ЎЗБЕКИСТОН ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС

ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

АЛ – ХОРАЗМИЙ НОМЛИ УРГАНЧ ДАВЛАТ

УНИВЕРСИТЕТИ

«МАТЕМАТИК ФИЗИКА ВА АМАЛИЙ МАТЕМАТИКА»

КАФЕДРАСИ

Хасанов А. Б., Аллаберганов О. Р.

«Математик физика тенгламалари» курсидан маърузалар матни

II-ќисм

Урганч – 2009

Мундарижа

Маъруза № 1

Эллиптик турдаги тенгламалар. Чегаравий масалалар

Режа

1. Содда эллиптик турдаги тенгламалар.
2. Асосий тушунчалар ва таърифлар.
3. Лаплас тенгламасига šўйилган асосий чегаравий масалалар.

Таянч тушунчалар

Чегараланган соќа, гармоник функция ,нуšтада гармоник функция, Дирихленинг ички масаласи, Дирихленинг ташši масаласи, Нейманнинг ички масаласи, Нейманнинг ташši масаласи, аралаш масала.

Энг содда эллиптик типдаги тенгламалардан:

1. Лаплас тенгламаси:

$$\Delta u = 0, \quad \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \; u = u(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (1)$$

2. Пуассон тенгламаси:

$$\Delta u = f(x)$$

3. Гельмгольц тенгламаси:

$$\Delta u + k^2 u = f(x), \quad k = const.$$

Биз E_n – *n* ўлчамли фазода эллиптик типдаги тенгламаларга šўйиладиган чегаравий масалаларни ўрганамиз. Бунинг учун šуйидаги белгилашларни киритамиз:

$x, y \in E_n$ **векторлари**

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$y = (y_1, y_2, ..., y_n)$$

$$x \pm y = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, ..., x_n \pm y_n),$$

$$x \cdot y = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + ... + x_n \cdot y_n$$

– скаляр кўпайтма.

$$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

масофа. Маркази $x \in E_n$ нуštада радиуси *r* бўлган

$$\sigma(x, r) : |y - x| = r, \ y = \sigma(x, r)$$

сфера тенгламаси. Маркази $x \in E_n$ нуštада радиуси *r* бўлган *K(x,r)* шар тенгламаси:

$$K(x, y) : |y - x| < r, \quad y \in K(x, y)$$

$D \subset E_n$ **соќа чегараланган дейилади, агар *R>0*, $D \subset K(0,R)$ бўлса, акс ќолда *D* соќа чегараланмаган бўлиб, чексиз узоšлашган ∞ нуšтани саклайди. Бир боѓламли ёпиš сирт E_n фазони иккита соќага: D^+ - ички, D^+ ташки соќаларга ажратади. Бу ерда $\{\infty\} \in D^-$ чексиз узоšлашган нуšтани саšлайди. Агар σ šаралаётган D^+ соќанинг чегараси, яъни $\partial D = \sigma$ бўлса, у ќолда $y \in \sigma$ нуšтада ўтказилган ташšи нормал вектор деб**

$$\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$$

***D*соќадан чиšувчи**

$$\nu_k = \cos(y_k \wedge \nu)$$

йўналтирувчи косинусга эга бўлган бирлик векторни тушунамиз.

Таъриф 1. Лаплас тенгламасини šаноатлантирувчи

$$u \in C^2(D), \Delta u = 0, \;\; u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$$

функцияга *D* – соќада гармоник функция дейилади.

Таъриф 2. Агар $u(x)$ **функция** E_n **фазо чекли нуšтасининг етарли кичик атрофида гармоник бўлса, уни шу нуšтада гармоник дейилади. Агар** $u(x)$ **функция чексиз *D* соќанинг**

координата бошидан чекли масофада ётган иќтиёрий *x* нуўтасида гармоник бўлиб, етарли катта $|x|$ лар учун

$$|u(x)| < \frac{A}{|x|^{n-2}},\ A = const,\ n = 3,4,...$$

тенгсизлик бажарилса, $u(x)$ **функция чексиз *D* соќада гармоник дейилади. Энди Лаплас тенгламаси учун асосий чегаравий масалаларнинг šўйилиши билан танишамиз:**

1) Биринчи чегаравий масала ёки Дирихленинг ички (D^{+}) **масаласи:**

$$\Delta u = 0;\ u\big|_{\sigma} = f(x),\ f(x) \in C(\sigma),\ u = u(x_1, x_2, ..., x_n) \in C^2(D)$$

2) Иккинчи чегаравий масала ёки Нейманнинг ички (D^{+}) **масаласи:**

$$\Delta u = 0;\ \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\sigma} = f(x),\ f(x) \in C^1(\sigma),$$

3) Дирихленинг ташši (D^{-}) **масаласи:**

$$\Delta u = 0;\ u\big|_{\sigma} = f(x),\ f(x) \in C(\sigma),\ u(x) \in C^2(D^{-})$$

бўлиб,

$$|x| \to \infty \text{ да } |u(x)| < \frac{A}{|x|^{n-2}},\ n > 2$$

тенгсизлик бажарилади. *n=2* ќолда $|x| \to \infty$ да чекли лимитга интилади.

$$\lim_{|x| \to \infty} u(x) = A$$

1) Нейман ташќи $\left(N^-\right)$ масаласи:

$$\Delta u = 0;\ \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\sigma} = f(x),\ f(x) \in C^1(\sigma),\ u(x) \in C^2(D^-) \cap C^1(\sigma)$$

***n>2* бўлганда**

$$\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0$$

***n=2* ќолда**

$$\lim_{|x| \to \infty} u(x) = A,\ A < \infty$$

5) Аралаш масала (учинчи чегараланган масала):

$$\Delta u = 0;\ \alpha(x)u + \beta(x)\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\sigma} = f(x), u(x) \in C^2(D^-) \cap C^1(\overline{D}), \overline{D} = D \cup \sigma$$

.

Бу ерда $\alpha(x),\ \beta(x)$ ва *f(x)* лар σ чегарада берилган бўлакли

узлуксиз функциялар бўлиб,

$$\alpha(x) \geq 0,\ \beta(x) \geq 0,\ \alpha + \beta > 0,\ \forall x \in \sigma .$$

Хусусий ќосилаларни кўриб чиšамиз:

1) $\alpha = 1, \beta = 0\ \ u\big|_{\sigma} = f(x)$ - Дирихле ёки биринчи чегаравий масала.

2) $\alpha = 0, \beta = 1\ \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\sigma} = f(x)$ - Нейман ёки иккинчи чегаравий масала.

3) $\alpha \geq 0, \beta = 1\ \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha u\right|_{\sigma} = f(x)$ - учинчи тур чегаравий масала.

Ќудди шундай чегаравий масалаларни Пуассон

$$\Delta u = f$$

ва Гельмгольц

$$\Delta u + k^2 u = f$$

тенгламалари учун ќам šараш мумкин.

Ушбу

$$\Delta u + k^2 u = f$$

E_3 **ёки** E_2 **фазода тенгламанинг ечими** $u(x)$ **чексизликда нурланиш принципини šаноатлантириши керак.**

$$u = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{r}\right),\ \frac{\partial u}{\partial r} + iku = \overline{\overline{O}}\left(\frac{1}{r}\right)\ r \to \infty\ E_3$$ ***n=3***

E_2 **фазода эса,**

$$u = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right),\ \frac{\partial u}{\partial r} + iku = \overline{\overline{O}}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)\ r \to \infty.$$

Адабиётлар

1.Салоќитдинов М.С., Математик физика тенгламалари, Т., «Ўзбекистон», 2002.

2.Владимиров В.С., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1981.

3.Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1977.

Маъруза № 2

Лаплас тенгламасининг фундаментал ечими

Режа

1. Текисликда Лаплас тенгламасининг фундаментал ечими.
2. Уч ўлчовли фазода фундаментал ечим.
3. Умумий ќолда, яъни *n* –ўлчовли фазода фундаментал ечим.

Таянч тушунчалар

Лаплас тенгламасининг фундаментал ечими, текисликда фундаментал ечимнинг кўриниши, фазода фундаментал ечимнинг кўриниши, n ўлчовли фазода фундаментал ечимнинг кўриниши

Таъриф. Лаплас тенгламасининг фаšат битта $r=|x-y|$ геометрик ўзгарувчига боғлик ечимига, унинг фундаментал ечими дейилади ёки элементар ечими дейилади.

Даставвал *n=2* ќолни ўрганамиз.

Бу ќолда šутб координаталарида

$$x_1=y_1+r\cos\varphi,\ \ x_2=y_2+r\sin\varphi\ \ r=|x-y|.$$

Лаплас

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\ 2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^{\ 2}} = 0$$

тенгламасининг кўринишини топамиз:

Буни топишдан олдин šуйидаги битта теорема ва иккита натижани келтириб ўтамиз (исботсиз).

Теорема. Агар

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\ 2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^{\ 2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^{\ 2}} = \Delta u$$

дан šуйидаги алмаштиришни бажарсак,

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(q_1, q_2, q_3) \\ x_2 = \varphi_2(q_1, q_2, q_3) \\ x_3 = \varphi_3(q_1, q_2, q_3) \end{cases}$$

у ќолда Лаплас оператори šуйидаги кўринишда бўлади.

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1 H_3}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right\}$$

бу ерда,

$$H_1=\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}\right)^2};$$

$$H_2=\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}\right)^2};$$

$$H_3=\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}\right)^2}.$$

Натижа-1 (Сферик координаталар системаси)

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\theta\cos\varphi \\ x_2 = r\sin\theta\sin\varphi \\ x_3 = r\cos\theta \end{cases}$$ **бўлса,** $q_1 = r,\ q_2=\theta,\ q_3=\varphi$

$$H_1=\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\theta\sin^2\varphi+\cos^2\theta}=\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=1$$

$$H_2=\sqrt{r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi+r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi+r^2\sin^2\theta}=1$$

$$H_3=\sqrt{r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+0}=r\sin\theta$$

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

Натижа – 2 (Цилиндрик координаталар системаси)

$$\begin{cases} x_1=\rho\cos\varphi \\ x_2=\rho\sin\varphi \\ x_3=x_3 \end{cases} \Rightarrow\ H_1=1,\ H_2=\rho,\ H_3=1$$

$$\Delta u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$$

Келтирилган теорема ва натижалардан šуйидагига эга бўламиз;

$$\Delta u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0.$$

Фундаментал ечимнинг таърифига асосан $u=u(r)$ **бўлгани учун** $\frac{\partial u}{\partial\varphi}=0$**. Бундан фойдаланиб**

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0\quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0\Rightarrow r\frac{\partial u}{\partial r}=C_1$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{C_1}{r}\Rightarrow u=C_1\ln r+C_2$$

Агар $C_1=-1,\ C_2=0$ **бўлса,**

$$u=\ln\frac{1}{r},\ r=|x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

Демак, *n=2*ќолда фундаментал ечим ушбу

$$E_2(x,y)=\ln\frac{1}{|x-y|}$$

кўринишда бўлади.

n=3 ќолда, биз Лаплас тенгламасининг

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$$

сферик координаталардаги

$$x_1 = y_1 + r\sin\theta\cos\varphi,$$

$$x_2 = y_2 + r\sin\theta\sin\varphi,$$

$$x_3 = y_3 + r\cos\theta,$$

$$r = |x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}$$

кўринишини топамиз:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Фундаментал ечимнинг таърифига биноан $u = u(r)$ бўлгани учун.

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial\theta} = 0$$

бўлиб, Лаплас тенгламаси

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0$$

кўринишини олади. Бу тенгламани ечиб

$$r^2\frac{\partial u}{\partial r}=C_1,\ \Rightarrow\ \frac{\partial u}{\partial r}=\frac{C_1}{r^2}$$

$$u=-\frac{C_1}{r}+C_2$$

топамиз.

