0,2$$

X tashkil etuvchining taqsimot qonunini yozamiz:

$$\begin{array}{llll} X: & 2 & 5 & 10 \\ P: & 0,45 & 0,35 & 0,2 \end{array}$$

Tashkil etuvchilarning:

$$MX = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot P\{X = x_i\} = 2 \cdot 0,45 + 5 \cdot 0,35 + 10 \cdot 0,2 = 4,65$$

$$DX = \sum_{i=1}^{3} x^2{}_i \cdot P\{X = x_i\} - (MX)^2 = 2^2 \cdot 0,45 + 5^2 \cdot 0,35 + 10^2 \cdot 0,2 = 8,9275;$$

$$\sigma(X) = 2.988$$

Satrlar bo'yicha ehtimolliklarini qo'shib chiqarish, Y ning qabul qiladigan qiymatlarininng ehtimolliklarini topamiz.

$$P(y_1) = 0.3 + 0,1 + 0,1 = 0,5$$
$$P(y_2) = 0,15 + 0,25 + 0,1 = 0,5$$

Y tashkil etuvchining taqsimot qonunini, MX, DX va $\sigma(X)$ xuddi shunday topiladi.

Sochilish markazi: $(MX; MY) = (4,65; 2.5)$.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. 2 o'lchovli tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:
2.

	X=3	X=10	X=12
Y=4	0,17	0,13	0,25
Y=5	0,1	0,3	0,05

Tashkil etuvchilarning taqsimot qonunlarini yozing

2. 2 o'lchovli tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

	26	30	41	50
40	0,05	0,12	0,08	0,04
45	0,09	0,3	0,11	0,05

Tashkil etuvchilarning taqsimot qonunlarini yozing

3.Diskret ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning ehtimollari taqsimoti berilgan:

X / U	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

X va U tashkil etuvchilarning taqsimot qonunlarini toping.

4.Diskret ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning ehtimollari taqsimoti berilgan:

U \ X	2,6	30	41	50
4	0,05	0.12	0,08	0,04
5	0,09	0,30	0,11	0,21

X va U tashkil etuvchilarning taqsimot qonunlarini toping.

5.Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning $P(x,y)=\begin{cases} C, \ агар \ x\in[0,1], \ y\in[0,1] бўлса, \\ 0, \quad x\notin[0,1], \ y\notin[0,1] бўлса \end{cases}$ taqsimot funktsiyasi berilgan. (X , Y) tasodifiy nuqtaning $P\left\{x\in\left[0,\frac{1}{2}\right], y\in\left[0,\frac{3}{4}\right]\right\}$ oraliqqa tushish ehtimolini toping.

6.Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning $P(x,y)=\begin{cases} Cx, \ агар \ x\in[0,1], \ y\in[0,1] бўлса, \\ 0, \quad x\notin[0,1], \ y\notin[0,1] бўлса \end{cases}$ taqsimot funktsiyasi berilgan. (X , Y) tasodifiy nuqtaning $P\left\{x\in\left[0,\frac{1}{4}\right], y\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\right\}$ oraliqqa tushish ehtimolini

7.Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning $P(x,y)=\begin{cases} Cy, \ агар \ x\in[0,2], \ y\in[0,2] бўлса, \\ 0, \quad x\notin[0,2], \ y\notin[0,2] бўлса \end{cases}$ taqsimot funktsiyasi berilgan. (X , Y) tasodifiy nuqtaning $P\{x\in[0,1], y\in[0,1]\}$ oraliqqa tushish ehtimolini toping [7], [10], [15].

18- amaliy mashg'ulot: Tasodifiy miqdorlar sistemasi tashkil etuvchilarining shartli taqsimot qonuni

Reja:

1. Diskret tasodifiy miqdorlar sistemasi tashkil etuvchilarning shartli taqsimot qonunlari.
2. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar sistemasi tashkil etuvchilarining shartli taqsimot qonunlari.

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ehtimollik fazosi, tasodifiy vector, Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor, hodisalar to'la gruppasi, Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni, taqsimot funksiyasi, zichlik funksiya, tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligi,shartli taqsimot qonunlari.

Diskret tasodifiy miqdorlar sistemasi tashkil etuvchilarning shartli taqsimot qonunlari. (X,Y) - 2 o'lchovli diskret tasodifiy miqdorni ko'rib chiqamiz. Tashkil etuvchilarning mumkin bo'lgan qiymatlari $x_1, x_2, \dots x_{n;}$; $y_1, \dots, y_n$ bo'lsin. U holda X tashkil etuvchilarning $Y=y_{ji}$ sharti ostidagi **shartli taqsimoti** quyidagicha aniqlanadi:

$$\underset{P(X|Y=y_{ji})}{X}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p(x_1 \mid y_j) & p(x_2 \mid y_j) & \dots & p(x_n \mid y_j) \end{pmatrix}.$$

$p(x_i \mid y_j)=\dfrac{p(x_i; y_j)}{p(y_j)}$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ - shartli ehtimollik formulasi yordamida hisoblanadi.

Y tashkil etuvchilarning $X=x_i$ sharti ostidagi **shartli taqsimoti** ham shu kabi aniqlanadi:

$$p\left(y_i \mid x_j\right)=\frac{p\left(x_i ; y_j\right)}{p\left(x_i\right)} \quad \left(j=\overline{1,m}\right)$$

Uzluksiz tasodifiy miqdorlar sistemasi tashkil etuvchilarining shartli taqsimot qonunlari. (X,Y) - 2 o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $f(x,y)$ bo'lsin. X tashkil etuvchining $Y=y_{ji}$ qiymatidagi **shartli zichligi** deb (X,Y) sistemaning $f(x,y)$ birgalikdagi zichlik funksiyasining Y tashkil etuvchining zichlik funksiyasiga nisbatiga aytiladi:

$$\varphi(x \mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}.$$

Y tashkil etuvchining **shartli zichligi** ham xuddi shunday hisoblanadi:

$$\varphi(y \mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(y)}=\frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}$$

Quyidagi xossalarga o'rinli::

$$\varphi(x \mid y)\geq 0, \qquad \varphi(y \mid x)\geq 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x \mid y)=1, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y \mid x)=1$$

Namunaviy masalalar yechish

Masala: 2 o'lchovli tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

	x_1=2	x_2=5	x_3=8
y_1=0,4	0,15	0,3	0,35
y_2=0,8	0,05	0,12	0,03

Tashkil etuvchilarning taqsimot qonunlarini yozing. X tashkil etuvchining Y tashkil etuvchi 0.4 qiymat qabul qiladi deb, shartli taqsimot qonunini toping. Y tashkil etuvchining X tashkil etuvchi 5 qiymat qabul qiladi deb, shartli taqsimot qonunini toping.

Yechish: Ustunlar bo'yicha ehtimolliklarni qo'shib, X tashkil etuvchining taqsimot qonunini topamiz:

$$\begin{array}{llll} X: & 2 & 5 & 8 \\ P: & 0.2 & 0.42 & 0.38 \end{array}$$

Satrlar bo'yicha ehtimolliklarni qo'shib, Y tashkil etuvchining taqsimot qonunini topamiz:

$$\begin{array}{lll} Y: & 0,4 & 0,8 \\ P: & 0,8 & 0,2 \end{array}$$

$p(y_1)=0,8$ ekanligini e'tiborga olib, $p(x_i \mid y_j)=p(x_i,y_j)/p(y_j)$ dan foydalanib quyidagi shartli ehtimolliklarni hisoblaymiz:

$$p(x_1 \mid y_1)=p(x_1,y_1)/p(y_1)=0,15/0,8=3/16;$$
$$p(x_2 \mid y_1)=p(x_2,y_1)/p(y_1)=0,3/0,8=3/8;$$
$$p(x_3 \mid y_1)=p(x_3,y_1)/p(y_1)=0,35/0,8=7/16$$

Izlanayotgan shartli taqsimot qonuni:

$$X: \quad 2 \quad 5 \quad 8$$
$$P(X/y_i): \quad 3/16 \quad 3/8 \quad 7/16$$

Hisob natijalarini tekshirish uchun topilgan ehtimolliklarni qo'shib, ularning yig'indisi 1 ga teng ekaniga ishonch hosil qilamiz.

$p(x_2)=0.42$ ekanligini e'tiborga olib, $p(y_i/x_j)=p(x_i,y_j)/p(x_j)$ dan foydalanib quyidagi shartli ehtimolliklarni hisoblab, Y tashkil etuvchining taqsimot qonunini topamiz:

$$Y: \quad 0.4 \quad 0.8$$
$$P(X/Y): \quad 5/7 \quad 2/7.$$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. 2 o'lchovli tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

Y\X	x_1	x_2	x_3
y_1	0,15	0,3	0,35
y_2	0,05	0,12	0,03

Tashkil etuvchilarning taqsimot qonunlarini yozing. X tashkil etuvchining $Y=y_1$ qiymat qabul qiladi deb, shartli taqsimot qonunini toping. Y tashkil etuvchining $X=x_3$ qiymat qabul qiladi deb, shartli taqsimot qonunini toping.

2. 2 o'lchovli tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

	x_1	x_2
y_1	0.25	0.1
y_2	0.15	0.05
y_2	0.32	0.13

Tashkil etuchilarning taqsimot qonunlarini yozing. X tashkil etuvchining Y=10 qiymat qabul qiladi deb, shartli taqsimot qonunini toping. Y tashkil etuvchining X=6 qiymat qabul qiladi deb, shartli taqsimot qonunini toping [7], [10], [15].

19- amaliy mashg'ulot: Kovariatsiya va korrelyatsiya koeffitsientlari. Cheziqli regressiya tenglamasi

Reja:

1.Kovariatsiyasi va uning xossalari
2. Korrelatsiya koeffitsienti va uning xossalari
3. Cheziqli regressiya tenglamasi

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Boshlang'ich, markaziy, absolyut momentlar, matematik kutilmas, dispersiya, kovariatsiya, korrelatsiya koeffitsienti, cheziqli regressiya tenglamasi, regressiya to'g'ri chizig'I, qoldiq dispersiyasi.

2 o'lchovli tasodifiy miqdor (X,Y)ning kovariatsiya koeffitsienti quyidagi matematik kutilishga aytiladi:

$$\text{cov}(X,Y)=M[(X-MX)\cdot(Y-MY)]=M(X\cdot Y)-MX\cdot MY.$$

2 o'lchovli diskret tasodifiy miqdor (X,Y)ning kovariatsiya koeffitsienti quyidagicha hisoblanadi:

$$\text{cov}(X,Y)=\sum_i\sum_j p_{ij}(x_i-MX)\cdot(y_j-MY)=\sum_i\sum_j p_{ij}x_iy_j-MX\cdot MY.$$

2 o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdor (X,Y)ning kovariatsiya koeffitsienti quyidagicha hisoblanadi:

$$\text{cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-MX)(y-MY)f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy-MXMY.$$

X va Y tasodifiy miqdorlar orasidagi chiziqli bog'lanish darajasini **korrelyatsiya koeffitsienti** ko'rsatib beradi:

$$\rho(X,Y)=\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}},\quad \text{bu yerda}\quad -1\le\rho(X,Y)\le 1.$$

Agar X va Y tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'lmasa, **korrelyatsiya koeffitsienti** $\rho(X,Y)=0$ va bu holda tasodifiy miqdorlar **korrelyatsiyalanmagan** deyiladi.

Ikkita o'zaro korrelyatsiyalangan tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'ladi, biroq aksinchasi o'rinli bo'lmasligi mumkin.

X va Y tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'lsin. Ularning birini 2-chisining chiziqli funksiyasi sifatida tasvurlaymiz:

$$Y=g(X)=aX+b$$

Y tasodifiy miqdorning X tasodifiy miqdorga chiziqli o'rtacha kvadratik **regressiyasi** quyidagi ko'rinishga ega:

$$g(x)=MY+\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-MX)$$

bu yerda $\rho=\rho(X,Y)$ - X va Y tasodifiy miqdorlarning korrelyatsiya koeffitsienti;

$b=\rho\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}=\text{cov}(X,Y)/DX$ - Y tasodifiy miqdorning X tasodifiy miqdorga bo'lgan regressiyasining koeffitsienti.

Y tasodifiy miqdorning X tasodifiy miqdorga bo'lgan regressiyasi tenglamasi:

$$y-MY=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-MX).$$

Bu to'g'ri chiziqqa **regressiya to'g'ri chizig'i** deyiladi.

$\sigma_Y^2(1-\rho^2)$ kattalik Y tasodifiy miqdorning X tasodifiy miqdorga nisbatan **qoldiq dispersiyasi** deyiladi. Bu kattalik Y ni $g(X)=aX+b$ chiziqli funksiya bilan almashtirilganda yo'l qo'yilgan xatolikning miqdorini bildiradi.

$\rho=\pm1$ bo'lganda, $\sigma_Y^2(1-\rho^2)=0$ bo'ladi, hamda X va Y tasodifiy miqdorlar orasida esa o'zaro chiziqli funksional bog'liqlik bor bo'ladi.

X tasodifiy miqdorning Y tasodifiy miqdorga bo'lgan regressiyasi tenglamasi:

$$x-MX=\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-MY)$$

$b=\rho\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}=\text{cov}(X,Y)/DY$ - X tasodifiy miqdorning Y tasodifiy miqdorga bo'lgan regressiyasining koeffitsienti va $\sigma_X^2(1-\rho^2)$ - X tasodifiy miqdorning Y tasodifiy miqdorga nisbatan **qoldiq dispersiyasi** deyiladi.

Agar $\rho=\pm1$ bo'lsa, u holda ikkala

$$y - MY = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - MX) \quad \text{va} \quad x - MX = \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - MY)$$

regressiya chiziqlari ustma-ust tushadi. Tenglamalardan ko'rinib turibdiki, ikkala regressiya to'g'ri chizig'i ham (MX, MY) nuqtada, ya'ni 2-o'lchovli tasodifiy miqdor (X, Y)ning sochilish markazidan o'tadi.

Namunaviy masalalar yechish

Masala: (X, Y) 2 o'lchovli tasodifiy miqdor quyidagi

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/6\pi, & (x, y) \in D = \left\{(x, y) \in R^2 : \ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \right\} \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

zichlik funksiyasi bilan berilgan. X, Y o'zaro bog'liq va korrelyatsiyalanmagan tasodifiy miqdorlar ekanini isbotlang.

Yechish: X, Y tashkil etuychilarning zichlik funksiyalaridan foydalanamiz:

$$f_X(X) = \begin{cases} 2\sqrt{9 - x^2}/9\pi, & |x| < 3 \\ 0 & |x| \geq 3 \end{cases} \quad \text{va} \quad f_X(X) = \begin{cases} 2\sqrt{4 - x^2}/4\pi, & |x| < 2 \\ 0 & |x| \geq 2 \end{cases}$$

$f(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y)$ o'rinli bo'lgani uchun X va Y o'zaro bog'liq bo'lgan tasodifiy miqdorlar. X bilan Y korrelyatsiyalanmagan tasodifiy miqdorlar ekanini isbotlash uchun

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)(y - MY) f(x, y) dxdy = 0$$

ekanligini korsatish kifoya.

$f_X(x)$ zichlik funksiyasi OY o'qiga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun $MX = 0$. Demak,

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y) dxdy = f(x, y) \int_{-\infty}^{\infty} y\left(\int_{-\infty}^{\infty} xydx\right)dy.$$

$\int_{-\infty}^{\infty} xydx = 0$, chunki integral ostidagi funksiya toq, integrallash chegarasi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik. Demak, $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$, ya'ni X, Y korrelyatsiyalanmagan tasodifiy miqdorlar.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Quyidagi berilgan taqsimot qonuni bilan aniqlangan (X, Y) 2 o'lchovli tasodifiy miqdor tashkil etuvchilarining sonli xarakteristikalari, kovariatsiya va korrelyatsiya koeffitsientlarini toping.

Y\X	-1	0	1
0	0,1	0,15	0,2
1	0,15	0,25	0,15

2. Agar quyidagi berilgan taqsimot qonuni bilan aniqlangan (X, Y) 2 o'lchovli tasodifiy miqdor bo'lsa, to'g'ri va teskari regressiya tenglamasini toping:

Y\X	-1	0	1
0	0,1	0,15	0,2
1	0,15	0,25	0,15

[7], [10], [15].

20- amaliy mashg'ulot: Chebishev tengsizligi. Katta sonlar qonuni

Reja:

1.Chebishev tengsizligi

2. Katta sonlar qonuni.

3. Chebishev va Bernulli teoremalari

Asosiy tushuncha va iboralarlar

Tasodifiy miqdor, taqsimot funktsiya, matematik kutilma, dispersiya, katta sonlar qonuni, Shebishev tengsizligi, Markov tengsizligi, Chebishev va Bernulli teoremalari

Ma'lumki, tajriba natijasida tasodifiy miqdor qanday qiymat qabul qilishini oldindan aytib bo'lmaydi. Lekin azaldan ma'lumki, ayrim keng ma'nodagi shartlar bajarilganda, yetarlicha katta sondagi tasodifiy miqdorlaning yig'indisi tasodifiylikdan holi bo'lib, ma'lum bir qonuniyatlarga bo'ysunar ekan. "Katta sonlar qonuni" nomi bilan katta sondagi tasodifiy miqdorlaning yig'indisining ana shunday xossalarini aks ettiruvchi bir qator teoremalar umumlashtirilgan.

Markov tengsizligi. Manfiy qiymatlar qabul qilmaydigan X tasodifiy miqdor va $\forall a > 0$ son uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$P\{X \geq a\} \leq \frac{MX}{a} \quad yoki \quad P\{X < a\} \geq 1 - \frac{MX}{a}$$

Chebishev tengsizligi. Chekli dispersiyasiga ega bo'lgan X tasodifiy miqdor va $\forall \varepsilon > 0$ son uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$P\{|X - MX| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2} \quad \text{yoki} \quad P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

ya'ni X tasodifiy miqdorning uning MX matematik kutilmasidan chetlashishining absolyut qiymati bo'yicha $\forall \varepsilon > 0$ dan kichik bo'lish ehtimoli $1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$ dan kichik emas.

Chebishev teoremasi (katta sonlar qonuni): Agar $X_1, X_2, \ldots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi:

1) juft- jufti bilan bog'liq bo'lmagan ;

2) dispersiyalari tekis chegaralangan, ya'ni har bir hil o'zgarmas son $C > 0$ bilan chegaralangan ($DX_1 < C, \quad DX_2 < C, \quad \ldots$) bo'lsa, u holda qanday $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

Xususan, agar $MX_1 = MX_2 = \ldots = a$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)\right)\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

Teoremaning isboti $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ tasodifiy miqdor Chebishev tengsizligini qo'llasgdan kelib chiqqan quyidagi tengsizlikka asoslangan:

Bu muhim teoremaning ma'nosi shunday iboratki, $X_1, X_2, \dots X_n$ tasodifiy miqdorlarning o'rta arifmetigi yetarlicha katta n uchun ularning matematik kutilmalarining o'rta arifmetigi $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i$ dan yoki, xususiy holda, a sonidan juda kam farq qilish ehtimolligi juda katta.

Keyingi teorema hodisa ro'y berishining nisbiy chastotasi va uning ehtimol orasida bog'lanish haqidadir. N ta bog'liqsiz tajribalar ketma – ketligi o'tkazilgan bo'lib, ularning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas p soniga teng bo'lsin.

Bernulli teoremasi (Katta sonlar qonuni): Tajribalar ketma –ketligining soni oshishi bilan A hodisa ro'y berishining nisbiy chastotasi $\frac{m}{n}$ hodisaning ro'y berish ehtimolligi p ga ehtimollik bo'yicha yaqinlash ekan, ya'ni ixtiyoring $\varepsilon > 0$ soni uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Namunaviy masalalar yechish

Masala: Omonat kassasiga qo'yilgan jamg'armalar miqdori 20 mln. so'mga teng. Tasodifiy tanlangan jamg'armaning miqdori 100 ming so'mdan kichik bo'lish ehtimoli 0.8 ga teng bo'lsa, shu omonat kassasiga pul qo'ygan mijozlarning soni nechta?

Yechish: X tasodifiy miqdor tasodifiy ravishda tanlangan jamg'armaning miqdori va n esa omonat kassasiga pul qo'ygan barcha mijozlarning soni bo'lsin. Masalaning shartiga ko'ra:

$$MX = \frac{20000000}{n}, \qquad P(X < 100000) = 0{,}8;$$

Markov tengsizligidan: $P(X < 100000) \ge 1 - \frac{MX}{100000}$

$$0.8 \ge 1 - 20000000/(n \cdot 100000); \qquad n \le 1000$$

Masala: (3 sigma qoidasi). Chebishev tengsizligidan foydalanib, tasodifiy miqdor o'zining matematik kutulmasidan 3 karra o'rtacha kvadratik chetlashishdan kamroq miqdorda farq qilish ehtimolini baholang.

Yechish: Masala shartiga asosan $\varepsilon = 3\sigma(X)$. Bu qiymatni Chebishev tengsizligiga qo'ysak,

$$P\{|X - MX| < 3\sigma(X)\} \ge 1 - \frac{DX}{9(\sigma(X))^2} = 1 - 1/9 = 8/9.$$

Masala: Mahsulotlar partiyasini nosozlikka tekshirish uchun 1000 mahsulot tanlab olingan. Agar har 10000 ta mahsulotga o'rtacha 500 ta nosoz mahsulot to'g'ri kelsa, olingan tanlanma orqali topilgan nosoz mahsulotlar ulushi absolyut qiymat bo'yicha mahsulotlar partiyasining nosozlik ulushidan 0,01 dan kichik farqqa ega bo'lish ehtimolligini baholang.

***Yechish*:**Masalaning shartlari bo'yicha bog'liqsiz tajribalar soni $n = 1000$, $p = \frac{500}{10000} = 0{,}05$, $q = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$, $\varepsilon = 0{,}01$ va $\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < 0{,}01\right\}$ hodisaning ehtimolligini baholash kerak.

$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$ formula bo'yicha

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<0,01\right)\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}=1-\frac{0,05\cdot 0,95}{1000\cdot 0,0001}=0,527$$

bo‘ladi. Demak, tanlamadagi nosozliklar ulushi (nosozlikning ro‘y berishining nisbiy chastotasi) mahsulotlar partiyasidagi nosozliklar ulushi (nosozlik ehtimolligi) 0,01 dan kichik farqlanishining ehtimolligi 0,527 dan kichik bo‘lmas ekan.

Masala: $X_1, X_2, ...X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo‘lib, X_n tasodifiy miqdor $-n,o,n$ qiymatlarini mos ravishda $\frac{1}{n^2}, 1-\frac{2}{n^2}, \frac{1}{n^2} (n>1)$ ehtimollar bilan qabul qiladi. Shu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun katta sonlar qonuni o‘rinli bo‘ladimi?

Yechish: Chebishev teoremasidan foydalanamiz.

$$M(X_n)=-n\cdot\frac{1}{n^2}+0\cdot(1-\frac{2}{n^2})+n\cdot\frac{1}{n^2}=0$$

$$D(X_n)=M(X_n^2)-[M(X_n)]^2=n^2\cdot\frac{1}{n^2}+0^2\cdot(1-\frac{2}{n^2})+n^2\cdot\frac{1}{n^2}=2$$

Ko‘rinib turibdiki, hamma tasodifiy miqdorlarning dispersiyasi bir xil. U holda, ular yagona son bilan chegaralangan bo‘ladi. Chebishev teoremasining shartlari bajarilganligi sababli, bu ketma-ketlikka katta sonlar qonunini tatbiq qilsa bo‘ladi.

Masala: A hodisaning har bir sinovda ro‘y berish ehtimoli $\frac{1}{2}$ ga teng. Agar 100 ta erkli sinov o‘tkaziladigan bo‘lsa, A hodisaning ro‘y berishlari soni 40 dan 60 gacha bo‘lgan oraliqda yotish ehtimolini Chebishev tengsizligidan foydalanib baholang.

Yechish: X-tasodifiy miqdor qaralayotgan A hodisaning 100 ta erkli sinovda ro‘y berishi sonining matematik kutilishini va dispersiyasi-ni topamiz:

$$M(X)=n\cdot p=100\cdot\frac{1}{2}=50$$

$$D(X)=npq=100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=25$$

Hodisa ro‘y berishining berilgan soni bilan M(X)=50 matematik kutilish orasidagi maksimal ayirmani topamiz.

$$\varepsilon=60-50=10$$

Ushbu shakldagi Chebishev tengsizligidan foydalanamiz: $P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

Bunga M(X)=50, D(X)=25, $\varepsilon=10$ ni qo‘yib quyidagini hosil qilamiz.

$$P(|x-50|<10)\geq 1-\frac{25}{10^2}=0.75$$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Har birining dispersiyasi 3 dan katta bo’lmagan 1 500 ta bog’liqsiz tasodifiy miqdorlarning o’rtacha arifmetik qiymati ularning matematik kutilishlarining o’rtacha arifmetigidan chetlashishi 0.6 dan katta bo’lmaslik ehtimolini baholang.

2. Diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

$$X:\quad 0,1\quad 0,4\quad 0,6$$

$$P:\quad 0,2\quad 0,3\quad 0,5$$

Chebishev tengsizligidan foydalanib, $|X - MX| < \sqrt{0.4}$ bo'lish ehtimolligini baholang.

3. Diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

$$X: \quad 0,3 \quad 0,6$$
$$P: \quad 0,2 \quad 0,8$$

Chebishev tengsizligidan foydalanib, $|X - MX| < 0,2$ bo'lish ehtimolligini baholang.

4. Agar D(X)=0,001 bo'lsa, |X-M(X)|<0,1 ning ehtimolini Chebishev tengsizligi bo'yicha baholang.

5. Quyidagilar berilgan: P(|X-M(X)|< ε)≥0,9,D(X)=0,004. Chebishev tengsizligidan foydalanib ε ni toping [7], [10], [15].

21-amaliy mashg'ulot: Matematik statistikada keng qo'llaniladigan tasodifiy miqdorlarning asosiy taqsimotlari

Bu paragrafda normal taqsimot bilan bo'gliq hamda matematik statistikada ko'p qo'llanadigan taqsimot qonunilari haqida gap boradi.

χ^2 – taqsimot

$X_1, X_2, \ldots$- o'zaro bo'gliq bo'lmagan normal taqsimlargan tasodifiy miqdorlar bo'lsin. Ularni har birining matematik kutilmasi nolga va dispersiyasi birga teng, ya'ni standart normal taqsimlangan tasidifiy miqdorlar bo'lsin: $MX_{1,} = 0, DX_1 = 1, \quad (i = l, n)$. U holda ular kvadratlarining yig'indisi:

$$\chi^2 = \sum_{i=l}^{n} X_i^2$$

erkinlik darajasi $k = n$ ga teng bo'lgan x^2("xi- kvadrat") taqsimotga ega bo'ladi. Agar berilgan tasodifiy miqdorning chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda erkinlik darajasi $k = n-1$ bo'ladi. Misol uchun, agar $\sum_{i=l}^{n} X_i = n\overline{X}$ bo'lsa, bu tasodifiy miqdor erkinlik darajasi $k = n-1$ bo'lib

Erkinlik darajasining ma'nosini quyidagi masalarda tushuntirish mumkin.

Masala. Kompaniya menejeri to'rtta turli loyiha uchun $150000 byudjetga ega. Menejer nechta erkinlik darajasida ega?

Yechish. Aytalik, $X_i (i = 1, \ 2, \ 3, \ 4)$ miqdor i- loyihaga ajratilgan mablag'ni bildirsin. To'rtta turli loyihaning umumiy byudjetini uning o'rta arijmetigini loyihalar soniga ko'paytirilganiga teng deb qarash mumkin $(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 4\overline{X})$. U holda bitta loyihaga taxminan $150000/4=$37 500 mablag' ajratilgan. Uchta loyihaga mablg' ajratilgandan so'ng menejerning to'rtinchi loyihasiga qolgan mablag'ni ajratishdan boshqa iloji qolmadi, ya'ni

$$X_4 = 4\overline{X} - (X_1 + X_2 + X_3) = \$150000 - (X_1 + X_2 + X_3).$$

Demak, menejerning erkinlik darajasi 3 ga teng.

Umumiy hol. $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$- normal taqsimlangan o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsin. Z_i tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi a_i ga va dispersiyasi σ_i^2 ga teng. U holda $X_i = \dfrac{Z_i - a_i}{\sigma_i}$ tenglik orqali aniqlangan $X_{1,} X_{2,} \ldots, X_n$ tasofidiy miqdorlar standart normalar taqsimotga ega. Ular kvadratlarining yig'indisi $\chi^2 = \chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} X_1^2$ erkinlik darajasi $k = n$ ga teng bo'lgan $x^2(\text{"}xi - kvadrat\text{"})$ taqsimoti ega bo'ladi

Erkinlik darajasi n ta teng bo'lgan x^2 tqsimotning zichlik funksiyasi:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\exp(-x/2)\cdot x^{(n/2)-1}; & x>0 \end{cases}$$

Bu yerdan $\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}\cdot e^{-t}dt$ -gamma fuksiya; xususan, $\Gamma(n+1)=n!$.

Matematik kutilma va dispersiyasi: $M\chi^2=n;\quad D\chi^2=2$**;**

modasi: $mod\,M\chi^2=n-2\ \ (n\ge 2)$.

Ko'rinib turibdiki "xi- kvadrat" taqsimot bitta parametr - erkinlik darajasi n bilan aniqlanar ekan. Erkinlik darajasi ortishi bilan "xi- kvadrat" normal taqsimotga yaqinlashib boradi.

Styudent taqsimoti

$X_{0,}X_1,X_2,\ldots,X_n$- o'zaro bog'liq bo'lgan standart normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo'lsin. Ularning har birining matematik kutilmasi nolga, dispersiya σ^2 ga teng. U holda ushbu tasodifiy miqdor:

$$T=\frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{n}(X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2)}}=\frac{X_0}{\sqrt{\chi_n^2}/n}$$

erkinlik darajasi n ga teng bo'lgan t- taqsimot yoki Styudent taqsimotiga ega bo'ladi. T miqdor σ^2 ga bog'liq emasligini ta'kitlab o'tamiz.

Erkinlik darajasi n ga teng bo'lgan t- taqsimot yoki Styudent taqsimotining zichlik fuksiyasi

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\sqrt{n\pi}}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

bu yerda $\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}\cdot e^{-t}dt$ - gamma fuksiya.

Matematik kutilma, dispersiya va modasi:

$$MT=n>1;\ MT=(n>1);\qquad DT=\frac{n}{n-2},\quad (n>2);\qquad \mathrm{mod}\,T=0.$$

Standart normal taqsimot bilan solishtirish

T ning asimptotik taqsimoti standart normal taqsimotga teng, ya'ni $n\to\infty$ da t-taqsimot matematik kutilmasi nolga teng, dispersiyasi birga teng normal taqsimotga yaqinlashadi.

Shunday qilib, standart normal tasodifiy miqdorning erkinlik darajasi n ga teng bo'lgan χ^2- tasodifiy miqd1ordan kvadirat ildizga nisbatan erkinlik darajasi n ga teng bo'lgan Styudent taqsimotiga bo'ysunadi.

22-amaliy mashg'ulot: F- taqsimot yoki Fisher – Snedikor taqsimoti

$X_1,X_2,\ldots,X_{k_1},X_{k_1+1},\ldots,X_{k_1^1+k_2^2}$ matematik kutilmasi $a=0$ va dispersiyasiyasi $\sigma^2<\infty$ bo'lgan o'zaro bog'liq bo'lmagan normal tasodifiy miqdorlar ketma – ketligi bo'lsin. U holoda

$$F = F(k_{1;}k_2) = \frac{\frac{1}{k_1}\left(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_{k_1}^2\right)}{\frac{1}{k_2}\left(X_{k_1+1}^2 + X_{k_1+2}^2 + \ldots + X_{k_1+k_2}^2\right)} = \frac{X_{k_1}^2 / k_1}{X_{k_2}^2 / k_2}$$

tasodifiy miqdor erkinlik darajasi k_1 *va* k_2 bo'lgan Fisher – Snedikor taqsimo- tining zichligi fuksiyasi.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{k_1+k_2}{2}\right)\cdot (k_1)^{k_1/2}(k_2)^{k_2/2}}{\Gamma(k_1/2)\Gamma(k_2/2)} \cdot \dfrac{x^{(k_1-2)/2}}{(k_1+k_2)^{(k_1+k_2)/2}} & x > 0 \end{cases}$$

Fisher – Snedikor taqsimotining matematik kutilmasi, dispersiyasi va modasi

$$MF = \frac{k_1}{k_2-2}, \ (k_2 > 2); \quad DF = \frac{2k_2^2(k_1+k_2-2)}{k_1(k_2-2)^2(k_2-4)} \ (k_2 > 4); \ \mathrm{mod}\, F = \frac{k_2(k_1-2)}{k_1(k_2+2)}.$$

Shunday qilib, erkinlik darajalari k_1 *va* k_2 bo'lgan χ^2 – tasodifiy miqdorlarning nisbati F - taqsimoti ega.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. $X_1, X_2, ..., X_n$ - o'zaro bog'liq bo'lmagan $N(a;\sigma^2) = N(1;1)$ parametrli normal tasodifiy miqdorlar bo'lsin. Erkinlik darajasi 4 ga teng bo'lgan χ^2 – tasodifiy miqdorni ifodalang.