$C_1=-1,\ C_2=0$ деб танласак , $u=\frac{1}{r}$ яъни

$$u(x,y)=\frac{1}{|x-y|}.$$

Шундай šилиб *n=3* ќолда Лаплас тенгламасининг фундаментал ечими

$$\varepsilon_3(x,y)=\frac{1}{|x-y|};$$

$$x=(x_1,x_2,x_3)\ ,\ y=(y_1,y_2,y_3)$$

кўринишда бўлар экан.

Энди Лаплас тенгламасининг фундаментал ечимини умумий ќолда E_n да топамиз: Ушбу Лаплас

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

тенгламасини

$$u(x) = \lambda(r)\text{, } x = (x_1, x_2, ..., x_n)\text{,}$$

$$r = |x - y|\text{, } y = (y_1, y_2, ..., y_n)\text{,}$$

$$r = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i, y_i)^2};$$

бу ерда фašат *r* га боѓлиš ечимини топамиз. Бунинг учун

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial \lambda}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i, y_i)^2}}(x_1, y_1) = \frac{\partial \lambda}{\partial r}\frac{x_i - y_i}{r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial r}\frac{x_i - y_i}{r}\right) = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2}\frac{(x_i - y_i)^2}{r^2} + \frac{r - \frac{x_i - y_i}{r}(x_i - y_i)}{r^2}\frac{\partial \lambda}{\partial r} =$$

$$= \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2}\frac{(x_i - y_i)^2}{r^2} + \frac{r^2 - (x_i - y_i)^2}{r^3}\frac{\partial \lambda}{\partial r} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2}\frac{(x_i - y_i)^2}{r^2} + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{(x_i - y_i)^2}{r^2}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial r}.$$

$$0 = \Delta u = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\frac{(x_i - y_i)^2}{r^2} + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{(x_i - y_i)^2}{r^2}\right)\frac{d\lambda}{dr}\right] = \frac{d^2\lambda}{dr^2}\frac{1}{r^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 +$$

$$+ \frac{1}{r}\frac{d\lambda}{dr}\sum_{i=1}^{n}1 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\frac{d\lambda}{dr} = \frac{d^2\lambda}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{d\lambda}{dr}$$

.

Шундай šилиб, ушбу

$$\frac{d^2\lambda}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\frac{d\lambda}{dr}=0$$

тенгламани ќосил šиламиз. Бу тенгламани ечамиз.

$$\frac{d\lambda}{dr}=z,\quad \frac{d^2\lambda}{dr^2}=\frac{dt}{dr},\ \frac{d\lambda}{dr}+\frac{n-1}{r}z=0$$

$$\ln z=(1-n)\ln r+\ln C\ \ z=C\cdot r^{1-n}$$

$$\frac{d\lambda}{dr}=C\,r^{1-n}\ \Rightarrow\ \lambda=C\int r^{1-n}dr+C_1=\frac{C\,r^{2-n}}{2-n}+C_1$$

$$\lambda(r)=\frac{C}{(2-n)}r^{2-n}+C_1\ \ C=2-n,\ \ C_1=0\ \ u=r^{2-n},$$

яъни фундаментал ечим,

$$\varepsilon_n(x,y)=r^{2-n};\ r=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2};$$

кўринишда бўлади.

Топилган элементар ечимларнинг кўринишидан маълумки $x\neq y$ ларда $\varepsilon_n(x,y)$ фундаментал ечим E_n фазода гармоник бўлиб ќар бир фиксирланган *x* да *y* - бўйича ќам Лаплас тенгламасини šаноатлантиради, яъни

$$\Delta_x\varepsilon_n(x,y)=\Delta_y\varepsilon_n(x,y)=0,\quad x\neq y$$

E_n **фазода**

$$\varepsilon_2(x,y)=\ln\frac{1}{r}$$

фундаментал ечим чексизликда логарифмик маḱсусликка эга бўлади. $\varepsilon_n(x,y)$ – фундаментал ечим $n\neq 2$ да E_n фазода $x\neq y$ гармоник функция бўлади.

Адабиётлар

1.Салоḱитдинов М.С., Математик физика тенгламалари, Т., «Ўзбекистон», 2002.

2.Владимиров В.С., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1981.

3.Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1977.

Маъруза № 3

Грин формулалари

Режа

1. Кўп ўлчамли интеграллар учун бўлаклаб интеграллаш формуласи.
2. Гриннинг 1 – формуласи.
3. Гриннинг 2 – формуласи.

Таянч тушунчалар

Бўлаклаб интеграллаш формуласи, Гриннинг биринчи формуласи, Гриннинг иккинчи формуласи

Бизга математик анализ курсидан маълумки E_3 фазода $D \subset E_3$ чегараланган соҳа бўлиб, чегараси $\partial D = \sigma$ - бўлакли силлиš сиртдан иборат бўлсин. $\nu - \sigma$ сиртга ўтказилган бирлик нормал бўлсин, яъни

$$\nu_k = \cos(y_k, \wedge \nu)$$

$$A_1(y),\ A_2(y),\ A_3(y),\ y = (y_1, y_2, y_3)$$

функциялар $\overline{D} = D \cup \sigma$ да узлуксиз бўлиб

$$\frac{\partial A_j(y)}{\partial y_j},\ j=1,2,3.$$

D **да узлксиз бўлсин, яъни**

$$A_j(y)\in C(\overline{D}), \frac{\partial A_j}{\partial y_j}\in C(D),\ j=1,2,3.$$

У ќолда ушбу

$$\int_D\left(\frac{\partial A_1}{\partial y_1}+\frac{\partial A_2}{\partial y_2}+\frac{\partial A_3}{\partial y_3}\right)dy=\int_\sigma\left(A_1v_1+A_2v_2+A_3v_3\right)d\sigma$$

формула ўринли бўлади. Бу формула $D\subset E_n$ **чегараланган соќа бўлиб, чегараси** $\partial D=\sigma$ **- бўлакли силлиš сиртдан иборат бўлган соќа учун ќам ёзиш мумкин. Агар**

$$A_j(y)\in C(\overline{D}),\ \frac{\partial A_j}{\partial y_j}\in C(D),\ y=(y_1,y_2,...,y_n),\ j=\overline{1,n}$$

функциялар берилган бўлиб,

$$v=(v_1,v_2,...,v_n)$$

– σ **сиртга ўтказилган бирлик ташšи нормал вектор бўлса, яъни**

$$v_k=\cos(y_k,\wedge v).$$

У ќолда Гаусс – Остроградский формуласи, ушбу

$$\int_D \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_j}{\partial y_j} \right) dy = \int_\sigma \left(\sum_{j=1}^{n} A_j v_j \right) d\sigma, \quad n = \overline{1, n} \qquad (1)$$

кўринишни олади.

Бу формуладан фойдаланиб кўп ўлчамли интеграллар учун бўлаклаб интеграллаш формуласини келтириб чиšарамиз.

Šуйидаги интегралларни šараймиз:

$$\int_D \frac{\partial AB}{\partial y_j} dy = \int_\sigma ABv_j d\sigma \qquad (2)$$

бу ерда

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_n), B = (B_1, B_2, \dots, B_n)$$

узлуксиз дифференциалланувчи функциялар.

Иккинчи томондан кўпайтмани дифференциаллаш šоидасига биноан,

$$\int_D \frac{\partial AB}{\partial y_j} dy = \int_D \frac{\partial A}{\partial y_j} Bdy = \int_D A \frac{\partial B}{\partial y_j} dy \qquad (3)$$

(2) + (3) дан

$$\int_\sigma ABv_j d\sigma = \int_D \frac{\partial A}{\partial y_j} Bdy + \int_D A \frac{\partial B}{\partial y_j} dy$$

яъни

$$\int_D A\frac{\partial B}{\partial y_j}dy=\int_\sigma ABv_j d\sigma-\int_D\frac{\partial A}{\partial y_j}Bdy \qquad (4)$$

бўлаклаб интеграллаш формуласига эга бўламиз.

Гриннинг биринчи формуласи

Šуйидаги шартларни šаноатлантирувчи иккита $u(y),\ \vartheta(y)$ функциялар.

$$u(y)\in C^2(D)\cap C^1(\overline{D}),\ \vartheta(y)\in C^1(D)\cap C(\overline{D})$$

берилган бўлсин. Ушбу айниятдан фойдаланамиз:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\vartheta\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)\equiv\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\vartheta}{\partial y_k}\frac{\partial u}{\partial y_k}+\vartheta\Delta u \qquad (5)$$

Ќašišатан ќам,

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\vartheta\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)=\frac{\partial\vartheta}{\partial y_k}\frac{\partial u}{\partial y_k}+\vartheta\frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}.$$

Бу тенгликни $k=1,2,3,\ldots.$ бўйича йиғсак,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\vartheta\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\vartheta}{\partial y_k}\frac{\partial u}{\partial y_k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}$$

бу ерда ушбу

$$\Delta u=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}$$

белгилашдан фойдаланиб (5) формулани исбот šиламиз. (5) айниятнинг иккала томонини *D*– соќа бўйича интеграллаймиз:

$$\int_D\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\vartheta\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)dy=\int_D\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\vartheta}{\partial y_k}\frac{\partial u}{\partial y_k}dy+\int_D\vartheta\Delta u dy \qquad (5')$$

Бу формулага (1) Гаусс – Остроградский формуласини šўллаймиз:

$$\int_D\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\vartheta}{\partial y_k}\frac{\partial u}{\partial y_k}dy+\int_D\vartheta\Delta u dy=\int_D\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\vartheta\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)dy=$$
$$=\int_D\sum_{k=1}^{n}\vartheta\frac{\partial u}{\partial y_k}\nu_k d\sigma=\int_D\vartheta\frac{\partial u}{\partial y_k}d\sigma$$

бу ерда šуйидаги

$$\frac{\partial u}{\partial\vartheta}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial y_k}\nu_k$$

нормал йўналиш бўйича олинган ќосила формуласидан

фойдаландик. Шундай šилиб Гриннинг биринчи формуласини

$$\int_{\sigma} \vartheta \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = \int_{D} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_k} \frac{\partial u}{\partial y_k} d\sigma + \int_{D} \vartheta \Delta u dy \qquad \textbf{(6)}$$

топдик.

Гриннинг иккинчи формуласи

Ушбу

$$u(y) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D}) \quad , \vartheta(y) \in C^1(D) \cap C(\overline{D})$$

шартни šаноатлантирувчи иккита ***u*** **ва** ϑ **функциялар берилган бўлсин. (6) формулада** ϑ **ни** ***u*****га алмаштирамиз, у ќолда**

$$\int_{\sigma} u \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu} d\sigma = \int_{D} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_k} \frac{\partial \vartheta}{\partial y_k} dy + \int_{D} u \Delta \vartheta dy \qquad (6')$$

$(6')$ **дан (6) ни айирамиз:**

$$\int_{\sigma}\left(u\frac{\partial\vartheta}{\partial\nu}-\vartheta\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)d\sigma=\int_{D}\left(u\Delta\vartheta-\vartheta\Delta u\right)dy \qquad (7)$$

Гриннинг иккинчи формуласига эга бўламиз.

Адабиётлар

1.Салоќитдинов М.С., Математик физика тенгламалари, Т., «Ўзбекистон», 2002.

2.Владимиров В.С., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1981.

3.Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1977.

Маъруза № 4

Гармоник функциянинг интеграл тасвири

Режа

1. Гриннинг 1 – формуласидан гармоник функциянинг интеграл тасвирни келтириб чиšариш.

Таянч тушунчалар

Интеграл тасвир,соќада гармоник функциянинг интеграл тасвири

Гриннинг иккинчи формуласидан, яъни (7) дан иќтиёрий икки марта узлуксиз дифференциалланувчи функциялар учун интеграл тасвирни келтириб чиšариш мумкин.

Теорема 1. Агар $D \subset E_n$ чекли соќа бўлиб, чегараси $\partial D = \sigma$ бўлакли силлиš сиртдан иборат бўлса ва

$$u(y) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$$

бўлиб, $\vartheta(y) \equiv \varepsilon_n(x, y)$ – Лаплас тенгламасини E_n даги фундаментал ечими бўлиб $x \in D$ параметрик нуšта бўлсин. У ќолда

$$u(x)=\frac{1}{(n-2)\omega_n}\int_\sigma\left(\varepsilon_n(x,y)\frac{\partial u}{\partial V}-u(y)\frac{\partial\varepsilon_n(x,y)}{\partial V}\right)d\sigma_y-$$

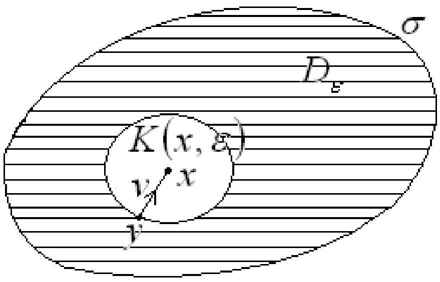
$$-\frac{1}{(n-2)\omega_n}\int_D\varepsilon_n(x,y)\Delta u(y)dy \qquad (1)$$

интеграл тасвир ўринли бўлади.

<u>Исбот:</u> Берилган

$\varepsilon_n(x,y)$ **ва** $u(y),\ x=(x_1,x_2,...,x_n),\ \ y=(y_1,y_2,...,y_n)$

функцияларга тўѓридан–тўѓри Грин формуласини šўллаб бўлмайди, чунки



$y=x\in D$ **нуštада** $\varepsilon_n(x,y)$ **функция маќсусликка эга. Шунинг учун** ***x*** **нуštани марказ šилиб** ε **радиусли** $K(x,\varepsilon)$ **- шар чизамиз.**

$$|y-x|<\varepsilon,\ \ y\in K(x,\varepsilon)\subset D$$

D **соќанинг шардан ташšари šисмини** $D\setminus K(x,\varepsilon)=D_\varepsilon$ **- орšали**

белгилаб оламиз. Бу D_ε - соќа учун

$$u(y), \varepsilon_n(x,y) \in C^2(D_\varepsilon) \cap C^1\left(\overline{D_\varepsilon}\right)$$

бўлади. Шунинг учун $u(y), \varepsilon_n(x,y)$ - функцияларга D_ε - соќада Грин формуласини šўллаймиз. Бунинг учун ушбу

$$\sigma(x,\varepsilon): |y-x| = \varepsilon$$

сферани оламиз, у ќолда D_ε - соќанинг чегараси $\sigma \cup \sigma(x,\varepsilon)$ дан иборат бўлгани учун, ушбу

$$\begin{aligned} &\int\limits_{D_\varepsilon} \big(u(y)\Delta_y \varepsilon_n(x,y) - \varepsilon_n(x,y)\Delta u(y)\big) dy = \\ &= \int\limits_{\sigma} \left(u(y)\frac{\partial \varepsilon_n(x,y)}{\partial \nu} - \varepsilon_n(x,y)\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma_y + \\ &+ \int\limits_{|y-x|=\varepsilon} \left(u(y)\frac{\partial \varepsilon_n(x,y)}{\partial \nu} - \varepsilon_n(x,y)\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma_y \end{aligned} \qquad \text{(2)}$$

Бу ерда $\dfrac{\partial \varepsilon_n(x,y)}{\partial \nu}$ - D_ε - соќанинг $y \in \sigma \cup \sigma(x,\varepsilon)$ нуšтага ўтказилган нормал йўналиши бўйича олинган ќосила. Бу ќосила $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ нуšтанинг координаталари бўйича ќисобланиб, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ параметрик нуšталардир. $\varepsilon_n(x,y)$ - функция Лаплас тенгламасининг фундаментал ечими бўлгани учун

$$\Delta_y \varepsilon_n(x,y) = 0,\ \forall y \in D_\varepsilon \Rightarrow \int_{D_\varepsilon} u(y) \Delta_y \varepsilon_n(x,y) dy = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

(2)тенгликда $\varepsilon \to 0$ да лимитга ўтиб

$$u(y) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$$

функция учун интеграл тасвирни ќосил šиламиз.

Аввало $n > 2$ бўлсин. $\sigma(x,\varepsilon)$ – сферада

$$r = |x - y| = \varepsilon.$$

ν – нормал D_ε – соќага ташši бўлганлиги сабабли ε радиусга šарама – šарши йўналган. Шунинг учун

$$\left.\frac{\partial \varepsilon_n(x,y)}{\partial \nu}\right|_{y \in \sigma(x,\varepsilon)} = -\left.\frac{\partial \varepsilon_n(x,y)}{\partial \varepsilon}\right|_{y \in \sigma(x,\varepsilon)} =$$
$$-\frac{\partial}{\partial r}\left.\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)\right|_{r=\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\right) = \frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}$$

Бирлик сферани σ_1 орšали белгиласак,

$$d\sigma(x,\varepsilon) = \varepsilon^{n-1} d\sigma_1, \quad y - x = \theta\varepsilon$$

алмаштиришни бажарсак, $y \in \sigma(x,\varepsilon)$ бўлганда $\theta \in \sigma_1$ бўлади. Шу сабабли (2) формулани šуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\int\limits_{D_\varepsilon} \frac{\Delta u(y)}{r^{n-2}} dy = \int\limits_{\sigma} \left[\frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) \right] d\sigma_y + \\ + \int\limits_{\sigma_1} \left[\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \nu} - (n-2) u(x+\theta\varepsilon) \right] d\sigma_1 \qquad (4)$$

Равшанки,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{D_\varepsilon} \frac{\Delta u(y)}{r^{n-2}} dy = \int\limits_{D} \frac{\Delta u(y)}{r^{n-2}} dy.$$

(4) формуланинг ўнг томонидаги биринчи интеграл ε га боѓлиš эмас

$$u(y) \in C^1(\overline{D})$$

бўлгани учун

$$\left| \frac{\partial u}{\partial y_i} \right| \le M, \; M - const.$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_i} \cos(\nu, y_i) \right| \le nM \quad (\cos(\nu, y_i) \le 1).$$

Бундан дарќол

$$\left| \varepsilon \int\limits_{\sigma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma_1 \right| \le \varepsilon n M |\sigma_1| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

$|\sigma_1|$ **– бирлик сферанинг юзи**

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-(n-2)\int_{\sigma_1} u(x+\theta\varepsilon)d\sigma_1\right] = -(n-2)u(x)|\sigma_1|.$$

Демак, (4) тенгликдан ушбу

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)|\sigma_1|}\int_\sigma\left(\frac{1}{r^{n-2}}\frac{\partial u(y)}{\partial\nu} - u(y)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{n-2}}\right)d\sigma_y - \frac{1}{(n-2)|\sigma_1|}\int_D \frac{\Delta u(y)}{r^{n-2}}dy \qquad (5)$$

формула ќосил бўлади. $|\sigma_1| = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$

Теорема исбот бўлди.

n=2 бўлганда (5) формула ўз маъносини йўšотади. Бу ќолда $\varepsilon(x,y) = \ln\frac{1}{r}$ эканлигини эътиборга олиб, аввалги ќисоблашларга šайтсак,

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma\left(\frac{\partial u(y)}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r} - u(y)\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}\right)d\sigma_y - \frac{1}{2\pi}\int_D \ln\frac{1}{r}\Delta u(y)dy \qquad (6)$$

формулага эга бўламиз. Агар *x* нуšта *D* соќадан ташšарида ётган бўлса,

$$\int_D \frac{\Delta u(y)}{r^{n-2}}dy = \int_\sigma \left(\frac{1}{r^{n-2}}\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} - u(y)\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{n-2}} \right) d\sigma_y,\ n > 2$$

$$\int_D \frac{\Delta u(y)}{r^{n-2}}dy = \int_\sigma \left(\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} - u(y)\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r} \right) d\sigma_y,\ n = 2$$

формулалар ќосил бўлади.

Энди $u(x)$ функция (5) ва (6) функцияларни чиšаришдаги шартдан ташšари *D* соќада гармоник бўлсин. У ќолда $\Delta u(y) = 0$ бўлиб, šуйидаги интеграл тасвирлар ўринли бўлади:

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)\omega_n}\int_\sigma \left(\frac{1}{r^{n-2}}\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} - u(y)\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{n-2}} \right) d\sigma_y,\ n > 2 \qquad (7)$$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left(\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} - u(y)\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r} \right) d\sigma_y,\ n = 2 \qquad (8)$$

Адабиётлар

1.Салоќитдинов М.С., Математик физика тенгламалари, Т., «Ўзбекистон», 2002.

2.Владимиров В.С., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1981.

3.Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1977.

Маъруза № 5

Гармоник функциянинг хоссалари

Режа

1. Ўрта šиймат ќašида.
2. Максимум принципи.
3. Йўšатиладиган маќсуслик ќašида.

Таянч тушунчалар

Сфера учун ўрта арифметик формула, шар учун ўрта арифметик формула,šандай шартда функция соќанинг чегарасида максимумга эришади.

.

Грин формулалардан ва гармоник функциянинг интеграл тасвиридан, унинг оддий хоссаларини келтириб чиšарамиз:

Теорема 1. Агар *D* соќада гармоник $u(x)$ функция учун, $u(x) \in C^1(D \cup \sigma)$ бўлса, у ќолда

$$\int_{\sigma} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} d\sigma_y = 0 \qquad (1)$$

бўлади.

Исбот. Гриннинг биринчи формуласида фойдаланамиз, чунки теорема шартига кўра

$$u \in C^2(D) \cap C^1(D \cup \sigma),$$

шунинг учун 1 – Грин формуласи

$$\int_{\sigma} \vartheta \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = \int_{D} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vartheta}{\partial y_k} \frac{\partial u}{\partial y_k} dy + \int_{D} \vartheta \Delta u dy$$

ўринли. Бу ерда $\vartheta \equiv 1$ деб оламиз, у ќолда

$$\int_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = 0 + 0 = 0.$$

Теорема 2. Агар $u(x)$ функция *D* соќада гармоник бўлса, у ќолда *u(x)* чексиз дифференциалланувчидир, яъни

$$u(x) \in C^{\infty}(D)$$

бўлади.

Исбот. $u(x)$ функция *D* соќада гармоник бўлсин. У ќолда ўзининг чегараси билан тўла *D* соќада ётувчи D_1 соќани оламиз. D_1 соќани шундай танлаб оламизки унинг чегараси $\partial D_1 = \sigma_1$ - бўлаклари силлиš сиртдан иборат бўлсин.

$u(x) \in C^2(\overline{D_1})$ бўлгани учун (7) гармоник функция учун интеграл тасвирдан

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\sigma} \left(\varepsilon_n(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} - u(y) \frac{\partial \varepsilon_n(x,y)}{\partial \nu} \right) d\sigma_1 \qquad \textbf{(2)}$$

фойдаланамиз. Бу ерда

$$\varepsilon_n(x,y)=\frac{1}{|x-y|^{n-2}}$$

(2) интеграл остидаги функция *x* ва *y* ўзгарувчиларнинг узлуксиз функция бўлиб $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ нуштанинг барча x_j – координаталари бўйича барча тартибли ќосилаларга эга. Параметрга боғлик интегралларни дифференциаллаш ќашидаги теоремега асосан $u(x)$ функция *x* – бўйича барча тартибли ќосилаларга эга.

Теорема 3. (Ўрта шиймат ќашида)

Агар $u(x)$ функция $K(x,R)$ – шарда гармоник бўлиб, $\overline{K(x,R)}$ – ёпиш шарда узлуксиз бўлса, у ќолда

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int\limits_{|y-x|=\varepsilon}u(y)d\sigma_y \qquad \textbf{(3)}$$

формула ўринли бўлади.