2. $X_0, X_1, X_2, ..., X_n$ - o'zaro bog'liq bo'lmagan $N(a;\sigma^2) = N(5;7)$ parametrli normal tasodifiy miqdorlar bo'lsin. Erkinlik darajasi 10 ga teng bo'lgan t - tasodifiy miqdorni ifodalang.

3. $X_1, X_2, ..., X_{k_j}, X_{k_j+1}, ..., X_{k_j+k_2}$ - o'zaro bog'liq bo'lmagan $N(2;1)$ parametrli normal tasodifiy miqdorlar bo'lsin. Erkinlik darajalari $k_1 = 2$ va $k_2 = 3$ ga teng bo'lgan Fisher taqsimotiga ega bo'lgan tasodifiy miqdorni ifodalang [7], [10], [15].

MATEMATIK STATISTIKA

Statistika fani qonuniyatlarni aniqlash maqsadida ommaviy tasodifiy hodisalarni kuzatish natijalarini tasvirlash, to'plash, sistemalashtirish, tahlil etish va izohlash usullarini o'rganadi. **Matematik statistik** esa ommaviy iqtisodiy va ijtimoy hodisalarni tahlil etish uchun matematik apparat quradi.

23-amaliy mashg'ulot: Tanlanma. Empirik taqsimot fuksiyasi. Poligon. Gistogramma

Biror sifat miqdoriy alomatga ko'ra obyektlar to'plami tahlil qilinayotgan bo'lsin.

Tanlanma (tanlanma to'plam) deb, tahlil uchun tasodifiy ravishda tanlab olingan obyektlar to'plamiga aytiladi. Tanlanma ajratib olingan to'plamga **bosh to'plam** deb ataladi. **Tanlanma hajmi** yoki **bosh to'plam hajmi** deb, to'plamdagi ob'ektlar soniga aytiladi. Masalan, agar 1000 ta detaldan sifatini teksirish uchun 100 detal tanlab olingan bo'lsa, bosh to'plam hajmi $N = 1000$ va tanlanmaning hajmi $n = 100$n=100 ga teng bo'ladi.

Tanlanmaning har bir elementi **varianta,** tartiblangan tanlanma **variatsion qator** deb ataladi.

Bosh to'plamdan tanlanma olingan va unda x_1 qiymat n_1 marta, x_2 qiymat n_2 marta, . . . , x_k qiymat n_k marta kuzatilgan bo'lsin. U holda tanlanmaning hajmi $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$ ga teng. n_i kattalik - x_i variantaning **chastotasi**, $\omega_i=\frac{n_i}{n}$ kattalik esa **nisbiy chastotasi** deb ataladi va ular uchun $\sum_{i=1}^{k}\omega_i=1$ tenglik o'rinli.

Tanlanmaning **statistik taqsimoti** yoki **statistik qatori** deb variantalar va ularga mos kelgan chastotalar (nisbiy chastotalar) dan iborat ushbu jadvalga aytiladi:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ n_1 & n_2 & \dots & n_k \end{pmatrix} \text{ yoki } \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_k \end{pmatrix}$$

Tanlanmaning **empirik taqsimot funksiyasi** deb, x ning har bir qiymati uchun aniqlangan $F^*(x)=\frac{n_x}{n}$ funksiyaga aytiladi, bunda n_k - x qiymatdan kichik bo'lgan variantalar soni; n esa tanlanmaning hajmi.

Tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasidan farqli holda bosh to'plam uchun aniqlangan $F(x)$ funksiya nazariy taqsimot funksiyasi deb ataladi. Empirik taqsimot funksiyasi nazariy taqsimot funksiyani baholash uchun ishlatiladi.

Empirik taqsimot funksiyasining xossalari:

1. Empirik taqsimot funksiyasining qiymatlari $[0;1]$ kesmada yotadi.
2. $F^*(x)$ - kamaymaydigan funksiya.
3. Agar x_1 - eng kichik varianta bo'lsa, u holda $x \le x_1$ lar uchun $F^*(x)=0$ va x_2 eng katta varianta bo'lsa, u holda $x \ge x_2$ lar uchun $F^*(x)=1$.

Chastotalar poligoni deb $(x_1;n_1)$, $(x_2;n_2)$, …, (x_k,n_k) nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi.

Nisbiy chastotalar poligoni deb $(x_1;\omega_1)$, $(x_2;\omega_2)$, …, (x_k,ω_k) nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi.

Tanlanmani grafik usulda tasvirlashda tanlanmaning hajmi kam bo'lganda poligondan, agar hajmi katta bo'lsa yoki kuzatilayotgan kattalik uzliksiz xarakterga ega bo'lsa, gistogrammadan foydalaniladi.

Chastotalar (nisbiy chastotalar) gistogrammasi deb, i- to'g'ri to'rtburchak asosi h uzunlikdagi $[x_{i-1},x_i]$ qism intervaldan iborat bo'lib, balandligi esa n_i/h (ω_i/h) nisbatga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat zinapoyasimon figuraga aytiladi.

Gistogramma qurish uchun tanlanmaning barcha variantalari yotgan interval h qadam bilan $[x_{i-1},x_i]$ qism intervallarga bo'linadi va har bir interval uchun unga tushgan variantalar chastotalarining yig'indisi n_i topiladi. So'ng qism intervallarni asos qilib n_i/h (nisbiy chastotalar gistogrammasi uchun $n_1/(h\cdot n)=\omega_i/h$) balandlikdagi to'g'ri to'rtburchaklar quriladi.

i-to'g'ri to'rtburchakning yuzasi $\frac{n_i}{h}\cdot h=n_i$ ga (nisbiy chastotalar gistogrammasi uchun $\omega_i/h\cdot h=\omega_i=n_i/n$) teng. Demak, chastotalar gistogrammasining yuzasi barcha chastotalar yig'indisiga teng. Nisbiy chastotalar gistogrammasining yuzasi barcha nisbiy chastotalar yig'indisiga teng, ya'ni 1 ga teng.

Namunaviy masalalar yechish

Masala: Hajmi 30 bo‘lgan tanlanmaning chastotalari taqsimoti berilgan.

x_i	2	8	16
n_i	10	15	5

Nisbiy chastotalar taqsimotini tuzing.

Yechish: Nisbiy chastotalarni topamiz. Buning uchun chastotalarni tanlama hajmiga bo‘lamiz.

$$W_1=\frac{10}{30}=\frac{1}{3},\qquad W_2=\frac{15}{30}=\frac{1}{2},\qquad W_3=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}.$$

u holda, nisbiy chastotalar taqsimoti

x_i	2	8	16
w_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Masala: Quyidagi taqsimot qatori bilan berilgan tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasini tuzing va grafigini chizing.

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

Yechish: $n=n_1+n_2+n_3=10+15+25=50$

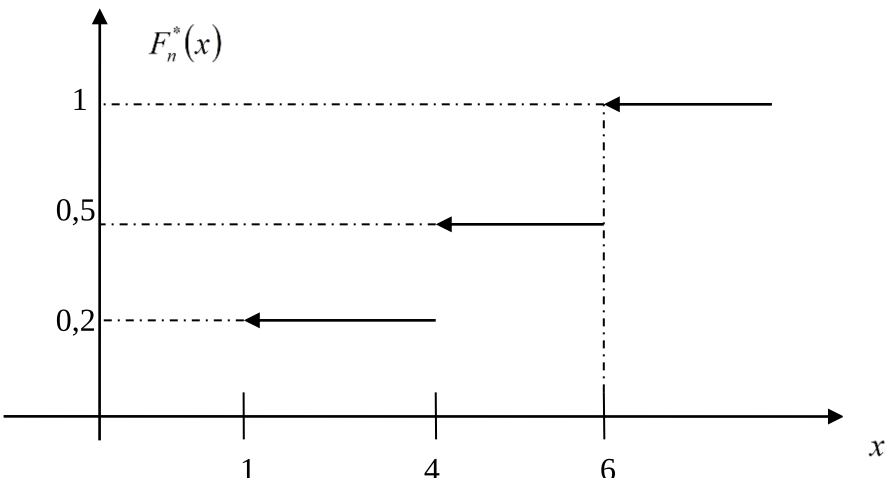
$$W_t=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}=0.2;\qquad W_2=\frac{15}{20}=\frac{3}{10}=0.3;\qquad W_3=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}=0.5$$

U holda, nisbiy chastotalar empirik taqsimoti

x_i	1	4	6
w_i	0.2	0.3	0.5

Empirik taqsimot funksiya quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi $F_n^*(x)=\begin{cases}0_i\,, agar, x\le 1, bo'lsa\\ 0.2, agar, 1<x\le 4, bo'lsa\\ 0.5, agar, 4<x\le 6, bo'lsa\\ 1, agar, x>6, bo'lsa\end{cases}$

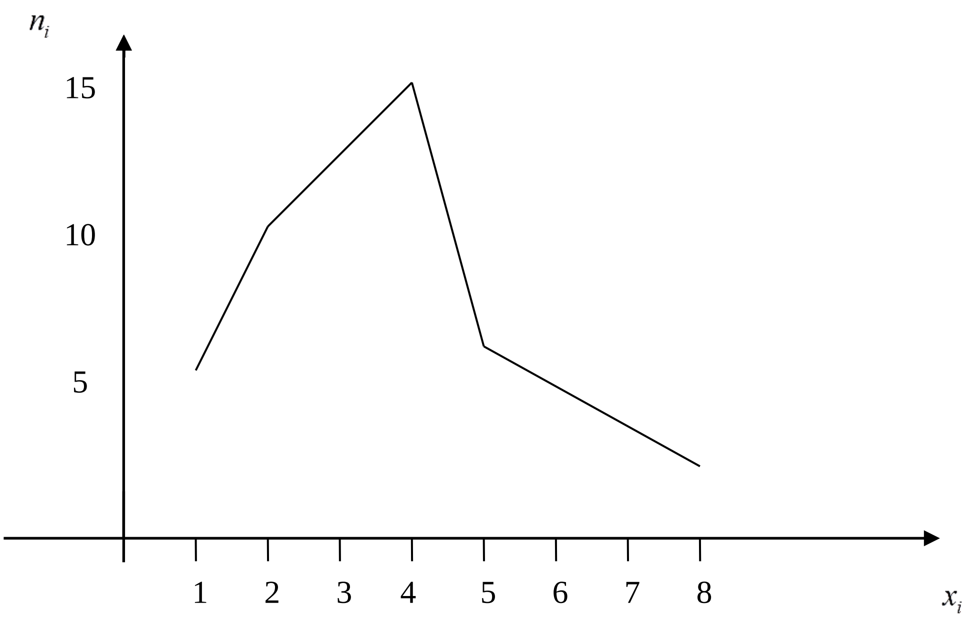
Topilgan qiymatlar asosida grafikni yasaymiz.



Masala: Berilgan tanlanma taqsimoti bo'yicha chastotalar va nisbiy chastotalar poligonlarini chizing.

x_i	**1**	**2**	**4**	**5**	**8**
n_i	**5**	**10**	**15**	**7**	**3**

Yechish: n5+10+15+7+3=40 tanlanma hajmi. Chastotalar poligoni quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

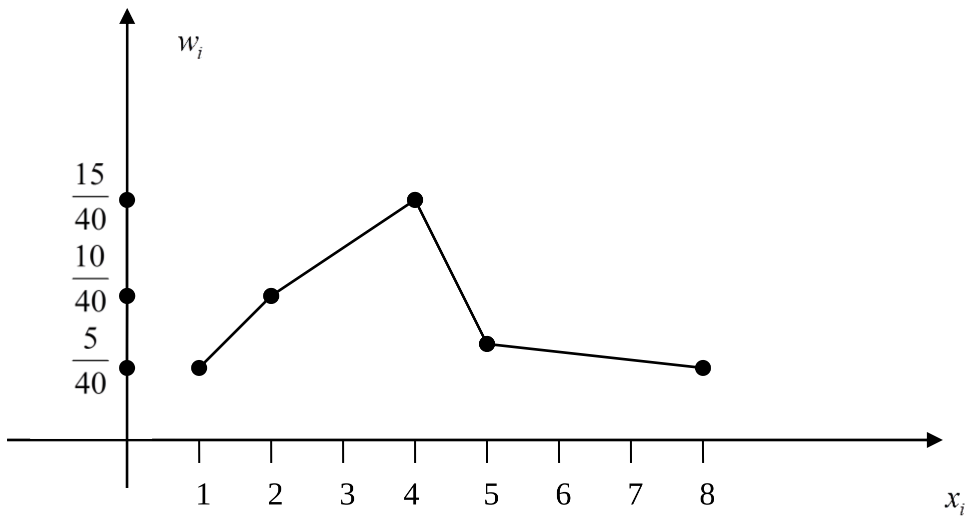


Nisbiy chastotalarni topamiz.

$W_t = \frac{5}{40}$; $W_2 = \frac{10}{40}$; $W_3 = \frac{15}{40}$; $W_4 = \frac{7}{40}$; $W_5 = \frac{3}{40}$;

x_i	1	2	4	5	8
w_i	$\frac{5}{40}$	$\frac{10}{40}$	$\frac{15}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{3}{40}$

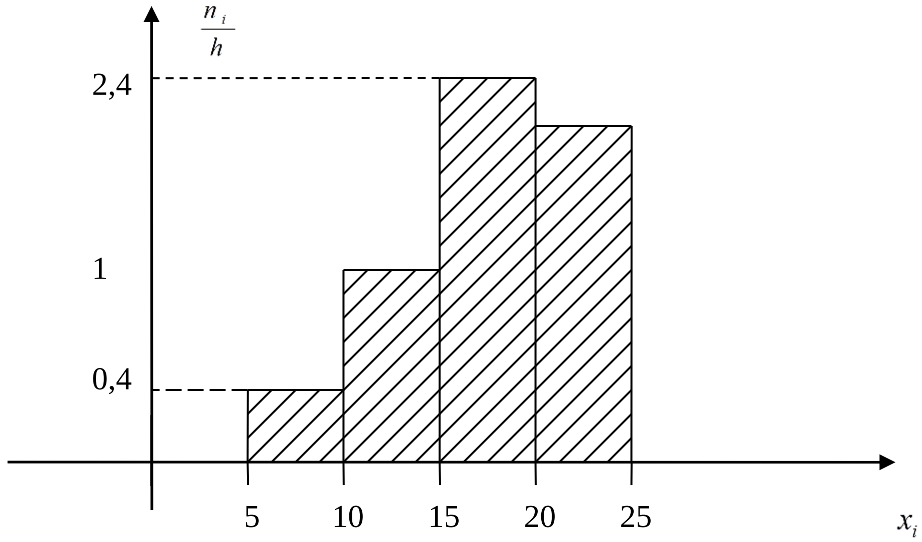
U holda, nisbiy chastotalarni poligoni quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.



Masala: Berilgan tanlanma taqsimoti bo‘yicha chastotalar va nisbiy chastotalar gistogrammalarini chizing.

Interval nomeri	Qism interval	Intervaldagi variantalar chastotalari yig‘indisi	Chastotalar zichligi	Nisbiy chastotalar	Nisbiy chastotalar zichligi
I	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i/h	w_i	w_i/h
1	5–10	2	0.4	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{150}$
2	10–15	6	1.2	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{150}$
3	15–20	12	2.4	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{150}$
4	20–25	10	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{150}$

Chastotalar gistogrammasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.



Nisbiy chastotalar gistogrammasi esa quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Quyidagi tanlanma berilgan:2, 1, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 2, 2, 3.
   a) Variatsion qatorni tuzing.
   b) Chastotalar jadvalini tuzing.
   v) Nisbiy chastotalar poligonini chizing.

2. Korxona ishchilaridan tavakkaliga 20 tasi tanlanib, ularning tarif razryadlari haqida quyidagi ma’lumotlar olingan:1, 2, 4, 6, 3, 4, 4, 2, 6, 3, 5, 3, 3, 1, 5, 4, 2, 5, 4, 3. Shu ma’lumotlarga asoslangan holda:
   a) Tanlanmaning statistik taqsimotini tuzing va chastotalar poligonini yasang.
   b) Empirik taqsimot funksiyasini tuzing.

3. Tanlanma

x_i	4	7	8	12
n_i	5	2	3	10

chastotalar taqsimoti ko‘rinishda berilgan. Nisbiy chastotalar taqsimo-tini toping.

4. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha uning empirik funksiyasini toping

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

[7], [10], [15].

24-amaliy mashg’ulot: Taqsimot noma’lum parametrlarining statistik baholari

Aytaylik bosh to’plamning biror miqdoriy ko’rsatkichini baholash talab qilinsin. Nazariy mulohazalardan ana shu ko’rsatkichning taqsimotiga ega ekanligi ma’lum bo’lsin. Tabiiy ravishda bu taqsimotni aniqlaydigan parametrlarni baholash masalasi kelib chiqadi. Odatda kuzatish natijalari, ya’ni tanlanma qiymatlaridan boshqa ma’lumot bo’lmaydi.

Noma’lum parametrning **statistik yoki empirik bahosi** deb tasodifiy miqdorning kuzatilgan qiymatlari funksiyasiga aytiladi.

Ixtiyoriy hajmdagi tanlanma uchun matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga teng bo'lgan statistik baho **siljimagan baho** deyiladi.

Matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga teng bo'lmagan statistik baho **siljigan baho** deyiladi.

Eng kichik dispersiyaga ega bo'lgan statistik baho **effektiv baho** deyiladi.

Katta hajmdagi tanlanmalar bilan ish ko'rilganda bahoga asoslilik talabi qo'yiladi. $n \to \infty$ da baholanayotgan parametrga ehtimollik bo'yicha yaqinlashuvchi statistik baho **asosli baho** deyiladi.

Bitta kattalik bilan aniqlanadigan statistik baho **nuqtaviy baho** deyiladi

Baholanayotgan parametrni qoplaydigan intervalning chegaralarini bildiruvchi ikki miqdoriy kattalik bilan aniqlanadigan statistik baho **interval baho** deyiladi.

Nuqtaviy baholar. X tasodifiy miqdorning kuzatilgan qiymatlari quyidagi statistik taqsimotga ega:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_k \\ n_1 & n_2 & n_3 & \dots & n_k \end{pmatrix},$$

bu yerda $n_i -$ x_i $\left(i = \overline{1,k}\right)$ variantaning chastotasi va $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ - tanlanma hajmi.

Tanlamaning o'rta qiymati bosh to'plamning siljimagan bahosi bo'lib xizmat qiladi. Haqiqatan ham

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{n_i}{n}x_i = MX$$

Tanlamaning dispersiyasi bosh to'plamning dispersiyasi uchun siljigan baho bo'lib xizmat qiladi:

$$D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{i}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{X})^2 \cdot n_i$$

$M\left(D_T\right) = \frac{n-1}{n}D_{BT}$ - bo'lgani uchun bu baho siljigandir. D_{BT} - bosh to'plamning dispersiyasi.

"Tuzatilgan" dispersiyasi bosh to'plam dispersiyasining siljimagan bahosi bo'lib xizmat qiladi:

$$S^2 = \frac{n}{n-1}D_T = \frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2 \cdot n_i$$

$M\left(S^2\right) = D_{BT}$ bo'lgani uchun bu siljimagan bahodir.

Tanlama dispersiyani hisoblaganda quyidagi foydalanish qulay:

$$D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \overline{X^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \cdot n_i - \overline{X}^2$$

$\sigma_T = \sqrt{D_T}$ **- tanlanmaning o'rtacha kvadratik chetlashishi** deyiladi.

"Tuzatilgan" o'rtacha kvadratik chetlashish tanlama "tuzatilgan" dispersiyasidan olingan kvadrat ildizi bilan aniqlanadi:

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1}D_T}\ .$$

Bosh to'plam modasining bahosi sifatida tanlanma eng ko'p uchraydigan varianta bilan aniqlanuvchi **tanlanmaviy moda** ishlatiladi, ya'ni: $\operatorname{mod}_T = \left\{x_{i_0} : n_{i_0} = \max_i\left(n_i\right)\right\}$

Bosh to'plam medianasining bahosi sifatida $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ variatsion qatorining o'rtasi to'g'ri keladigan varianta yoki variantalar bilan aniqlanuvchi **tanlanmaviy mediana** ishlatiladi:

$$med_T = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(x_{n/2} + x_{n/2+1}\right), & агар \quad n \quad juft \quad bo'lsa, \\ x_{[n/2]+1}, & агар \quad n \quad toq \quad bo'lsa. \end{cases}$$

Eng katta va eng kichik variantalar orasidagi farq $R = x_{\max} - x_{\min}$ **tanlanmaning kengligi** deyiladi.

M - bosh to'plamdagi bizni qiziqtirgan xossaga ega bo'lgan elementlar sonining N - bosh to'plam elementlarining umumiy soniga nisbati **bosh ulush** deyiladi: $p = \frac{M}{N}$.

Bosh ulushning nuqtaviy bahosi sifatida **tanlanmaviy ulush,** ya'ni tanlanmadagi bizni qiziqtirgan xossaga ega bo'lgan elementlar soni m ning tanlanma elementlarining umumiy soni n ga $\omega = \frac{m}{n}$ xizmat qiladi.

Tanlanma o'rta qiymatining tanlanmaviy taqsimoti: katta sonlar qonuni va markaziy limit teoremasidan agar bosh to'plam normal taqsimot qonuniga bo'ysunsa, u holda tanlanma o'rta qiymat $\overline{X}$ ham normal taqsimot qonuniga bo'ysunshi kelib chiqadi. Tanlanma hajmi yetarlicha katta bo'lganida qanday taqsimot qonuniga ega bo'lishidan qat'iy nazar o'rta qiymat $\overline{X}$ baribir normal taqsimot qonuniga bo'ysunar ekan. Shunday qilib, agar bosh to'plam a matematik kutilma va σ^2 dispersiyaga ega bo'lsa, u holda tanlanma o'rta qiymati $\overline{X} \approx N\left(a; \frac{\sigma^2}{n}\right)$ bo'lar ekan. Demak,

$$P\left\{\alpha \le \overline{X} \le \beta\right\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma/\sqrt{n}}\right); \quad P\left\{\left|\overline{X} - a\right|\right\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}}\right).$$

25-amaliy mashg'ulot: Taqsimot noma'lum parametrlarining interval baholari

Yuqorida ko'rib chiqilgan baholarning hammasi nuqtaviy baholar edi. Kichik hajmdagi tanlanmalarda nuqtaviy baholar baholanayotgan parametrdan sezilarli farq qilishi mumkin. Shu sababli tanlanma hajmi kichik bo'lganida bahoning aniqligi va ishonchliligini yaxshiroq ta'minlaydigan interval baholardan foydalanish o'rinlidir.

Interval baholar intervalning chegaralarini bildiruvchi ikkita miqdor bilan aniqlanadi.

Tanlanma bo'yicha topilgan θ^* statistik kattalik θ noma'lum parametrning bahosi bo'lsin. Albatta, $\left|\theta - \theta^*\right|$ ayirma qanchalik kichkina bo'lsa, θ^* statistik baho θ parametrni shuncha aniq baholaydi. Shunday qilib, $\left|\theta - \theta^*\right| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi δ>0 son baho aniqligining ko'rsatkichidir.

θ^* statistik bahoning **ishonchligi** deb $\left|\theta - \theta^*\right| < \delta$ tengsizlikning bajarilish ehtimoli γ ga aytiladi, ya'ni

$$P\left\{\left|\theta - \theta^*\right| < \delta\right\} = P\left\{\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta\right\} = \gamma.$$

Odatda bahoning ishonchligi oldindan beriladi va γ sifatida birga yaqin qiymatlar olinadi, masalan, 0,95; 0,99; 0,999.

Noma'lum parametrni berilgan γ ishonchlilik bilan qoplaydigan $\left(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta\right)$ interval **ishonch intervali** deyiladi.

26-amaliy mashg'ulot: Normal taqsimot dispersiyasi ma'lum bo'lgan holda uning mftemftik kutilmasi uchun interval baho

X - a va σ^2 parametrlar bilan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor, ya'ni $N(a,\sigma^2)$ bo'lib, a noma'lum va σ^2 ma'lum bo'lsin. Noma'lum a parametrni γ ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonch oralig'ini topamiz.

Tanlanmaning qiymatlari $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - $N(a,\sigma^2)$ parametrli normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning kuzatish natijalaridan iborat. Ma'lumki, $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ tanlanmaning o'rta qiymati $M(\overline{X}) = a$; $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ parametrli normal taqsimotga ega.

$P\{|\overline{X} - a| < \delta\} = \gamma$ munosabat o'rinli bo'lishini talab qilamiz va bizga ma'lum bo'lgan

$$P\{|\overline{X} - a| < \delta\} = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) \quad \text{yoki} \quad P\{|\overline{X} - a| < \delta\} = 2\Phi(t), \ t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$$

formuladan foydalanamiz. Oxirgi tenglikdan: $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$. Demak,

$$P\left\{|\overline{X} - a| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi(t).$$

Tenglikning chap tomon berilgan va u γ ga teng. U holda

$$P\left\{\overline{X} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi(t) = \gamma,$$

ya'ni γ ishochlilik bilan $\left(\overline{X} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ ishonch oralig'i a noma'lum parametrni qoplaydi, deb ta'kidlash mumkin.

Izoh: Yuroridagi munosabatdagi t kattalikni $\phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ tenglikdan ilovadagi Laplas integral fuksiyasi qiymatlari keltirilgan 4-jadvaldan topiladi. Bahoning aniqligi $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ ga teng bo'ladi.

27-amaliy mashg'ulot: Normal taqsimot dispersiyasi noma'lum bo'lgan holda uning matemftik kutilmasi uchun interval baho

$X - a$ va σ^2 parametrlar bilan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor, ya'ni $N(a,\sigma^2)$ bo'lib, parametrlar a va σ larning qiymati noma'lum bo'lsin. Noma' lum a parametrli γ ishochlilik bilan qoplaydigan ishoch oraligini topamiz . Tanlanmaning qiymatilari (variantalari) bo'yicha erkinlik darajasi $h = n - 1$ bo'lgan Styudent taqsnimotli T tasodifiy miqdorni aniqlaymiz:

$$T = \frac{\overline{X} - \sigma^2}{s / \sqrt{n}}$$

Bu yerda $\overline{X}$ - tanlanma o'rta qiymat, s –"tuzatilgan" o'rtacha kvadiratik chetlashish, n- tanlanma hajmi bilan aniqlanadi va a, σ noma'lum parametrlarga bo'gliq emas. $S(n,t)$ zichlik funksiyasi $-t$ bo'yicha juft fuksiyasi bo'lgani uchun

$$P(|T|<t_\gamma)=P\left(\left|\frac{\overline{X}-a}{s/\sqrt{n}}\right|<t_\gamma\right)=2\int_0^{t_\gamma}S(n,t)dt=\gamma$$

yoki

$$P\left(\overline{X}-t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}}<a<\overline{X}+t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}}\right)=\gamma$$

Shunday qilib, $\left(\overline{X}-t_\gamma\dfrac{s}{\sqrt{n}};\overline{X}+t_\gamma\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right)$ ishonch oralig'i a noma'lum parametrni γ ishochiilik bilan qoplaydi.

Izoh. Yuroridagi munosabatda t_γ kattalik berilgan n bo'yicha ilovadagi Styudentning t kriteriyasi qiymatlari keltirilgan 5-jadvaldan topiladi. Bahoning aniqligi $\delta=t_\gamma\dfrac{s}{\sqrt{n}}$ ga teng.

28-amaliy mashg'ulot: Normal taqsimotning o'rtacha kvadratik chetlashishi uchun ishonch oralig'i

Normal taqsimotning a va σ^2 parametrlari noma'lum bo'lsin. Tanlanma bo'yicha ularning nuqtaviy baholari

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \quad \text{va} \quad s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}$$

topilgan bo'lib, bizga σ parametrni berilgan γ ishochilik bilan qoplaydigan ishonch oralig'ini topish vazifasi qo'yilgan bo'lsin. Ushbu

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

yordamchi tasodifiy miqdorni tuzamiz. Bu tasodifiy miqdor erkinlik darajasi $n-1$ bo'lgan χ^2 taqsimot qonuniga ega. χ^2 tasodifiy miqdorning $(a_1;a_2)$ oraliqqa tushush ehtimolligi

$$P(a_1<\chi^2<a_2)=\int_{a_1}^{a_2}f_{\chi^2}(x)dx\,.$$

Bu yerda $f_{\chi^2}(x)$ erkinlik darajasi $n-1$ bo'lgan χ^2 taqsimotning zichlik funksiyasi. Yuqoridagi ehtimollikni γ ga tenglashtiramiz va a_1,a_2 larni topamiz.

$$P(\chi^2\geq a_2)=\int_{a_2}^{\infty}f_{\chi^2}(x)dx=\frac{1-\gamma}{2} \quad \text{va} \quad P(\chi^2\leq a_1)=\int_{0_1}^{a_1}f_{\chi^2}(x)dx=\frac{1-\gamma}{2}\,.$$

U holda

$$P\left(a_1<\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}<a_2\right)=P\left(\sqrt{a_1}<\frac{\sqrt{n-1}\cdot s}{\sigma}<\sqrt{a_2}\right)=P\left(s\cdot\sqrt{\frac{n-1}{a_2}}<\sigma<s\cdot\sqrt{\frac{n-1}{a_1}}\right)=\gamma\,.$$

$\sqrt{\dfrac{n-1}{a_1}},\sqrt{\dfrac{n-1}{a_2}}$ qiymatlar jadvallashtirilgan. Ilovadagi 6-jadvalda berilgan $(\gamma;n)$ lar uchun q ni aniqlaymiz va quyidagi formula bo'yicha ishonch oralig'ini topamiz:

$$s(1-q)<\sigma<s(1+q), \quad q<1$$
$$0<\sigma<s(1+q), \qquad q\geq 1$$

29-amaliy mashg'ulot: Binomial taqsimot uchun ehtimollikni nisbiy chastota bo'yicha baholash

Tasodifiy hodisaning p ehtimoligli (bosh to'plam ulushi) uchun ishonchi oralig'ini topamiz. Biz bilamizki, ω nisbiy chastota p uchun nuqtaviy baho, ya'ni $M\omega = p$ va bundan tashqari

$$D\omega = p \cdot q = p \cdot (1-p).$$

U holda ω tasodifiy miqdor $n \to \infty$ da $N\left(p; \frac{pq}{n}\right)$ parametrli normal taqsimotga ega bo'ladi. Berilgan γ ishonchlilik uchun shunday t_γ ni topish kerakki, quyidagi munosabat o'rinli bo'lsin:

$$P(|\omega - p| < t_\gamma \cdot \sigma) = \gamma,$$

yoki γ ishonchlilik bilan

$$|\omega - p| < t_\gamma \sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \cdot t_\gamma$$

Bu ifodadan p ganisbatan kvadratik tengsizlikka kelamiz:

$$\left(\frac{t_\gamma^2}{n} + 1\right)p^2 + \left(2\omega + \frac{t_\gamma^2}{n}\right)p + \omega^2 < 0.$$

Tengsizlikning yechimi $(p_1; p_2)$ intervaldan iborat bo'lib, p ehtimollik uchun γ ishonchlilik bilan qurilgan intervaldir, bu yerda

$$p_1 = \frac{\omega + \frac{t_\gamma^2}{2n} - t_\gamma\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} + \frac{t_\gamma^2}{4n^2}}}{1 + \frac{t_\gamma^2}{n}}; \qquad p_1 = \frac{\omega + \frac{t_\gamma^2}{2n} + t_\gamma\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} + \frac{t_\gamma^2}{4n^2}}}{1 + \frac{t_\gamma^2}{n}}$$

Demak, $(p_1; p_2)$ interval p ehtimollik uchun γ ishonchlilik bilan qurilgan intervaldir.

n ning katta qiymatlarida (≈ 100) $\frac{t_\lambda^2}{2n}$ va $\frac{t_\lambda^2}{4n^2}$ qo'shiluvchilarning qiymatlari juda kichik, kamida $1 + \frac{t_\lambda^2}{n} \approx 1$. Shuning uchun

$$p_1 = \omega - t_\gamma\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}; \quad p_2 = \omega + t_\gamma\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}.$$

Eslatib o'tamiz: t_γ ning qiymati $2\Phi(t_\gamma) = \gamma$ tanglamaning yechimi sifatida Laplasning integral funksiyasining qiymatlari keltirilgan ilovaning 4-jadvalidan aniqlanar edi. Bahoning aniqligi $\delta = t_\gamma\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}$ ga teng.

30-amaliy mashg'ulot: Talanmaning korrelyatsiya koeffitsienti. Chiziqli regressiya

Regressiyada ishtirok etayotgan faktorilar soniga qarab oddiy yoki ko'p o'lchovli regressiyalar farqlanadi.

Oddiy regressiya ikki o'zgaruvchi x va y lar orasidagi bog'liqlik, ya'ni $y = f(x)$ ko'rinishidagi munosabatdan iborat. Bunda y - bog'liq (natijaviy yoki tushuntiriladigan), x - bog'liqsiz (tushuntiradigan) o'zgaruvchi.

Ko'p o'lchovli regressiya deganda y tushuntiriladigan o'zgaruvchi va ikki yoki undan ortiq tushuntiradigan) o'zgaruvchilar orasidagi $y = f(x_1, x_2, \ldots x_k)$ bog'liqlik tushuniladi.