Исбот. Ушбу

$\overline{K_1}(x_1,R_1):|y-x|\le R_1<R$

шарни караймиз. Танлашимизга кўра $\overline{K}_1\subset K$ ва $u(y)\in C^2(\overline{K_1})$ бўлгани учун, гармоник функцияга интеграл тасвир ёзамиз. $\overline{K}_1$ – шар учун

$$u(x)=\frac{1}{(n-2)\omega_n}\int\limits_{|y-x|=R_1}\left(\varepsilon_n(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu}-u(y)\frac{\partial\varepsilon_n(x,y)}{\partial\nu}\right)d\sigma_y=$$

$$\sigma_1:|y-x|=R_1$$

сферада

$$\varepsilon_n(x,y)\Big|_{y\in\sigma_1}=\begin{cases}\ln\dfrac{1}{R_1}, & n=2\\ \dfrac{1}{R_1}, & n=3=const\\ \dfrac{1}{R_1^{n-2}}, & n>2\end{cases}$$

σ_1 сферага ташки ν – нормалнинг йуналиши R_1 – радиус йуналиши билан бир ќил бўлади. Шунинг учун

$$\left.\frac{\partial\varepsilon_n(x,y)}{\partial\nu}\right|_{y\in\sigma_1}=\left.\frac{\partial\varepsilon_n(x,y)}{\partial R_1}\right|_{y\in\sigma_1}=\begin{cases}-\dfrac{1}{R_1}, & n=2\\ -\dfrac{1}{R_1^2}, & n=3=const\\ -\dfrac{n-2}{R_1^{n-1}}, & n>2\end{cases}.$$

Буларни эътиборга олиб юšоридаги интегрални šуйидагича ќисоблаймиз:

$$=\frac{1}{(n-2)\omega_n R_1^{n-2}}\int_{|y-x|=R_1}\frac{\partial u(y)}{\partial\nu}d\sigma_y+\frac{(n-2)}{(n-2)\omega_n R_1^{n-1}}\int_{|y-x|=R_1}u(y)d\sigma_y=$$
$$=\frac{1}{\omega_n R_1^{n-1}}\int_{|y-x|=R_1}u(y)d\sigma_y;$$

Демак,

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n R_1^{n-1}}\int\limits_{|y-x|=R_1} u(y)d\sigma_y \qquad (3')$$

$u(x)$ функция $\overline{K(x,R)}$ – шарда узлуксиз бўлгани учун бу тенгликда $R_1 \to R$ да интеграл остида лимитга ўтиш мумкин.

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int\limits_{|y-x|=R} u(y)d\sigma_y$$

формулани ќосил šиламиз.

$$\omega_n R^{n-1}=\begin{cases}2\pi R, & агар\, n=2\\ 4\pi R^2, & агар\, n=3\end{cases} \qquad (3')$$

формулани

$$R_1^{n-1}u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{|y-x|=R} u(y)d\sigma_y$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бу тенгликни R_1 бўйича $0\le R_1\le R$ оралиšда интеграллаб,

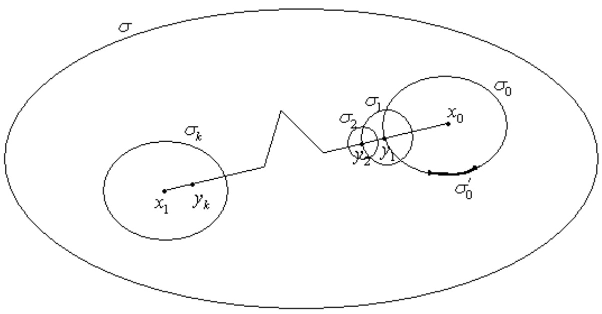
$$u(x)=\frac{n}{\omega_n R^n}\int\limits_{K(x,R)} u(y)dy \qquad (3'')$$

формулага эга бўламиз. Бу ерда $\frac{\omega_n R^n}{n} - K(x,R)$ шарнинг ќажми.

(3) ва $(3'')$ формулалар мос равишда сфера ва шар бўйича гармоник функциялар учун ўрта арифметик формулалар номи билан юритилади.

Теорема 4. (максимум принципи). Агар $u(x)$ – функция:

1. Чекли *D* соќада гармоник.
2. $\overline{D} = D \cup \sigma$ да узлуксиз.
3. $u(x) \neq const$, бўлса, у ќолда $u(x)$ функция максимум ва минимумга *D* соќанинг чегараси *D* да эришади.



Исбот. $u(x)$ функция ёпиš $\overline{D} = D \cup \sigma$ соќада узлуксиз бўлгани учун $\max u(x)$ мавжуд. Теоремани тескаридан фараз šилиш усулидан фойдаланиб исботлаймиз. Фараз šилайлик $u(x)$ функция max. га *D* соќанинг ичида $x_0 \in D$ нуšтада эришсин, яьни

$$\exists x_0 \in D \Rightarrow \max_{x \in \overline{D}} u(x) = u(x_0) = M$$

бўлсин. *D* соќада жойлашган $\sigma_0 : |y - x_0| = R_0 > 0$ сфера чизиб оламиз. У ќолда ўрта šиймат ќаšидаги Теорема 3 га асосан

$$M = u(x_0) = \frac{1}{|\sigma_0|}\int_{\sigma_0} u(y)d\sigma;\ |\sigma_0| = \omega_n R_0^{n-1} \qquad \textbf{(4)}$$

$$u(x)\big|_{x\in\sigma_0} \le M$$

тенгсизлик ўринлидир.

Энди $u(x)$ **функция** σ_0 **да** ***M*** **дан кичик šиймат šабул šила олмаслигини кўрсатамиз: Агар бирор** $y_0 \in \sigma_0$ **нуšтада**

$$u(y_0) = M - 2\sigma < M$$

деб фараз šилсак, у ќолда $u(x)$ **нинг узликсизлигидан**

$$u(y) < M - \sigma,\ \forall y \in \sigma_0' \subset \sigma_0,\ \sigma_0'' = \sigma_0 \setminus \sigma_0'$$

белгилаймиз, яъни $\sigma_0 = \sigma_0' \cup \sigma_0''$

$$M = u(x_0) = \frac{1}{|\sigma_0|}\left(\int_{\sigma_0'} u(y)d\sigma' + \int_{\sigma_0''} u(y)d\sigma''\right) < \frac{1}{|\sigma_0|}\left((M-\delta)|\sigma_0| + M|\sigma_0''|\right) =$$

$$= \frac{1}{|\sigma_0|}\left(M|\sigma_0'| + M|\sigma_0''| - \delta|\sigma_0'|\right) =$$

$$= \frac{1}{|\sigma_0|}\left(M\left(|\sigma_0'| + |\sigma_0''|\right) - \delta|\sigma_0'|\right) < M - \delta\frac{|\sigma_0'|}{\sigma_0} < M$$

Демак,

M<M

šарама – šаршилик келиб чиšади. Шундай šилиб

$$u(x)\Big|_{x\in\sigma_0} \le M$$

бўлар экан. R_0 **- иќтиёрий бўлгани учун**

$$u(x)=M \quad y\in \overline{K}(x_0,R_0):|y-x_0|\le R_0$$

шарда бажарилади. Энди $x_1\in D$ **нуšтани оламиз ва** $U(x_1)=M$ **эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун** $x_0,\, x_1$ **нуšталарни** $L\subset D$ **- синиš чизиš билан туташтирамиз ќамда *L* нинг** σ_0 **билан кесишиш нуšтасини** y_1 **орšали белгилаб оламиз:** $u(x_1)=M$ **бўлишини кўрсатамиз: Худди юšоридагидек**

$$u(x)\equiv M\,,\quad y\in \overline{K}(y_1,R_1):|y-y_1|\le R_1$$

кўрсатиш мумкин. Агар *L* чизиšнинг узунлиги $|L|$ **орšали белгиласак ва**

$$d=\inf|x-y|,\ x\in L,\ y\in\sigma \text{ десак, } N\ge \frac{2|L|}{d}$$

тенгсизликни šаноатлантирувчи бутун сон бўлса, у ќолда

радиуслари $\frac{d}{2}$ дан бўлган *N* та шар *L* чизиšни šоплайди. Бу шар $|y-y_N|\leq \frac{2}{d}:\overline{K}\left(y_N,\frac{d}{2}\right)$ шар x_1 нуšтани ўз ичига олади ва бу шарда ќам $u(x)\equiv M$ бўлади, яьни $u(x_1)=M$. Шундай šилиб *D* соќанинг ичидаги $x_0\in D$ нуšтада *max* га эришади деган фаразимиздан $u(x)\equiv M,\ \forall x\in D$ экани келиб чиšади. Бу эса теореманинг 3 – шартига зид. Демак гармоник функция теоремадаги 1),2),3) шартларни šаноатлантирса *у* max.га соќанинг чегарасида эришар экан.

Натижа 1. Агар $u(x)$ функция *D* соќада гармоник $\overline{D}=D\cup\sigma$ да узлуксиз бўлиб ва

$$u(x)\big|_{x\in\sigma_0}=0$$

бўлса, у ќолда

$$u(x)\equiv 0,\ \forall x\in D$$

бўлади.

Исбот. Натижанинг шартига кўра

$$u_{\max}=u_{\min}=0\quad u_{\min}\leq u(x)\leq u_{\max}\Rightarrow u(x)\equiv 0,\forall x\in D.$$

Натижа 2. Агар $u_1(x),\ \ u_2(x)$ функциялар *D* соќада гармоник,

$\overline{D} = D \cup \sigma$ **да узлуксиз бўлиб**

$$\left(u_1(x) - u_2(x)\right)\Big|_{x\in\sigma} \le 0$$

бўлса, у ќолда

$$u_1(x) - u_2(x) \le 0, \ \forall x \in D$$

бўлади.

Исбот. Ушбу $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ **функцияни šараймиз. Натижа шартига кўра** $u(x)$ **функция *D* соќада гармоник,** $\overline{D}$ **да узлуксиз**

$$u(x) \le 0, \ \forall x \in D$$

бўлиб. *max*. принципига асосан

$$u(x) \le 0, \ \forall x \in D$$

келиб чикади, бунда эса

$$\left(u_1(x) - u_2(x)\right) \le 0, \ x \in D.$$

Натижа 3. Агар $u_1(x), \ \ u_2(x)$ **функциялар *D* да гармоник,** $\overline{D}$ **да узлуксиз бўлиб,**

$$u_1(x)\big|_\sigma \le u_2(x)\big|_\sigma$$

бўлса, у ќолда

$$u_2(x)\big|_\sigma \le u_2(x), \ \forall x \in D$$

бўлади.

Исбот. Шартга кўра

$$-u_2(x) \le u_1(x) \le u_2(x),\ \forall x \in D \Rightarrow \begin{cases} \left(u_1(x) - u_2(x)\right)\Big|_{x\in\sigma} \le 0 \\ \left(-u_1(x) - u_2(x)\right)\Big|_{x\in\sigma} \le 0 \end{cases}.$$

Бу ерда $u_1 - u_2$ **ва** $u_1 + u_2$ **функцияларнинг** ***D*** **да гармоник ва** $\overline{D}$ **да узлуксизлигини эътиборга олсак, у ќолда** $\forall x \in D$

$$\left.\begin{matrix} u_1(x) \le u_2(x) \\ u_1(x) \ge -u_2(x) \end{matrix}\right\} \Rightarrow |u_1(x)| \le u_2(x),\ \forall x \in D$$

Теорема 5. (Йўšатиладиган маќсуслик ќаšида).