$y = f(x)$ funksiyaning ko'rinishhga qarab oddiy regressiya chiziqli va egri chiziqli regressiyaga farqlanadi. Oddiy regressiya tenglamasi ikki o'zgaruvchi orasidagi qonuniyatni xarakterlab bu qonuniyat faqat o'zgagaruvchilar ustidagi kuzatishlar asosida aniqlanib har bir kuzativ natijasini emas, balki kuzatuvlar uchun umumiylikni aks ettiradi. Misol uchun, biror mahsulotga talab y ning shu mahsulot narxi x ga bog'liqligi $y = 5000 - 2x$ tenglama bilan berilsa, bu deganiki, mahsulot narxi bir birlikka oshsa, o'rta hisobda talab 2 birlikka kamayar ekan.

Amalda y kattalik ikki qo'shiluvchidan iborat:

$$y = \tilde{y}_x + \varepsilon ,$$

bunda y - natijaviy o'zgaruvchining asl qiymati; $\tilde{y}_x$ - regressiya tenglamasidan aniqlangan natijaviy o'zgaruvchining nazariy qiymati; ε - xatolik (shovqin) deb ataluvchi tasodifiy miqdor bo'lib, u natijaviy o'zgaruvchi asl qiymatining nazatiy qiymatidan chetlashishini baholaydi.

Biror miqdorlar sistemasi (X, Y) o'rganilayotgan va n ta bog'liqsiz kuzatishlar asosida n juft natijalar $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $\ldots$, $(x_n; y_n)$ olingan bo'lsin. Bu juftliklarning to'g'ri chiziqli XOY koordinatalar sistemasidagi grafik tasviriga **korrellogramma (korrelyatsiya maydoni)** deyiladi. Korrellogrammadan bu ikki o'zgaruvchi orasidagi bog'liqlikni o'rganish va regressiya tenglamasi ko'rinishini tanlashda foydalanish qulay.

Chiziqli regressiya tenglamasi

Miqdorlar sistemasi (X, Y) o'rganilayotgan n ta bog'liqsiz kuzatishlar asosida n juft natijalar $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $\ldots$, $(x_n; y_n)$ olingan bo'lsin.

(X, Y) o'zgaruvchilarning **tanlanmaviy kovariatsiya koeffitsientisi**

$$\mathrm{cov}_T(X, Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{x})(y_i - \tilde{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \tilde{x}\tilde{y} ,$$

bunda $\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ va $\tilde{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ - X va Y o'zgaruvchilarning tanlanmaviy o'rtachalari.

Tanlanmaviy disperteiya:

$$D_X = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n} x_i^{\ 2} - (\bar{x})^2;$$

$$D_Y = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n} y_i^{\ 2} - (\bar{y})^2;$$

Tanlanmaviy korrelyatsiya koeffitsienti:

$$\rho_T = cor_T(X, Y) = \frac{\mathrm{cov}_T(X, Y)}{\sqrt{D_X} \cdot \sqrt{D_Y}} .$$

Ma’lumki, nazariy korrelyatsiya koeffitsienti – bu -1 va $+1$ oralig’idagi qiymatlar qabul qiluvchi kattalik bo’lib, u ikki miqdoriy kattalik orasidagi chiziqli bog’liqlik darajasini ko’rsatadi:

korrelyatsiya koeffitsienti $+1$ ga teng bo’lsa, kattaliklar orasida aniq musbat chiziqli bog’liqlik borligini;

0 ga tehg bo’lsa, bu kattaliklar chiziqli bog’liq emasligini;

-1 ga tehg bo’lsa, kattaliklar orasida aniq teskari (manfiy) chiziqli bog’liqlik borligini bildirar edi.

Korrelyatsiya koeffitsientining bu qiymatlari kundalik hayotda kam uchraydi, lekin ulardan foydalanib, amaldagi ma’lumotlar haqida tegishli xulosalar chiqarish mumkin. Shuni esda tutish kerakki, korrelyatsiya koeffitsienti o’zgaruvchilar orasidagi umuman bog’liqlikni emas, balki faqat chiziqli bog’liqlik darajasini ko’rsatadi. Shu sabab, korrelyatsiya koeffitsientining nolga tengligi o’zgaruvchilar orasida umuman bog’liqlik yo’q degani emas, va ba’zan bunday hollarda yaxshi egri chiziqli regressiya tenglamasini qurish mumkin bo’ladi.

Y natijaviy va X tushuntiruvchi o’zgaruvchi bo’lgan holda:

tanlanmaviy regressiya koeffitsientisi

$$l_0 = \rho_T \frac{\sqrt{D_Y}}{\sqrt{D_X}} = \frac{\operatorname{cov}_T(X,Y)}{D_X};$$

chiziqli regressiya tenglamasi

$$\tilde{y}_x - \bar{y} = l_0(x - \bar{x}).$$

X natijaviy va Y tushuntiruvchi o’zgaruvchi bo’lgan holda:

tanlanmaviy regressiya koeffitsientisi

$$l_1 = \rho_T \frac{\sqrt{D_X}}{\sqrt{D_Y}} = \frac{\operatorname{cov}_T(X,Y)}{D_Y};$$

Chiziqli regressiya tenglamasi:

$$\tilde{x}_x - \bar{x} = l_0(y - \bar{y}).$$

Shunday qilib, chiziqli regressiya tenglamasi

$$\bar{y} = \beta_0 + \beta_1 x.$$

X o’zgaruvchining berilgan qiymatlarida natijaviy o’zgaruvchi Y ning nazariy qiymatini hisoblash imkoniyatini beradi. Olingan nazariy qiymatlarning grafik tasviriga regressiya chizig’i deb ataladi.

Amalda chiziqli regressiya tenglamasini qurish uchun regression tenglama parametrlari β_0 va β_1 ni baholash kerak.

β_0 Y - kesishma, ya’ni regressiya chizig’ning OY o’qini kesish nuqtasi bo’lib, qiymati $X=0$ dagi Y o’zgaruvchining qiymatiga teng.

β_1 - regressiya chizig’ining burchak koeffitsientiga teng bo’lib, X o’zgaruvchi bir birlikka o’zgarganda Y o’zgaruvchi necha birlikka o’zgarishini ko’rsatadi.

Tanlanmaning chiziqli regressiyasi – tanlanma (X,Y) qiymatlarini eng yaxshi tushuntiruvchi to’g’ri chiiziqdir.

Kuzatilgan qiymatlar asosida tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti:

$$\rho_T = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}}.$$

Chiziqli regressiya tenglamasi koeffitsientlari:

$$\beta_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

va

$$\beta_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \beta_1 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

formulalar yordamida hisoblanadi, $n-$ kuzatishlar soni.

31-amaliy mashg'ulot: Gipotezalarni tekshirish

Tanlanma asosida olingan ma'lumotlar bosh to'plam haqidagi ayrim farazlarning haqqoniyligi borasida xulosa chiqarish imkoniyatini beradi.

Gipoteza shunday qo'yilishi kerakki, uning o'rinli ekanligini tekshirish jarayonida ma'lum taqsimot qonunlaridan foydalanish mumkin bo'lsin. Bunday boshlang'ich gipoteza 0 – chi (H_0) gipoteza deyiladi. H_0 gipoteza qarama-qarshi gipoteza H_1 bilan belgilanadi.

Normal tagsimot asosida gipotezalarni tekshirish bosh to'plam dispersiyasi σ^2 aniq bo'lganda bosh to'plam o'rtachasi a sifatida tanlanmaviy o'rtacha $\bar{x}$ qiymatini olish haqqoniy ekanligini tekshirishda ishlatiladi. Tanlanma ulushi uchun qo'yilgan gipotezalarni tekshirishda ham normal taqsimotni qo'llash mumkin, chunki, tanlanma hajmi katta bo'lsa: $np > 5$ va $|p-\rho|n > 5$, binominal taqsimotni normal taqsimot bilan yaqinlashtirish mumkin bo'ladi.

Styudent taqsimoti (t-kriteriy) ixtiyoriy hajmdagi tanlanma asosida bosh to'plam dispersiyasi σ^2 noaniq bo'lganda bosh to'plam o'rtachasi haqidagi gipotezalarni tekshirish jarayonida ishlatiladi.

Fisher tagsimoti (F- kriteriy) bosh to'plam dispersiyalarini solishtirish gipotezalarida qo'llaniladi.

χ^2 **taqsimot (**χ^2**-kriteriy)** o'zgaruvchilar orasidagi bog'liqlikni tekshirishda yoki kuzatilayotgan taqsimotning biror standart taqsimotga mosligini tekshirishda qo'llaniladi.

Barcha xulosalar tekshirilayotgan H_0 gipotezaga nisbatan qabul qilinadi. Aslida H_0 gipoteza o'rinli bo'lib, tekshirish natijasida uni inkor etsak, 1-turdagi xatolikka yo'l qo'yilgan bo'ladi.

Aslida H_1 gipoteza o'rinli bo'lib, tekshirishda H_0 gipotezani qabul qilsak, 2-turdagi xatolikka yo'l qo'yilgan bo'ladi.

α ishonchlilik darajasi bilan gipotezalarni tekshirgan ularning sifat ko'rsatkichi sifatida gipoteza o'rinli bo'lganda H_0 gipotezani qabul qilish ehtimoli ishlatiladi. Bu ehtimollik **kriteriy quvvati** deb ataladi.

32-amaliy mashg'ulot: Bosh to'plam dispersiyasi ma'lum bo'lganda bosh to'plam o'rtachasi haqidagi gipotezani tekshirish

A) Biryoqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. 0- chi gipoteza: bosh to'plam o'rtachasi berilgan a_0 qiymatga teng, alternativ gipoteza esa bosh to'plam o'rtachasi berilgan a_0 iymatdan katta (kichik) degan taxminlardan iborat bo'lsin, ya'ni

$$H_0: \quad a = a_0,$$
$$H_1: \quad a > a_0 (a < a_0)$$

2. Quyidagi ifoda hisoblanadi:

$$Z = \frac{\bar{x} - a_0}{\sigma / \sqrt{n}},$$

bunda n - tanlanma hajmi; $\bar{x}$ - tanlanmaning o'rtachasi; σ^2 - bosh to'plam dispersiyasi.

3. Ilovada keltilgan Laplasning untegral funksiyasi $F(x)$ qiymatlari berilgan 4-jadvaldan $2\Phi(Z_k) = 1 - 2\alpha$ tenglikni qanoatlantiruvchi Z uchun kritik qiymat Z_k aniqlanadi.

4. Agar $Z_k > Z$ yoki $Z > -Z_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza qabul qilinadi, H_1 gipoteza inkor etiladi;

agar $Z_k < Z$ yoki $Z < -Z_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza inkor etiladi, H_1 gipoteza qabul qilinadi.

B) Ikkiyoqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. 0- chi gipoteza: bosh to'plam o'rtachasi berilgan a_0 qiymatga teng va alternativ gipoteza: bosh to'plam o'rtachasi berilgan a_0 qiymatdan farqli degan taxminlardan iborat:

$$H_0: \quad a = a_0,$$
$$H_1: \quad a \neq a_0$$

2. Quyidagi ifoda hisoblanadi:

$$Z = \frac{\bar{x} - a_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

bunda n - tanlanma hajmi; $\bar{x}$ -tanlanmaning o'rtachasi; σ^2 -bosh to'plam dispersiyasi.

3. Ilovada keltilgan Laplasning untegral funksiyasi $F(x)$ qiymatlari berilgan 4-jadvaldan $2\Phi(Z_k) = 1 - \alpha$ tenglikni qanoatlantiruvchi Z uchun kritik qiymat Z_k aniqlanadi.

4. Agar $-Z_k < Z < Z_k$ yoki $Z > -Z_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza qabul qilinadi, H_1 gipoteza inkor etiladi;

agar $Z_k < Z$ yoki $Z < -Z_k$ bo'lsa, H_0 gipoteza inkor etiladi, H_1 gipoteza qabul qilinadi.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. (Bosh to'plam dispersiyasi ma'lum bo'lganda bosh to'plam o'rtachasi haqidagi gipotezani tekshirish). Ipni g'altakka o'rab beruvchi uskuna tekshirilmoqda. O'ramlarning o'rtacha soni 500 teng bo'lishi kerak. G'altakalar partiyasidan olinga tanlanma o'ramlarning o'rtacha soni 502,5 ga teng ekanligini ko'rsatdi. Uskuna to'g'ri sozlanganmi, degan savolga javob bering. (Ishonchlilik darajasi $a = 0{,}005$).

2. (Bosh to'plam dispersiyasi ma'lum bo'lganda bosh to'plam o'rtachasi haqidagi gipotezani tekshirish). O'rtacha kvadirat chetlashishi $\sigma = 2{,}1$ ga teng bo'lgan normal bosh to'plamidan hajmi $n = 49$ ga teng tanlanmaning o'rtachasi $\bar{x}$ =4,5 ga teng ekan. Ishonchlilik darajasi 0,05 teng bo'lsa, quyidagi 0-chi gipotezani tekshiring.

3. (Ikki bosh toplam dispersiyasi haqidagi gipotezani tekshirish). Investitsion komponiya xizmatchisi ikkita A va B investitsiya loyihalarini tahlil qilmoqda. A investitsiya 15 yil muddatga mo'ljallangan bo'lib, undan bu vaqt davomida yiliga 15.6% foyda kutulmoqda. B investitsiya 12 yil muddatga mo'ljallangan bo'lib, undan yiliga 15,6% foyda kutulmoqda. Bu ikki investitsiyalardan tushadigan yillik foydani ("tuzatilgan") dispersiyalari 4,6 va 3,42 ga teng. A va B investitsiyalarning muvaffaqiyatli bo'lmaslik xavfi (risk) teng emas degan xulosaga asos bormi? Investitsiyalarda tushadigan yillik foyda normal taqsimlangan deb faraz qilinadi.

3. MUSTAQIL TA'LIM BUYIChA MATERIALLAR (MUSTAQIL ISh TOPShIRIQLARI)

№1-мustaqil ish topshiriqlar

1.Ehtimollar nazariyasi fanining asoschilari kimlar?
2.Kompleks sharoit qanday ta'riflanadi?
3.Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanini o'rganish bo'limning asosiy maqsad va vazifalari.
4. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanining rivojlanish tarixi.
5.Ergashtiruvchi hodisalarga misol keltiring.
6.Hodisalarning yig'indisini tushuntiring.
7.To'la gruppa nima?
8. $(A \cup B)C = AC \cup BC$ tenglikni isbotlang.
9. $\overline{\overline{A} + \overline{B}} = AB$ tekshiring.
10. $(A \cup B) \setminus B = A \setminus AB = A\overline{B}$
11. $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_1} = \bigcup_{i=1} \overline{A}_i$ tenglik to'g'rimi?

№2-мustaqil ish topshiriqlar

1.Ikkita tangani baravar tashlanganda ro'y beradigan elementar hodisalar nechta?
2.Teng imkonichtli hodisa nima va unga misollar keltiring?
3.Ehtimol nima?
4.Uchta tanga baravar tashlanyapti, ikkitasini raqam tomoni bilan tushish hodisasining ehtimolini toping.
5.100 ta lotoreyadan 10 tasiga bir so'mdan, 2 tasiga 25 so'mdan, 1 tasiga 50 so'm yutuq chiqdi. Aslida 1ta lotoreya bo'lsa, uning yutuq chiqmaslik ehtimolini toping.
Танлаш усулларини қандай тушунасиз.
6.Asosiy teorema nima?
7. n -elementli to'plamning k - elementli to'plamostilar soni qanday hisoblanadi?
8.O'rin almashtirishlar nima?
9. O'rinlashtirish nima?
10Bittadan tashlashlar sonini yozing.
12. O'rin almashrtirishlar sonini topish formulasini yozing.
13.O'rinlashtirishlar sonini yozing.
14.Gruppalashlar sonini yozing.
15.Ehtimolning klassik ta'rifi kamchiliklari nimadan iborat?
16.Tajriba kesmada yoki tekislikda o'tkazilsa,klassik ta'rif bo'yicha ehtimolni topish mumkinmi?
17.Tajriba fazo bo'lsa-chi?
18.Ehtimolni tajribalar o'tkazish bilan aniqlash mumkinmi?
19.Mashxur «uchrashuv" haqidagi masala nima?
20.Pirson, Gyugens tajribalari nima?
21. «mes"ni tushuntiring.
22.Geometrik ta'rif bo'yicha ehtimolni topish.
23.Har biri 1 dan katta bo'lmagan 2 ta x va y musbat sonlar tavakkaliga olingan. $x+y$ yig'indisining 1 dan katta bo'lmaslik, xy ko'paytmasining 0,09 dan kichik bo'lmaslik ehtimolini toping.
24.Tangani 200 marta tashlab, undan gerb tarafini tushishini kuzating.
25.Nisbiy chastota nima?

№3-мustaqil ish topshiriqlar

1.Aksiomalarni ta'riflang.
2.Ehtimolning ta'rifini aksiomalar asosida bering.
3.Ehtimolning xossalarini ayting.
4.Qarama-qarshi hodisa ehtimolini yozing.
5.Qarama-qarshi hodisalarga misol keltiring.
6.Agar $\{A_n\}$hodisalar ketma-ketligi berilgan bo'lib $A_n \subset A_{n-1}$ va $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ bo'lsa, u holda $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ munosabatni isbotlang.
7.Birgalikda bo'lgan hodisalar yig'indi ehtimolini topish formulasini yozing.
8.Birgalikda bo'lgan hodisalarga misollar keltiring.
10.Shartsiz ehtimol nima?
11.Shartli ehtimol nima?
12.Shartli ehtimolni xossalarni ayting.
13.Talaba imtixon dasturidagi 25 ta savoldan 20 tasini biladi.O'qituvchi 3 ta savol bergan bo'lsa, talabaning 3 ta savolni ham bilish ehtimoli topilsin.
14.Bog'liqmas hodisani ta'riflang?
15.Bog'liq hodisani tushuntiring?
16.Bog'liq va bog'liqmas hodisalarga misollar keltiring?

№4-мustaqil ish topshiriqlar

1. To'la gruppa tashkil etuvchi hodisalar nima?
2. To'la gruppa tashkil etuvchi hodisalarga misol keltiring.
3. $A_i \cap A_j = \varnothing,$ $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$ дан $\mathrm{BA_i} \cap BA_j = \varnothing$ ekanligini isbotlang.
4. To'la ehtimol formulasini yozing.
5. Beyes formulasi yozing.
6. Lampochka ikkita zavodda tayyorlanadi.Ikkinchi zavod tayyorlagan mahsulotining hajmi birinchisinikidan k marta ortiq..Birinchi zavoda tayyorlangan lampochkalarning $\frac{1}{3}$ qismi, ikkinchi zavodda tayyorlangan lampochkalarning $\frac{2}{3}$ qismi yaroqsiz.Ikkala zavodning mahsulotlari sotuvga chiqariladi. Agar bitta lampochka yaroqsiz chiqqanligi ma'lum bo'lsa, u ikkinchi zavodda tayorlanganlik ehtimolini toping.
7. Yashikda 100 ta detal bo'lib ulardan 10 tasi brak kilingan.Tavakkallliga 4 ta detal olingan.Olingan detallar orasida: a)brak kilingan detallar bo'lmasligi; b)yarokli detallar bo'lmasligi ehtimolini toping.
8.Gruppada 12 ta talaba bo'lib, ulardan 8 tasi a'lochi, ruyxat bo'yicha tavvakaliga 9 ta talaba ajratilgan.Ajratilganlar orasida 5 ta a'lochi talaba bo'lishi eo'timolini toping.
9.Ikki mergan nishonga qarata o'q uzmoqda.Bitta o'q uzishda nishonga tekkizish eo'timoli birinchi mergan uchun 0,7, ikkinchi mergan uchun 0,8 ga teng. Bir yo'la o'q uzishda merganl n faqat bittasining nishonga tekkizish eo'timolini toping.
5.Agar $np - q$ butun son bo'lsa, $P_n(m)$ ehtimol nechta eng katta qiymatga erishadi?
6. $m = 3, n = 8,$ $\mathrm{p} = \frac{1}{2}$ bo'lsa, $P_8(3)$ ni hisoblang.

№5-мustaqil ish topshiriqlar

1.Muavr-Laplasning lokal teoremasidan qaysi paytda foydalaniladi.

2.Teorema $x=\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$ qanday qiymatlarda o'rinli ekanligini tushuntiring.

3. $\varphi(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ булса, $\varphi(1),\varphi(2)$ ва $\varphi(-3)$ larni toping

4.Stirling formulasini yozing.

5. $\ln(1+x)$ ва $\ln(1-x)$, $x\to 0$ darajali qatorni yoying.

6. $\Phi(1),\Phi(2),\Phi(-2,5)$ larni jadval yordamida ko'ring.

7. $\Delta x_m=\dfrac{1}{\sqrt{npq}}$ tenglikni isbotlang.

8. $P_{10}(3,8)$ ni toping.

№6-мustaqil ish topshiriqlar

1.Nisbiy chastota nima?

2.Tanga tashlash hodisasida ehtimol bilan nisbiy chastota orasidagi farqni topib ko'ring.

3. $n=400, p=0,5, \alpha=0,08$ bo'lganda $\mathrm{P}\left\{\left|\dfrac{m}{400}-\dfrac{1}{2}\right|<0.08\right\}$ ehtimolini toping .

4.Qorako'l terining yaroqsiz chiqish ehtimoli 0.09 ga teng.Nechta qorako'l teri olinganda qorako'lni yaroqsiz chiqishi nisbiy chastotasining 0.09 ehtimolidan farqli absalyut qiymati jixatdan 0.02 dan kichik bo'lish ehtimoli 0.9962 ga teng bo'ladi.

5.Nisbiy chastota va ehtimol nega baholanadi?

6.Minimal tajribalar soni qanday baholanadi?

8.Agar minimal $n=400, p=0,8$ va $\beta=0,9876$ ma'lum bo'lsa α topish mumkinmi?

9.Nega Puasson teoremasi kerak bo'lib qoldi?

10.Muavr –Laplasning lokal teoremasi qaysi paytda $\mathrm{P}_n(m)$ uchun yaxshi natija beradi?

11.Bernulli sxemasini hosil qiluvchi hodisalar seriyasini ko'rsating.

12.Puasson teoremasini ta'riflang .

13.Puasson qonunini ta'riflang.

№7-мustaqil ish topshiriqlar

1.Tasodifiy miqdorni ta'riflang .

2.Tajriba uchta tangani tashlashdan iborat.Bu tajribada ξ gerb tushishlar soni bo'lsa, u tasodifiy miqdorlar qiymatini ko'rsating.

3.Partiyada 10% yaroqsiz detal' bor, tavakkaliga 4ta detal' olindi.Olingan detallar orasida yaroqsiz detallar sonini tasodifiy miqdor deb belgilansa, uning qiymatlarini yozing.

4.Diskret tasodifiy miqdor nima?

5.Kubikni tashlaganda ochkolar soni taqsimot qonunini yozing.

6.Taqsimot funktsiya nima?

7.Taqsimot qonuni nima?

8.Merganning bitta o'q uzishda nishonga tekkizish ehtimoli 0,8 ga teng.Mergan o'qini xato ketgazgunga qadar unga patron beriladi.Merganga berilgan patronlar sonining taqsimot qonunini tuzing

№8-мustaqil ish topshiriqlar

1.Tasodifiy miqdorni ta'riflang .

2.Tajriba uchta tangani tashlashdan iborat.Bu tajribada ξ gerb tushishlar soni bo'lsa, u tasodifiy miqdorlar qiymatini ko'rsating.

3.Partiyada 10% yaroqsiz detal' bor, tavakkaliga 4ta detal' olindi.Olingan detallar orasida yaroqsiz detallar sonini tasodifiy miqdor deb belgilansa, uning qiymatlarini yozing.

4.Diskret tasodifiy miqdor nima?
5.Kubikni tashlaganda ochkolar soni taqsimot qonunini yozing.
6.Taqsimot funktsiya nima?
7.Taqsimot qonuni nima?
8.Merganning bitta o'q uzishda nishonga tekkizish ehtimoli 0,8 ga teng.Mergan o'qini xato ketgazgunga qadar unga patron beriladi.Merganga berilgan patronlar sonining taqsimot qonunini tuzing

№9-мustaqil ish topshiriqlar

1.Taqsimot funktsiyaning xossalarini ayting
2.Uzluksiz tasodifiy miqdor ni tushuntiring.
3.Absolyut uzluksiz t.m nima?
4. ξ -tasodifiy miqdorquyidagit.f. ga ega: $F(x)=\begin{cases} 0 \ , \quad \text{agar } x \le -1 \quad , \text{bo'lsa} \\ \dfrac{3x+3}{4} \ , \quad \text{agar } -1 \le x \le 1/3 \quad \text{bo'lsa} \\ 1 \ , \quad \text{agar } x > 1/3 \quad , \text{bo'lsa} \end{cases}$

$p(0 \le \xi \le \frac{1}{3})$ -ehtimolini toping.
5.Uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi $f(x)=\frac{2C}{1+x^2}$
tenglik bilan berilgan bo'lsa, S-ni toping.
6. ξ -tasodifiy miqdor Koshi taqsimoti bilan taqsimlangan bo'lsa, $g(\xi)=3-2\xi$ ning zichlik funktsiyasini toping.
7.Tasodifiy miqdor funktsiyasining zichlik funktsiyasi qanday topiladi?
8.Agar ξ tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi $p_\xi(x), x>0$ bo'lsa $g(\xi)=\xi^2$ ning zichlik funktsiyasini toping.

№10-мustaqil ish topshiriqlar

1.Diskret tasodifiy miqdor matematik kutilmasini ta'riflang.
2.Uzluksiz tasodifiy miqdor matematik kutilmasini ta'riflang.
3.Bitta kubikni tashlaganda tushgan raqam ξ tasodifiy miqdor desak, $M\xi$ ni toping.
4.Uchta tanga baravariga tashlanganda «gerb" tushishlar sonini matematik kutilmasini ko'rsating.
5.Matematik kutilma xossalarini sanab o'ting.
6.Agar $S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ va $M\xi_k=a$ bo'lsa, MS_n ni nimaga teng?

A) a V) a^n S) an D) 0 E)ak

7. ξ_1, ξ_2 bog'liqmas tasodifiy miqdor bo'lib, $M\xi_1=2,\ M\xi_2=3$ bo'lsa, $M(\xi_1+\xi_2)^2$ ni toping.
8.Chetlanish nima?
9.Dispersiya ta'riflang.
10.Puasson taqsimotning dispersiyasini toping.
11. ξ, η bog'liqmas tasodifiy miqdor bo'lib , $D\xi=2, D\eta=3$ bo'lsa, $D(3\xi-2\eta)$ ni hisoblang.
12.Dispersiyaning xossalarini aytib bering.
13. $\xi_1\xi_2\xi_3..\xi_n$ o'zaro bog'liqmas tasodifiy miqdor bo'lib, $D\xi_n=\sigma^2$ bo'lsa $k=1,2.....n$ $D(S_n)$ ni hisoblang.
14.Normallashgan va markazlashgan tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

№11-мustaqil ish topshiriqlar

ξ tasodifiy miqdorning $f(x)$ zichlik funktsiyasi berilgan bo'lsin:

1. $f(x)=\begin{cases} Cx, & x\in[0,1], \\ C, & x\in(1,2], \\ 0, & \text{акс холда}. \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} C(1-x/3), & x\in[0,3], \\ 0, & x\notin[0,3]. \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ C/(x+1)^4, & x>0. \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<1, \\ Ce^{1-x}, & x\ge 1. \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} C/\sqrt{1-x^2}, & x\in[-1,1], \\ 0, & x\notin[-1,1]. \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} C\sqrt{1-x}, & x\in[0,1], \\ 0, & x\notin[0,1]. \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} C/(1+x^2), & x\in[0,\sqrt{3}], \\ 0, & x\notin[0,\sqrt{3}]. \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ Cxe^{-0.5x}, & x>0. \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} C/x, & x\in[1/e,e], \\ 0, & x\notin[1/e,e]. \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ C/(x+1)^5, & x\ge 0. \end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases} C(1-0.5|x|), & x\in[-2,2], \\ 0, & x\notin[-2,2]. \end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\notin(0,\pi/2) \\ C\sin x, & x\in(0,\pi/2) \end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases} C\cos x, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right], \\ 0, & x\notin\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases} C\left(|x|+\dfrac{1}{4}\right), & x\in[-1,1], \\ 0, & x\notin[-1,1]. \end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ Cxe^{-x}, & x>0. \end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases} C\ln x, & x\in[1,e], \\ 0, & x\notin[1,e]. \end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases} 2x/3, & x\in[0,1], \\ C(3-x), & x\in(1,3], \\ 0, & \text{акс холда}. \end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases} C(1-|x|), & x\in[-1,1], \\ 0, & x\notin[-1,1]. \end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases} C\sqrt[3]{1-x}, & x\in[0,1], \\ 0, & x\notin[0,1]. \end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases} (x+1)/2, & x\in[-1,0], \\ (C-x)/2C, & x\in(0,C], \\ 0, & x\notin[-1,C] \end{cases}$

Quyidagilarni hisoblang: a) S; b)$F(x)$; v) Mξ; g)Dξ; d) Me; e) $P\left(|\xi-M\xi|<\sigma(\xi)\right), P\left(\xi>M\xi\right)$; yo) $f(x)$ va $F(x)$ grafiklarini chizing.

№2

1. $\xi \sim R(-4,4); \eta_1 = \dfrac{\xi+4}{8}, \eta_2 = \dfrac{1-\xi}{2}$ bo'lsin . η_1, η_2 tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasini toping.

2. $\xi \sim E(\alpha), \eta_1 = \ln(\xi+1), \eta_2 = 1/(\xi+1)$ bo'lsin. η_1, η_2 tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasini toping.

3. $\xi \sim N(a,\sigma^2), \eta_1 = 2\xi+1, \eta_2 = 1-\xi$ bo'lsin. η_1, η_2 tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasini toping.

4. ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi: $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0, \\ x, \ 0 < x < 1, \\ 1, \ x \ge 1. \end{cases}$ va $\eta_1 = \xi^2+1, \eta_2 = 1/(1+\xi)$ bo'lsin. η_1, η_2 tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasini toping.

5. $\xi \sim R(-1,1); \eta_1 = |\xi|, \eta_2 = \dfrac{|1-\xi|}{2}$ bo'lsin. η_1, η_2 tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasini toping.

6. $\xi \sim N(a,\sigma^2), \eta_1 = 5\xi-1, \eta_2 = -\xi+1$ bo'lsin. η_1, η_2 tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasini toping.

7. $\xi \sim E(\alpha), \eta_1 = \xi^2, \eta_2 = e^{-\xi}$ bo'lsin. η_1, η_2 tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasini toping.

8. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi : $f_\xi(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}$ va $\eta_1 = \xi^2, \eta_2 = 1/(1+\xi^2)$ bo'lsin. η_1, η_2 tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasini toping.

9. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi: $p_\xi(x) = \begin{cases} 0, \ \ x \notin (0;2], \\ -\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x}{2}, \ \ x \in (0;2], \end{cases}$ va $\eta_1 = \xi^2, \eta_2 = \dfrac{\xi+1}{2}$ bo'lsin. η_1, η_2 tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasini toping.

10. $\xi \sim R(0,1); \eta_1 = -\ln(1-\xi), \eta_2 = tg(\pi(\xi - \dfrac{1}{2}))$ bo'lsin. η_1, η_2 tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasini toping.

11. $\xi \sim E(\alpha), \eta_1 = \xi^2+1, \eta_2 = \xi/(\xi+1)$ bo'lsin. η_1, η_2 tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasini toping.

12. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi: $f_\xi(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}$ va $\eta_1 = \dfrac{2\xi}{1-\xi^2}, \ \eta_2 = \dfrac{1}{\xi}$ bo'lsin. η_1, η_2 tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasini toping.

13. $\xi \sim N(5,\sigma^2), \eta_1 = 3\xi-1, \eta_2 = -\xi+2$ bo'lsin. η_1, η_2 tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasini toping.

14. ξ tasodifiy miqdor taqsimot funktsiyasi: $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0, \\ x^3, \ 0 < x \le 1, \\ 1, \ x > 1. \end{cases}$ va $\eta_1 = \xi^2+1, \eta_2 = 1/\xi$ bo'lsin. η_1, η_2 tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasini toping.

15. $\xi \sim R(-2,2); \eta_1 = \dfrac{|\xi|+4}{8}, \eta_2 = \dfrac{2-\xi}{2}$ bo'lsin. η_1, η_2 tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasini toping.

16. $\xi \sim E(\alpha), \eta_1 = \sqrt{\xi + 1}, \eta_2 = \frac{1}{\alpha} \ln \xi$ bo’lsin. η_1, η_2 tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasini toping.

17. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi: $f_{\xi}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ va $\eta_1 = arctg\xi, \eta_2 = 1/\xi$ bo’lsin. η_1, η_2 tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasini toping.

18. $\xi \sim N(0,1), \eta_1 = \xi^3, \eta_2 = |\xi|$ bo’lsin. η_1, η_2 tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasini toping.

19. ξ tasodifiy miqdor taqsimot funktsiyasi: $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le -1, \\ a(x+1)^2, \text{ если, } -1 < x \le 2, \\ 1, \text{ если } x > 2 \end{cases}$ va $\eta_1 = \xi^2 + 1, \eta_2 = 1/\xi$ bo’lsin. η_1, η_2 tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasini toping.

20. ξ tasodifiy miqdor zichlik funktsiyasi: $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2, & |x| \le h, \\ 0, & |x| > h, \end{cases}$ va $\eta_1 = \xi^2 + 1, \eta_2 = 1/(1+\xi)$ bo’lsin. η_1, η_2 tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasini toping.

№12-мustaqil ish topshiriqlar

Tasodifiy vektorning birgalikdagi taqsimoti berilgan:

1.

$X \setminus Y$	1	2	3
0.1	0.12	0.08	0.40
0.2	0.16	0.10	0.14

2.

X \ Y	-1	0	1
0	0.1	0.2	0.1
1	0.2	0.3	0.1

3.

X \ Y	1	2	3	4
1	0.07	0.04	0.11	0.11
2	0.08	0.11	0.06	0.08
3	0.09	0.13	0.10	0.02

4.

X \ Y	1	2	3
1	2G’9	1G’9	0
2	1G’9	0	1G’9
3	2G’9	1G’9	1G’9

5.

X \ Y	-1	0	1	2
-1	0.05	0.3	0.15	0.05
1	0.1	0.05	0.25	0.05

6.

X \ Y	0	1
0	1\’8	0
1	1G’4	1G’8
2	1G’8	3G’8

7.

X g’ *Y*	0	1	2
-1	1G’4	1G’8	1G’8
1	1G’8	1G’8	1G’4

8.

X g’ Y	1	2	3
0	C	0.15	0.15
1	0.2	0.3	C

9.

X g’ Y	-1	0	1	2
-1	0.07	0.04	0.1	0.12
0	0.08	0.1	0.07	0.08
1	0.09	0.13	0.10	0.02

10.

X g’ Y	1	2	3
1	2G’9	1G’9	0
2	1G’9	0	1G’9
3	2G’9	1G’9	1G’9

11.

X g’ Y	2	4	6	8
-1	0.1	0.3	0.1	0.1
1	0.1	0	0.25	0.05

12.

X g’ Y	-1	1
0	1G’8	0
1	1G’4	1G’8
2	1G’8	3G’8

13.

X g’ *Y*	-1	0	1
0	0	0.1	0.4
1	0.2	0.2	0.1

14.

X g’ Y	-1	0	1
0	0.15	0.3	0.3
1	0.1	0.05	0.1

15.

X g’ Y	0	1	2	3
-1	0.05	0.12	0.08	0.04
1	0.09	0.3	0.11	0.21

16.

X g’ Y	2	10	12	20
0	0.05	0.11	0.08	0.05
1	0.1	0.3	0.11	0.20

17.

X g’ Y	10	20	30	40
-10	0.1	0.25	0.1	0.05
10	0.15	0.05	0.25	0.05

18.

X g’ Y	1	2	3	4
1	0.07	0.04	0.11	0.11
2	0.08	0.11	0.06	0.08
3	0.09	0.13	0.10	0.02

19.

X g’ Y	0	1	2
0	1G’4	1G’3	1G’8
1	1G’8	1G’16	0
2	S	0	0

Marginal taqsimotlarni, taqsimot funktsiyasini, sonli xarakteristikalarini, shartli taqsimotlarni hisoblang.

№13-мustaqil ish topshiriqlar

(ξ,η) tasodifiy miqdorning bigalikdagi zichlik funktsiyasi berilgan:

1. $f(x,y)=\begin{cases} C(x^2+y^2), & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, \\ 0, & \text{акс холда} \end{cases}$

2. $f(x,y)=\begin{cases} C(x^3+y^3), & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, \\ 0 & \text{акс холда} \end{cases}$

3. $f(x,y)=\begin{cases} C(x^4+y^4), & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, \\ 0 & \text{акс холда} \end{cases}$

4. $f(x,y)=\begin{cases} C(x^2+y), & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, \\ 0 & \text{акс холда} \end{cases}$

5. $f(x,y)=\begin{cases} C(2x^2-y^2), & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, \\ 0 & \text{акс холда} \end{cases}$

6. $f(x,y)=\begin{cases} Cxy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, \\ 0 & \text{акс холда} \end{cases}$

7. $f(x,y)=\begin{cases} Cx^2y^2, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0 & \text{акс холда}\end{cases}$

8. $f(x,y)=\begin{cases} Cx^3y^3, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0 & \text{акс холда}\end{cases}$

9. $f(x,y)=\begin{cases} C(x+y)(1-x)(1-y), & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0 & \text{акс холда}\end{cases}$

10. $f(x,y)=\begin{cases} Cxy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x,\\ 0 & \text{акс холда}\end{cases}$

11. $f(x,y)=\begin{cases} C(1+xy), & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0 & \text{акс холда}\end{cases}$

12. $f(x,y)=\begin{cases} C(1-xy), & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0 & \text{акс холда}\end{cases}$

13. $f(x,y)=\begin{cases} C(1+x^2y^2), & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0 & \text{акс холда}\end{cases}$

14. $f(x,y)=\begin{cases} C(1-x^2y^2), & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0 & \text{акс холда}\end{cases}$

15. $f(x,y)=\begin{cases} C(x-y)^2, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0 & \text{акс холда}\end{cases}$

16. $f(x,y)=\begin{cases} Ce^{-(x+y)}, & x\ge 0, y\ge 0\\ 0 & \text{акс холда}\end{cases}$

17. $f(x,y)=\begin{cases} Ce^{-2(x+y)}, & x\ge 0, y\ge 0\\ 0 & \text{акс холда}\end{cases}$

18. $f(x,y)=\begin{cases} Ce^{-(2x+y)}, & x\ge 0, y\ge 0\\ 0 & \text{акс холда}\end{cases}$

19. $f(x,y)=\begin{cases} Cxy(x+y), & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0 & \text{акс холда}\end{cases}$

20. $f(x,y)=\begin{cases} Cxy(x-y), & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0 & \text{акс холда}\end{cases}$

Quyidagilarni hisoblang: $C, f(x), f(y), F(x,y), M\xi, M\eta, D\xi, D\eta, \rho(\xi,\eta)$ va ξ,η tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligini tekshiring.

№14-mustaqil ish topshiriqlar

Tanlanmani dastlabki qayta ishlang

№ 1

50	54	58	66	60	61	62	36	52	60
54	71	56	71	66	43	60	48	60	65
77	51	57	52	47	48	65	70	49	61
50	54	42	62	50	64	60	52	76	68
69	52	57	58	55	74	42	43	72	63
68	57	72	55	60	56	47	52	46	61
71	61	50	68	49	43	37	60	63	70
59	39	54	75	49	67	45	54	52	77
65	42	74	66	48	44	38	47	53	57
56	66	41	64	58	60	49	38	67	69

№ 2

3	2	8	5	3	10	10	4	3	7
5	9	5	8	10	10	9	6	10	3
3	10	5	5	3	4	4	4	10	6
7	11	13	11	5	6	10	12	3	4
6	5	11	9	8	9	9	10	4	7
11	5	10	4	6	6	12	10	4	7
5	4	6	11	4	3	3	7	12	3
8	5	7	10	8	9	9	6	4	6
4	10	4	3	9	10	3	3	9	7
4	7	3	4	5	6	4	4	6	3

№ 3

23	25	22	33	20	39	31	20	35	22
23	27	21	27	25	22	28	21	28	37
33	24	30	23	32	26	24	30	25	23
26	29	39	32	21	26	23	40	22	26
28	35	24	24	27	38	35	29	36	27
30	26	22	27	40	27	22	21	28	36
38	29	33	22	21	32	32	29	30	38
28	34	23	29	32	30	23	21	20	40
32	23	25	26	24	25	40	31	26	35
34	24	40	29	34	37	25	27	33	28

№ 4

1	0,9	1,2	0,9	0,6	1	1,1	0,8	1,2	1,5
1	1,1	0,8	1,4	1,3	1,2	1,3	1,4	1	2
1,3	1,6	1,3	1,1	0,9	0,8	1,6	1,5	1,7	0,7
1,6	1,4	1	1,5	1,2	1,5	0,5	2	1,1	1,3
1,1	1,7	1,8	0,4	1,9	1,3	1,2	1,3	0,6	1,2
1,8	0,8	1,1	1,6	1,6	1,7	1	0,9	2,1	1,8
0,9	1,5	1,4	1,2	0,8	0,6	1,4	1,1	1,5	0,9
1,5	1,2	0,7	1,5	1,4	1,4	1,6	1,6	1,3	1,5
0,5	1	1,7	1,5	1,1	1,2	0,8	0,7	0,9	1,3
1,2	1,5	1,2	1,3	1,4	1,7	1,6	1,2	1,4	1,1

№ 5

3,1	4,3	4	3,5	4,4	4,1	4,2	4,4	4,2	3,9
4,1	4,7	4,5	4,3	4	4,5	4,7	4,8	4,9	4,8
4,4	3,6	3	4,6	4,5	4,7	3,8	3,7	5,3	4
3,4	4,5	4,4	5	4,8	3,6	4,2	5	5,7	5,1
3,8	3,8	4,7	3,2	5	4,2	5,2	4,1	4,6	5,4
4,8	4,7	5,1	4,4	4,6	4,4	4,6	4,9	3,6	4,6
4,7	4,9	3,9	4,8	3,7	4,8	3,5	4,7	4,3	4,2
4,6	3,3	4,6	4,6	4,5	4,1	4,8	4,3	4,9	4,9
4	4,5	4,4	4	4,8	3,7	5,2	3,9	4,1	3,5
4,3	4,2	3,4	4,3	3,9	4,5	4,3	4,2	3,8	4,3

№ 6

-2,7	-1	-1,1	0,9	2,8	-0,9	-2,5	-2,4	-2,1	-2,3
-1,6	0,5	-0,4	0,6	-0,7	0,3	0,7	0,8	-0,8	-1,9
-1,4	-0,1	0,5	-1,3	0,6	0,7	-1,3	0,8	0,9	-1,7
0,5	0	-1,6	0,6	-1,4	1	1,2	-1,3	0,7	-2
0,4	-1,2	0,9	1,2	1,4	-1,1	-1,5	-0,8	-0,8	-1,8
1	-0,6	1,1	-1,4	1,3	-0,7	1,3	1,7	2,2	0,8
-0,9	0,3	0,1	1,5	0,2	0,4	1,6	0,1	0,2	0,4
0,1	0,2	1,8	0	-1,3	-1,4	-0,2	1,9	-1,5	0
-0,4	-1,3	-1,9	-0,2	1,6	-0,5	-0,1	2,3	-0,2	0,2
-0,5	1,7	2	2,1	0,4	2,4	-1	-1,2	0,3	-0,7

4.GLOSSARIY

Tasodifiy hodisa – tasodifiy tajriba natijasida ro'y berishi oldindan aniq bo'lmagan hodisa;
Elementar hodisa – tajribaning har qanday natijasi;
Mumkin bo'lmagan hodisa – umuman ro'y bermaydigan hodisa;
Muqarrar hodisa – tajriba natidasida albatta ro'y beradigan hodisa;
Birgalikda bo'lmagan hodisalar – bir vaqtda ro'y bermaydigan hodisalar;
Elementar hodisalar fazosi – tajribaning natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha elementar hodisalar to'plami;
Tasodifiy miqdor – tasodifga bog'liq holda u yoki bu son qiymatlarni qabul qiluvchi miqdor;
Diskret tasodifiy miqdor – chekli yoki sanoqli qiymatlar qabul qiladigan tasodifiy miqdor;
Uzluksiz tasodifiy miqdor – qabul qiladigan qiymatlari biror oraliqdan iborat bo'lgan tasodifiy miqdor;
Taqsimot funktsiya – ixtiyoriy $x \in R$ son uchun aniqlangan $F(x) = F_{\xi}(x) = P(\{\xi \le x\})$ funktsiya.
Zichlik funktsiya – taqsimot funktsiyadan olingan birinchi tartibli hosila;
Bosh to'plam – bir xil turga tegishli barcha elementlar to'plami;
Tanlanma – bosh to'plamdan tasodifiy ravishda olingan elementlar;
Statistika – tanlanmadan olingan ixtiyoriy (o'lchovli) funktsiya;
Baho - qabul qiladigan qiymati noma'lum parametrning qiymatlari to'plamiga tegishli bo'lgan statistika;
Siljimagan baho – matematik kutilmasi noma'lum parametrga teng statistik baho;
Asosli baho – noma'lum parametrga ehtimol bo'yicha yaniqlashuvchi statistik baho;
Effektiv baho - eng kichik dispersiyaga ega bo'lgan statistik baho;
Statistik gipoteza – kuzatilayotgan tasodifiy miqdor haqida aytilgan ixtiyoriy fikr;
Asosiy gipoteza – tekshirilishi kerak bo'lgan gipoteza;
Alternativ gipoteza - asosiy gipotezaga qarama-qarshi bo'lgan ixtiyoriy gipoteza;
Birinchi tur xatolik – asosiy gipoteza to'g'ri bo'lgan holda uni rad etish;
Ikkinchi tur xatolik - alternativ gipoteza to'g'ri bo'lgan holda uni rad etish;
Korrelyatsiya koeffitsienti – ikkita tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'lanishni miqdoriy ko'rsatkichi;
Normallangan tasodifiy miqdor – matematik kutilmasi 0 (nol)ga va dispersiyasi 1 (bir)ga teng bo'lgan tasodifiy miqdor;
Moda – eng ko'p kuzatilgan varianta;
Mediana – variatsion qatorni teng ikkiga bo'luvchi varianta;
Variatsia ko'lami –eng katta va eng kichik kuzatilgan variantalar orasidagi farq;
Regressiya tenglamasi – ikki va undan ortiq tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'lanishning funktsional ifodasi;

5. TEST SAVOLLARI

1. Qutidagi 25 tranzistordan 8 tasi yaroqsiz bo'lsin. Ixtiyoriy ravishda tranzistor olinadi va tekshiriladi. Olingan ikkinchi tranzistor yaroqsiz bo'lish ehtimolligi nechaga teng?

A. 7G'25 V. 17G'25 S. 34G'75 D. 1G'25 E. 8G'25

2. Ikkita tanga tashlanganda kamida bitta Gerb chiqish ehtimolligi topilsin.

A. 0.2 V. 0.4 S. 0.5 D. 0.75 E. 0.8

3. Ikkita o'yin soqqasi tashlanganda tushgan ochkolar yig'indisi 9 ga teng bo'lish ehtimoli topilsin.

A. 1G'2 V. 1G'3 S. 0.175 D. 2G'3 E. 1G'9

4. 36 ta o'yin kartasi aralashtirilganda nechta xil natija bo'ladi?

A. 36 V. 72 S. 18! D. 108 E. 36!

5. $-2 < x < 2, \quad 0 < y < 3$ bo'lsa, $y \le |x|$ bo'lish ehtimolligi topilsin.

A. 2G'3 V. 5G'12 S. 1G'3 D. 6G'15 E. 3G'5

6. A va V xodisalar bog'liqsiz, u xolda qaysi tenglik o'rinli bo'ladi?

A. $P(A+B)=P(A)+P(B)$ V. $P(AB)=P(A)P(B)$ S. $P(A+B)=P(A)P(B)$ D. $A\cap B=\varnothing$ E. $P(AB)=0$

7. To'la ehtimol formulasini yozing.

A. $P(A)=P(B_1)P(AB_1)$ V. $P(A)=P(AB)P(B)$ S. $P(A)=\sum P(A/B_1)$ D. $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)$

E. $P(AB)=0$

8. Hodisalar to'plami $\Im$ da aniqlangan sonli R funktsiyasiga hodisaning ehtimoli deyiladi, agarda quyidagi shartlar bajarilsa.

A. 1^0. $\Im$ hodisalar algebrasi bo'ladi.
   2^0. Ixtiyoriy $A\in\Im$ uchun $P(A)<0$.
   3^0. $P(\Omega)=1$, ya'ni muqarrar Ω hodisaning ehtimoli 1 ga teng.
   4^0. A va V birlashmagan bo'lsa, $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

V. 1^0. $\Im$ hodisalar algebrasi bo'ladi.
   2^0. Ixtiyoriy $A\in\Im$ uchun $P(A)\ge 0$.
   3^0. $P(\Omega)<1$, ya'ni muqarrar Ω hodisaning ehtimoli 1 dan kichik.
   4^0. A va V birlashmagan bo'lsa, $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

S. 1^0. $\Im$ hodisalar algebrasi bo'ladi.
   2^0. Ixtiyoriy $A\in\Im$ uchun $P(A)\ge 0$.
   3^0. $P(\Omega)=1$, ya'ni muqarrar Ω hodisaning ehtimoli 1 ga teng.
   4^0. A va V birlashmagan bo'lsa, $P(A+B)=P(A)-P(B)$.

D. 1^0. $\Im$ hodisalar algebrasi bo'ladi.
   2^0. Ixtiyoriy $A\in\Im$ uchun $P(A)\ge 0$.
   3^0. $P(\Omega)=1$, ya'ni muqarrar Ω hodisaning ehtimoli 1 ga teng.
   4^0. A va V birlashmagan bo'lsa, $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

E. 1^0. $\Im$ hodisalar algebrasi emas.
   2^0. Ixtiyoriy $A\in\Im$ uchun $P(A)\ge 0$.
   3^0. $P(\Omega)=1$, ya'ni muqarrar Ω hodisaning ehtimoli 1 ga teng.
   4^0. A va V birlashmagan bo'lsa, $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

9. Agar $P(A)>0$ bo'lsa, V hodisaning A hodisasi ro'y bergandagi shartli ehtimoli qanday topiladi?

A. $P_A(B)=(P(A)+P(B))/P(A)$ V. $P_A(B)=P(A)/(P(A)+P(B))$ S. $P_A(B)=P(AB)/P(A)$ D. $P_A(B)=P(A)/P(AB)$ E. $P_A(B)=P(A)\cdot(P(A)+P(B))$

10. A va V hodisalar bir-biriga bog'liq bo'lmagan hodisalar bo'lsa, ulardan xech bo'lmaganda birining ro'y berish ehtimoli.

A. $P(A+B)=P(A)+P(B)$ V. $P(A-B)=P(A)-P(B)$ S. $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

D. $P(A+B)=P(A)+P(B)+P(AB)$ E. $P(A-B)=P(A)-P(B)+P(AB)$

11. B_1, B_2, B_3 hodisalarning to'la guruhini tashkil qilsin. U holda $P_A(B_1)$ ehtimollik Bayes formulasiga ko'ra quydagicha hisoblanadi:

A. $P_A(B_1)=P_{B_1}(A)/P(AB_1)$ V. $P_A(B_1)=P(AB_1)/P_{B_1}(A)$ S. $P_A(B_1)=P(A)P_{B_1}(A)/P(B_1)$

D. $P_A(B_1)=P(A)P(AB_1)/P(B_2)$ E. $P_A(B_1)=P(B_1)P_{B_1}(A)/P(A)$

12. n marotaba o'tkazilgan bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligida A hodisasini roppa-rosa k marotaba ro'y berish ehtimoli $P_n(k)$ Bernulli formulasiga ko'ra:

A. $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, bu erda $p=P(A),\ q=1-p$.

V. $P_n(k)=C_n^k p^{n-k} q^k$, bu erda $p=P(A),\ q=1-p$.

S. $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, bu erda $p=P(A),\ q=1+p$.

D. $P_n(k)=C_n^k p^{n-k} q^k$, bu erda $p=P(A),\ q=1+p$.

E. $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, bu erda $p=P(A),\ q=1-p^2$.

13. $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, $0<p<1,\ q=1-p$ bo'lsin. Agar $np\to\lambda>0$ bo'lsa, quyidagi munosabatlardan qaysi biri o'rinli?

A. $P_n(k)\approx\lambda^k e^{-\lambda}/k!$ V. $P_n(k)\approx\lambda^k e^{-\lambda}/k$ S. $P_n(k)\approx\lambda e^{-\lambda}/k!$

D. $P_n(k)\approx\lambda^k/k!$ E. $P_n(k)\approx\lambda^k e^{\lambda}/k!$

14. $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, $0<p<1,\ q=1-p$ bo'lsin. Agar $n\to\infty$, $k\to\infty$ bo'lsa, quyidagi munosabatlardan qaysi biri o'rinli?

A. $P_n(k)\approx\varphi(x_k)/\sqrt{npq}$, bu erda $\varphi(x_k)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},\ x_k=(k-np)/\sqrt{npq}$.

V. $P_n(k)\approx\varphi(x_k)/\sqrt{npq}$, bu erda $\varphi(x_k)=e^{-x^2/2},\ x_k=(k-np)/\sqrt{npq}$.

S. $P_n(k)\approx\varphi(x_k)/\sqrt{np}$, bu erda $\varphi(x_k)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},\ x_k=(k-np)/\sqrt{np}$.

D. $P_n(k)\approx\varphi(x_k)/\sqrt{np}$, bu erda $\varphi(x_k)=e^{-x^2/2},\ x_k=(k-np)/\sqrt{np}$.

E. $P_n(k)\approx\varphi(x_k)/\sqrt{nq}$, bu erda $\varphi(x_k)=e^{-x^2/2},\ x_k=(k-np)/\sqrt{nq}$.

15. 2 ta kub tashlanganda chiqqan raqamlar yig'indisi 5 ga karrali ekanligi ma'lum bo'lsa, raqamlarning biri 6 bo'lish ehtimolligini toping.

A. 1G'7 V. 3G'7 S. 2G'7 D. 1G'5 E. 2G'5

16. Mumkin bo'lgan qiymatlari ayrim ajralgan sonlar bo'lib, ularni tayin ehtimollari Bilan qabul qiladigan miqdorga

A. Uzluksiz tasodifiy miqdor;

V. Singulyar tasodifiy miqdor;

S. Diskret tasodifiy miqdor;

D. Normal taqsimot;

E. Puasson taqsimoti deyiladi;

17. Agar sinovlar soni katta bo'lib, har bir sinovda A hodisaning ro'y berish ehtimoli r juda kichik bo'lsa, u holda n ta erkin sinovda A hodisaning roppa-rosa k marta ro'y berish ehtimoli quyidagicha hisoblanadi:

A. $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$.

V. $P_n(k)=\dfrac{1}{\sqrt{npq}}\Phi\left[\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}\right]-\Phi\left[\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right],\quad \Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt$.

S. $P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left[\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right], \quad \varphi(x)=\frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$.

D. $P_n(k)=\frac{\lambda^{kn}}{k!}e^{-\lambda}, \quad \lambda=np$.

E. $P_n(k)=1-pq$.

18. X tasodifiy miqdor tangani 3 marta tashlashda "GERB" tomon tushish soni bo'lsa, uning taqsimot qonunini yozing.

A. X: 1 2 3
r: 0.3 0.4 0.3

V. X: 0 1 2
r: 0.8 0.1 0.1

S. X: 0 1 2 3
r: 0.2 0.3 0.3 0.2

D. X: 0 1 2 3
r: 1G'4 1G'4 1G'4 1G'4

E. X: 0 1 2 3
r: 1G'8 3G'8 3G'8 1G'8

19. Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi nimaga teng?

A. $MX=1-x_1p_1-x_2p_2$.

V. $MX=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n-1$.

S. $MX=x_1p_1+...+x_np_n$.

D. $MX=x_1p_1-x_2p_2$.

E. $MX=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n$.

20. O'zgarmas miqdorning matematik kutilmasi nimaga teng?

A. MSq0 B. MCqC^2 C. MCq1 D. MCqC E. MCq3

21. X tasodifiy miqdorning dispersiyasi qanday formula bilan aniqlanadi?

A. $DX=MX^3-MX^2$ V. $DX=MX^2-MX$ S. $DX=MX^2-(MX)^2$

D. $DX=MX^2-2MX$ E. $DX=\sqrt{MX}$

22. O'zgarmas sonning dispersiyasi nimaga teng?

A. DSqC B. DCqC^2 C. DCq2 D. DCq0 E. MCqC^2-1

23. $C\cdot X$ tasodifiy miqdorning dispersiyasi nimaga teng?

A. $D(CX)=CDX$ V. $D(CX)=C^2DX$ S. $D(CX)=C+DX$

D. $D(CX)=MC\cdot MX$ E. $D(CX)=DC^2-DX^2$

24. Tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma(X)$ nimaga teng?

A. $\sigma(X)=MX$ V. $\sigma(X)=MX^2-(MX)^2$ S. $\sigma(X)=DX-MX$

D. $\sigma(X)=(DX)^{1/3}$ E. $\sigma(X)=(DX)^{1/2}$

25. MXq8 va MYq12 bo'lsa, Zq2XQ4Y tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping?

A. MZq24 B. MZq43 C. MZq72 D. MZq64 E. MZq90

26. X va Y miqdorlar bog'liqsiz. Agar DXq7, DYq4 bo'lsa Zq5XQ3Y tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

A. DXq211 B. DXq47 C. DXq207 D. DXq173 E. DXq69

27. X diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan: $\begin{cases} X: -5, \ -2, \ 4, \ 6. \\ P: 0.3, \ 0{,}4, \ 0.1, \ 0.2 \end{cases}$, MX ni toping.

A. MXq-3.2, DXq15.3 B. MXq16, DXq9 C. MXq-5.3, DXq17.63

D. MXq10.3, DXq7.6 E. MXq-0.7, DXq17.41

28. Quydagilardan qaysi biri Chebishev tengsizligi?

A. $P(|X-MX|<\varepsilon)\le\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ V. $P(|X-MX|>\varepsilon)\ge-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

S. $P(|X-MX|<\varepsilon)\ge1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ D. $P(|X-MX|<\varepsilon)\ge1+\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

29. Taqsimot funktsiyaning qiymatlari qaysi oraliqda o'zgaradi?

A. [a,b] B. [0,1] C. (0,1) D. (0,2) E. [0,2]

30. X tasodifiy miqdor bo'lsa, quyidagi tengsizliklarning qaysinisi to'g'ri?

A. $P(a<x<b)=F(b)\cdot F(a)$ V. $P(a<x<b)=F(b)+F(a)$

S. $P(a<x<b)=F(b)/F(a)$ D. $P(a<x<b)=F(b)-F(a)$

31. $\begin{pmatrix} x_1,...,x_k \\ n_1,...,n_k \end{pmatrix}$ statistik qator uchun empirik funktsiya nimaga teng?

A. $F_n^*(x)=\frac{n_i}{n};\ x\in[x_i,x_{i+1}]$. V. $F_n^*(x)=\frac{x_i}{n};$. S. $F_n^*(x)=\frac{\sum_i^k n_i}{n};$.

D. $F_n^*(x)=\frac{n_i}{n};$. E. $F_n^*(x)=\frac{n_1+...+n_i}{n};\ x\in[x_i,x_{i+1}],\ i=\overline{1,k}$.

32. $\begin{pmatrix} x_1,...,x_k \\ n_1,...,n_k \end{pmatrix}$ statistik qator uchun quyidagi formula nimani ifodalaydi: $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-\overline{X}\right)^2 n_i}$.

A. O'rta qiymat V. Dispersiya S. Mediana D. Moda E. O'rta kvadratik og'ish

33. Bir hil sharoitda o'tkazilgan tajribalar natijalari majmuasi nima deb ataladi?

A. Statistik to'plam V. Bosh to'plam S. Tanlanma

D. Variatsion qator E. Statistik qator

34. Ushbu {1,2,3,4,5,6,6,7,7,7,8,8,9,9,10,11,11,12,13,14} tanlanmaning M_o – modasi va M_e – medianasi topilsin.

A. M_oq15, M_eq7 B. M_oq7, M_eq8 C. M_oq7, M_eq7.5

D. M_oq11, M_eq11 E. M_oq7, M_eq1

35. Tanlanmadan olingan ihtiyoriy funktsiya nima deb ataladi?

A. Taqsimot funktsiya V. Ishonchli oraliq S. Siljish

D. Statistika E. Dispersiya

36. α noma'lum parametrning α^* bahosi siljimagan deyiladi, agar quyidagi shart bajarilsa:

A. α^*qα V. $M\alpha^*$qα S. $D\alpha^*$qα D. $M\alpha^*-\alpha=b_n\neq0$ E. α^*Qαq0

37. α noma'lum parametr uchun α_1^* baho α_2^* bahoga qaraganda effiktiv baho deyiladi, agar quyidagi shart bajarilsa:

A. $\alpha_1^*<\alpha_2^*$ B. $M\alpha_1^*<M\alpha_2^*$ C. $M(\alpha_1^*-\alpha)<M(\alpha_2^*-\alpha)$ D. $M(\alpha_1^*-\alpha)^2>M(\alpha_2^*-\alpha)^2$

E. $M(\alpha_1^*-\alpha)^2<M(\alpha_2^*-\alpha)^2$

38. X diskret tasodifiy miqdorning taqsimoti: $P(x_i;\alpha)=P(X=x_i)\ \ i=\overline{1,n},\ \ \alpha$-noma'lum. Haqiqatga o'xshashlik funktsiyasi nimaga teng?

A. $f(x_1,...,x_n;\alpha)=\prod_{i=1}^{n}P(x_i,\alpha)$ V. $f(x_1,...,x_n;\alpha)=\sum_{i=1}^{n}P(x_i,\alpha)$ S. $f(x_1,...,x_n;\alpha)=P(x_i,\alpha)$

D. $f(x_1,...,x_n;\alpha)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P(x_i,\alpha)$ E. $f(x_1,...,x_n;\alpha)=P(x_1,\alpha)\cdot P(x_n,\alpha)$

39. $P(X=X_i)=\frac{\lambda^{X_i}}{X_i!}e^{-\lambda}$. λ parametr uchun haqiqatga eng katta o'xshashlik bahosi topilsin.

A. $\lambda^* = \sum_{i=1}^{n} X_i$ V. $\lambda^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ S. $\lambda^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$ D. $\lambda^* = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} X_i$ E. $\lambda^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

40. α noma'lum parametr haqidagi gipotezalar (taxminlar) $H_0 : \alpha = \alpha_0$, $H_1 = \alpha < \alpha_0$ bo'lsa, kritik to'plam qanday ko'rinishda bo'ladi?

A. $[x_\alpha ;\infty)$ V. $(-\infty; x_\alpha]$ S. $(-\infty;-x_\alpha] \cup [x_\alpha ;\infty)$ D. $[-x_\alpha ; x_\alpha]$ E. Aniqlab bo'lmaydi.

41. 1-tur xatoning qaysi qiymatida asosiy taxmin o'rinli bo'ladi?

A. 0.001 V. 0.05 S. 0.1 D. 0.9 E. 0.95

42. Korreleyiya koeffitsenti nimaga teng?.

A. $\rho = \bar{x}y - xy$ V. $\rho = \frac{\overline{xy} - \bar{x}y}{s_x^2 \cdot s_y^2}$ S. $\rho = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{s_x \cdot s_y}$ D. $\rho = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{s_x^2 \cdot s_y^2}}$ E. $\rho = \frac{\overline{xy}}{s_x \cdot s_y}$

43. Emperik taqsimot funktsiya qiymati qaysi oraliqda o'zgaradi?

A. $(-\infty;0)$ B. $(0;\infty)$ C. $(0;1)$ D. $[0;1]$ E. $(-\infty;\infty)$

44. Tanlanma dispersiyasi uchun siljimagan baho nimaga teng?

A. $\bar{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ V. $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 n_i$ S. $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

D. $S^2 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ E. $S^2 = \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

45. γ-ishonchlik ehtimolligi bo'lsin. $(a;b)$ oraliq α noma'lum parametr uchun ishonchlik oralig'i deyiladi, agar quyidagi shart bajarilsa:

A. $P(a \le \alpha \le b) = 1-\gamma$ V. $P(a \le \alpha \le b) = 1+\gamma$ S. $P(a \le \alpha \le b) = \gamma$

D. $P(a \le \alpha \le b) = 1-\gamma^2$ E. $P(a \le \alpha \le b) = 1-2\gamma$

46. Asosiy taxmin to'g'ri bo'lganda, uning rad etish ehtimolligi nima deb ataladi?

A. Statistik V. Ishonchlilik oralig'i S. 1-tur xato
D. 2-tur xato E. kiritik to'plam

47. Asosiy to'plamni rad etuvchi statistika qiymatlari to'plami nima deb ataladi?

A. Statistik baxo V. Ishonchlilik oralig'i S. Bosh to'plam
D. kiritik nuqta E. kiritik to'plam

48. Statistika qiymati kritik to'plamga tegishli bo'lsa qanday xulosaga kelamiz?

A. asosiy taxmin o'rinli V. Asosiy taxmin noma'lum
S. Alternativ taxmin o'rinli D. ishonchlilik ehtimolligi 1 ga teng
E. 1-tur xato noma'lum

49. Qutidagi 8 ta tranzistordan 5 tasi yaroqsiz bo'lsin. Ixtiyoriy ravishda tranzistor olinadi va tekshiriladi. Olingan ikkinchi tranzistor yaroqsiz bo'lish ehtimolligini toping.

A. 3G'8 V. 5G'8 S. 7G'8 D. 1G'8 E. 5G'14

50. Agar $P(A) > P(B)$ bo'lsa, quyidagilardan qaysinisi to'g'ri?

A. $P(\bar{A}) > P(\bar{B})$ V. $P(\bar{A}) < P(\bar{B})$ S. $P(A) \ge P(B)$ D. $P(A) \le P(B)$
E. Biror xulosa aytob bo'lmaydi.