Агар $u(x)$ **функция** $D^+ \setminus \{x^0\}$ **соќада гармоник ва** x^0 **нуšтанинг тешик атрофида чегараланган бўлса, у ќолда** $u(x)$ **функцияни** D^+ **соќада гармоник бўладиган šилиб аниклаш мумкин бўлади.**

Исбот. Ушбу ***a>0*** **сонни шундай танлаймизки** $\overline{K_a} : |x - x^0| \le a$ **– шар учун** $\overline{K_a} \subset D^+$ **бўлсин. Энди** K_a **– шарда** $u_1(x)$ **– гармоник функцияни šуйидагича танлаймиз:**

$$\Delta u_1(x) = 0,\ x \in K_a\ \ u_1(x)\Big|_{x\in\sigma_a} = u(x),\ x \in \sigma_a : |x - x_a| = a$$

Ушбу $u_2(x) = u(x) - u_1(x)$ **функция тузилишига кўра** $K_a \setminus \{x^0\}$

да гармоник бўлиб $u_2(x)\big|_{x\in\sigma_a}=0$ бўлади. Ќašišатан ќам

$$u_{x\in\sigma_a}=u(x)\big|_{x\in\sigma_a}-u_1(x)\big|_{x\in\sigma_a}=u(x)\big|_{x\in\sigma_a}-u(x)\big|_{x\in\sigma_a}=0$$

$$\Delta u_2=\Delta(u-u_1)=\Delta u-\Delta u_1=0-0=0$$

Теорема шартига кўра $u(x)\,K_a$ – шарда чегараланган, шунинг учун $\exists A>0$ $|u_2(x)|<A,\ \forall x\in K_a$, чунки $u_1(x),\ x\in K_a$ да гармоник функциядир. Лаплас тенгламасининг фундаментал ечимидан фойдаланиб $\overline{K_a}$ – ёпиš шарда манфий бўлмаган $0\le\vartheta_\varepsilon(x)$ – фунуцияни šуйидагича тузиб оламиз:

$$\vartheta_\varepsilon(x)=\begin{cases}\varepsilon\ln\dfrac{a}{|x-x^0|},\ n=2\\[2ex]\varepsilon\left(\dfrac{1}{|x-x^0|}-\dfrac{1}{a}\right),\ n=3\end{cases}$$

бу ерда $\varepsilon>0$. Равшанки $\vartheta_\varepsilon(x)$ функция $K_a\setminus\{x^0\}$ – соќада гармоник. $v_\varepsilon(x)$ функциянинг аниšланишига кўра $\vartheta_\varepsilon(x)\big|_{x\in\sigma_a}=0$, чунки

$$\sigma_a:|x-x^0|=a;\ x\in\sigma_a,\ |x-x^0|=a$$

бўлади, бунда эса

$$\vartheta_\varepsilon(x)\big|_{x\in\sigma_a}=\begin{cases}\varepsilon\ln\dfrac{a}{a},\ n=2\\[2ex]\varepsilon\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a}\right),\ n=3\end{cases}=0.$$

Демак, $\vartheta_\varepsilon(x)\big|_{x\in\sigma_a}=u_{x\in\sigma_a}=0$. Энди $0\le\vartheta_\varepsilon(x)\xrightarrow[x\to x^0]{}\infty$ бўлгани

учун $\exists\delta > 0 \quad \sigma_a : \left|x - x^0\right| = \delta$ **– сферада** $\vartheta_\varepsilon(x)\big|_{x\in\sigma_a} > A$ **бўлади. Шундай šилиб** $v_\varepsilon(x)$ **функция** $x \in K_a \setminus K_\delta$ **– сферик šатламда гармоник бўлиб, унинг чегарасида:**

$$\left|u_2(x)\right|\Big|_{\sigma_a\cup\sigma_\delta} < \vartheta_\varepsilon(x)\Big|_{\sigma_a\cup\sigma_\delta}$$

бунда эса

$$\left|u_2(x)\right| < \vartheta_\varepsilon(x),\ \forall x \in K_a \setminus K_\delta$$

келиб чиšади. ***x*** **– ни фиксирлаб бу тенгсизликда** $\varepsilon \to 0$ **да лимитга ўтсак** $\vartheta_\varepsilon(x)\xrightarrow[x\to\varepsilon]{}0$ **дан**

$$\left|u_2(x)\right| < 0 \Rightarrow u_2(x) = 0\ u_2(x) = u(x) - u_1(x) \equiv 0,\ \forall x \in K_a \setminus K_\delta$$

келиб чиšади. Энди $x \to x^0$ **да лимитга ўтсак**

$$\lim_{x\to x^0} u_2(x) = \lim_{x\to x^0} u(x) - \lim_{x\to x^0} u_1(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x^0} u(x) = \lim_{x\to x^0} u_1(x) = u_1(x^0)$$

Демак,

$$u_1(x) = u(x)$$

агар $x \in K_a \setminus\notin \left\{x^0\right\}$ **бўлиб,** $u(x) \in H(K_a)$**, яьни** ***u(x)*** **нинг гармоник давоми** $u_1(x)$ **экан.**

Теорема 6. Агар 1) ***u(x)*** **функция** $\Omega\setminus\left\{x^0\right\}$ **да гармоник, 2)**

Шундай $\alpha(x), \lim\limits_{x\to x^0}\alpha(x)$ топилиб

$$|u(x)| \le \frac{\alpha(x)}{|x-x^0|^{n-2}}, n>2$$

тенгсизлик бажарилса, у ќолда x^0 *нукта* $u(x)$ **функция учун йўšатилиши мумкин бўлган маќсус нуšта бўлади, яьни**

$$\lim_{x\to x^0} u(x) = A$$

деб, ушбу

$$\vartheta(x) = \begin{cases} u(x), & x \ne x^0 \\ A, & x = x^0 \end{cases}$$

функция Ω **да гармоник бўлади**

$$\Delta\vartheta(x) = 0 \ , \quad x \in R$$

Адабиётлар

1.Салоќитдинов М.С., Математик физика тенгламалари, Т., «Ўзбекистон», 2002.

2.Владимиров В.С., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1981.

3.Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1977.

Маъруза № 6

Чегаравий масала ечимининг ягоналиги. Дирихле масаласи ечимининг ягоналиги

Режа

1. Дирихле масаласи ечимининг ягоналиги.
2. Доира учун Дирихле масаласини Фурье усулида ечиш.
3. Пуассон интеграли.

Теорема. Агар

$$u \in C^2(D^+) \cap C(\overline{D^+}) \ , \ f(x) \in C(\sigma)$$

бўлса, у ќолда ушбу Дирихле

$$\Delta u(x) = 0 \quad , \ x \in D^+ \ ;$$
$$u(x)\big|_{x=\sigma} = f(x) \quad ,$$

масаласининг ечими ягона.

Исбот. Фараз šилайлик ички Дирихле масаласининг иккита $u_1(x), u_2(x)$ ечимлари мавжуд бўлсин. У ќолда

$$u(x) = u_1(x) - u_2(x) \ , \ \Delta u = \Delta u_1 - \Delta u_2 = 0$$

бўлиб,

$$u(x)\big|_\sigma = u_1\big|_\sigma - u_2\big|_\sigma = f(x) - f(x) = 0$$

яъни $u(x)\big|_{x\in\sigma}=0$. Максимум принципига асосан

$$u(x)\equiv 0\,,\ \forall x\in D^+$$

бўлади. Бундан $u_1(x)\equiv u_2(x)\,,\ \forall x\in D^+$

Доира учун Дирихле масаласини Фурье усулида ечиш

Ушбу D^+ соќа $\geq\left\{(x_1,x_2)=x\in R^2;\ x_1^2+x_2^2\leq a^2\right\}$ – доирадан иборат бўлсин. У ќолда

$$\Delta u(x)\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=0,\ u(x)\in C^2(D^+)\cap C^1(\overline{D^+}) \qquad (1)$$

$$u(x)\big|_{x\in\sigma}=f(x),x\in\sigma: x_1^2+x_2^2=a^2-\text{айлана},\ f(x)\in C^1(\sigma); \qquad (2)$$

Дирихле масаласининг $u(x_1,x_2)$ ечимини Фурье усулида топиш билан шуѓулланамиз. Бунинг учун $x_1=r\cos\varphi\,,\ x_2=r\sin\varphi\,;\ r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ šутб координаталар системасига ўтамиз:

$$\Delta u(r,\varphi)\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (3)$$

$$u(r,\varphi)\big|_{r=a} = f(\varphi);\ f(\varphi+2\pi) = f(\varphi) \qquad \textbf{(4)}$$

Излаётган ечим

$$u(r,\varphi) = u(r,\varphi+2\pi)$$

шартни šаноатлантиради, чунки ечим узлуксиз ва чексизликда регуляр, аниšланишига кўра у чегараланган чексизликда. (3) + (4) масаланинг даврий чегараланган ечимини ушбу

$$u(r,\varphi) = R(r)\cdot\Phi(\varphi) \qquad \textbf{(5)}$$

кўринишда излаймиз. Бунда

$$\Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi) \qquad \textbf{(6)}$$

$$|R(r)| < A \qquad (6')$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = R'(r)\cdot\Phi(\varphi),\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = R(r)\cdot\Phi'(\varphi),\ \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = R(r)\cdot\Phi''(\varphi).$$

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} =$$
$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,R'(r)\cdot\Phi(\varphi)) + \frac{1}{r^2}R(r)\cdot\Phi''(\varphi) =$$
$$= \frac{1}{r}(r\,R'(r))'\,\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}R(r)\cdot\Phi''(\varphi) = 0$$

$$\Phi\cdot\frac{1}{r}(rR''+R')+\frac{1}{r^2}R\Phi''=0$$

$$\Phi\ (R''+\frac{1}{r}R')+\frac{1}{r^2}R\Phi''=0$$

$$(r^2R''+rR')\Phi+R\Phi''=0$$

$$\frac{r^2R''+rR'}{R}=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\lambda^2$$

$$\begin{cases}\Phi(0)=\Phi(2\pi)\\ \Phi'(0)=\Phi'(2\pi)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=A\cos 2\pi\lambda+B\sin 2\pi\lambda\\ \lambda B=-\lambda A\sin 2\pi\lambda+\lambda B\cos 2\pi\lambda\end{cases}$$

$$\begin{cases}(\cos 2\pi\lambda-1)A+B\sin 2\pi\lambda=0\\ (-\lambda\sin 2\pi\lambda)A+(\cos 2\pi\lambda-1)\lambda B=0\end{cases}$$

$$\Phi''+\lambda^2\Phi=0\ ,\ \Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi) \tag{7}$$

$$r^2R''+rR'-\lambda^2R=0 \tag{8}$$

$$\Phi(\varphi)=A\cos\lambda\varphi+B\sin\lambda\varphi;$$
$$\Phi'=-\lambda A\sin\lambda\varphi+\lambda B\cos\lambda\varphi$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cos 2\pi\lambda-1 & \sin 2\pi\lambda\\ -\lambda\sin 2\pi\lambda & \lambda(\cos 2\pi\lambda-1)\end{vmatrix}=0$$

$$\lambda(\cos 2\pi\lambda-1)^2+\lambda\sin^2 2\pi\lambda=0$$

$$2\lambda(1-\cos 2\pi\lambda)=0$$

$$\cos 2\pi\lambda=1$$

$$2\pi\lambda=2\pi n,\ \ \lambda=n\ \ ,\ \ n=0,1,2,...$$

$n=0$, **яъни** $\lambda=0$ **бўлсин**

$$\Phi''=0\Rightarrow\Phi=A_0+B_0\varphi$$

буни даврийлик шартига šўйсак,

$$\begin{cases} A_0 = A_0 + 2\pi B_0 \\ B_0 = B_0 \end{cases} \qquad B_0 = 0,\, A_0 \neq 0,$$

$$A_0^2 2\pi = 1,\, A_0 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}.\ \Phi(\varphi) = A_0.$$

Демак $\lambda = 0$ **хос šиймат,** $\Phi(\varphi) = A_0$ **хос функция бўлади. Ортонормалланган хос функцияси** $\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$ **бўлади.**

Аниклик учун $A_0 = 1$ **деб ќам олиш мумкин, у ќолда хос функция** $\Phi(\varphi) = 1$ **бўлади. Шундай šилиб (6) + (7) масаланинг хос šийматлари** $\lambda_k^2 = k^2$**, хос функциялари** $\sin k\varphi$ **ва cosk**φ **бўлиб, унинг ечими**

$$\Phi_k(\varphi) = A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi \qquad (7')$$

ќосил бўлади.