51. Yashikda 10 ta detal bo'lib, ular orasida 4 ta bo'yalgan. Tavakkaliga 4 ta detal olindi. Olingan detallarning xammasi bo'yalgan bo'lish ehtimolini toping.

A. 7G'12 V. 4G'10 S. 1G'210 D. 11G'16 E. 1G'45

52. Tomoni 7 sm bo'lgan kvadratga radiusi 2 sm bo'lgan doira tashlanyapdi. Doiraning kvadrat tomonlarini kesmaslik ehtimolini toping.

A. $7\pi/40$ V. 9G'49 S. $3\pi/49$ D. $2\pi/49$ E. $\pi/49$

53. 3 ta kubik tashlanganda tushgan raqamlarning bir xil bo'lish ehtimolini toping.

A. 1G'12 V. 1G'36 S. 1G'9 D. 1G'6 E. 5G'36

54. Bayes formulasini toping.

A. $P(B_i / A) = \dfrac{P(B_i)P(A/B_i)}{P(A)}, \;\; i = 1,2,...,n$

V. $P(A)P(B_i)P(A/B_i) + P(B_n)P(A/B_n)$

S. $P(B_i / A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)$

D. $P(A) = \prod_{i=1}^{n} P(A/B_i)$

E. $P(B_i / A) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{P(B_i)P(A/B_i)}{P(A)}$

55. Elektr zanjiriga bir biridan bog'liqsiz ravishda ishlaydigan 3 ta element ketma-ket ulangan. Ularni buzilish ehtimollari mos ravishda $p_1 = 0.2; \;\; p_2 = 0.3; \;\; p_3 = 0.4$ ga teng. Zanjirda tok o'tmaslik ehtimolligini toping.

A. 0.32 V. 0.71 S. 0.813 D. 0.664 E. 0.976

56. A va V hodisalar birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lsa, ulardan istalgan birining ro'y berish ehtimoli nimaga teng?

A. $P(A \cup B) = P(A) - P(B)$ V. $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ S. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

D. $P(A/B) = P(A) + P(B)$ E. $P(A \cup B) = 2 - P(A \cap B)$

57. 2 ta o'yin soqqasi tashlangan. Chiqqan raqamlar yig'indisi 5 ga, ko'paytmasi 6 ga teng bo'lish ehtimolligini toping.

A. 1G'9 V. 5G'36 S. 7G'18 D. 1G'2 E. 1G'18

58. To'la ehtimol formulasini yozing.

A. $P(A) = P(B_i)P(AB_i)$ V. $P(A/B) = P(AB)/P(B)$ S. $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)$

D. $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)$ E. $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$

59. A va V hodisalar bog'liqsiz, u holda quyidagi o'rinli.

A. $P(A+B) = P(A) + P(B)$ V. $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ S. $P(A+B) = P(A) \cdot P(B)$

D. $P(AB) = 0$ E. $A \cap B = \varnothing$

60. A xodisaning V xodisa ro'y berish sharti ostidagi shartli ehtimolligi quyidagiga teng.

A. $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ V. $P(B/A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$ S. $P(A/B) = P(AB)/P(B)$

D. $P(A/B) = P(A)$ E. $P(A/B) = P(B)$

61. 2 ta tanga tashlanganda kamida bitta "GERB" chiqish ehtimolligini toping.

A. 0.2 V. 0.4 S. 0.5 D. 0.75 E. 0.8

62. Har bir tajribada A xodisaning ro'y berish ehtimoli r ga teng. n ta bog'liqsiz tajribada k marta A hodisa ro'y berish ehtimolligini nimaga teng?

A. $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $q = 1 - p$. V. $P_n(k) = C_n^k p^{n-k}(1-p)^k$. S. $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $q = 1 + p$.

D. $P_n(k) = C_n^k p^n q^n$. E. $P_n(k) = C_n^k p^n q^k$.

63. Muavr-Laplas lokal teoremasi qaysi taqsimotni qaysi taqsimot qonuniga yaqinlashtiradi?

A. binomial$\rightarrow$puasson V. binomial$\rightarrow$normal S. puasson$\rightarrow$normal

D. puasson$\rightarrow$binomial E. normal$\rightarrow$binomial

64. 2 ta shoshqaltosh tashlanganda necha xil natija bo'ladi?

A. 12 V. 6 S. 72 D. 25 E. 36

65. 3 ta tanga tashlanganda kamida 2 ta raqam chiqish ehtimolligi nechaga teng?
A. 1G'8 V. 1G'4 S. 3G'4 D. 3G'8 E. 0.5

66. O'g'il tug'ilish ehtimolligi 0.6 ga teng. Oilada 5 ta farzanddan 2 ta o'g'il bo'lish ehtimolligini toping.
A. 0.2 V. 0.31 S. 0.23 D. 0.25 E. 0.5

67. 1-tur xato qiymatlari qaysi oraliqda yotadi?
A. (0;1) B. (-1;1) C. [0;1] D. [-1;1] E. [0;1)

68. Markazlashtirilgan va normallashtirilgan tasodifiy miqdorlar ko'paytmasi matematik kutilmasi nima deb ataladi?
A. Regressiya koeffitsienti V. Chiziqli korrelyatsiya koeffitsienti
S. Korrelyatsion moment D. Kovariatsiya E. O'rta kvadratik og'ish

69. Noma'lum parametr ishonchlilik oralig'ida yotish ehtimolligi nima deb ataladi?
A. Kriteriy quvvati V. 1-tur xatolik S. 2-tur xatolik
D. Ishonchlilik oralig'i E. Ishonchlilik ehtimolligi

70. ξ tasodifiy miqdor (a, σ^2) parametrli normal taqsimotga ega. $D\xi$ nimaga teng?
A. 0 V. a S. σ D. σ^2 E. a^2

71. Quyidagi tengliklardan qaysi biri noto'g'ri? $F_{\xi,\eta}(x,y)$ - (ξ,η) tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi.
A. $x_1 < x_2$ bo'lsa, $F(x_1, y) \le F(x_2, y)$ V. $y_1 < y_2$ bo'lsa, $F(x, y_1) \le F(x, y_2)$
S. $F(-\infty, y) = 0$ D. $F(x, \infty) = 0$ E. $F(-\infty, \infty) = 0$

72. Tasodifiy miqdor $[1;4]$ oraliqda tekis taqsimlangan bo'lsa, $D\xi$ nimaga teng?
A. 4G'3 V. 3G'4 S. 2.5 D. 0 E. 1

73. ξ tasodifiy miqdor 3 parametrli ko'rsatgichli taqsimlangan. $M\xi$ nimaga teng?
A. 3 V. 1G'3 S. 1G'9 D. 0 E. 1

74. (ξ,η) tasodifiy vektor taqsimoti quydagicha:

$\eta \setminus \xi$	-1	0	1
0	1G'16	1G'4	1G'16
1	1G'16	1G'4	5G'16

$\varepsilon = \xi + \eta$ ning taqsimoti topilsin.

A. ε: -1 0 1; $p: \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}$

V. ε: -1 0 2 2; $p: \frac{1}{16}\ \frac{5}{16}\ \frac{5}{16}\ \frac{5}{16}$

S. ε: -1 0 1 2; $p: \frac{5}{16}\ \frac{5}{16}\ \frac{5}{16}\ \frac{2}{16}$

D. ε: -1 0 2 2; $p: \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}$

E. ε: -1 2; $p: \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$

75. ξ, η tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz deyiladi, agar quyidagi o'rinli bo'lsa:
A. $F_{\xi\eta}(x,y) = F_\xi(x) + F_\eta(y)$ V. $F_{\xi\eta}(x,y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)$ S. $F_\xi(x) = 1 - F_\eta(y)$
D. $F_\xi(x) = F_\eta(y)$ E. $F_{\xi\eta}(x,y) = 1$

76. ξ tasodifiy miqdorning k-momenti nimaga teng? (Diskret hol uchun)

A. $M\xi^k=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^k p_i$ V. $M\xi^k=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^k p_i^k$ S. $M\xi^k=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\, p_i^k$

D. $M\xi^k=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\, p_i$ E. $M\xi^k=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-M\xi)^k p_i$

77. Taqsimot funktsiyadan olingan birinchi tartibli xosila qanday funktsiya deyiladi?

A. Uzluksiz funktsiya V. Uzlukli funktsiya S. Juft funktsiya

D. Toq funktsiya E. Zichlik funktsiya

78. X uzluksiz tasodifiy miqdor bo'lib, $f(u)$ uning zichlik funktsiyasi bo'lsin. Quyidagi tengsizliklardan to'g'risini aniqlang.

A. $P(a<x<b)=f(a)-f(b)$ V. $P(a<x<b)=\int_a^b f(x)dx$ S. $P(a<x<b)=f(b)$

D. $P(a<x<b)=1-f(b)f(a)$ E. $P(a<x<b)=f(b)=f(a)$

79. Zichlik funktsiya qanday xossalarga ega?

A. $\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=1$, $f(x)\geq 0$ V. $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$, $f(x)\leq 0$ S. $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$, $f(x)\geq 0$ D. $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=0$, $f(x)\geq 0$ E. $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx>0$, $f(x)\geq 0$

80. X uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi nimaga teng?

A. $MX=\sum_{i=1}^{\infty}X_iP_i$ V. $MX=\int_{-\infty}^{\infty}xF(x)dx$ S. $MX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$

D. $MX=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx$ E. $MX=\int_{-\infty}^{\infty}x^3f(x)dx$

81. Agar $f(u)$ X tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi bo'lsa, $M\varphi(x)=?$

A. $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx-f(x)$ V. $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx-\varphi(x)$ S. $\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\varphi(x)dx$

D. $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx$ E. $\int_{-\infty}^{\infty}x^2\varphi(x)dx-f(x)$

82. X uzluksiz tasodifiy miqdorning dispertsiyasi nimaga teng?

A. $DX=MX^2+(MX)^2$ V. $DX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$ S. $DX=x_1^2p_1+x_2^2p_2+...+x_n^2p_n$

D. $DX=1-MX^2$ E. $DX=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx-\left[\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx\right]^2$

83. $\varepsilon_1,...,\varepsilon_n$ o'zaro bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar katta sonlar qonuniga bo'ysunadi deyiladi, agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun:

A. $P\left[\left|\frac{\varepsilon_1+...+\varepsilon_n}{n}\right|<\varepsilon\right]=1$ V. $P\left[\left|\frac{\varepsilon_1+...+\varepsilon_n}{n}+a\right|>\varepsilon\right]=\frac{1}{2}$ S. $P\left[\left|\frac{\varepsilon_1+...+\varepsilon_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right]\to 1$

D. $\varepsilon_1+...+\varepsilon_n\xrightarrow{P}a$ E. $\varepsilon_1+...+\varepsilon_n\xrightarrow{P}0$

84. X uzluksiz tasodifiy miqdorning dispertsiyasi nimaga teng?

A. $DX = MX^2 + (MX)^2$ V. $DX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ S. $DX = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + ... + x_n^2 p_n$

D. $DX = 1 - MX^2$ E. $DX = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx\right]^2$

85. (0,1) parametrli normal taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdor zichlik funktsiyasi nimaga teng?

A. $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ V. $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-1)^2}{x}}$ S. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$

D. $f(x) = \frac{3}{x^4};\ x \geq 1$ E. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-1)^2}{2}}$

86. (x, y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi deb nimaga aytiladi?
A. $F(x, y) = P(X < x) \cdot P(Y < y)$ V. $F(x, y) = P(X < x, Y < y)$ S. $F(x, y) = P(X < x) + P(Y < y)$ D. $F(x, y) = P(X < x) / P(Y < y)$ E. $F(x, y) = P(X < x) - P(Y < y)$

87. $F(x, y)$-ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi bo'lsa, $f(x, y)$ zichlik funktsiyasi nimaga teng?

A. $f(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$ V. $f(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$ S. $f(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x \partial y}$

D. $f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x, y)dxdy$ E. $f(x, y) = 1 - F(x, y)$

88. 2 o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo'lsa, ξ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

$\eta \backslash \xi$	-1	0	1
-1	1G'8	1G'12	7G'24
1	1G'24	1G'6	1G'8

A. ξ: -1 0 1; $p: \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{12}$ V. ξ: -1 0 1; $p: \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}$ S. ξ: -1 0 1; $p: \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{22}$

D. ξ: -1 0 1; $p: \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}$ E. ξ: -1 1; $p: \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$

89. $\{\xi_n\}$-o'zaro bog'liqsiz bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $M\xi_n = a$, $D\xi_n = \sigma^2$, $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$, $\Phi(x)$-normal taqsimot funktsiyasi. Agar $0 < \sigma^2 < \infty$ bo'lsa, markaziy limit teoremada qanday munosabat o'rinli bo'ladi?

A. $P\left[\frac{S_n - an}{\sigma\sqrt{n}} < x\right] \to \Phi(x)$ V. $P\left[\frac{S_n - \sigma}{\sigma\sqrt{n}} < x\right] \to \Phi(x)$ S. $P\left[\frac{S_n - \sigma}{\sigma\sqrt{n}} < x\right] < \Phi(x)$

D. $P\left[\frac{S_n - x_n}{\sigma\sqrt{n}} < \sigma\right] < \Phi(x)$ E. $P\left[\frac{S_n - n\sigma_n}{\sigma\sqrt{n}} < x\right] \to \Phi(x)$

90. ε tasodifiy miqdor λ parametrli ko'rsatkichli taqsimotga ega $P|\varepsilon < x| = 1 - e^{-\lambda x}$ $(x \geq 0)$ $\eta = \sqrt{\varepsilon}$ tasodifiy miqdor zichlik funktsiyasini toping.

A. $\lambda e^{-\lambda\sqrt{n}}\ (x>0)$ V. $2\sqrt{x\lambda}\ (x>0)$ S. $2\lambda\sqrt{xe^{-\lambda x}}\ (x>0)$
D. $(1+\lambda)e^{-\lambda\sqrt{x}}\ (x>0)$ E. $2\lambda xe^{-\lambda x^2}\ (x>0)$

91. ε tasodifiy miqdor $F_\varepsilon(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ \frac{x}{2}-1, & 2<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$ taqsimot funktsiya bilan berilgan. $\eta=\frac{3\varepsilon+1}{2}$ tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasini toping.

A. $F_\eta(x)=\begin{cases}0, & x\le 2.32\\ 0.5x-1, & 2.32<x\le 4.5\\ 1, & x>4.5\end{cases}$ V. $F_\eta(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$ S. $F_\eta(x)=1-e^{-\lambda x}\quad (x\ge 0)$

D. $F_\eta(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \frac{x-a}{x}, & a<x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}$ E. $F_\eta(x)=\begin{cases}0, & x\le 3.5\\ \frac{2x-1}{3}, & 3.5<x\le 6.5\\ 1, & x>6.5\end{cases}$

92. Uzluksiz tasodifiy miqdorning bitta tayin qiymati x_1 ni qabul qilish ehtimoli nechaga teng?

A. $P(X=x_1)=\frac{1}{2}$ V. $P(X=x_1)=0$ S. $P(X=x_1)=1$ D. $P(X=x_1)=-1$ E. $P(X=x_1)=5$

93. Tanlanmaning eng katta va eng kichik qiymatlari orasidagi farq nima deb ataladi?
A. Moda V. Ko'lam S. Mediana D. Standart E. Xajm

94. Asosi variatsion qator intervallaridan va balandligi mos intervallarning nisbiy chastotasiga teng bo'lgan to'rtburchaklardan iborat figura nima deb ataladi?
A. poligon V. Ko'pburchak S. Kumulyant D. Gistogramma E. Zichlik funktsiya

95. Moda deb nimaga aytiladi?
A. Variantaning eng katta qiymati
V. Statistik qatorda eng ko'p uchragan varianta
S. Statistik qatordagi eng katta varianta
D. Statistik qatordagi eng katta chastota
E. Tanlanmadagi eng katta varianta

96. $P(AB)=0.1,\quad P(A)=0.5,\quad P(B)=0.2$ bo'lsa, $P(A/B)$ ni toping.
A. 0.02 V. 0.5 S. 0.2 D. 0.4 E. 0.05

97. $P(A/B)\ne P(A)$ tenglikdan qanday xulosa kelib chiqadi?
A. $A\cap B\ne\varnothing$ V. $A\cap B=\varnothing$ S. $A\perp B$ D. A va V teskari E. A va V o'zaro bog'liq

98. Bitta quroldan 3 marta o'q uzilganda hech bo'lmaganda bittasining nishonga tegish ehtimoli 0.992 ga teng. Bir marta o'q uzilganda nishonga tegish ehtimoli nimaga teng?
A. 0.1 V. 0.8 S. 0.4 D. 0.6 E. 0.08

99. Sinfdagi kitoblarning 80% i mashqlar to'plami va 20% i o'quv qo'llanma. Mashqlar to'plamining 20% i va o'quv qo'llanmaning 40% i yaroqsiz. Tavakkaliga olingan bitta kitob yaroqsiz bo'lish ehtimolini toping.
A. 0.24 V. 0.36 S. 0.48 D. 0.6 E. 0.72

100. Kvadrat ichiga aylana ichki chizilgan. Kvadratga n ta nuqta tashlanganda kamida 1 tasi aylana ichiga tushish ehtimolini toping.

A. $1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^n$ V. $\left(1-\frac{\pi}{4}\right)^n$ S. $1-\left(1-\frac{\pi}{4}\right)^n$ D. $1-\left(\frac{4}{\pi}\right)^n$ E. $\left(\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right)^n$

6. INFORMATsION - USLUBIY TA’MINOT

Foydalaniladigan asosiy darsliklar va o’quv qo’llanmalar ro’yhati

Asosiy darsliklar va o’quv qo’llanmalar

1. Б.В.Гнеденко «Курс теории вероятностей», Москва, «Наука» 1987 г.
2. А.А.Боровков «Теория вероятностей», Москва, «Наука», 1999 г.
3. С.Ҳ.Сирожиддинов, М.Маматов «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика», Тошкент, «Ўқитувчи», 1980 й.
4. Б.А.Севостьянов, В.И.Чистяков, А.М.Зубков «Сборник задач по теории вероятностей», Москва, «Наука», 1989 г.
5. A.A.Abdushukurov, «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» Toshkent, «Universitet», 2010 y.
6. A.A.Abdushukurov, T.Zuparov «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» Toshkent, «Tafakkur-Bo’stoni», 2015 y.
7. A.A.Abdushukurov, T.A.Azlarov, A.A.Djamirzaev «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan misol va masalalar to’plami» Toshkent, «Universitet», 2003 y.
8. Jun Shao Mathematikal Statistics. Springer. 2003. 591 p.
9. Расулов А.С., Раимова Г.М., Саримсакова Х.Қ. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. Т. 2005 й.
10. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков . Сборник задач по теории вероятностей М.: Наука, 1999 г.

Qo’shimcha adabiyotlar

11. Севостянов Б.А. «Курс теории вероятностей и математической статистики», Москва, «Наука», 1982 г.
12. Ширяев А.Н. «Вероятность», 2-е изд., Москва, «Наука»,1989 г.
13. Чистяков Р.П. «Курс теории вероятностей», Москва, «Наука», 1987 г.
14. A.A.Abdushukurov «Ehtimollar nazariyasidan ma’ruzalar matni», Toshkent, «O’zMU», 2000 y.
15. Гмурман В.Е. «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан масалалар ечишга доир қылланма», Тошкент, «Ўқитувчи», 1980 й.
16. http://www.nsu.ru/icem/grants/etfm/ ;
17. http://www.lib .homelinex.org/math/;
18. http://www.eknigu.com/lib/mathematics/;
19. http://www.eknigu.com/info/M_Mathematics/MC
20. http://www.rsl.ru/ - Российская государственная библиотека;
21. http://www.msu.ru/ - Московский государственный университет;
22. http://www.nlr.ru/ - Российская национальная библиотека;
23. http://www.el.tfi.uz/pdf/enmcoq22.uzk.pdf ;
24. http://www.el.tfi.uz/pdf/enmcoq22.uzl.pdf ;

7.Fan dasturi

O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

Ro’yhatga olindi
№_____________
20__ yil «__»____

O’zbekiston Respublikasi Oliy va o’rta
maxsus ta’lim vazirining
20__ yil «__» _____dagi
«__» - sonli buyrug’i bilan
tasdiqlangan

«EHTIMOLLAR NAZARIYaSI VA MATEMATIK STATISTIKA» fanining

O’QUV DASTURI

Bilim sohasi: 400000 – Fan

Ta’lim sohasi: 460000 – Matematika va statistika

Ta’lim yo’nalishi: 5460100-Matematika

Toshkent – 20__

Fanning o'quv dasturi Oliy va o'rta maxsus, kasb – hunar ta'limi o'quv-uslubiy birlashmalari faoliyatini Muvofiqlashtiruvchi Kengashning 20__ yil «___»_______dagi «____»– son majlis bayoni bilan ma'qullangan.

Fanning o'quv dasturi MIRZO ULUG'BEK nomidagi O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETIda ishlab chiqildi.

Tuzuvchi:

Abdushukurov A.A. – «Ehtimolar nazariyasi va matematik statistika» kafedrasi mudiri, f.–m. f.d.

Taqrizchilar:

Djamirzaev A.A. – Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi.

Xusanboev Yo. – O'zFA, Matematika va axborot texnologiyalari instituti katta ilmiy hodimi, fizika-matematika fanlari doktori.

Fanning o'quv dasturi Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti Ilmiy – metodik kengashida tavsiya qilingan. (20__ yil "___"_______dagi "____"– sonli bayonnoma).

Kirish

Hozirgi kunda zamonaviy texnologiyaning jadal rivojlanishi natijasida turli murakkab jarayonlarni, iqtisodiy masalalarni o'rganish, ularni matematik nuqtai nazardan tasavur qilish, modellarini tuzish va echish nafaqat nazariy jihatdan, balkim tadbiqiy jihatdan ham dolzarb, ham amaliy ahamiyatga ega bo'lgan muammolardan biri hisoblanadi.

«Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» kursi matematikaning eng muhim yo'nalishlaridan biri bo'lgan matematik statistika asoslari bilan bog'liq ravishda tuzilgandir. U bakalavriyatning statistika yo'nalishi o'quv rejasidagi ixtisoslik fanlaridan biri hisoblanadi. Ehtimollar nazariyasining tatbiqlari na faqat nazariy fizika va statistik, fizika, kvant mexanikasi, astronomiya, radioelektronika va bialogiyalardagina emas, bundan tashqari uning natijalari va metodlari ommaviy hizmat ko'rsatish nazariyasida, ishonchlilik nazariyasida, matematik lingvistikada, ishlab chiqarishni planlashtirish va optimal boshqarishda, mahsulotlar sifatini kontrol qilishda va boshqa maqsadlarda keng qo'llaniladi. hozirgi paytda ehtimollar nazariyasi va matematik statistikani moliyaviy matematika va sug'urta masalalarida keng qo'llanilishi bu fanga bo'lgan qiziqishni shubxasiz kuchaytiradi va uni o'rganishning qanchalik muhimligini ko'rsatadi.

O'quv fanining maqsadi va vazifalari

Fanni o'qitishdan maqsad - talabalarda nazariy ehtimollik intuitsiyani, ya'ni amalda uchraydigan statistik tajribalardagi tasodifiy xodisalarni aks ettiruvchi matematik modellarni tuzishni uddalay olish va uni taxlil eta bilish qobiliyatini rivojlantirishdan iborat.

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika keng tarmoqli fan bo'lib, ilmiy tadqiqotlarda muhim g'oyaviy qurol vazifasini bajaradi. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning tadbiqlari nafaqat nazariy fizika va statistik fizika, kvant mexanikasi astronomiya, radioelektronika va biologiyadagina emas, bulardan tashqari uchun usul va natijalari ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasida, ishonchlilik nazariyasida matematik lingvistikada, ishlab chiqarishni planlashtirish va optimal boshqarishda, maxsulotlar sifatini nazorat qilishda va boshqa maqsadlarda keng qo'llaniladi. Hozirgi paytda ehtimollar nazariyasi va matematik statistikani moliyaviy matematika va sug'urta masalalarida keng qo'llanilishi bu fanga bo'lgan qiziqishni kuchaytirib, uni o'rganishning qanchalik zarurligini ko'rsatadi.

Fanning vazifalari- ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani matematik fanlarning ko'pgina bo'limlari asosini tashkil qiladi. Klassik statistika jarayonlarini aniq tasavvur qilish, bu jarayonlarning matematik modelini tuzish va echimlarini topish metodlarini o'rganish, echimlarni matematik tahlil qilish.

Fan bo'yicha talabalarning bilim, malaka va ko'nikmaga qo'yiladigan talablar

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanini o'zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida bakalavr:

-matematik model, chiziqli regressiya tenglamalari, bashorat qilish usullari, vaqt qatorlari, foiz stavkasi, hisob stavkasi mavzularini puxta o'zlashtirgan bo'lishlari, klassik modellari to'g'risida kurs dasturi doirasida bilimga ega bo'lishlari, fanning asosiy printsiplari asoslarini bilishlari hamda ularning mohiyatini tushunishlari talab etiladi. Iqtisodiy jarayonlarning matematik modellari uchun to'la tenglamalar sistemasi mavjud bo'lgan hollarni bilishlari va ularga misol tariqasida qaralgan masalalarni matematik echish usullarini o'zlashtirgan bo'lishlari hamda mazkur echimlarni tahlil qila olishi kerak.

- matematik analiz, funktsional analiz, chiziqli algebra, ehtimollar nazariyasi va boshqa matematikaning asosiy tushunchalarini bilish kerak.

-Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanini o'rganish talabalarda tegishli jarayonlar haqida tasavvurga ega bo'lishlarida, ayni paytda ularni mantiqiy fikrlashga va to'g'ri hulosalar chiqarishga o'rgatadi.

-Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika bilan shug'ullangan talabalardan matematik statistika, va ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalarini bilish talab qilinadi. Individual va kollektiv sug'urtalash modellari. Bankrotlik (kasod bo'lish) modellari. Hayotni sug'urtalash. Umr – tasodifiy miqdor. Yashab ketish funktsiyasi. O'lim egri chizig'i. O'lim jadalligi. O'rtacha umr va uning dispersiyasi. O'limning analitik modellari. Umr davomiyligi jadvali.

-Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanini o'rganish talabalarda tegishli jarayonlar haqida tasavvurga ega bo'lishlarida, ayni paytda ularni mantiqiy fikrlashga va to'g'ri hulosalar chiqarishga o'rgatadi.

-Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika modellarini tuzish zaruriyatini tushunishlari va muayyan modellar haqida ma'lum tushunchaga ega bo'lishlari kerak. Undan tashqari sug'urta matematikasi, moliyaviy matematika, ekonometrika, statistika va ehtimollar nazariyasi kurslarining boshqa barcha qismlariga oid misol hamda masalalar echa olishlari talab etiladi.

Fanning o'quv rejadagi boshqa fanlar bilan o'zaro bog'liqligi va uslubiy jihatdan uzviy ketma-ketligi

Statistika yo'nalishining bakalavr bosqichida o'qiladigan barcha ixtisoslik fanlari ehtimollar nazariyasi va matematik statistika faniga asoslanadi. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani matematik analiz, chiziqli algebra va geometriya, differentsial geometriya, differentsial tenglamalar, matematik fizika tenglamalari, variatsion hisob va optimallashning matematik usullari, hisoblash usullari fanlari bilan uzviy bog'liq va ushbu fanlarni bilish zarur.

Fanning ishlab chiqarishdagi o'rni

Mazkur dasturga ko'ra ushbu fan doirasida ko'plab model masalalar o'rganiladiki, bu mazkur fanni chuqur o'rgangan har bir bakalavr olgan bilim va ko'nikmalarini ilmiy-tadqiqot ishlarida, shuningdek, talim tizimida samarali foydalanishi imkonini beradi.

Fanni o'qitishda zamonaviy axborot va pedagogik texnologiyalar

Talabalarga fanning mavzular bo'yicha darslar elektron vositalar yordamida tashkil qilinadi. Talabalarning fanni o'zlashtirishlari uchun o'qitishning ilg'or va zamonaviy usullaridan foydalanish, yangi informatsion-pedagogik texnologiyalarni tadbiq etish muhim ahamiyatga ega. Fanni o'zlashtirishda darslik, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruza matnlari, tarqatma materiallar, virtual stendlardan foydalaniladi. Ma'ruza va amaliy darslarida mos ravishdagi ilg'or pedagogik texnologiyalardan foydalaniladi.

Asosiy qism
Fanning nazariy mashg'ulotlari mazmuni

Elementar hodisalar va hodisalar algebrasi. Hodisa ehtimoli tushunchasi va uni klassik, geometrik hamda statistik ta'riflari. Ehtimolning xossalari. A.N.Kolmogorov aksiomalari. Shartli ehtimollik. Hodisalarning bog'liqsizligi. To'la ehtimol va Bayes formulalari. Bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligi. Bernulli sxemasi va formulasi.Muavr – Laplasning lokal va integral limit teoremalari.Puasson teoremasi. Integral limit teorema tadbiqlari. Tasodifiy miqdor va taqsimot funktsiya. Taqsimot funktsiya xossalari. Diskret va uzluksiz tipdagi tasodifiy miqdorlar. Ba'zi muhim taqsimot. Ko'p o'lchovli taqsimotlar. Tasodifiy miqdorlardan olingan funktsiyalarning taqsimotlari.Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari. Matematik kutilma va xossalari. Dispersiya va xossalari.Yuqori tartibli momentlar.Korrelyatsiya koeffitsienti.Katta sonlar qonuni.Chebishev teoremasi va tengsizligi.Katta sonlar qonunining tadbiqlari.Markaziy limit teorema.Lyapunov teoremasi.Markaziy limit teorema tadbiqlari.Matematik statistikaning asosiy masalalari.Bosh to'plam va tanlanma.Tanlanma. Tanlanmani dastlabki qayta ishlash.Empirik taqsimot funktsiya va Glivenko teoremasi.Empirik ko'rsatkichlar va ularni hisoblash.Noma'lum parametrlarni baholash. Baho turlari. Nuqtaviy baholar va baholarni tuzish usullari. Noma'lum parametrlarni baholashning ishonchli oraliq usuli. Xi-kvadrat va Styudent taqsimotlari. Normal taqsimot parametrlarini ishonchli oraliq usuli bilan baholash. Statistik gipotezalarni tekshirish. 1- va 2-tur xatoliklar. Neyman-Pirson kriteriysi. Pirsonning xi-kvadrat statistikasi va uni tadbiqlari.

Amaliy mashg'ulotlarini tashkil etish bo'yicha ko'rsatma va tavsiyalar

Amaliy mashg'ulotlardan maqsad ma'ruza materiallari bo'yicha talabalarning bilim va ko'nikmalarini chuqurlashtirish va kengaytirishdan iborat. Bunda talabalar amaliy mashg'ulotlarda misol va masalalarni echishda,echimlarni tahlil qilishda olgan nazariy bilimlarini qo'llay olishlari nazarda tutiladi.

Amaliy mashg'ulotlar mavzulari

1. Elementar hodisalar fazosi tuzish va hodisalar ustida amallar.
2. Ehtimolni klassik va geometrik ta'riflari bo'yicha hisoblash.
3. A.N.Kolmogorov aksiomalaridan kelib chiqadigan ehtimolning xossalari. Shartli ehtimollik. Hodisalar bog'liqsizligi va bog'liqsiz hodisalar yig'indisi ehtimoli. To'la ehtimollik va Bayes formulalari.
4. Bernulli formulasini qo'llash. Binomial ehtimollik xossalari.
5. Lokal va integral limit teoremalarni tadbiq etish. Puasson formulasi.
6. Muavr – Laplas integral limit teoremani qo'llash.
7. Tasodifiy miqdorlar va taqsimot funktsiyalar. Ba'zi muhim taqsimotlar.
8. Ko'p o'lchovli taqsimotlar. Tasodifiy miqdorlar funktsiyalari taqsimotlari.
9. Matematik kutilma, dispersiya. Yuqori tartibli momentlar. Korrelyatsiya koeffitsienti.
10. Katta sonlar qonuni va markaziy limit teoremalarni ba'zi tadbiqlari.
11. Reprezentativ tanlanma olish. Tanlanmani dastlabki qayta ishlash.
12. Tanlanmaning empirik ko'rsatkichlarini hisoblash.
13. Noma'lum parametrlar uchun nuqtaviy baholar olish va uning xossalarini o'rganish.
14. Parametrlarni ishonchli oraliq usuli bilan baxolash.
15. Pirsonning xi-kvadrat kriteriysini qo'llab gipotezalarni tekshirish.
16. Regressiya tanlanmalari tuzish.

Ilova: Talabalar amaliy mashg'ulotlarning kamida 12-13 tasini bajarishi kerak **.**

Seminar mashg'ulotlarini tashkil etish bo'yicha ko'rsatmalar

Seminar mashg'ulotlaridan maqsad hozirgi zamonaviy kompyuterlar yordamida bazi bir ehtimolliklarni, jarayonlarni talabaning ko'z o'ngida sodir bo'lishni, ushbu masalalarni differentsial tenglamalarini tuzish, ularni integrallash, analitik sonli echimlarini olish va echimlarni ilmiy tahlil qilish ko'zda tutilgan.