(8) тенгламанинг ечимини $\lambda = k \neq 0$ **бўлган ќолда**

$$R = r^\alpha,\ R' = \alpha r^{\alpha-1},\ R'' = \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}$$

кўринишда излаймиз.

$$r^2\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} + r\alpha r^{\alpha-1} - \lambda^2 r^\alpha = 0$$

$$\alpha(\alpha-1)r^{\alpha}+\alpha r^{\alpha}-\lambda^2 r^{\alpha}=0 \ \Big|:r^{\alpha}$$

$$\alpha^2-\alpha+\alpha-\lambda^2=0 \ \ \alpha^2-\lambda^2=0, \ \alpha^2=\lambda^2, \ \alpha=\pm\lambda, \ \lambda=k, \ \alpha=\pm k$$ **;**

ќусусий ечимлар

$$R_1=r^k, \ \ R_2=r^{-k}$$

бўлиб, умумий ечим эса

$$R_k(r)=C_k r^k+D_k r^{-k}$$

бўлади. Агар $\lambda=k=0$ **бўлса, у ќолда (8) тенглама šуйидаги**

$$r^2R''+rR'=0 \Rightarrow R(r)=C_0\ln r+D_0$$

кўринишга келади.

$$|R(r)|<A$$

чегараланганлигидан $C_0=0$ **келиб чиšади.** $R_0(r)=D_0$**. Умумий ечим**

$$R_k(r)=C_k r^k+D_k r^{-k}, \ k=0$$

ќолда ќам ўринлидир. Демак, k=0,1,2,...

Бу топилган $\Phi_k(\varphi)$ **ва** $R_k(r)$ **ларни (5) га šўйиб**

$$u_k(r,\varphi)=(A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi)(C_k r^k+D_k r^{-k}), \ \ k=0,1,2,...$$

ечимни топамиз. Топилган $u_k(r,\varphi)$ **ечим** D^+ **да чегараланган бўлиши учун** $D_k = 0$ **бўлиши керак.**

У ќолда Дирихле масаласининг ечими (анишлик учун $C_k = 1$**)**

$$u_k(r,\varphi) = r^k\left(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi\right).$$

Суперпозиция принципига асосан Дирихле масаласининг ечими

$$u_k(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k\left(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi\right) \qquad (9)$$

кўринишда бўлади. $u_k(r,\varphi)\big|_{r=a} = f(\varphi)$ **– чегаравий шартдан фойдаланиб,**

$$f(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\left(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi\right) \qquad (10)$$

Бизга даврий $f(\varphi)$ **функция берилган бўлгани учун унинг Фурье коэффициентларини** $\{\alpha_k\}_{k=0,1,2,\ldots}, \{\beta_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$ **белгилаб оламиз.**

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)d\psi,\ \alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cos k\psi d\psi,\ \beta_K = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\psi)\sin k\psi d\psi.$$

Бунда $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k - f(\varphi)$ **функциянинг Фурье коэффициентлари бўлиб улар маълум сонлардир.**

$$f(\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k \cos k\varphi+\beta_k \sin k\varphi) \qquad (11)$$

(10) ва (11) ларни тенглаштириб $A_0=\alpha_0$

$$\begin{cases} a^k A_k=\alpha_k \\ a^k B_k=\beta_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_k=\dfrac{\alpha_k}{a^k} \\ B_k=\dfrac{\beta_k}{a^k} \end{cases} \qquad (12)$$

дан фойдаланиб (9) ни Ушбу кўринишда ёзиб оламиз:

$$u(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty} r^k\left(\frac{\alpha_k}{a^k}\cos k\varphi+\frac{\beta_k}{a^k}\sin k\varphi\right)= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^k(\alpha_k \cos k\varphi+\beta_k \sin k\varphi) \qquad (13)$$

Бу биз излаган Дирихле масаласининг ечими бўлади.

Пуассон интеграли

Доира учун Дирихле ички масаласини ечимини ифодаловчи формулани ёзиб оламиз:

$$u(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{k}\left[\alpha_k \cos k\varphi+\beta_k \sin k\varphi\right]$$

$$f(\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha_k \cos k\varphi+\beta_k \sin k\varphi\right)$$

берилган функция. Ушбу $\frac{r}{a}=t$ белгилашни оламиз, у ќолда

$$u(r,\varphi)==\sum_{k=0}^{\infty}t^k\left(\alpha_k \cos k\varphi+\beta_k \sin k\varphi\right)= \qquad \textbf{(14)}$$

бу ерда

$$\alpha_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)d\psi$$

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\cos k\psi d\psi \text{ , } \beta_K=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(\psi)\sin k\psi d\psi \qquad (14')$$

$$=\alpha_0+\sum_{л=1}^{\infty}t^k\left[\alpha_k \cos k\varphi+\beta_k \sin k\varphi\right]=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)d\psi+\sum_{k=1}^{\infty}t^k\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\cos k\psi d\psi \cos k\varphi+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\beta_k \sin k\varphi d\psi \sin k\varphi\right]= \qquad \textbf{(15)}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)d\psi+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\left[\sum_{л=1}^{\infty}t^k \cos k(\psi-\varphi)\right]d\psi$$

Л. Эйлер формуласидан фойдаланиб, бўлганда

$$A=\sum_{k=1}^{\infty}t^k \cos k\tau=\sum_{k=1}^{\infty}t^k\frac{e^{ik\tau}+e^{-ik\tau}}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(t^k e^{i\tau}\right)^k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(t^k e^{-i\tau}\right)^k=$$

$|t|<1$ бўлганда

$$=\frac{1}{2}\frac{t\,e^{i\tau}}{1-te^{i\tau}}+\frac{1}{2}\frac{t\,e^{-i\tau}}{1-t\,e^{-i\tau}}=\frac{t}{2}\frac{e^{i\tau}+e^{-i\tau}-2t}{1-t\left(e^{i\tau}+e^{-i\tau}\right)+t^2}=\frac{t\cos\tau-t^2}{1-2t\cos\tau+t^2}$$

Бундан фойдаланиб (15) ни šуйидагича ёзиб оламиз:

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)d\psi+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\left[1+\frac{2t\cos(\varphi-\psi)-2t^2}{1-2t\cos(\varphi-\psi)+t^2}\right]d\psi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\frac{1-2t\cos(\varphi-\psi)+t^2+2t\cos(\varphi-\psi)-2t^2}{1-2t\cos(\varphi-\psi)+t^2}d\psi\underset{t=\frac{r}{a}}{=}$$

$$\underset{t=\frac{r}{a}}{=}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\varphi-\psi)+r^2}d\psi$$

Бу интегралга Пуассон интеграли дейилади.

Адабиётлар

1.Салоќитдинов М.С., Математик физика тенгламалари, Т., «Ўзбекистон», 2002.

2.Владимиров В.С., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1981.

3.Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1977.

]

Маъруза № 7

Дирихле масаласининг Грин функцияси

Режа

1. Гармоник функция интеграл тасвири ва Гриннинг 2 – формуласи орасидаги боғланиш.
2. Грин функциясининг таърифи.
3. Грин функциясининг хоссалари.

Силлиš σ - сирт билан чегараланган чекли $D \subset E_n$ соќада берилган $u(y) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, $\overline{D} = D \cup \sigma,\ \sigma = \partial D,$ функция учун, ушбу

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_\sigma (\varepsilon_n(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} - u(y) \frac{\partial \varepsilon_n(x,y)}{\partial \nu}) d\sigma_y - \frac{1}{\omega_n} \int_D \varepsilon_n(x,y) \Delta u(y) dy \qquad (1)$$

интеграл тасвир ўринли. Бу ерда ω_n - E_n даги бирлик сферанинг юзи. (1) формулада $\varepsilon_n(x,y)$ Лаплас тенгламасининг фундаментал ечимидир:

$$\varepsilon_n(x,y)=\begin{cases}\ln\dfrac{1}{|x-y|}, & n=2\\ \dfrac{1}{|x-y|^{n-2}}, & n>2\end{cases}$$

Агар $u(y)$ *D* соќада гармоник, $\Delta u=0,\quad y\in D$ функция бўлса, у ќолда (1) формула, ушбу

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\sigma}\left(\varepsilon_n(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}-u(y)\frac{\partial \varepsilon_n(x,y)}{\partial \nu}\right)d\sigma_y$$

кўринишни олади. Бу эса гармоник $u(x)$ функциянинг интеграл тасвирини беради. Энди биз *D* соќа учун Дирихле

$$\begin{cases}\Delta u=0 & u\in C^2(D)\cap C(\overline{D})\\ u\big|_{x\in\sigma}=\varphi(x),\ x\in\sigma,\ \varphi(x)\in C(\sigma)\end{cases} \qquad (2)$$

масаласини šарасак, $u(x)\quad x\in D$ гармоник функциянинг чегарадаги

$$u\big|_{x\in\sigma}=\varphi(x)$$

šиймати берилган бўлиб, $u(x)$ функциянинг нормал бўйича ќосиласи $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x\in\sigma}$ – чегарада берилмаган, шунинг учун $(1')$

формула ёрдамида (2) Дирихле масаласининг ечимини топиб бўлмайди. Энди $(1')$ формулани šулай кўринишда ёзишга ќаракат šиламиз. Бунинг учун

$$y \in D, \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

соќада *y* – ўзгарувчи бўйича гармоник бўлган $g(x,y) \in C^1(\overline{D})$ функцияни šараймиз. Ушбу

$$g(x,y) \text{ ва } u(y) \in C^2(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D})$$

функциялар учун Гриннинг 2 – формуласини, яьни

$$\int_D (u\Delta\vartheta - \vartheta\Delta u)dy = \int_\sigma \left(u\frac{\partial\vartheta}{\partial\nu} - \vartheta\frac{\partial u}{\partial\nu} \right) d\sigma$$

šўллаймиз. Бу ерда $\vartheta = g(x,y)$ деб олсак,

$$0 = \int_\sigma \left(g(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu} - u(y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial\nu} \right) d\sigma_y - \int_D g(x,y)\Delta u(y)dy \qquad (2')$$

формулага эга бўламиз. Энди $(2')$ тенгликнинг иккала тарафини $\frac{1}{\omega_n}$ га кўпайтириб (1) формула билан ќадлаб šўшамиз.

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_\sigma\left(\left(\varepsilon_n(x,y)+g(x,y)\right)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}-u(y)\frac{\partial\left(\varepsilon_n(x,y)+g(x,y)\right)}{\partial \nu}\right)d\sigma_y-$$
$$-\frac{1}{\omega_n}\int_D\left(\varepsilon_n(x,y)+g(x,y)\right)\Delta u(y)dy$$

(3)

Бу ерда, ушбу

$$G(x,y)=\varepsilon_n(x,y)+g(x,y),\quad x\in D,\ \ y\in\overline{D}$$

белгилашни киритсак, (3) формула šуйидаги кўринишни олади:

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_\sigma\left(G(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}-u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}\right)d\sigma_y$$
$$-\frac{1}{\omega_n}\int_D G(x,y)\Delta u(y)dy \qquad \textbf{(4)}$$

Агар биз *g(x,y)* функцияни, ушбу

$$G(x,y)\big|_{y\in\sigma}=\left(\varepsilon_n(x,y)+g(x,y)\right)\big|_{y\in\sigma}=0 \qquad \textbf{(5)}$$

шартни šаноатлантирадиган šилиб танласак, у ќолда (4) даги $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\sigma$ – ќад йўšалиб кетади, натижадан ушбу

$$u(x)=-\frac{1}{\omega_n}\int_\sigma u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}d\sigma_y-\frac{1}{\omega_n}\int_\sigma G(x,y)\Delta u(y)dy \qquad \textbf{(6)}$$

формулага эга буламиз.

Таъриф. Ушбу *G(x,y)* функция $E_n \supset D$ соќа учун Лаплас тенгламасига šуйилган Дирихле масаласининг Грин фуекцияси дейилади, агар у

1) $G(x,y) = \varepsilon_n(x,y) + g(x,y)$, бунда $g(x,y) \in C^1(\overline{D})$ бўлиб *y*–ўзгарувчи буйича *D*да гармоник функция

2) Чегарада $G(x,y)\big|_{y\in\sigma} = 0$ шартларни šаноатлантирса.

1-хосса. Ушбу $y \neq x \in D$ nуšталарда *G(x,y)* *y* – ўзгарувчи бўйича *D*да гармоник функция, яьни $\Delta_y G(x,y) = 0, \;\; y \neq x \in D$.

Исбот. Гармоник функциялар йиђиндиси яна гармоник функция бўлади, яъни

$$\Delta_y G(x,y) = \Delta_y \varepsilon_n(x,y) + \Delta_y g(x,y) = 0 + 0 = 0$$

.

2-хосса. Грин функциясини šуриш, ушбу

$$\begin{aligned} &\Delta_y g(x,y), \; y \in D, \\ &g(x,y)\big|_{y\in\sigma} = -\varepsilon_n(x,y)\big|_{y\in\sigma}, \;\; x \in D \end{aligned}$$

Дирихле масаласини ечишга келтирилади.

3-хосса. Агар Грин функцияси мавжуд бўлса, у ягонадир.

Исбот. Фараз šилайлик $E_n \supset D$ – соќа учун Лаплас

тенгламасига šўйилган $\Delta u(x)=0,\ u_{x\in\sigma}=\varphi(x)$ Дирихле масаласининг иккита $G_1(x,y)$ ва $G_2(x,y)$ – Грин функциялари мавжуд бўлсин, у ќолда таърифга кўра

$$G_1(x,y)=\varepsilon_n(x,y)+g_1(x,y)$$
$$G_2(x,y)=\varepsilon_n(x,y)+g_2(x,y)$$

бўлиб

$$g(x,y)=G_1(x,y)+G_2(x,y)=g_1(x,y)-g_2(x,y)$$

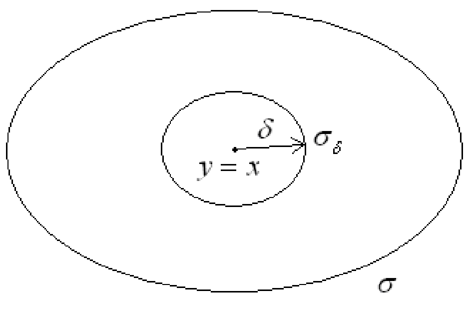
бўлади. Чегарада

$$g(x,y)\big|_{x\in\sigma}=\varphi(x)-\varphi(x)=0$$

$$\begin{cases}\Delta_y g=\Delta g_1-\Delta g_2=0\\ g(x,y)\big|_{y\in\sigma}=0\end{cases}$$

ягоналик теоремасига асосан

$$g(x,y)\equiv 0\Rightarrow G_1(x,y)\equiv G_2(x,y).$$



4-хосса. ***D*** **соќанинг Грин функцияси мусбат**

$$G(x,y)>0,\ \ \forall x,y\in D\subset E_n.$$

Исбот. Лаплас тенгламаси фундаментал ечими $\varepsilon_n(x,y)$ нинг аниšланишига кўра, $y=x\in D$ нуšтанинг тешик атрофида чегараланмаган, яъни у $y\to x$ интилганда

$$\varepsilon_n(x,y)\xrightarrow[x\to y]{}\infty$$, *g(x,y)*

функция эса узлуксиз ва чегаралангандир. Шунинг учун

$$\exists\delta>0,\ \sigma_\delta:|y-x|=\delta$$

сферада

$$G(x,y)\big|_{y\in\sigma_\delta}=\left(\varepsilon_n(x,y)+g(x,y)\right)\big|_{y\in\sigma_\delta}>0.$$

Берилган $D\subset E_n$ соќанинг чегараси $\partial D=\sigma$ да $G(x,y)\big|_{y\in\sigma_\delta}=0$ бўлади. (таърифга асосан). Максимум принципига асосан

$$G(x,y)>0\ \ \forall x,y\in D\setminus B_\delta:B_\delta-шар.\partial B_\delta=\sigma_\delta.$$

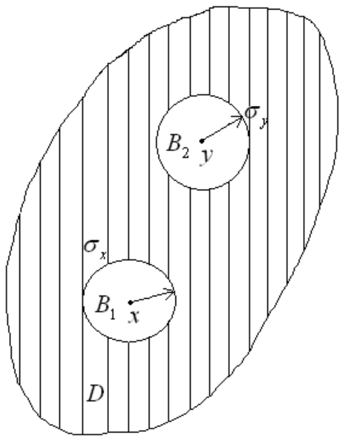
Бундан эса $G(x,y)>0,\quad\forall x,y\in D$ да келиб чикади.

5-хосса. Ушбу *G(x,y)* – Грин функцияси *x, y* – ўзгарувчиларнинг симметрик функциясидир, яъни

$$G(x,y)=G(y,x),\quad\forall x,y\in D\subset E_n.$$

Исбот. Бизга $E_n\supset D$ соќа берилган бўлиб, $y\neq x\in D$ бўлсин. У ќолда марказлари *x* ва *y* нуšталарда бўлган δ –

радиусли $B_1(x,\delta)$, $B_2(y,\delta)$ шарларни чизиб оламиз. Бу шарлар $\sigma_y : |\xi - y| = \delta$ сфералар билан чегараланган бўлсин.



Ушбу $D_\delta = D \setminus (B_1 \cup B_2)$ соќани šараймиз. Бу соќанинг чегараси $\partial D_\delta = \sigma \cup \sigma_x \cup \sigma_y$ дан иборат. D_δ соќада $G(x,\xi)$ ва $G(y,\xi)$ функциялар гармоник бўлади ќамда бу функцияларга 2 – Грин формуласини šўллаймиз:

$$\int_D (u\Delta\vartheta - \vartheta\Delta u)dy = \int_\sigma \left(u\frac{\partial\vartheta}{\partial\nu} - \vartheta\frac{\partial u}{\partial\nu} \right) d\sigma$$

Бу ерда $u = G(x,\xi)$ $\vartheta = G(y,\xi)$ **белгилаб олиб *D* ўрнига** D_δ **соқани**

$$\left(G(x,\xi)\Delta G(y,\xi) - G(y,\xi)\Delta G(x,\xi)\right)dy =$$

$$0 = \int_D \int_{\sigma\cup\sigma_x\cup\sigma_y} \left(G(x,\xi)\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial\nu} - G(y,\xi)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\nu} \right) d\sigma_\xi =$$

$$чунки \left|\Delta G(x,\xi) = 0, \Delta G(y,\xi) = 0,\ x \neq y\right| =$$

оламиз. $$\int_\sigma \left(G(x,\xi)\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial\nu} - G(y,\xi)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\nu} \right) d\sigma_\xi + \qquad (*).$$

$$+ \int_{\sigma_x} \left(G(x,\xi)\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial\nu} - G(y,\xi)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\nu} \right) d\sigma_\xi$$

$$+ \int_{\sigma_y} \left(G(x,\xi)\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial\nu} - G(y,\xi)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\nu} \right) d\sigma_\xi = 0$$

Ушбу

$$G(x,\xi)\big|_{\xi\in\sigma} = 0, \quad G(y,\xi)\big|_{\xi\in\sigma} = 0$$

муносабатлардан

$$\int_\sigma \left(G(x,\xi)\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial\nu} - G(y,\xi)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\nu} \right) d\sigma_\xi = 0$$

келиб чиšади. Энди, ушбу

$$\sigma_x : |\xi - x| = \delta$$

сферада $\varepsilon_n(x,y)$ **– фундаментал ечимни текширамиз:**

$$\varepsilon_n(x,\xi)=\left.\begin{cases}\ln\dfrac{1}{|\xi-x|}, & n=2\\ \dfrac{1}{|\xi-x|^{n-2}}, & n>2\end{cases}\right|_{(x,\xi)\in\sigma_x}=\begin{cases}\ln\dfrac{1}{\delta}\\ \dfrac{1}{\delta^{n-2}}\end{cases}=A=const.$$

Шунинг учун

$$G(x,\xi)\big|_{\xi\in\sigma_x}=\left(\varepsilon_n(x,\xi)+g(x,\xi)\right)_{\xi\in\sigma_x}=A+g(x,\xi)\big|_{\xi\in\sigma_x} \quad \textbf{(7)}$$

D_δ **соќанинг** $\xi\in\sigma_x$ **нуўтадаги ташўи** ν **– нормали** σ_x **сфера радиусига ўарама – ўарши бўлгани учун**

$$\left.\frac{\partial\varepsilon_n(x,y)}{\partial\nu}\right|_{\xi\in\sigma_x}=-\frac{\partial}{\partial\delta}\begin{cases}\ln\dfrac{1}{\delta}, & n=2\\ \dfrac{1}{\delta^{n-2}}, & n>2\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{\delta}, & n=2\\ \dfrac{n-2}{\delta^{n-2}}, & n>2\end{cases}.$$

Бундан фойдаланиб $\left.\dfrac{\partial\varepsilon_n(x,y)}{\partial\nu}\right|_{\xi\in\sigma_x}$ **ни ќисоблаймиз:**

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\varepsilon_n(x,y)}{\partial\nu}\right|_{\xi\in\sigma_x}&=\frac{\partial}{\partial\delta}\left(\varepsilon_n(x,\xi)+g(x,\xi)\right)_{\xi\in\sigma_x}=\\ &=\frac{n-2}{\delta^{n-1}}+\left.\frac{\partial g(x,\xi)}{\partial\nu}\right|_{\xi\in\sigma_x}\end{aligned} \quad \textbf{(8)}$$

Бу ерда $\left.\frac{\partial g(x,\xi)}{\partial v}\right|_{\xi\in\sigma_x}$ узлуксиз, чунки $g(x,\xi)-D$ соќада гармоник функциядир. Ушбу $\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial v}$, $G(y,\xi)$ функциялар ќам σ_x сферада узлуксиздир (бу функциянинг маќсус нуўтаси $\xi=y$). Шунинг учун ушбу

$$\left(G(x,\xi)\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial v}-G(y,\xi)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial v}\right)_{\xi\in\sigma_x}$$

функция узлуксиздир. Ўрта ўиймат ќаўидаги теоремага асосан

$$\int_{\sigma_x}\left(G(x,\xi)\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial v}-G(y,\xi)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial v}\right)d\sigma_\xi=$$
$$=\left((A+g(x,\xi))\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial v}-G(y,\xi)\left(\frac{n-2}{\delta^{n-1}}+\frac{\partial g(x,\xi)}{\partial v}\right)\right)_{\xi_{ўрт}\in\sigma_x}\omega_n\delta^{n-1}$$

Бу ерда $\omega_n\delta^{n-1}$ – радиусли сфера сиртининг юзаси. Агар

$$\delta\to 0,\ \sigma_x\to x,\ \xi_{ўрт}\to x,\ A\delta^{n-1}\to 0,$$

шунинг учун

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\sigma_x}\left(\left(A+g(x,\xi)\right)\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial \nu}-G(y,\xi)\left(\frac{n-2}{\delta^{n-1}}+\frac{\partial g(x,\xi)}{\partial \nu}\right)\right)d\sigma_\xi = -G(y,x)\omega_n(n-2)$$

(9)

худди шунингдек

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\sigma_y}\left(G(y,\xi)\left(\frac{n-2}{\delta^{n-1}}+\frac{\partial g(x,\xi)}{\partial \nu}\right)-\left(A+g(x,\xi)\right)\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial \nu}\right)d\sigma_x = G(x,y)\omega_n(n-2) \qquad (10)$$

(*) тенгликда $\delta \to 0$ да лимитга ўтиб, ушбу

$$-G(y,x)\omega_n(n-2)+G(x,y)\omega_n(n-2)=0 \;\Rightarrow\; G(y,x)=G(x,y)$$

тенгликни ḱосил šиламиз.