Seminar mashg'ulotlari uchun mavzular

1. Matematik statistikani asosiy masalalari.
2. Variatsion qator va uni grafik tasvirlash.
3. Empirik ko'rsatkichlar va ularni hisoblash.
4. Nuqtaviy baholar olish usullari: haqiqatga maksimal o'xshashlik usul, momentlar usuli, eng kichik kvadratlar usuli.

5. Korrelatsiya va regressiya. Korrelatsiya koeffitsenti.
6. Ko'p o'lchovli tanlanma tahlili.

Mustaqil ishlarni tashkil etish shakli va mazmuni

Bunda ushbu ishlarni bajaradilar:
-Amaliy mashg'ulotlarga tayergarlik;
-Nazariy tayergarlik ko'rish;
-Uy vazifalarni bajarish;
-O'tilgan materiallar mavzularini qaytarish;
-Mustaqil ish uchun mo'ljallangan nazariy bilim mavzularini o'zlashtirish.

Bunda talabalar ma'ruzalarda olgan bilimlarini amaliy mashg'ulotlarni bajarishlari bilan mustahkamlashi hamda statistikaning ba'zi mavzularini tushunishi hamda ularga oid masalalarni echishlari kerak.

Mustaqil ish mavzularini o'zlashtirish ta'lim jarayonida uzluksiz nazorat qilib boriladi va yozma hisobot sifatida topshiriladi.

Mustaqil ish mavzulari

1. Kombinatorika asosiy printsipi va kombinatorikaning ba'zi formulalari.
2. Ehtimolni hisoblashning klassik, geometrik va statistik usullarining chegaralanganligi. Uzluksiz va sanoqli additivlik aksiomalari orasidagi munosabat.
3. Hodisalarning o'z to'plamida bog'liqsizligi va juft-jufti bilan bog'liqsizligi orasidagi munosabat. Bershteyn misoli.
4. Bog'liqsiz tajribalar ketma-ketlining Puasson sxemasi. Bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligi. Markov zanjiri. Hosil qiluvchi funktsiyalar. Ehtimollarning polinomial taqsimoti. Amaliyotda uchraydigan ba'zi muhim taqsimotlarni o'rganish. Kompozitsiya formulasi isboti va misollar. Matematik kutilma yoki dispersiyasi mavjud bo'lmagan tasodifiy miqdorlarga misollar tuzish.
5. Korrelyatsiya koeffitsientini amalda qo'llanishi. Katta sonlar qonuniga oid Markov, Xinchin va Kolmogorov teoremalari taxlili.
6. Xarakteristik funktsiya va xossalari.
7. Lindeberg sharti ostida markaziy limit teoremani isbotlash.
8. Tanlanmaning reprezentativligi va uni hosil qilishni usullari.
9. Chastotali variatsion qator tuzish.
10. O'rta qiymat turlari. Variatsiya asimmetriya, ekstsess koeffitsientlari.
11. Noma'lum parametrlarni baholashning usullari. Olingan baholarning xossalari.
12. Ba'zi muhim taqsimotlar parametrlari uchun nuqtaviy baholar.
13. Muhim taqsimotlar parametrlari uchun interval baholar tuzish. Kritik to'plamlar tuzish. Vilkokson-Monn-Uitni kriteriysi va uni qo'llash.
14. Kolmogorov – Smirnov kriteriysi va uni qo'llash.

Dasturning informatsion – uslubiy ta'minoti

Mavzularni yoritishda interfaol usullar, axborot – kommunikatsiya texnologiyalari, amaliy dastur paketlaridan, internetda mavjud resurslardan keng foydalanish mumkin.

Mavzularni o'zlashtirishda va mustaqil ishlarni bajarishda adabietlar ro'yxatida keltirilgan mavjud darsliklar, o'quv qo'llanmalari, elektron adabietlar bilan metodik ta'minlanadilar.

Dasturdagi mavzularni o'tishda ta'limning zamonaviy usullardan keng foydalanish,o'quv jaraenini yangi pedagogik texnologiyalar asosida tashkil etish samarali natija beradi. Bu borada zamonaviy pedagogik texnologiyalarning “Bumerang”, «Munozarali dars» usullari hamda mavzularga oid slaydlardan foydalanish nazarda tutiladi.

Foydalaniladigan asosiy darsliklar va o’quv qo’llanmalar ro’yhati

Asosiy darsliklar va o’quv qo’llanmalar

25. B.V.Gnedenko «Kurs teorii veroyatnostey», Moskva, «Nauka» 1987 g.
26. A.A.Borovkov «Teoriya veroyatnostey», Moskva, «Nauka», 1987 g.
27. S.H.Sirojiddinov, M.Mamatov «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika», Toshkent, «O’qituvchi», 1980 y.
28. B.A.Sevostyanov, V.I.Chistyakov, A.M.Zubkov «Sbornik zadach po teorii veroyatnostey», Moskva, «Nauka», 1989 g.
29. A.A.Abdushukurov, T.A.Azlarov, A.A.Djamirzaev «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan misol va masalalar to’plami» Toshkent, «Universitet», 2003 y.

Qo’shimcha adabiyotlar

30. Sevostyanov B.A. «Kurs teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistiki», Moskva, «Nauka», 1982 g.
31. Shiryaev A.N. «Veroyatnost», 2-e izd., Moskva, «Nauka»,1989 g.
32. Chistyakov R.P. «Kurs teorii veroyatnostey», Moskva, «Nauka», 1987 g.
33. A.A.Abdushukurov «Ehtimollar nazariyasidan ma’ruzalar matni», Toshkent, «O’zMU», 2000 y.
34. Gmurman V.E. «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar echishga doir qo’llanma», Toshkent, «O’qituvchi», 1980 y.
35. http:G’G’www.nsu.ruG’icemG’grantsG’etfmG’ ;
36. http:G’G’www.lib .homelinex.orgG’mathG’;
37. http:G’G’www.eknigu.comG’libG’mathematicsG’;
38. http:G’G’www.eknigu.comG’infoG’M_MathematicsG’MC
39. http:G’G’www.rsl.ruG’ - Rossiyskaya gosudarstvennaya biblioteka;
40. http:G’G’www.msu.ruG’ - Moskovskiy gosudarstvenno’y universitet;
41. http:G’G’www.nlr.ruG’ - Rossiyskaya natsionalnaya biblioteka;
42. http:G’G’www.el.tfi.uzG’pdfG’enmcoq22.uzk.pdf ;
43. http:G’G’www.el.tfi.uzG’pdfG’enmcoq22.uzl.pdf ;

8. Ishchi o'quv dasturi

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI

MATEMATIKA KAFEDRASI

"TASDIQLAYMAN"
GulDU o'quv ishlari prorektori
N.R.Barakaev
____
«___» ________2017 y.

«EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA»

fanining

ishchi o'quv dasturi

Bilim sohasi: 100000 – Gumanitar soha

Ta'lim sohasi: 130000 – Matematika

Ta'lim yo'nalishi: 5130100-Matematika

Umumiy o'quv soati – 252 s.

Shu jumladan:

Ma'ruza – 62 s.

Amaliyot mashg'ulotlari – 64 s.

Mustaqil ta'lim soati – 126 s.

Guliston – 2017 y.

Fanning ishchi o'quv dasturi namunaviy o'quv dasturi va o'quv rejasiga muvofiq ishlab chiqildi.

Tuzuvchilar:
X.Norjigitov – "Matematika" kafedrasi mudiri, fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent __________ (imzo)
F.Sh.Norboev – "Matematika" kafedrasi katta o'qituvchisi __________ (imzo)

Taqrizchi:
K. Jamuratov. – Guliston davlat universiteti "Umumiy matematika" kafedrasi dotsenti, f.m.f.n _________ (imzo)

Fanning ishchi o'quv dasturi "Matematika" kafedrasining 2017 yil "___" _________ dagi ___ - sonli majlisida ko'rib chiqilib, fakultet Ilmiy-uslubiy Kengashida ko'rib chiqish uchun tavsiya qilindi.

Kafedra mudiri: **dots. X. Norjigitov**

Fanning ishchi o'quv dasturi "Fizika-matematika" fakulteti Ilmiy-uslubiy Kengashining 2017 yil "___" _______ dagi "____" - sonli majlisida tasdiqlandi.

Fakultet Ilmiy-uslubiy
Kengashi raisi: **dots. A. Ashirov**

Kirish

Hozirgi kunda zamonaviy texnologiyaning jadal rivojlanishi natijasida turli murakkab jarayonlarni, iqtisodiy masalalarni o'rganish, ularni matematik nuqtai nazardan tasavur qilish, modellarini tuzish va echish nafaqat nazariy jihatdan, balkim tadbiqiy jihatdan ham dolzarb, ham amaliy ahamiyatga ega bo'lgan muammolardan biri hisoblanadi.

O'quv fanining maqsadi va vazifalari

Fanni o'qitishdan maqsad - talabalarda nazariy ehtimollik intuitsiyani, ya'ni amalda uchraydigan statistik tajribalardagi tasodifiy xodisalarni aks ettiruvchi matematik modellarni tuzishni uddalay olish va uni taxlil eta bilish qobiliyatini rivojlantirishdan iborat.

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika keng tarmoqli fan bo'lib, ilmiy tadqiqotlarda muhim g'oyaviy qurol vazifasini bajaradi. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning tadbiqlari nafaqat nazariy fizika va statistik fizika, kvant mexanikasi astronomiya, radioelektronika va biologiyadagina emas, bulardan tashqari uning usul va natijalari ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasida, ishonchlilik nazariyasida matematik lingvistikada, ishlab chiqarishni planlashtirish va optimal boshqarishda, maxsulotlar sifatini nazorat qilishda va boshqa maqsadlarda keng qo'llaniladi. Hozirgi paytda ehtimollar nazariyasi va matematik statistikani moliyaviy matematika va sug'urta masalalarida keng qo'llanilishi bu fanga bo'lgan qiziqishni kuchaytirib, uni o'rganishning qanchalik zarurligini ko'rsatadi.

Fanning vazifalari- ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani matematik fanlarning ko'pgina bo'limlari asosini tashkil qiladi. Klassik statistika jarayonlarini aniq tasavvur qilish, bu jarayonlarning matematik modelini tuzish va echimlarini topish metodlarini o'rganish, echimlarni matematik tahlil qilish.

Fan bo'yicha talabalarning bilim, malaka va ko'nikmaga qo'yiladigan talablar

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanini o'zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida bakalavr:

-matematik model, chiziqli regressiya tenglamalari, bashorat qilish usullari, vaqt qatorlari, foiz stavkasi, hisob stavkasi mavzularini puxta o'zlashtirgan bo'lishlari, klassik modellari to'g'risida kurs dasturi doirasida bilimga ega bo'lishlari, fanning asosiy printsiplari asoslarini bilishlari hamda ularning mohiyatini tushunishlari talab etiladi. Iqtisodiy jarayonlarning matematik modellari uchun to'la tenglamalar sistemasi mavjud bo'lgan hollarni bilishlari va ularga misol tariqasida qaralgan masalalarni matematik echish usullarini o'zlashtirgan bo'lishlari hamda mazkur echimlarni tahlil qila olishi kerak.

- matematik analiz, funktsional analiz, chiziqli algebra, va matematikaning boshqa asosiy tushunchalarini bilish kerak.
- ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanini o'rganish talabalarda tegishli jarayonlar haqida tasavvurga ega bo'lishlarida, ayni paytda ularni mantiqiy fikrlashga va to'g'ri hulosalar chiqarishga o'rgatadi.
- ehtimollar nazariyasi va matematik statistika modellarini tuzish zaruriyatini tushunishlari va muayyan modellar haqida ma'lum tushunchaga ega bo'lishlari kerak.

Fanning o'quv rejadagi boshqa fanlar bilan o'zaro bog'liqligi va uslubiy jihatdan uzviy ketma-ketligi

Matematika yo'nalishining bakalavr bosqichida o'qiladigan barcha ixtisoslik fanlariga ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani asoslanadi. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani matematik analiz, chiziqli algebra va geometriya, differentsial geometriya, differentsial tenglamalar, matematik fizika tenglamalari, variatsion hisob va optimallashning matematik usullari, hisoblash usullari fanlari bilan uzviy bog'liq.

Fanning ishlab chiqarishdagi o'rni

Mazkur dasturga ko'ra ushbu fan doirasida ko'plab model masalalar o'rganiladiki, bu mazkur fanni chuqur o'rgangan har bir bakalavr olgan bilim va ko'nikmalarini ilmiy-tadqiqot ishlarida, shuningdek, talim tizimida samarali foydalanishi imkonini beradi.

Fanni o'qitishda zamonaviy axborot va pedagogik texnologiyalar

Talabalarga fanning mavzular bo'yicha darslar elektron vositalar yordamida tashkil qilinadi. Talabalarning fanni o'zlashtirishlari uchun o'qitishning ilg'or va zamonaviy usullaridan foydalanish, yangi informatsion-pedagogik texnologiyalarni tadbiq etish muhim ahamiyatga ega. Fanni o'zlashtirishda darslik, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruza matnlari, tarqatma materiallar, virtual stendlardan foydalaniladi. Ma'ruza va amaliy mashg'ulot darslarida mos ravishdagi ilg'or pedagogik texnologiyalardan foydalaniladi.

Asosiy qism

Fanning nazariy mashg'ulotlari mazmuni

Stoxastik tajriba. Elementar hodisalar fazosi va hodisalar algebrasi. Hodisa ehtimoli tushunchasi va uni klassik, geometrik, aksiomatik hamda statistik ta'riflari. Ehtimolning xossalari. Shartli ehtimollik. Hodisalarning bog'liqsizligi. To'la ehtimol va Bayes formulalari. Bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligi. Bernulli sxemasi va formulasi. Binomial ehtimollar xossalari. Muavr – Laplasning lokal va integral limit teoremalari. Puasson teoremasi. Integral limit teorema tadbiqlari. Tasodifiy miqdor va taqsimot funktsiya. Taqsimot funktsiya xossalari. Diskret va uzluksiz tipdagi tasodifiy miqdorlar. Ba'zi muhim taqsimotlar. Ko'p o'lchovli taqsimotlar. Tasodifiy miqdorlardan olingan funktsiyalarning taqsimotlari. Kompozittsion formulalar. Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari. Matematik kutilma va xossalari. Dispersiya va xossalari. Yuqori tartibli momentlar. Korrelyatsiya koeffitsienti va xossalari. Katta sonlar qonuni. Chebishev teoremasi va tengsizligi. Katta sonlar qonunining tadbiqlari. Kuchaytirilgan katta sonlar qonuni. Markaziy limit teorema. Lyapunov teoremasi. Markaziy limit teorema tadbiqlari. Matematik statistikaning asosiy masalalari. Bosh va tanlanma to'plamlar. Guruhlangan va interval variatsion qatorlar. Tanlanmani dastlabki qayta ishlash. Empirik taqsimot funktsiya. Empirik ko'rsatkichlar va ularni hisoblash. Statistik baho tushunchasi. Nuqtaviy baholar va baholarni tuzish usullari. Noma'lum parametrlarni baholashning ishonchli oraliq usuli.Normal taqsimot bilan bog'liq taqsimotlar: xi-kvadrat va Styudent va Fisher taqsimotlari. Normal taqsimot parametrlarini ishonchli oraliq usuli bilan baholash. Statistik gipotezalar va ularning turlari. 1-va 2-tur xatoliklar. Pirsonning xi-kvadrat statistikasi va uni tadbiqlari.

Ma'ruza mashg'ulotlari (62 soat)

Mavzular bo'yicha auditoriya soatlari taqsimoti

TG'r	Mavzu	soati	Pedagogik va informatsion texnalogiyalar
1	Stoxastik tajriba.	2	Munozara
2	Elementar hodisalar fazosi va hodisalar algebrasi.	2	
3	Hodisa ehtimoli tushunchasi va uni klassik, geometrik, aksiomatik hamda statistik ta'riflari.	2	Aqliy hujum
4	Ehtimolning xossalari. Shartli ehtimollik. Hodisalarning bog'liqsizligi.	2	Aqliy hujum
5	To'la ehtimol va Bayes formulalari.	2	Munozara
6	Bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligi. Bernulli sxemasi va formulasi. Binomial ehtimollar xossalari.	2	
7	Muavr – Laplasning lokal va integral limit teoremalari.	2	Aqliy hujum
8	Puasson teoremasi. Integral limit teorema tadbiqlari.	2	Guruhlarda ishlash
9	Tasodifiy miqdor va taqsimot funktsiya. Taqsimot funktsiya xossalari.	2	
10	Diskret va uzluksiz tipdagi tasodifiy miqdorlar.	2	
11	Ba'zi muhim taqsimotlar.	2	Guruhlarda ishlash
12	Ko'p o'lchovli taqsimotlar.	2	Aqliy hujum

13	Tasodifiy miqdorlardan olingan funktsiyalarning taqsimotlari. Kompozittsion formulalar.	2	
14	Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari. Matematik kutilma va xossalari. Dispersiya va xossalari.	2	Prizentatsiya, Bumerang
15	Yuqori tartibli momentlar.	2	Guruhlarda ishlash
16	Korrelyatsiya koeffitsienti va xossalari.	2	
17	Katta sonlar qonuni. Chebishev teoremasi va tengsizligi. Katta sonlar qonunining tadbiqlari.	2	Prizentatsiya, Bumerang
18	Kuchaytirilgan katta sonlar qonuni.	2	Aqliy hujum
19	Markaziy limit teorema. Lyapunov teoremasi. Markaziy limit teorema tadbiqlari.	2	
20	Matematik statistikaning asosiy masalalari. Bosh va tanlanma to’plamlar.	2	Guruhlarda ishlash
21	Guruhlangan va interval variatsion qatorlar. Tanlanmani dastlabki qayta ishlash.	2	
22	Empirik taqsimot funktsiya. Empirik ko’rsatkichlar va ularni hisoblash.	2	Aqliy hujum
23	Statistik baho tushunchasi.	2	Aqliy hujum
24	Nuqtaviy baholar va baholarni tuzish usullari.	2	
25	Noma’lum parametrlarni baholashning ishonchli oraliq usuli.	2	Prizentatsiya, Bumerang
26	Normal taqsimot bilan bog’liq taqsimotlar: xi-kvadrat taqsimoti.	2	Aqliy hujum
27	Normal taqsimot bilan bog’liq taqsimotlar: Styudent va Fisher taqsimotlari.	2	
28	Normal taqsimot parametrlarini ishonchli oraliq usuli bilan baholash.	2	Guruhlarda ishlash
29	Statistik gipotezalar va ularning turlari.	2	Prizentatsiya, Bumerang
30	1-va 2-tur xatoliklar.	2	Aqliy hujum
31	Pirsonning xi-kvadrat statistikasi va uni tadbiqlari.	2	
	Yakuniy nazorat		
	Jami	62	

Amaliy mashg’ulotlarini tashkil etish bo’yicha ko’rsatma va tavsiyalar

Amaliy mashg’ulotlardan maqsad ma’ruza mashg’ulotlarida olingan nazariy bilimlarni amaliy masalalarni echishda qo’llash orqali bilim va ko’nikmalarini chuqurlashtirish va kengaytirishdan iborat. Bunda talabalar amaliy mashg’ulotlarda misol va masalalarni echishda, echimlarni tahlil qilishda olgan nazariy bilimlarini qo’llay olishlari nazarda tutiladi.

Amaliy mashg’ulotlar mavzulari

17. Kombinatorika elementlari.
18. Elementar hodisalar fazosi tuzish va hodisalar ustida amallar.
19. Ehtimolni klassik va geometrik ta’riflari bo’yicha hisoblash.
20. Shartli ehtimollik. Hodisalarning bog’liqsizligi. To’la ehtimol va Bayes formulalari.
21. Bernulli formulasini qo’llash. Binomial ehtimollik xossalari.
22. Muavr – Laplas integral limit teoremani qo’llash.
23. Tasodifiy miqdorlar va taqsimot funktsiyalar. Ba’zi muhim taqsimotlar.
24. Tasodifiy miqdorlardan olingan funktsiyalarning taqsimotlari. Kompozitsion formulalar.
25. Ko’p o’lchovli taqsimotlar. Tasodifiy miqdorlarning bog’liqsizligi.
26. Matematik kutilma, dispersiya. Yuqori tartibli momentlar. Korrelyatsiya koeffitsienti.
27. Ehtimollar nazariyasining asosiy tengsizliklari.

28. Katta sonlar qonuni. Kuchaytirilgan katta sonlar qonuni. Tadbiqlari.
29. Markaziy limit teorema va uni ba'zi tadbiqlari.
30. Reprezentativ tanlanma olish. Tanlanmani dastlabki qayta ishlash.
31. Tanlanmaning empirik ko'rsatkichlarini hisoblash.
32. Baho va uning xossalari.
33. Normal taqsimot bilan bog'liq taqsimotlar: xi-kvadrat va Styudent va Fisher taqsimotlari.
34. Noma'lum parametrlar uchun nuqtaviy baholash usullari.
35. Parametrlarni ishonchli oraliq usuli bilan baxolash.
36. 1- va 2- tur xatoliklarini hisoblash.
37. Pirsonning xi-kvadrat kriteriysini qo'llab gipotezalarni tekshirish.

Izoh: Ishchi dasturni shakllantirish jarayonida mazkur mashg'ulot turiga ishchi o'quv rejada ajratilgan soat hajmiga mos mavzular tanlab o'qitish tavsiya etiladi.

Amaliy mashg'ulot mavzulari bo'yicha auditoriya soatlari taqsimoti

TG'r	**Mavzu**	**soati**	**Pedagogik va informatsion texnalogiyalar**
1	Kombinatorika elementlari.	2	Munozara
2	Elementar hodisalar fazosi tuzish va hodisalar ustida amallar.	2	Guruhlarda ishlash
3	Ehtimolni klassik ta'rifi bo'yicha hisoblash.	2	Aqliy hujum
4	Ehtimolni statistik va geometrik ta'riflari bo'yicha hisoblash.	2	Guruhlarda ishlash
5	Shartli ehtimollik. Hodisalarning bog'liqsizligi.	2	
6	To'la ehtimol va Bayes formulalari.	2	Munozara
7	Bernulli formulasini qo'llash. Binomial ehtimollik xossalari.	2	
8	Muavr – Laplasning lokal va integral limit teoremalarini qo'llash	2	
9	Puasson teoremasi. Integral limit teorema tadbiqlari.	2	Guruhlarda ishlash
10	Tasodifiy miqdor va taqsimot funktsiya.	2	
11	Ba'zi muhim taqsimotlar.	2	Aqliy hujum
12	Tasodifiy miqdorlardan olingan funktsiyalarning taqsimotlari. Kompozitsion formulalar.	2	
13	Ko'p o'lchovli taqsimotlar.	2	Aqliy hujum
14	Tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligi.	2	
15	Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari. Matematik kutilma va xossalari. Dispersiya va xossalari.	2	Prizentatsiya, Bumerang
16	Yuqori tartibli momentlar.	2	Guruhlarda ishlash
17	Korrelyatsiya koeffitsienti.	2	Aqliy hujum
18	Ehtimollar nazariyasining asosiy tengsizliklari.	2	
19	Katta sonlar qonuni.	2	Prizentatsiya, Bumerang
20	Kuchaytirilgan katta sonlar qonuni. Tadbiqlari.	2	Aqliy hujum
21	Markaziy limit teorema va uni ba'zi tadbiqlari.	2	
22	Reprezentativ tanlanma olish. Tanlanmani dastlabki qayta ishlash.	2	Guruhlarda ishlash
23	Tanlanmaning empirik ko'rsatkichlarini hisoblash.		Aqliy hujum
24	Baho va uning xossalari.	2	Guruhlarda ishlash
25	Normal taqsimot bilan bog'liq taqsimotlar: xi-kvadrat taqsimoti.	2	
26	Normal taqsimot bilan bog'liq taqsimotlar: Styudent taqsimoti.	2	Prizentatsiya, Bumerang

27	Normal taqsimot bilan bog'liq taqsimotlar: Fisher taqsimoti.	2	
28	Noma'lum parametrlar uchun nuqtaviy baholash usullari.	2	Prizentatsiya, Bumerang
29	Parametrlarni ishonchli oraliq usuli bilan baxolash.	2	Aqliy hujum
30	Pirsonning xi-kvadrat kriteriysini qo'llab gipotezalarni tekshirish.	2	Prizentatsiya, Bumerang
31	1- tur xatoliklarini hisoblash.	2	Aqliy hujum
32	2- tur xatoliklarini hisoblash.	2	
	Jami	64	

Mustaqil ta'limni tashkil etishning shakli va mazmuni

Talaba mustaqil ta'limining asosiy maqsadi – o'qituvchining rahbarligi va nazoratida muayyan o'quv ishlarini mustaqil ravishda bajarish uchun bilim va ko'nikmalarini shakllantirish va rivojlantirish.

"Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika" fanini o'rganuvchi talabalar auditoriyada olgan nazariy bilimlarni mustahkamlash va amaliy masalalarni echishda ko'nikma hosil qilish uchun mustaqil ta'lim tizimiga asoslanib, kafedra o'qituvchilari rahbarligida, mustaqil ish bajaradilar. Bunda ular qo'shimcha adabiyotlarni o'rganib hamda Internet saytlaridan foydalanib ilmiy ma'ruzular tayyorlaydilar, amaliy mashg'ulot mavzusiga doir uy vazifalarini bajaradilar, ko'rgazmali qurollar va slaydlar tayyorlaydilar. mustaqil ta'limning maqsadi olingan nazariy bilimlarni mustahkamlash, belgilangan mavzular asosida qo'shimcha bilim olishdan iborat.

Talaba mustaqil ta'limini tashkil etishda quyidagi shakllardan foydalaniladi:

-ayrim nazariy mavzularni o'quv adabiyotlari yordamida mustaqil o'zlashtirish;
-berilgan mavzular bo'yicha axborot (referat) tayyorlash;
-nazariy bilimlarni amaliyotda qo'llash;
-maket, model va namunalar yaratish;
-ilmiy maqola, anjumanga ma'ruza tayyorlash va h.k.

Mustaqil ish mavzulari

15. Kombinatorika asosiy printsipi va kombinatorikaning ba'zi formulalari.
16. Ehtimolni hisoblashning klassik, geometrik va statistik usullarining chegaralanganligi. Uzluksiz va sanoqli additivlik aksiomalari orasidagi munosabat.
17. A.N.Kolmogorov aksiomalaridan kelib chiqadigan ehtimolning xossalari. Shartli ehtimollik. Hodisalar bog'liqsizligi va bog'liqsiz hodisalar yig'indisi ehtimoli. To'la ehtimollik va Bayes formulalari.
18. Hodisalarning o'z to'plamida bog'liqsizligi va juft-jufti bilan bog'liqsizligi orasidagi munosabat. Bernshteyn misoli.
19. Bog'liqsiz tajribalar ketma-ketlining Puasson sxemasi. Bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligi.
20. Hosil qiluvchi funktsiyalar. Ehtimollarning polinomial taqsimoti.
21. Amaliyotda uchraydigan ba'zi muhim taqsimotlarni o'rganish. Kompozitsiya formulasi isboti va misollar.
22. Matematik kutilma yoki dispersiyasi mavjud bo'lmagan tasodifiy miqdorlarga misollar tuzish.
23. Korrelyatsiya koeffitsientini amalda qo'llanishi. Katta sonlar qonuniga oid Markov, Xinchin va Kolmogorov teoremalari taxlili.
24. Xarakteristik funktsiya va xossalari.
25. Lindeberg sharti ostida markaziy limit teoremani isbotlash.
26. Tanlanmaning reprezentativligi va uni hosil qilishni usullari.
27. Noma'lum parametrlarni baholashning usullari. Olingan baholarning xossalari.
28. Ba'zi muhim taqsimotlar parametrlari uchun nuqtaviy baholar.
29. Muhim taqsimotlar parametrlari uchun interval baholar tuzish. Kritik to'plamlar tuzish. Vilkokson-Mann-Uitni kriteriysi va uni qo'llash.
30. Kolmogorov – Smirnov kriteriysi va uni qo'llash.

Izoh: Mustaqil ta'lim soatlari hajmlaridan kelib chiqqan holda ishchi dasturda mazkur mavzular ichidan mustaqil ta'lim mavzulari shakllantiriladi.

№	**Mustaqil ish uchun mavzular**	**Soati**
1	Kombinatorika asosiy printsipi va kombinatorikaning ba'zi formulalari.	8
2	Ehtimolni hisoblashning klassik, geometrik va statistik usullarining chegaralanganligi. Uzluksiz va sanoqli additivlik aksiomalari orasidagi munosabat.	8
3	A.N.Kolmogorov aksiomalaridan kelib chiqadigan ehtimolning xossalari. Shartli ehtimollik. Hodisalar bog'liqsizligi va bog'liqsiz hodisalar yig'indisi ehtimoli. To'la ehtimollik va Bayes formulalari.	8
4	Hodisalarning o'z to'plamida bog'liqsizligi va juft-jufti bilan bog'liqsizligi orasidagi munosabat. Bernshteyn misoli.	8
5	Bog'liqsiz tajribalar ketma-ketlining Puasson sxemasi. Bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligi.	8
6	Hosil qiluvchi funktsiyalar. Ehtimollarning polinomial taqsimoti.	8
7	Amaliyotda uchraydigan ba'zi muhim taqsimotlarni o'rganish. Kompozitsiya formulasi isboti va misollar.	8
8	Matematik kutilma yoki dispersiyasi mavjud bo'lmagan tasodifiy miqdorlarga misollar tuzish.	8
9	Korrelyatsiya koeffitsientini amalda qo'llanishi. Katta sonlar qonuniga oid Markov, Xinchin va Kolmogorov teoremalari taxlili.	8
10	Xarakteristik funktsiya va xossalari.	8
11	Lindeberg sharti ostida markaziy limit teoremani isbotlash.	8
12	Tanlanmaning reprezentativligi va uni hosil qilishni usullari.	8
13	Noma'lum parametrlarni baholashning usullari. Olingan baholarning xossalari.	8
14	Ba'zi muhim taqsimotlar parametrlari uchun nuqtaviy baholar.	8
15	Muhim taqsimotlar parametrlari uchun interval baholar tuzish. Kritik to'plamlar tuzish. Vilkokson-Mann-Uitni kriteriysi va uni qo'llash.	8
16	Kolmogorov – Smirnov kriteriysi va uni qo'llash.	6
Jami		**126**

9. Tarqatma materiallar.

Fan: «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»
Variant № 1

1. Muavr-Laplasning integral teoremasi (isboti bilan).
2. Xarakteristik funktsiya.
3. Zichlik funktsiyasi

$$p(x)=\begin{cases} 0, \text{агар} \quad x<0, \\ \dfrac{5x^2}{2}, \text{агар} \quad 0\le x<3, \\ \dfrac{3(1-x)^2}{2}, \text{агар} \quad 3\le x\le 4, \\ 0, \text{агар} \quad x>4 \end{cases}$$

bo'lgan tasodifiy miqdor taqsimot funktsiyasini toping.

Fan: «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»
Variant № 2

1. Hodisalar va ular ustida amallar.
2. ξ va η tasodifiy miqdorlarning chiziqli bog'langan bo'lishligi haqidagi teorema va uning isboti.
3. N ta detaldan iborat partiyada n ta standart detal bor. Tavakkaliga m ta detal olingan. Olingan detallar orasida rosa k ta standart detal bo'lish ehtimolini toping.

Fan: «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»
Variant № 3

1. Ehtimolning ta'rif lari : klassik,statistik ta'riflari.
2. Chebishev tengsizligi va uning isboti.
3. Birinchi yashikda 8 ta oq va 6 ta qora shar, ikkinchi yashikda esa 10 ta oq va 4 ta qora shar bor. Tavakkaliga yashik va shar tanlanadi. Olingan shar qora ekani ma'lum. Birinchi yashik tanlangani ehtimolini toping.

Fan: «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»
Variant № 4

1. Shartli ehtimollik.Hodisalarning bog'liqsizligi.
2. Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari.
3. Zichlik funktsiyasi

$$p(x)=\begin{cases} 0, \text{агар} \quad x\le 0, \\ \sin 2x, \text{агар} \quad 0<x\le \dfrac{\pi}{4}, \\ 0, \text{агар} \quad \dfrac{\pi}{4}<x \end{cases}$$

bo'lgan tasodifiy miqdor taqsimot funktsiyasini toping.

Fan: «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»
Variant № 5

1. Beyes formulasi.
2. Korrelyatsiya koeffitsientining [-1,1] oraliqda yotishi haqidagi teorema va uning isboti.
3. Qutida bir xil o'lchamli 7 ta shar bo'lib, 4 tasi oq, qolganlari esa qora rangda. Sharlar bir-xil o'lchamdadir. Qutidan tavakkaliga 3 ta shar olinadi. ξ diskret tasodifiy miqdor – olingan oq sharlar soni bo'lsa, ξ diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

Fan: «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»
Variant № 6

1. Bernulli formulasi va uning isboti.
2. Tasodifiy miqdorlarning berilishi va turlari.
3. Bolalar uchun sanatoriyga 12 ta, sayyohlar lageriga 8 ta va sport lageriga 5 ta yo'llanma ajratilgan. Agar 3 o'rtoqning ota-onalari bir-biridan bexabar bittadan yo'llanma olishsa , ularning bitta lagerga tushish ehtimolligini toping.

Fan: «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»
Variant № 7

1. Muavr-Laplasning lokal teoremasi (isboti bilan).
2. Ehtimolning ta'rif lari : statistik,geometrik ta'riflari.
3. 4 ta bir hil idish bor. Uchta idishning har birida 2 ta oq va 1 ta qora shar, to'rtinchisida esa 2 ta qora va 2 ta oq shar bor. Tavakkaliga olingan idishdan tasodifan shar olindi. Agar bu shar qora bo'lsa, to'rtinchi idishdan olingan bo'lish ehtimolligini toping.

Fan: «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»
Variant № 8

1. Hodisalar va ular ustida amallar.
2. Muavr-Laplasning lokal teoremasi (isboti bilan).
3. $x^2 + px + q = 0$ kvadrat tenglamadagi p va q koeffitsientlari $[-1;1]$ kesmadan tavakkaliga tanlanadi. Bu kvadrat tenglama haqiqiy ildizga ega bo'lish ehtimolini toping.

Fan: «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»
Variant № 9

1. Diskret tasodifiy miqdorlar va ularning berilishi. Taqsimot funktsiya.
2. Muavr-Laplasning integral teoremasi (isboti bilan).
3. Uchta idishning har birida 6 tadan qora shar va 4 tadan oq shar bor. Birinchi idishdan tavakkaliga bitta shar olinib ikkinchi idishga solingan, shundan keyin ikkinchi idishdan tavakkaliga bitta shar olinib uchinchi idishga solingan.uchinchi idishdan olingan sharning oq bo'lish ehtimolini toping.

Fan: «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»
Variant № 10

1. Ehtimollar nazariyasi faning predmeti, uning paydo bo'lishi va rivojlanish tarixi.
2. Muavr-Laplasning lokal teoremasi (isboti bilan).
3. Ichida n ta shar bo'lgan idishga bitta oq shar solingan, shundan keyin idishdan tavakkaliga bitta shar olingan. Agar idishdagi sharlarning dastlabki tarkibi (rangi bo'yicha) haqida barcha mumkin bo'lgan taxminlar teng imkoniyatli bo'lsa, olingan sharning oq bo'lish ehtimolini toping.

Fan: «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»
Variant № 11

1. Yuqori tartibli momentlar.
2. Bernulli formulasi va uning isboti.
3. 9 qavatli bino liftiga 4 kishi kirdi.Ularning har biri bir-biriga bog'liqsiz ravishda ixtiyoriy qavatlarga chiqishlari mumkin. Ular turli qavatlarga chiqish ehtimolini toping.

Fan: «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»
Variant № 12

1. Hodisalar va ular ustida amallar.
2. Korrelyatsiya koeffitsienti.
3. 3,3,5,5,8 raqamlaridan nechta besh xonali son hosil qilish mumkin.

Fan: «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»
Variant № 13

1. To'la ehtimol formulasi.
2. Yuqori tartibli momentlar.

3. „Maxfiy” qulfning umumiy o’qida 4 ta disk bo’lib, ularning har biri 5 ta sektorga bo’lingan va sektorlarga turli raqamlar yozilgan. Disklarni ulardagi raqamlar tayin to’rt xonali son tashkil qiladigan qilib o’rnatilgan holdagina qulf ochiladi. Disklarni ixtiyoriy o’rnatishda qulfning ochilish ehtimolini toping.

Fan: «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»
Variant № 14

1. Tasodifiy miqdor tushunchasi. Ba’zi muhim diskret tasodifiy miqdorlar.
2. Integral teoremaning tadbiqi.
3. Ox son o’qining uzunligi L bo’lgan OA kesmasiga tavakkaliga ikkita V(x) va S(x) nuqta qo’yilgan. VS kesmaning uzunligi $\frac{L}{2}$ dan kichik bo’lish ehtimolini toping.

Fan: «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»
Variant № 15

1. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar.
2. Muavr-Laplasning integral teoremasi (isboti bilan).
3. [0,5] kesmadan tavakkaliga bitta nuqta tanlanadi. Shu nuqtadan kesmaning o’ng oxirigacha bo’lgan masofa 1.6 birlikdan oshmasligi ehtimolini toping.

Fan: «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»
Variant № 16

1. Integral teoremaning tadbiqi.
2. Diskret tasodifiy miqdorlar va ularning berilishi.Taqsimot funktsiya.
3. Kartochkalarga 1,2,3,4,5,6,7,8,9 raqamlari yozilgan. Tavak-kaliga 4 ta kartochka olinib, ular qator qilib terilganda juft son bo‘lishi ehtimolini toping.

Fan: «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»
Variant № 17

1. Puasson formulasi va uning isboti.
2. Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari.
3.Elektron raqamli mashinaning ishlash vaqtida arifmetik qurilmada, operativ xotira qurilmasida, qolgan qurilmalarda buzilish yuz berish ehtimollari 3:2:5 kabi nisbatda. Arifmetik qurilmada, operativ xotira qurilmasida va boshqa qurilmalardagi buzilishning topish ehtimoli mos ravishda 0,8; 0,9; 0,9 ga teng. Mashinada yuz bergan buzilishning topilish ehtimolini toping.

Fan: «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»
Variant № 18

1. Beyes formulasi.
2. Xarakteristik funktsiya.
3. Fortenyano to’garagiga 20 kishi, badiiy o’qish to’garagiga 15 kishi, vokalchilar to’garagiga 12 kishi va foto to’garagiga 20 kishi qatnashadi. To’rt badiiy so’z ustasi, uch pianino chaluvchi, besh ashulachi va bir fotografdan iborat brigadani necha xil usul bilan tuzish mumkin?

Fan: «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»
Variant № 19

1. Tasodifiy miqdor tushunchasi. Ba’zi muhim diskret tasodifiy miqdorlar.
2. To’la ehtimol formulasi.
3. Qirqma alifboning 10 ta harfidan “matematika” so’zi tuzilgan. Bu harflar tasodifan sochilib ketgan va qaytadan ixtiyoriy tartibda yig’ilgan. Yana “matematika” so’zi hosil bo’lishi ehtimolligini toping.

Fan: «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»
Variant № 20

1. Korrelyatsiya koeffitsienti.
2. Puasson formulasi va uning isboti.
3. Ikkita avtomat bir xil detallar ishlab chiqaradi, bu detallar keyin konveyerga o’tadi. Birinchi avtomatning unumdorligi ikkinchi avtomatning unimdorligidan ikki marta ko’p.Birinchi avtomat

o’rta hisobda detallarning 60% ini, ikkinchi avtomat esa o’rta hisobda detallarning 84% ini a’lo sifat bilan ishlab chiqaradi. Konveyerda tavakkaliga olingan detal a’lo sifatli bo’lib chiqdi. Bu detalni birinchi avtomat ishlab chiqarganligi ehtimolini toping.

Fan: «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»

Variant № 21

1. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar.
2. Integral teoremaning tadbiqi.
3. 15 kishilik gruppadan brigadir va 4 brigada a’zosi ajratib olinishi kerak. Buni necha xil usul bilan bajarish mumkin?

Fan: «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»

Variant № 22

1. Chebishev tengsizligi va uning isboti.
2. Beyes formulasi.
3. “n” ta konvert va ularga mos “n” ta xat bor. Xatlar tavakkaliga konvertlarga solinadi. Hech bo’lmaganda bitta xatning tegishli konvertga tushmaslik ehtimolligini toping.

Fan: «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»

Variant № 23

1. ξ va η tasodifiy miqdorlarning chiziqli bog’langan bo’lishligi haqidagi teorema va uning isboti.
2. Ayrim uzluksiz tasodifiy miqdorlarning taqsimoti va zichlik funktsiyalari.
3. [0;1] kesmaga ikki nuqta tavakkaliga tashlanmoqda. Nuqtalar ustma-ust tushmaydi deb faraz qilib, hosil bo’lgan uch kesmadan uchburchak tuzish mumkinligi ehtimolini toping.

Fan: «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»

Variant № 24

1. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar.
2. Puasson formulasi va uning isboti.
3. Kesma teng uch bo’lakka bo’lingan. Bu kesmaga uchta nuqta tavakkaliga tashlanadi. Kesmaning uchala bo’lagining har biriga bittadan nuqta tushishi ehtimolini toping.

Fan: «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»

Variant № 25

1. Korrelyatsiya koeffitsientining [-1,1] oraliqda yotishi haqidagi teorema va uning isboti.
2. Shartli ehtimollik. Hodisalar bog’liqsizligi.
3. O’n gruppa bir qator joylashgan o’nta auditoriyada shug’ullanadi. Birinchi va ikkinchi gruppalar qo’shni auditoriyalarda bo’ladigan qilib, dars jadvalini necha xil variant bilan tuzish mumkin?

10. Reyting baholash mezoni

KUZGI SEMESTR

№			Sentyabr				Oktyabr					Noyabr				Dekabr				Yanvar					
			4-9	11-16	18-23	25-30	2-7	9-14	16-21	23-28	30-4	6-11	13-18	20-25	27-2	4-9	11-16	18-23	22-27	25--11	15-20	22-27	29-02		
			1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**		
1	JN 40 %	Lab.																							
		Mustaqil ta’lim																							
		Amaliyot			4		4			4			4			4		4							**23**
		Mustaqil ta’lim				5						6			6										**17**
2	ON 30 %									8									9						**17**
		Mustaqil ta’lim							7									6							**13**
3	YaN – 30%																						30		**30**
	Jami																								**100**

BAHORGI SEMESTR

№			Fevral				Mart					Aprel				May				Iyun				
			5-10	**12-17**	**19-24**	**26-03**	**5-10**	**12-17**	**19-24**	**26-31**	**2-7**	**9-14**	**16-21**	**23-28**	**30-05**	**7-12**	**14-19**	**21-26**	**28-02**	**4-9**	**11-16**	**18-23**		
			23	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**	**41**	**42**	**43**	
1	**JN 40%**	Lab.																						
		Mustaqil ta’lim																						
		Amaliyot					5		5			5		4			5			5				**29**
		Mustaqil ta’lim								3			4						4					**11**
2	**ON 30%**	Yozma ish										11								11				**22**
		Mustaqil ta’lim									4								4					**8**
3	YaN – 30%																				30			**30**
4	**Jami**																							**100**

Nazorat turi	Reyting baholashlar			Jami	Saralash bali
	1	2	3		
JN (40 %) shu jumladan	34	33	34	101	56
JN (amaliy mashg'ulot)	34	33	34	101	56
ON (30 %)		38	38	76	42
YaN (30 %)				75	41
Jami:				252	139

Baho	5	4	3	2
Reyting	86-100	71-85	55-70	< 55
Fanni o'zlashtirish ko'rsatgichlari	217-252	179-216	139-178	< 139

Eslatma: 5-6 semestrda o'qitiladigan "Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika" fanining o'quv hajmi 252 soatni tashkil etib 2 semestrga bo'lib o'tilishi sababli kuzgi va bahorgi semestrlar o'quv hajmi har bir semestr uchun 126 soatni tashkil etadi fan koeffitsenti esa 1,26 bo'ladi. Fan bo'yicha o'zlashtirishni aniqlashda talaba to'plagan bali 1,26 ga ko'paytiriladi va butungacha yaxlitlab olinadi.

JN ni baholash mezonlari

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani bo'yicha joriy baholash talabaning amaliy mashg'ulotdagi o'zlashtirishini aniqlash uchun qo'llaniladi. JN har bir amaliy mashg'ulotlarida so'rov o'tkazish, savol va javob, mustaqil bajarish uchun berilgan topshiriqlarni bajarish va himoya qilish kabi shakllarda amalga oshiriladi. Talabaga JN da butun ballar qo'yiladi.

Talabaning amaliy mashg'ulotlarni o'zlashtirish darajasi quyidagi mezon asosida aniqlanadi

Baholash ko'rsat-kichi	Baholash mezonlari	reyting bali
A'lo, 86-100%	Etarli nazariy bilimga ega. Topshiriqlarni mustaqil echgan. Berilgan savollarga to'liq javob beradi. Masalaning mohiyatiga to'liq tushunadi. Auditoriyada faol. O'quv tartib intizomiga to'liq rioya qiladi. Topshiriqlarni namunali rasmiylashtirgan.	4
Yaxshi, 71-85%	Etarli nazariy bilimga ega. Topshiriqlarni echgan. Berilgan savollarga etarli javob beradi. Masalaning mohiyatini tushunadi. O'quv tartib intizomiga to'liq rioya qiladi.	3
Qoniqarli, 55-70%	Topshiriqlarni echishga harakat qiladi. Berilgan savollarga javob berishga harakat qiladi. Masalaning mohiyatini chala tushungan. O'quv tartib intizomiga rioya qiladi.	2
Qoniqarsiz 0-54%	Talaba amaliy mashg'ulot darsi mavzusiga nazariy tfyyorlanib kelmasa, mavzu bo'yicha masala, misol va savollariga javob bera olmasa, darsga sust qatnashsa bilim darajasi qoniqarsiz baholanadi	1

ON ni baholash

Oraliq nazorat “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” fanining bir necha mavzularini qamrab olgan bo’limi bo’yicha, tegishli nazariy va amaliy mashg’ulotlar o’tib bo’lingandan so’ng yozma ravishda amalga oshiriladi. Bundan maqsad talabalarning tegishli savollarni bilishi yoki muammolarni echish ko’nikmalari va malakalari aniqlanadi. O’kuv yilining har semestrida 2-ta ON o’tkazish rejalashtirilgan bo’lib 30 baldan iborat. ON nazorat ishlari yozma ish va test usilida o’tkazilishi nazarda tutilgan, yozma ish va test sovollari ishchi o’quv dastur asosida tayyorlanadi. ON ga ajratilgan balldan 55% dan past ball to’plagan talaba o’zlashtirmagan hisoblanadi. ON ni o’zlashtirmagan talabalarga qayta topshirish imkoniyati beriladi. ON bo’yicha olinadigan testlar kafedra mudiri rahbarligida tashkil etiladi va kafedrada o’quv yilining oxirigacha saqlanadi.

YaN ni baholash

Yakuniy nazorat “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” fanining barcha mavzularini qamrab olgan bo’lib, nazariy va amaliy mashg’ulotlar o’tib bo’lingandan so’ng yozma ravishda amalga oshiriladi. Bundan maqsad talabalarning fan bo’yicha o’zlashtirish ko’rsatkichlari, ya’ni bilim darajasi yoki muammolarni echish ko’nikmalari va malakalari aniqlanadi. YaN nazorat ishlari test usulida ham o’tkazilishi nazarda tutilgan, test sovollari ishchi o’quv dasturi asosida tayyorlanadi. ON va JNlarga ajratilgan balldan 55% dan past ball to’plagan talaba o’zlashtirmagan hisoblanadi va YaNga kiritilmaydi. YaNni o’zlashtirmagan talabalarga qayta topshirish imkoniyati beriladi. YaN bo’yicha olinadigan yozma ish variantlari kafedra mudiri rahbarligida tuziladi va dekanatlarga topshiriladi.

Test usulida YaN ni baholash mezonlari:

YaN test yoki yozma ish shaklida o’tkaziladi va talabaning javoblari 30 ballik tizimda baholanadi. Bunda testga ajratilgan 30 ball 30 savollar soniga bo’linib, bir savolga qo’yiladigan ball topiladi (1 ball) uni to’g’ri javoblar soniga ko’paytiriladi, yozma ish shaklida bo’lsa 3 ta savolga 10 balldan, jami 30 balgacha baholanib talabaning YaN da to’plagan ballari aniqlanadi.

Dasturning informatsion – uslubiy ta’minoti

Mavzularni yoritishda interfaol usullar, axborot – kommunikatsiya texnologiyalari, amaliy dastur paketlaridan, internetda mavjud resurslardan keng foydalanish mumkin.

Mavzularni o’zlashtirishda va mustaqil ishlarni bajarishda adabietlar ro’yxatida keltirilgan mavjud darsliklar, o’quv qo’llanmalari, elektron adabiyotlar bilan metodik ta’minlanadilar.

Dasturdagi mavzularni o’tishda ta’limning zamonaviy usullardan keng foydalanish,o’quv jaraenini yangi pedagogik texnologiyalar asosida tashkil etish samarali natija beradi.

11. Qo'shimcha didaktik materiallar

1- Oraliq nazorat savollari

1. Elementar hodisalar fazosi. Misollar.
2. Ehtimolning klassik ta'rifi.
3. Ehtimolning geometrik ta'rifii.
4. Shartli ehtimollik. Hodisalar bog'liqsizligi.
5. To'la ehtimollik va Bayes formulasi.
6. Ehtimolning xossalari.
7. Bernulli formulasi.
8. Puasson formulasi.
9. Muavr-Laplasning lokal, integral teoremalari.
10. Muavr-Laplasning lokal, integral teoremalari tadbiqlari.
11. Soddalashtiring: $(A\cup B)\cap(B\cup C)$
12. Soddalashtiring: $(A\cup B)\cap(A\cup \overline{B})$
13. Soddalashtiring: $(A\cup B)\cap(A\cup \overline{B})\cap(\overline{A}\cup \overline{B})$
14. Agar P(A)qp; P(B)qq , bulsa P(A $\overline{B}$)-?
15. Agar P(A)qp; P(B)qq , bulsa P($\overline{A}$ B)-?
16. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ isbotlang.
17. $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ isbotlang.
18. $(A\cup B)\backslash B=A\backslash B$ isbotlang.
19. $(A\backslash B)\cup B=A\cup B$ isbotlang.
20. $A\cup B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)\cup(A\cap B)$ isbotlang.
21. $(A\cup B)\backslash B=A$ isbotlang.
22. $A\cap(A\cup B)=A$ isbotlang.
23. A va V ustma-ust tushishi shartmi agar a) $\overline{A}=\overline{B}$; v) $A\cap(A/B)=B\cap(B/A)$
24. Agar $P(A)=a,\quad P(B)=b,\quad P(A+B)=C\quad P(A\overline{B})$ -?
25. Agar R(AQV)q0,8 va R(A)q0,5 bo'lsa $P(\overline{A}B)$ toping
26. Agar R(AQV)q0,9 va R(AV)q0,4 bo'lsa, $R(\overline{A}B)+P(A\overline{B})$ ni xisoblang.
27. Agar $P(A)=a, P(A+B)=в$ bo'lsa, $P(\overline{A}\cdot B)=?$
28. Agar $A\perp B$ bo'lsa, $P(A\overline{B})=?$
29. Agar $A\perp B$ bo'lsa, $P(\overline{A}\overline{B})=?$
30. Agar $A\perp B$ bo'lsa, $P(\overline{A}\cdot B)=?$
31. A_1,A_2,A_3,A_4 hodisalar bog'liqsiz va P(A_1)q0,7; P(A_2)qP(A_3)q0,6; P(A_4)q0,8 bo'lsa, ulardan kamida bittasi ro'y berish ehtimolini toping.
32. Idishda 10 ta shar bo'lib, ulardan 6 tasi oq, qolganlari qora rangda. Ketma – ket ikkita shar olinganda ikkinchisini oq rangli bo'lish extimolini toping
33. 3 ta kub tashlash tajribasida kublar ustida tushgan sonlarni turlicha bo'lish ehtimoli topilsin?
34. Tavakkaliga 20 dan kata bulmagan natural son tanlanada, uning 5 ga karali bulishi extimolini toping.
35. Kartochkalarga 1,2,3,4,5,6 rakamlari yozilgan. Tavakkaliga 4 ta kartochka olinib, ularni kator kilib terilganda juft son xosil bo'lishi extimolini toping.
36. Kartochkalarga 1,2,3,4,5, rakamlari yozilgan. Tavakkaliga ta kartochka olinib, ularni kator kilib terilganda 1 va 2 sonlari ketma-ket (12kurinishda)turishi extimolini toping.

37. Kartochkalarga 1,2,3,4,5,6,7 rakamlari yozilgan. Tavakkaliga 4 ta kartochka olinib, ularni kator kilib terilganda sonlar usish tartibida turishi extimolini toping.
38. Kutichada 5 ta bir xil nomerlangan kubik bor. Tavakkaliga bita-bittadan barcha kubiklar olinganda kubiklarning nomerlari usib borish tartibida chikishi extimolini toping.
39. Yiguvchiga zarur detal birinchi, ikkinchi, uchinchi, turtinchi yashikda ekanligi extimollari mos ravishda 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 ga teng. Zarur detal:a) kupi bilan 3 ta yashikda bulishi; b) kami Bilan 2 ta yashikda bulishi extimollarini toping.
40. Guruxda 12 ta talaba bulib, ularning 7 tasi alachilar. 5 ta talaba dekanatga chakirildi. Ularning barchasi alochilar bo'lishi extimolini toping
41. Uyin sokkasi 10 marta tashlanganda: a)6 rakami bir marta xam tushmasligi; b) 6 rakami xech bulmasa 1 marta tushishi extimolini toping.
42. Ikkita mergan bir vaktda uz uzdi. Birinchi merganni nishonga tekkizish extimoli 0,7ga, ikkinchisiniki 0,6 ga teng. Kamida bitta merganning nishonga tekkizish extimoli topilsin
43. 10 ta biletdan 3 tasi yutukli. Tavakkaliga olingan 5 ta biletdan kamida ikkitasi yutukli bulish extimoli topilsin.
44. Merganni bitta uk uzishda nishonga tekkizish extimoli Rq0,9. Mergan uchta uk uzdi. Uchchala ukning xam nishonga tegish extimolini toping.
45. Agar A_1, A_2, A_3 xodisalar bog'liqsiz bo'lib, ularning extimollari mos ravishda 0,3, 0,5 va 0,6 bo'lsin. Ulardan kamida bittasini bajarish extimolini toping**.**
46. Idishda 25 ta maxsulotdan 5 tasi sifatsiz bo'lsa, ulardan ketma – ket uchtasi olinganda (takrorsiz), uchchalasini sifatli bo'lish extimolini toping.
47. Maxsulotni sifatli bulish extimoli 0,7 bulsa, ishlab chikarilgan ikkita maxsulotdan bittasini sifatli bo'lish extimolini toping.
48. 7 ta tanga tashlashda bitta ham Gerb tushmasligi ehtimoli toping.
49. Idishta 8ta shar bo'lib ulardan 3 tasi oq 2 tasi qizil va qolganlari qora. 4 ta shar olinganda 2 tasi oq, 1 tasi qizil va 1 tasi qora bo'lish ehtimoli toping.
50. Kubik tashlaganda 4 ochko chikishi A xodisa, juft son chikishi V xodisa bulsin. Bu xodisalarning extimolligi va birgalikda ruy berish extimolligi ma'lum bulsa, $A \cup V$ xodisa extimolligi kanday topiladi?
51. Stanok ish kuni davomida buzilishi extimoli 0,4 ga teng. Ish davomida 6 ta stanokdan 2 tasining buzilishi extimolini toping.
52. Oilada 4 ta bola bor. Bu bolalarning ichida ikkitadan kup bulmagan ugil bolalarni bulish extimoli topilsin. Ugil bolalarning tugilish extimoli 0,5 ga teng deb olinsin.
53. Zavod ishlab chikarayotgan soatlardan xar birining nosoz bulishi extimolini 0,02 ga teng. Nazoratchi 100 ta soatdan iborat partiyani tekshirmokda. Partiyada 3 tadan kup nosoz soat bo'lish i extimoli kanday.
54. Ikki sportchining birinchisi uchun sport ustasi shartlarini bajarishi extimoli 0,8, ikkinchi sportchi uchun esa 0,9 ga teng. Ikki sportchidan fakat bittasining sport ustasi shartlarini bajarishi extimoli topilsin.
55. 10 ta biletdan 3 tasi yutukli. Tavakkaliga olingan 5 ta biletdan kamida ikkitasi yutukli bo'lish extimoli topilsin.
56. Kursant sinov topshirishi uchun 4 dan past bulmagan baxo olishi kerak. Agar kursant otganiga «5» baxoni 0,3, «4» baxoni 0,6 extimollik Bilan olishi mumkin bulsa, kursantning sinov topshira olish extimolini toping.
57. Yashikda 15 ta detal bulib, ularning 10 tasi buyalgan. Yiguvchi tavakkaliga 3 ta detal oladi. Olingan detallarning barchasi buyalgan bulishi extimolini toping.
58. Ichida 7 ta ok va 6 ta kizil shar bulgan idishdan 1 ta yukoldi. Idishdan tavakkaliga tanlangan sharning ok bulishi extimolini toping.
59. Yashikda 20 ta detaldan 3 tasi yaroksiz. Tavakkaliga tanlangan 2 ta detaldan: a) yaroksizlari yuk; b) yaroklilari yuk.
60. Idishta 15ta shar bo'lib ulardan 7 tasi oq va qolganlari qora. 3 ta shar olinganda ularning bir xil rangda bo'lish ehtimoli toping.

61. Kub 10 marta tashlanganda a)6 rakamining bir marta xam tushmasligi; b) roppa-rosa 3 marta tushishi extimolini toping.
62. Birinchi yashikda 3 ta ok, 4 ta kora shar, ikkinchi yashikda esa 3 ta kora, 2 ta ok shar bor. Birinchi yashikdan 2 ta shar olib ikkinchi yashikga solamiz, shundan sung ikkinchi kutidan 1 ta shar olamiz. Shu sharning ok rangda bulishi extimolini toping.
63. Birinchi yashikda 2 ta ok, 5 ta kora shar, ikkinchi yashikda esa 2 ta kora, 2 ta ok shar bor. Birinchi yashikdan 1 ta shar olib ikkinchi yashikga solamiz, shundan sung ikkinchi kutidan 1 ta shar olamiz. Shu sharning ok rangda bulishi extimolini toping.
64. Birinchi yashikda 4 ta ok, 5 ta kora shar, ikkinchi yashikda esa 1 ta kora, 2 ta ok shar bor. Birinchi yashikdan 3 ta shar olib ikkinchi yashikga solamiz, shundan sung ikkinchi kutidan 1 ta shar olamiz. Shu sharning ok rangda bulishi extimolini toping.
65. Bita uk uzilganda nishonga tegish extimoli 0.8 ga teng. 10 marta uk uzilgandanishonga rosa 7 marta tegish extimolini toping.
66. Biror mergan uchun bita uk uzishda nishonga tegishi extimoli 0.8 ga teng va uk uzish tartibiga boglik emas. 5 marta uk uzilganda nishonga rosa 2 marta tegishi extimolini toping.
67. Tanga 8 marta tashlanganda gerbli tomoni kamida 2 marta tushishi extimolini toping.
68. 2 ta idishda qora va oq sharlar bor. Birinchi idishda 3 ta oq va 4 qora, ikkinchisida esa 5 ta oq va 3 ta qora. Birinchi idishdan 2 ta 2 chi idishdan 1 ta shar tavakkaliga olinib bu 3 ta shar uchunchi bo'sh idishga solingach 3 idishdan olingan shar oq bo'lish ehtimoli topilsin
69. Student 20ta savoldan 8tasiga to'liq javob bera oladi. Student undan so'ralgan 6 ta savoldan kamida 4 tasiga to'liq javob berish ehtimolini toping.
70. Zavod mahsulotlarning 40% I – nchi tsexda, 30% ikkinchi tsexda, qolganlari esa III tsexda ishlab chiqariladi. I – II – III tsex maxsulotlarining sifatli bo'lish extimollari mos ravishda 0,7 0,8 va 0,9 ga teng. Tavakkaliga olingan korxona maxsuloti sifatli bolish extimoli topilsin.
71. Birinchi idishda 1 ta oq va 4 ta qora shar bor. 2 – nchi idishda esa 1 ta qora va 5 ta oq shar bor. Har bir idishdan tavakkaliga 1 tadan shar olingan va qolgan barcha sharlarni 3 – nchi idishga solingan. 3 – nchi idishdan olingan shar qora bo'lish ehtimoli topilsin.
72. Birinchi idishdan 4 ta oq va 6 ta qora shar bor, ikkinchisida esa 3 ta oq va 6 ta qora shar bor. Birinchi idishdan ikkinchisiga tavakkaliga 3 ta shar olib ikkinchisiga solingach 2 idishdan olingan 2 ta shar ikkalasi qora bo'lish ehtimoli topilsin.
73. Samolyotga 3 marta o'q uziladi. Samolyotga 1ta o'q tekkanda uni urib tushirish ehtimoli 0,3; 2ta o'q tekkanda esa 0,6; 3ta o'q tegsa samolyot albatta urib tushiriladi. Agar birinchi o'q 0,5 ehtimol bilan, 2chi o'q 0,6 ehtimol bilan, 3chisi esa 0,8 ehtimol bilan samolyotga tegsa, samolyotni urib tushirish ehtimolini toping.
74. Korxona ishlab chiqargan buyumlarning 20% yaroqsiz bo'lsa, ishlab chiqarilgan 6 buyumda kamida 4 tasi yaroqli bo'lish ehtimoli topilsin.
75. Zavod chiqarayotgan elektr lampochkalarining nostandartligi 2%ni tashkil qiladi. Elektr lampochkalar yahikda 15 tadan joylashtiriladi. Yahikda nostandart lampochkalar soni 2 dan ortiq bo'lmaslik ehtimolini toping.
76. Oilada 7 ta farzand bor. Ugil va kiz bola tugilishi extimollarini bir xil xisoblab, shu oilada ugillar soni kizlar sonidan kup bulishi extimolini toping.
77. Askar nishonga uk otayapti. Ukning muljalga tegishi extimoli xar gall 0.6 ga teng.Askar sinovdan utishi uchun 5 ta otilgan ukdan kamida 3 tasi muljalga tegishi kerak.Askarning sinovdan utishi extimolini toping.
78. Tanga 12 marta tashlanyapti. Gerbli tomon tushishlar soni k ning $4\leq k\leq 7$ bulishi extimolini toping.
79. 3 ta tanga 20 marta tashlanyapti. Uchchala tangada xam rakamli tomoni xodisasining kamida bir marta ruy berishi extimolini toping.
80. Tajriba 2 ta shashkolnitashlashdan iborat. Tajribaning5 marta takrorlaganimizda ikala shashkoldaxam 6 rakamini tushishi xodisasining kamida bir marta ruy berishi extimolini toping.
81. A_1,A_2,A_3 hodisalar $A_1,A_2,A_3 \subset A$ shartni qanoatlantirsa $P(A)\geq P(A_1)QP(A_2)QP(A_3) - 2$ tengsizlikni isbotlang.

82. 36 talik kartalar dastasi yaxshi aralashtirilgan. 10 lik kartalar va tuzlar yonma – yon almashinib turib qolish ehtimoli topilsin.
83. Ikkita mergan bir – biriga bog'liqsiz ravishda bitta nishonga 2 tadan o'q uzishadi. Birinchi mergan nishonni 0,7 ehtimol bilan, ikkinchisi esa 0,8 ehtimol bilan uradi. Otishmadan so'ng nishonga 3 ta o'q tekkanligi ma'lum bo'ldi. Ikkinchi mergan nishonga tegmaganligi ehtimoli topilsin.
84. Korxona ishlab chiqargan buyumlarning 20% yaroqsiz bo'lsa, ishlab chiqarilgan 6 buyumda kamida 4 tasi yaroqli bo'lish ehtimoli topilsin.
85. Ushbu 50 ta (1,2,3,...,49,50) sonlardan tasodifiy ravishda 10 tasi tanlab olingan. Tanlangan sonlardan 5 tasi 3 ga qoldiqsiz bo'linish ehtimoli topilsin.
86. Ekilayotgan urug'da nihol o'sib chiqish ehtimoli 0,001 ga teng. 5000 ta urug'dan 2ta nihol o'sib chiqish ehtimoli topilsin.
87. Tomonlari a va b ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchakka tavakkaliga nuqta tashlanayotgan bo'lsin (a>b) Tashlangan nuqtadan eng yaqin tomongacha bo'lgan masofa x dan katta bo'lish ehtimoli topilsin.
88. Tomoni a ga teng bo'lgan kvadratga tavakkaliga nuqta tashlangan. Uning kvadrat uchlarigacha bo'lgan eng qisqa masofasi x dan kichik bo'lish ehtimolini toping. ($x \in R$).
89. Ixtiyoriy tanlangan avtomabilning 4 xonali nomeri turi raqamlaridan tashkil topgan extiolni toping.
90. Doiraga muntazam uchburchak ichki chizilgan. Doiraga tavakkaliga tashlangan 6 ta nuqtadan kamida 5 tasi uchburchakga tushish ehtimolini toping.
91. 3,3,3,4,4,5,5,6,6,6 sonlar yozilgan 10 ta kartochkalar ichidan tavakkaliga (oldinma ketin) 2 ta kartochka tanlansin. Birinchi olingan kartochkada yozilgan son kasrning surati, ikkinchi kartochkada yozilgan son esa maxraji deb olinadi. Hosil bo'lgan kasr to'g'ri kasr bo'lish ehtimoli topilsin.

2- Oraliq nazorat savollari

1. Diskret tasodifiy miqdor. Taqsimot qonun va taqsimot funktsiya.
2. Uzluksiz tasodifiy miqdor. Taqsimot funktsiya, zichlik funktsiya va ularning xossalari.
3. Matematik kutilma va uning xossalari.
4. Dispersiya va uning xossalari.
5. O'rtacha kvadratik tarqoqlik va uning xossalari.
6. Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar.
7. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi va uning xossalari.
8. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi va uning xossalari.
9. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari.
10. Korrelyatsiya koeffitsienti va uning xossalari.
11. Tasodifiy miqdorlarining bog'liqsizligi.
12. Zichlik funktsiyasi $f(x)=\begin{cases} 0, & x \overline{\in} (0,2) \\ a\,x\ , & x \in (0,2) \end{cases}$ bo'lgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini hisoblang.
13. X tasodifiy miqdorning $f(x)=\begin{cases} 0, & x \overline{\in} (\pi/6, \pi/3) \\ C\sin 3x, & x \in (\pi/6, \pi/3) \end{cases}$ zichlik funktsiyasi berilgan. O'zgarmas son S ning qiymatini va $F(x)$ taqsimot funktsiyasini toping.
14. Agar xar bir sinashda A xodisaning ruy berish extimoli 0,6 ga teng bulsa, shu xodisaning 3 ta bog'liqsiz sinashda jami ruy berishlar sonining taksimot konunini tuzing. Matematik kutilish va dispersiyani toping.
15. X tasodifiy miqdorning $f(x)=\begin{cases} 0, & x \overline{\in} (\pi/6, \pi/3) \\ C\sin 3x, & x \in (\pi/6, \pi/3) \end{cases}$ zichlik funktsiyasi berilgan. X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

16. Agar diskrit tasodifiy miqdor uchun $\mathrm{P}\{\xi = k\} = \dfrac{c}{n+2}$, $k = 1, 2.., n-1$ bo'lsa, o'zgarmas S ni qiymatini toping.
17. Uchta tanga tashlash tajribasida «Gerb» tomoni bilan tushgan tangalar soni X ning matematik kutilmasini toping.
18. Zichlik funktsiyasi $f(x) = \begin{cases} 0, & x \overline{\in} (0,\pi) \\ a\sin x, & x \in (0,\pi) \end{cases}$ bo'lgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini hisoblang.
19. 4 ta tanga tashlash tajribasida «Gerb» tomoni bilan tushgan tangalar soni X ning matematik kutilmasini toping.
20. X tasodifiy miqdorning $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ \frac{1}{2}X - 1, & 2 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$ taqsimot funktsiyasi berilgan. X ning $(1,3)$ intervalga tegishli qiymat qabul qilishi ehtimolini toping.
21.

X	2	4	6
R	0,4	0,3	0,3

bo'lsa, M(X-5), D(-X) topilsin.
22. Uchta tanga tashlash tajribasida «Gerb» tomoni bilan tushgan tangalar soni X ning dispersiyasini toping.
23. X diskret tasodifiy miqdor $\begin{array}{cccc} x_i & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{3\pi}{4} \\ p_i & 0,2 & 0,7 & 0,1 \end{array}$ taqsimot qonuni bilan berilgan. $Y = \sin X$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.
24. Zichlik funktsiyasi $f(x) = \begin{cases} 0, & x \overline{\in} (1,2) \\ a x^2, & x \in (1,2) \end{cases}$ bo'lgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini hisoblang.
25. Idishda 7 ta bir xil sharlar bo'lib, ulardan 4 tasi oq qolganlari esa qora rangda. Idishdan tavakkaliga 3 ta shar olinganda, ular orasidagi oq sharlar soni Xning dispersiyasini toping.
26. **X** diskret tasodifiy miqdor 3 ta qiymat qabul qiladi**:** $x_1 = 4$ ni $P_1 = 0{,}5$ extimol bilan**,** $x_2 = 6$ ni P_2q0,3 extimol bilan va x_3 ni p_3 extimol bilan. $MX = 8$ ni bilgan xolda x_3 ni, $p_3$ni va *D(X)*ni toping**.**
27. 4 ta tanga tashlash tajribasida «Gerb» tomoni bilan tushgan tangalar soni X ning dispersiyasini toping.
28.

X	-1	0	1
R	0,4	0,1	0,5

bo'lsa, M(2X-5), D(-X) topilsin.
29. Ushbu $\begin{array}{ccccc} x_i & 1 & 2 & 5 & 10 \\ p_i & 0,6 & 0,2 & 0,19 & 0,01 \end{array}$ taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping**.**
30. Agar ξ_1 va ξ_2 bog'liqsiz va xar biri mos ravshda (2;1) xamda (1;2) parmetrlar bilan normal taqsimlangan bo'lsa, $D(\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2)$ni toping.

31. X tasodifiy miqdorning $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}(\sin x+1), & -\frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{2} \\ 1 & x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$ taqsimot funktsiyasi berilgan. X ning $(0,\frac{\pi}{4})$ intervalga tegishli qiymat qabul qilishi ehtimolini toping.

32. X tasodifiy miqdorning $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ C\sin 2x, & 0<x\le\frac{\pi}{4} \\ 1, & x>\frac{\pi}{4} \end{cases}$ taqsimot funktsiyasi berilgan. $f(x)$ zichlik funktsiyasini toping.

33. Idishda 7 ta bir xil sharlar bo'lib, ulardan 4 tasi oq qolganlari esa qora rangda. Idishdan tavakkaliga 3 ta shar olinganda, ular orasidagi qora sharlar soni Xning matematik kutilmasini toping.

34. Xodisa extimoli 0,8 bo'lsa, 5 ta tajribada xodisa bajarilgan tajribalar soni matematik kutilmasi topilsin.

Joriy nazorat savollari

1. Guruxda 10 ta talaba bulib, ularning 5 tasi alochilar. 3 ta talaba dekanatga chakirildi. Ularning 2 tasi alochilar bo'lishi extimolini toping.
2. O'g'il tug'ilish ehtimolligi 0.6 ga teng. Oilada 5 ta farzanddan 2 ta o'g'il bo'lish ehtimolligini toping.
3. 10 ta biletdan 3 tasi yutukli. Tavakkaliga olingan 5 ta biletdan kamida ikkitasi yutukli bulish extimoli topilsin.
4. Idishda 8 ta bir xil sharlar bo'lib, ulardan 3 tasi oq qolganlari qora rangda. Tavakkaliga olingan sharni qora bo'lish ehtimolini toping.
5. Ikkita tanga tashlanganda kamida bitta Gerb chiqish ehtimolligi topilsin.
6. Bitta tanga 7 marta tashlanganda gerb tomoni rosa 5 marta tushishi extimolini toping.
7. Yashikda 8 ta detal bo'lib, ular orasida 4 ta bo'yalgan. Tavakkaliga 4 ta detal olindi. Olingan detallarning xammasi bo'yalgan bo'lish ehtimolini toping.
8. Ikkita o'yin soqqasi ikki marta tashlanganda tushgan ochkolar yig'indisi 9 ga teng bo'lish ehtimoli topilsin.
9. Chigitning unib chiqishi extimolligi 0.7 ga teng bo'lsa, ekilgan 6 ta chigitdan 4 tasi unib chiqishi extimolini toping.
10. Idishda 10 ta bir xil sharlar bo'lib ulardan 6 tasi oq, qolganlari qora rangda. Tavakkaliga ikkita shar olinganda ularni qora rangli bo'lish extimoli topilsin.

11. Yashikda 10 ta detal bo'lib, ular orasida 4 ta bo'yalgan. Tavakkaliga 4 ta detal olindi. Olingan detallarning xammasi bo'yalgan bo'lish ehtimolini toping.
12. A xodisaning ro'y berishi ehtimoli 0.8 ga teng bo'lsa, o'tkazilgan 7 ta tajribada A hodisa kamida 1 marta ro'y berishi extimolini toping.
13. Guruxda 11 ta talaba bulib, ularning 5 tasi alochilar. 3 ta talaba dekanatga chakirildi. Ularning 2 tasi alochilar bo'lishi extimolini toping .
14. Nishonga ketma – ket o'q otishda nisbiy gastota 0,6 ga teng bo'lib 12 mata o'q nishonga tegmagan bo'lsa necha marta o'q otilgan.
15. Bitta tanga 7 marta tashlanganda gerb tomoni kamida 2 marta tushishi extimolini toping.
16. Idishda 9 ta bir xil sharlar bo'lib, ulardan 3 tasi oq qolganlari qora rangda. Tavakkaliga olingan sharni qora bo'lish ehtimolini toping.
17. Idishda 10 ta bir xil sharlar bo'lib, ulardan 3 tasi oq qolganlari qora rangda. Tavakkaliga olingan sharni qora bo'lish ehtimolini toping.

18. Chigitning unib chiqishi extimolligi 0.7 ga teng bo'lsa, ekilgan 7 ta chigitdan 5 tasi unib chiqishi extimolini toping.
19. Uyin sokkasi 10 marta tashlanganda 6 rakami bir marta xam tushmasligi extimolini toping.
20. Guruxda 12 ta talaba bulib, ularning 7 tasi alochilar. 5 ta talaba dekanatga chakirildi. Ularning barchasi alochilar bo'lishi extimolini toping
21. Birinchi merganing nishonga tegish extimoli 0,8 va ikkinchisiniki 0,7 ga teng Merganlar nishonga bir avqtda o'q otganlarida bitta o'qni nishonga tegish ehtimolini toping.
22. Uyin sokkasi 10 marta tashlanganda 6 rakami kamida 1 marta tushishi extimolini toping.
23. Idishda 10 ta bir xil sharlar bo'lib ulardan 6 tasi oq, qolganlari qora rangda. Tavakkaliga ikkita shar olinganda ularni oq rangli bo'lish extimoli topilsin.
24. A xodisaning ro'y berishi ehtimoli 0.6 ga teng bo'lsa, o'tkazilgan 5 ta tajribada A hodisa kamida 2 marta ro'y berishi extimolini toping.
25. Qutidagi 25 tranzistordan 8 tasi yaroqsiz bo'lsin. Ixtiyoriy ravishda tranzistor olinadi va tekshiriladi. Olingan ikkita tranzistordan bittasi yaroqsiz bo'lish ehtimolligi nechaga teng?
26. A xodisaning ro'y berishi ehtimoli 0.7 ga teng bo'lsa, o'tkazilgan 5 ta tajribada A hodisa kamida 2 marta ro'y berishi extimolini toping.
27. Guruxda 10 ta talaba bulib, ularning 5 tasi alochilar. 3 ta talaba dekanatga chakirildi. Ularning 2 tasi alochilar bo'lishi extimolini toping .
28. O'g'il tug'ilish ehtimolligi 0.6 ga teng. Oilada 5 ta farzanddan 2 ta o'g'il bo'lish ehtimolligini toping.
29. 10 ta biletdan 3 tasi yutukli. Tavakkaliga olingan 5 ta biletdan kamida ikkitasi yutukli bulish extimoli topilsin.
30. Idishda 8 ta bir xil sharlar bo'lib, ulardan 3 tasi oq qolganlari qora rangda. Tavakkaliga olingan sharni qora bo'lish ehtimolini toping.
31. Ikkita tanga tashlanganda kamida bitta Gerb chiqish ehtimolligi topilsin.
32. Bitta tanga 7 marta tashlanganda gerb tomoni rosa 5 marta tushishi extimolini toping.
33. Yashikda 8 ta detal bo'lib, ular orasida 4 ta bo'yalgan. Tavakkaliga 4 ta detal olindi. Olingan detallarning xammasi bo'yalgan bo'lish ehtimolini toping.
34. Ikkita o'yin soqqasi ikki marta tashlanganda tushgan ochkolar yig'indisi 9 ga teng bo'lish ehtimoli topilsin.
35. Chigitning unib chiqishi extimolligi 0.7 ga teng bo'lsa, ekilgan 6 ta chigitdan 4 tasi unib chiqishi extimolini toping.
36. Idishda 10 ta bir xil sharlar bo'lib ulardan 6 tasi oq, qolganlari qora rangda. Tavakkaliga ikkita shar olinganda ularni qora rangli bo'lish extimoli topilsin.
37. Yashikda 10 ta detal bo'lib, ular orasida 4 ta bo'yalgan. Tavakkaliga 4 ta detal olindi. Olingan detallarning xammasi bo'yalgan bo'lish ehtimolini toping.
38. A xodisaning ro'y berishi ehtimoli 0.8 ga teng bo'lsa, o'tkazilgan 7 ta tajribada A hodisa kamida 1 marta ro'y berishi extimolini toping.
39. Guruxda 11 ta talaba bulib, ularning 5 tasi alochilar. 3 ta talaba dekanatga chakirildi. Ularning 2 tasi alochilar bo'lishi extimolini toping .
40. Nishonga ketma – ket o'q otishda nisbiy gastota 0,6 ga teng bo'lib 12 mata o'q nishonga tegmagan bo'lsa necha marta o'q otilgan.
41. Bitta tanga 7 marta tashlanganda gerb tomoni kamida 2 marta tushishi extimolini toping.
42. Idishda 9 ta bir xil sharlar bo'lib, ulardan 3 tasi oq qolganlari qora rangda. Tavakkaliga olingan sharni qora bo'lish ehtimolini toping.
43. Idishda 10 ta bir xil sharlar bo'lib, ulardan 3 tasi oq qolganlari qora rangda. Tavakkaliga olingan sharni qora bo'lish ehtimolini toping.
44. Chigitning unib chiqishi extimolligi 0.7 ga teng bo'lsa, ekilgan 7 ta chigitdan 5 tasi unib chiqishi extimolini toping.
45. Uyin sokkasi 10 marta tashlanganda 6 rakami bir marta xam tushmasligi extimolini toping.
46. Guruxda 12 ta talaba bulib, ularning 7 tasi alochilar. 5 ta talaba dekanatga chakirildi. Ularning barchasi alochilar bo'lishi extimolini toping

47. Birinchi merganing nishonga tegish extimoli 0,8 va ikkinchisiniki 0,7 ga teng Merganlar nishonga bir avqtda o’q otganlarida bitta o’qni nishonga tegish ehtimolini toping.

48. Uyin sokkasi 10 marta tashlanganda 6 rakami kamida 1 marta tushishi extimolini toping.

49. Merganni bitta uk uzishda nishonga tekkizish extimoli Rq0,9. Mergan uchta uk uzdi. Uchchala ukning xam nishonga tegish extimolini toping.

50. Idishda 10 ta bir xil sharlar bo’lib ulardan 6 tasi oq, qolganlari qora rangda. Tavakkaliga ikkita shar olinganda ularni oq rangli bo’lish extimoli topilsin.

51. A xodisaning ro’y berishi ehtimoli 0.6 ga teng bo’lsa, o’tkazilgan 5 ta tajribada A hodisa kamida 2 marta ro’y berishi extimolini toping.

Yakuniy nazorat savollari

1. Elementar hodisalar fazosi. Misollar.
2. Ehtimolning klassik ta’rifi.
3. Ehtimolning geometrik ta’rifii.
4. Shartli ehtimollik. Hodisalar bog’liqsizligi.
5. To’la ehtimollik va Bayes formulasi.
6. Ehtimolning xossalari.
7. Bernulli formulasi.
8. Puasson formulasi.
9. Muavr-Laplasning lokal, integral teoremalari.
10. Muavr-Laplasning lokal, integral teoremalari tadbiqlari.
11. Diskret tasodifiy miqdor. Taqsimot qonun va taqsimot funktsiya.
12. Uzluksiz tasodifiy miqdor. Taqsimot funktsiya, zichlik funktsiya va ularning xossalari.
13. Matematik kutilma va uning xossalari.
14. Dispersiya va uning xossalari.
15. O’rtacha kvadratik tarqoqlik va uning xossalari.
16. Ko’p o’lchovli tasodifiy miqdorlar.
17. Ikki o’lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi va uning xossalari.
18. Ikki o’lchovli tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi va uning xossalari.
19. Ikki o’lchovli tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari.
20. Korrelyatsiya koeffitsienti va uning xossalari.
21. Tasodifiy miqdorlarining bog’liqsizligi.
22. Katta sonlar konuni, Bernulli, Xinchik teoremalari.
23. Kuchaytirilgan katta sonlar qonuni.
24. Bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar uchun kuchaytirilgan katta sonlar qonuni (Kolmogorov teoremasi).
25. Markaziy limit teorema, tatbiqlari.
26. Bir xil taqsimlangan bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun markaziy limit teorema.
27. Xarakteristik funktsiyalarning asosiy xossalari.
28. Tasodifiy miqdorning xarakteristik funktsiyaning ta’rifi va misollar.
29. Xarakteristik funktsiyalar va taqsimot funktsiyalari orasidagi munosabatlar.
30. Xarakteristik funktsiyalar uchun limit teoremalar.
31. Xarakteristik funktsiyalar va taqsimot funktsiyalari orasidagi munosabatlar.
32. Tanlanma va uning sonli xarakteristikalari.
33. Empirik taqsimot funktsiya va uning grafigi.
34. Baho va uning xossalari.
35. Baholash usullari.
36. Ishonchlilik intervallari.

37. Quyidagilardan qaysilari xarakteristik funktsiya bo'ladi (yoki bo'lmaydi) va nega? 1) *sint* 2) 1-*it* 3) exp{-*b*|*t*|} 4) $\dfrac{\alpha}{\alpha - it}$

38. Quyidagilardan qaysilari xarakteristik funktsiya bo'ladi (yoki bo'lmaydi) va nega? 1) $(1Qt)^{-1}$ 2) $(1Qt^2)^{-1}$ 3) $\dfrac{e^{iat}-1}{iat}$ 4) $\dfrac{\alpha}{\alpha - it}$

39. Zavod mahsulotlarning 40% I – nchi tsexda, 30% ikkinchi tsexda, qolganlari esa III tsexda ishlab chiqariladi. I – II – III tsex maxsulotlarining sifatli bo'lish extimollari mos ravishda 0,7 0,8 va 0,9 ga teng. Tavakkaliga olingan korxona maxsuloti sifatli bo'lish extimoli topilsin.

40. Agar xar bir sinashda A xodisaning ro'y berish extimoli 0,6 ga teng bo'lsa, shu xodisaning 3 ta bog'liqsiz sinashda jami ro'y berishlar sonining taksimot qonunini tuzing. Matematik kutilish va dispersiyani toping.

41. A va V ustma-ust tushishi shartmi agar a) $\overline{A} = \overline{B}$; v) $A \cap (A/B) = B \cap (B/A)$

42. Maxsulotni sifatli bo'lish extimoli 0,7 bo'lsa, ishlab chikarilgan ikkita maxsulotdan bittasini sifatli bo'lish extimolini toping.

43. X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot funktsiyasi orqali berilgan: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ C(X-1), & 2 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$

Tajriba natijasida X miqdor $(0,3)$ intervalda yotgan qiymat qabul qilish ehtimolini toping.

44. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ isbotlang.

45. 2 ta idishda qora va oq sharlar bor. Birinchi idishda 3 ta oq va 4 qora, ikkinchisida esa 5 ta oq va 3 ta qora. Birinchi idishdan 2 ta 2 chi idishdan 1 ta shar tavakkaliga olinib bu 3 ta shar uchunchi bo'sh idishga solingach 3 idishdan olingan shar oq bo'lish ehtimoli topilsin

46. Agar diskrit tasodifiy miqdor uchun $\mathrm{P}\{\xi = k\} = \dfrac{c}{n+2}$, $k = 1, 2.., n-1$ bo'lsa, o'zgarmas S ni qiymatini toping.

47. X tasodifiy miqdorning $f(x) = \begin{cases} 0, & x \overline{\in} (0, \pi/2) \\ \sin x, & x \in (0, \pi/2) \end{cases}$ zichlik funktsiyasi berilgan. $F(x)$ taqsimot funktsiyasi ni toping.

48. 10 ta biletdan 3 tasi yutukli. Tavakkaliga olingan 5 ta biletdan kamida ikkitasi yutukli bo'lish extimoli topilsin.

49. Tajriba 2 ta shashkolnitashlashdan iborat. Tajribaning5 marta takrorlaganimizda ikkala shashkolda xam 6 rakamini tushishi xodisasining kamida bir marta ro'y berishi extimolini toping.

50. A_1, A_2, A_3, A_4 hodisalar bog'liqsiz va $P(A_1)q0,7$; $P(A_2)qP(A_3)q0,6$; $P(A_4)q0,8$ bo'lsa, ulardan kamida bittasi ro'y berish ehtimolini toping.

51. Student 20ta savoldan 8 tasiga to'liq javob bera oladi. Student undan so'ralgan 6 ta savoldan kamida 4 tasiga to'liq javob berish ehtimolini toping.

52. X tasodifiy miqdorning $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ C \sin 2x, & 0 < x \le \frac{\pi}{4} \\ 1, & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$ taqsimot funktsiyasi berilgan. $f(x)$ zichlik funktsiyasini toping.

53. Soddalashtiring: $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$

54. Agar A_1, A_2, A_3 xodisalar bog'liqsiz bo'lib, ularning ehtimollari mos ravishda 0,3, 0,5 va 0,6 bo'lsin. Ulardan kamida bittasini bajarish ehtimolini toping**.**

55. Tasodifiy miqdor zichlik funktsiyasi. $p(x)=\begin{cases}0, & агар \quad x\le 0\\ Ce^{-\lambda x}, & агар \quad x>0\end{cases}$ bo'lib, $\lambda>0$ - parametr. O'zgarmas son S ning qiymatini toping.
56. Agar $\mathrm{P}(A)=a, P(A+B)=в$ bo'lsa, $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}\cdot\mathrm{B})=?$
57. Idishda 25 ta maxsulotdan 5 tasi sifatsiz bo'lsa, ulardan ketma – ket uchtasi olinganda (takrorsiz), uchchalasini sifatli bo'lish ehtimolini toping.
58. Kubik tashlaganda 4 ochko chikishi A xodisa, juft son chikishi V xodisa bo'lsin. Bu xodisalarning ehtimolligi va birgalikda ro'y berish ehtimolligi ma'lum bo'lsa, A∪V xodisa ehtimolligi qanday topiladi?
59. Agar ξ_1 va ξ_2 bog'liqsiz va xar biri mos ravshda (2;1) xamda (1;2) parmetrlar bilan normal taqsimlangan bo'lsa, $D(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2)$ ni toping.
60. Zichlik funktsiyasi $f(x)=\begin{cases}0, & x\,\overline{\in}\,(1,2)\\ a\,x^2, & x\in(1,2)\end{cases}$ bo'lgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini hisoblang.
61. $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ isbotlang.
62. Idishda 10 ta shar bo'lib, ulardan 6 tasi oq, qolganlari qora rangda. Ketma – ket ikkita shar olinganda ikkinchisini oq rangli bo'lish ehtimolini toping
63. Soddalashtiring: $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$
64. Zavod ishlab chiqarayotgan soatlardan xar birining nosoz bo'lishi ehtimolini 0,02 ga teng. Nazoratchi 100 ta soatdan iborat partiyani tekshirmoqda. Partiyada 3 tadan ko'p nosoz soat bo'lish i ehtimoli kanday...
65. X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot funktsiyasi orqali berilgan: $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ C(X-1), & 2<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$
Tajriba natijasida X miqdor $(0{,}3)$ intervalda yotgan qiymat qabul qilish ehtimolini toping.
66. Kartochkalarga 1,2,3,4,5,6 raqamlari yozilgan. Tavakkaliga 4 ta kartochka olinib, ularni qator qilib terilganda juft son hosil bo'lishi ehtimolini toping.
67. Zichlik funktsiyasi $f(x)=\begin{cases}0, & x\,\overline{\in}\,(0,2)\\ \dfrac{x^3}{3} & x\in(0,2)\end{cases}$ bo'lgan X tasodifiy miqdorning dispersiyasini hisoblang.
68. Guruxda 12 ta talaba bo'lib, ularning 7 tasi alochilar. 5 ta talaba dekanatga chaqirildi. Ularning barchasi alochilar bo'lishi ehtimolini toping
69. Idishda 5ta shar bo'lib 3 tasi oq, qolganlari qora bo'lsa, 2 ta shar olinganda oq sharlar soni matematik kutilmasi topilsin.
70. 3 ta kub tashlash tajribasida kublar ustida tushgan sonlarni turlicha bo'lish ehtimoli topilsin?
71. O'yin soqqasi 10 marta tashlanganda: a) 6 raqami bir marta ham tushmasligi; b) 6 rakami xech bo'lmasa 1 marta tushishi ehtimolini toping.
72.

X	-1	0	1
R	0,4	0,1	0,5

73. bo'lsa, M(2X-5), D(-X) topilsin.
74. $A\cup B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\cup(A\cap B)$ isbotlang.
75. Kutichada 5 ta bir xil nomerlangan kubik bor. Tavakkaliga bita-bittadan barcha kubiklar olinganda kubiklarning nomerlari o'sib borish tartibida chiqishi ehtimolini toping.
76. X tasodifiy miqdorning $f(x)=\begin{cases}0, & x\,\overline{\in}\,(\pi/6,\pi/3)\\ C\sin 3x, & x\in(\pi/6,\pi/3)\end{cases}$ zichlik funktsiyasi berilgan. O'zgarmas son S ning qiymatini va $F(x)$ taqsimot funktsiyasini toping.

77. Tavakkaliga 20 dan katta bo'lmagan natural son tanlanadi, uning 5 ga karali bo'lishi ehtimolini toping.
78. Birinchi yashikda 2 ta ok, 5 ta qora shar, ikkinchi yashikda esa 2 ta kora, 2 ta ok shar bor. Birinchi yashikdan 1 ta shar olib ikkinchi yashikga solamiz, shundan so'ng ikkinchi qutidan 1 ta shar olamiz. Shu sharning oq rangda bo'lishi ehtimolini toping.
79. **X** diskret tasodifiy miqdor 3 ta qiymat qabul qiladi**:** $x_1 = 4$ ni $P_1 = 0{,}5$ ehtimol bilan**,** $x_2 = 6$ ni P$_2$q0,3 extimol bilan va x_3 ni p_3 ehtimol bilan. $MX = 8$ ni bilgan holda x_3 ni, p_3 ni va *D(X)*ni toping**.**
80. $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$ isbotlang.
81. Kartochkalarga 1,2,3,4,5, raqamlari yozilgan. Tavakkaliga ta kartochka olinib, ularni qator qilib terilganda 1 va 2 sonlari ketma-ket (12 ko'rinishda) turishi ehtimolini toping.
82. Zichlik funktsiyasi $f(x) = \begin{cases} 0, & x \overline{\in} (0,\pi) \\ a\sin x, & x \in (0,\pi) \end{cases}$ bo'lgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini hisoblang.
83. Uchta tanga tashlash tajribasida «Gerb» tomoni bilan tushgan tangalar soni X ning dispersiyasini toping.
84. Bitta o'q uzilganda nishonga tegish ehtimoli 0.8 ga teng. 10 marta o'q uzilganda nishonga rosa 7 marta tegish ehtimolini toping.
85. X tasodifiy miqdorning $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ \frac{1}{2}X - 1, & 2 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$ taqsimot funktsiyasi berilgan. X ning $(1{,}3)$ intervalga tegishli qiymat qabul qilishi ehtimolini toping.
86. Kartochkalarga 1,2,3,4,5,6,7 rakamlari yozilgan. Tavakkaliga 4 ta kartochka olinib, ularni qator qilib terilganda sonlar o'sish tartibida turishi ehtimolini toping.
87. Ikki sportchining birinchisi uchun sport ustasi shartlarini bajarishi ehtimoli 0,8, ikkinchi sportchi uchun esa 0,9 ga teng. Ikki sportchidan faqat bittasining sport ustasi shartlarini bajarishi ehtimoli topilsin.
88. Zichlik funktsiyasi bo'lgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini hisoblang. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \overline{\in} (0{,}2) \\ a\,x\ , & x \in (0{,}2) \end{cases}$
89. Yig'uvchiga zarur detal birinchi, ikkinchi, uchinchi, to'rtinchi yashikda ekanligi ehtimollari mos ravishda 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 ga teng. Zarur detal:a) ko'pi bilan 3 ta yashikda bo'lishi; b) kami bilan 2 ta yashikda bo'lishi ehtimollarini toping.
90. X tasodifiy miqdorning $f(x) = \begin{cases} 0, & x \overline{\in} (\pi/6, \pi/3) \\ C\sin 3x, & x \in (\pi/6, \pi/3) \end{cases}$ zichlik funktsiyasi berilgan. X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.
91. Idishda 7 ta bir xil sharlar bo'lib, ulardan 4 tasi oq qolganlari esa qora rangda. Idishdan tavakkaliga 3 ta shar olinganda, ular orasidagi oq sharlar soni X ning dispersiyasini toping.
92. Ikkita mergan bir vaktda o'q uzdi. birinchi merganni nishonga tekkizish ehtimoli 0,7ga, ikkinchisiniki 0,6 ga teng. Kamida bitta merganning nishonga tekkizish ehtimoli topilsin
93. Zavod chiqarayotgan elektr lampochkalarining nostandartligi 2%ni tashkil qiladi. Elektr lampochkalar yahikda 15 tadan joylashtiriladi. Yahikda nostandart lampochkalar soni 2 dan ortiq bo'lmaslik ehtimolini toping.
94. Merganni bitta o'q uzishda nishonga tekkizish ehtimoli Rq0,9. Mergan o'nta o'q uzdi. Uchchala o'qning ham nishonga tegish ehtimolini toping.
95. Samolyotga 3 marta o'q uziladi. Samolyotga 1ta o'q tekkanda uni urib tushirish ehtimoli 0,3; 2ta o'q tekkanda esa 0,6; 3ta o'q tegsa samolyot albatta urib tushiriladi. Agar birinchi o'q

0,5 ehtimol bilan, 2chi o'q 0,6 ehtimol bilan, 3chisi esa 0,8 ehtimol bilan samolyotga tegsa, samolyotni urib tushirish ehtimolini toping.

96. X diskret tasodifiy miqdor $\begin{array}{cccc} x_i & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{3\pi}{4} \\ p_i & 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \end{array}$ taqsimot qonuni bilan berilgan. $Y = \sin X$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

97. 4 ta tanga tashlash tajribasida «Gerb» tomoni bilan tushgan tangalar soni X ning matematik kutilmasini toping.

98. Oilada 7 ta farzand bor. O'g'il va qiz bola tug'ilishi ehtimollarini bir xil xisoblab, shu oilada o'g'illar soni qizlar sonidan ko'p bo'lishi ehtimolini toping.

99. Ichida 7 ta ok va 6 ta qizil shar bo'lgan idishdan 1 ta yo'qoldi. Idishdan tavakkaliga tanlangan sharning oq bo'lishi ehtimolini toping.

100. Kub 10 marta tashlanganda a) 6 raqamining bir marta ham tushmasligi; b) roppa-rosa 3 marta tushishi ehtimolini toping.

101. Stanok ish kuni davomida buzilishi ehtimoli 0,4 ga teng. Ish davomida 6 ta stanokdan 2 tasining buzilishi ehtimolini toping.

102. Ushbu 50 ta (1,2,3,...,49,50) sonlardan tasodifiy ravishda 10 tasi tanlab olingan. Tanlangan sonlardan 5 tasi 3 ga qoldiqsiz bo'linish ehtimoli topilsin.

103. Idishda 15ta shar bo'lib ulardan 7 tasi oq va qolganlari qora. 3 ta shar olinganda ularning bir xil rangda bo'lish ehtimolini toping.

104. Chastotali variatsion katori kuyidagicha $\begin{array}{lcccc} X: & 2 & 5 & 7 & 10 \\ n_i: & 8 & 6 & 4 & 7 \end{array}$ bo'lgan tanlanma uchun $\bar{x}$ ni toping.

105. Kuyidagi $\{5,4,5,3,6,6,7,5,5,3,4,4,5,6,3\}$tanlanma uchun chastotali variatsion katorni tuzing, S^2 ni hisoblang.

106. Chastotali variatsion qatori kuyidagicha $\begin{array}{lcccc} X: & 4 & 7 & 8 & 12 \\ n_i: & 5 & 2 & 3 & 10 \end{array}$ bo'lgan tanlanma uchun moda, mediana va $\bar{x}$ ni toping.

107. {-2,1,0,2,0,-1,0} tanlanmaga mos kelgan empirik taksimot funktsiyasini toping. Variatsiya koeffitsientini hisoblang.

108. Kuyidagi {3,5,4,3,6,3,5,7,6,4,5,4,7,3,5} tanlanma uchun chastotali variatsion katorni tuzing, S^2 ni hisoblang.

109. $\{3,5,2,3,1,4,4,2,3,3\}$ tanlanmaga mos kelgan empirik taksimot funktsiyasini toping.

110. Kuyidagi $\{5,4,5,3,6,6,7,5,5,3,4,4,5,6,3\}$ tanlanma uchun mediana, moda va o'rta arifmetik qiymatini hisoblang.

111. 2,3,3,4,4,4,5,6,7,7 variatsion katorning dispesiyasini xisoblang.

112. {3,5,4,3,6,3,5,7,6,4,5,4,7,3,5} tanlanma uchun $\bar{x}$, S^2 larni hisoblang.

113. {3,5,4,3,6,3,5,7,6,4,5,4,7,3,5} tanlanmaga mos kelgan empirik taksimot funktsiyasini moda va medianasini toping.

114. Chastotali variatsion katori kuyidagicha $\begin{array}{lccccc} X: & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ n_i: & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \end{array}$ bo'lgan tanlanma uchun $\bar{x}$, S^2 larni toping.

115. Kuyidagi $\{5,4,3,3,6,4,3,4,4,3\}$ tanlanma uchun chastotali variatsion katorni tuzing, S^2 ni hisoblang.