Натижа. ***G(x,y)*** **– Грин функцияси учун, ушбу**

$$\Delta_y G(x,y)=0 \quad y\neq x,\; y,x\in D$$
$$\Delta_x G(x,y)=0 \quad y\neq x,\; y,x\in D$$

муносабатлар ўринлидир.

Адабиётлар

1.Салоќитдинов М.С., Математик физика тенгламалари, Т., «Ўзбекистон», 2002.

2.Владимиров В.С., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1981.

3.Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1977.

Маъруза № 8

Дирихле масаласининг ечимини Грин функцияси ёрдамида топиш

Режа

1. Ечимни Грин функцияси ёрдамида ифодалаш.

Пуассон тенгламасига šўйилган, ушбу

$$\Delta u = F(x),\ x \in D \subset E_2,\ \partial D = \sigma \qquad (1)$$

$$u(x)\big|_{x\in\sigma} = f(x),\ f(x) \in C^1(\sigma);\ u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D}) \qquad (2)$$

Дирихле масаласини šараймиз.

Теорема. Агар (1) + (2) масаланинг $u(x),\ x \in D$ ечими ва D соќа учун Дирихле масаласининг $G(x, y)$ Грин функцияси мавжуд бўлса, у ќолда (1) + (2) чегаравий масаланинг ечими šуйидаги

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int_\sigma f(x)\frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu}d\sigma_y - \frac{1}{\omega_n}\int_\sigma F(y)G(x, y)dy \qquad (3)$$

формула ёрдамида топилади.

Исбот. $E_n \supset D$ **соҳа учун Грин функциясининг мавжудлигидан**

1) $G(x,y) = \varepsilon_n(x,y) + g(x,y),\ g(x,y)$ **гармоник бўлиб**

2) $G(x,y)\big|_{y\in\sigma} = 0. \quad \Delta_y g(x,y) = 0.$

$g(x,y) = -\varepsilon_n(x,y)\big|_{y\in\sigma},\ \ g(x,y) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$

бўлади.

(1) + (2) масаланинг ечими $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ **мавжуд бўлиб, бу** ***u(x)*** **функцияларга интеграл тасвир ўринлидир.**

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_\sigma \left(\varepsilon_n(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} - u(y)\frac{\partial \varepsilon_n(x,y)}{\partial \nu} \right) d\sigma_y - \frac{1}{\omega_n}\int_D \varepsilon_n(x,y)\Delta u(y)dy \tag{4}$$

Энди

$$u(x,y), g(x,y) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$$

функциялар учун Гриннинг 2 – формуласини šўллаймиз.

$$\int_D (g\Delta u - u\Delta g)dy = \int_\sigma \left(g\,\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\,\frac{\partial g}{\partial \nu} \right) d\sigma_y$$

$$\frac{1}{\omega_n} \cdot \left| \ \int_D g(x,y)\Delta u(y)dy = \int_\sigma \left(g(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} - u(y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial \nu} \right) d\sigma_y \right.$$

$$0=\frac{1}{\omega_n}\int_\sigma\left(g(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}-u(y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial \nu}\right)d\sigma_y-\frac{1}{\omega_n}\int_D g(x,y)\Delta u(y)dy$$

(5)

(2) га (5)ни šўйиб

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_\sigma\left[(\varepsilon_n(x,y)+g(x,y))\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}-u(y)\frac{\partial}{\partial \nu}(\varepsilon_n(x,y)+g(x,y))\right]d\sigma_y-$$

$$-\frac{1}{\omega_n}\int_D(\varepsilon_n(x,y)+g(x,y))\Delta u(y)dy=$$

Бу ерда

$$G(x,y)=\varepsilon_n(x,y)+g(x,y)$$

Грин функциясининг мавжудлигидан фойдаланиб

$$=\frac{1}{\omega_m}\int_\sigma\left(G(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}-U(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}\right)d\sigma_y-\frac{1}{\omega_n}\int_D G(x,y)\Delta u(y)dy$$

(6)

топамиз: *D*– соќанинг чегарасида $\partial D=\sigma$ **да**

$$G(x,y)\big|_{y\in\sigma}=0,\ \ x\in D$$

бўлгани учун (6) формула šуйидагича ёзилади:

$$u(x)=-\frac{1}{\omega_n}\int_\sigma u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}d\sigma_y-\frac{1}{\omega_n}\int_D G(x,y)\Delta u(y)dy \qquad \textbf{(7)}$$

(1)+ (2) чегаравий масаланинг

$$\Delta u = F(x), \quad u\big|_{\sigma} = f(x)$$

берилганларидан фойдаланиб Пуассон тенгламасига šўйилган (1) + (2) Дирихле масаласини ечимини топиш мумкин:

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int_{\sigma} f(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}d\sigma - \frac{1}{\omega_n}\int_{D} G(x,y)F(y)dy \qquad (8)$$

Бу формуладан фойдаланиб Лаплас тенгламасига $(F(x) \equiv 0)$ šўйилган

$$\Delta u = 0, \quad x \in D, \quad u\big|_{\sigma} = f(x), \quad x \in \sigma \qquad (9)$$

Дирихле масаласининг ечимини ќам топиш мумкин:

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int_{\sigma} f(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}d\sigma \qquad (10)$$

Натижа: Ушбу

$$\Delta u(x) = -\rho(x), \quad u(x)\big|_{\sigma} = 0$$

чегаравий масаланинг ечими

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\sigma}G(x,y)\rho(y)dy$$

формула ёрдамида топилади.

Адабиётлар

1.Салоќитдинов М.С., Математик физика тенгламалари, Т., «Ўзбекистон», 2002.

2.Владимиров В.С., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1981.

3.Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1977.

Маъруза № 9

Ярим фазо учун Грин функциясини šуриш

Режа

1. Грин функциясини šуриш.
2. Грин функциясидан нормал бўйича ќосила.

E_3 фазода $D^+ : y_3 > 0$ ярим фазо учун Грин функциясини кўрамиз, бу ерда D^+ нинг чегараси $\partial D^+ = \partial y_1 y_2 \ \left(y_3 = 0\right)$ текисликдан иборат бўлади. $x = \left(x_1, x_2, x_3\right) \in D^+$ ни олиб, унга симметрик бўлган $\hat{x} = \left(x_1, x_2, x_3\right) \in D^-$ ($\sigma : y_3 = 0$ – текисликка нисбатан нуšтанги оламиз). Биз излаётган Грин функциясини

$$G(x, y) = \frac{1}{|x - y|} + \frac{A}{|\hat{x} - y|}$$

кўринишда излаймиз. Грин функциясининг σ – чегарадаги

$$G(x, y)\big|_{y\in\sigma} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{|x - y|} + \frac{A}{|\hat{x} - y|}\right)_{y\in\sigma : y_3 = 0} = 0$$

$$\left|x-y\right\|_{y_3=0}=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}\Big|_{y_3=0}$$

$$=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2}$$

$$\left|\hat{x}-y\right\|_{y_3=0}=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3+y_3)^2}\Big|_{y_3=0}=$$

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2}\qquad .$$

$$0=\left(\frac{1}{|x-y|}+\frac{A}{|\hat{x}-y|}\right)_{y\in\sigma}=\frac{1}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2}}+$$

$$\frac{A}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2}}$$

Бу тенгликдан *A=-1* келиб чиšади. Шундай šилиб биз излаган Грин функцияси

$$G(x,y)=\frac{1}{|x-y|}+\frac{1}{|\hat{x}-y|},\ x,y\in D^+ \qquad \textbf{(11)}$$

иборат бўлади. Худди шунингдек E_2 **даги юšори ярим текислик** $x_2>0$ **учун Грин функцияси**

$$G(x,y)=\ln\frac{1}{|x-y|}-\ln\frac{1}{|\hat{x}-y|} \qquad \textbf{(12)}$$

$$x=(x_1,x_2),\ \hat{x}=(x_1,-x_2),\ y=(y_1,y_2),\ y_2>0$$

Кейинчалик бизга, ушбу $\frac{\partial G(x,y)}{\partial v}$ ќосилани ќисоблаш зарур бўлади.

$v = D^+ : \{y_3 > 0\}$ **га ташўи нормал бўлгани учун унинг йўналиши** Oy_3 **га šарама – šарши бўлганидан**

$$\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial v}\right|_{y_3=0} = -\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_3}\right|_{y_3=0}$$

$$\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial v}\right|_{y_3=0} = -\frac{\partial}{\partial v}\Big[\left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2\right.$$

$$= -\Big[-\frac{1}{2}\left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2\right)^{-\frac{3}{2}}(-2)(x_3-y_3)+$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2\cdot(x_3-y_3)\Big]\right|_{y_3=0} =$$

$$= -\Bigg[\frac{x_3-y_3}{\sqrt{\left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2\right)^3}}+$$

$$\left.+\frac{x_3+y_3}{\sqrt{\left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2\right)^3}}\Bigg]\right|_{y_3=0} = \qquad \textbf{(13)}$$

$$= \frac{2x_3}{\sqrt{\left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2\right)^3}} \underset{y_3=0}{=} -\frac{2x_3}{|x-y|^3}$$

Адабиётлар

1.Салоҳитдинов М.С., Математик физика тенгламалари, Т., «Ўзбекистон», 2002.

2.Владимиров В.С., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1981.

3.Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1977.

Маъруза № 10

Текисликда Грин функцияси ёрдамида Лаплас тенгламаси учун šўйилган Дирихле масаласини ечишга доир мисоллар

Режа

1. Юšори ярим текисликда берилган Лаплас тенгламаси учун šўйилган Дирихле масаласини ечиш.
2. Доирада берилган Лаплас тенгламаси учун куйилган Дирихле масаласини ечиш.
3. Ярим доирада берилган Лаплас тенгламаси учун куйилган Дирихле масаласини ечиш.

1. Бирор $D \subset R^n, \quad (n \geq 2)$ соҡа берилган бўлсин. Унинг чегарасини S билан белгилайлик. Šуйидаги масалага

$$\Delta u = 0 \qquad x \in D \qquad (1)$$

$$u\Big|_{x\in S} = f(x) \qquad \textbf{(2)}$$

Лаплас тенгламаси учун šўйилган Дирихле масаласи дейилади.

Таъриф. Šуйидаги шартларни šаноатлантирувчи $G(x,y)$ **функцияга (1)+(2) масаланинг Грин функцияси дейилади.**

1) $G(x,y)=E(x,y)+g(x,y)$**, бу ерда** $g(x,y)$ **функция D соќада у бўйича гармоник ва**

$$E(x,y)=\begin{cases} -\dfrac{1}{|x-y|^{n-2}}, & n>2 \\ \ln\dfrac{1}{|x-y|}, & n=2. \end{cases} \qquad \textbf{(3)}$$

2) $G(x,y)\Big|_{y\in S}=0.$

Теорема. (1)+(2) масаланинг Грин функцияси $G(x,y)$ **бўлса, бу масаланинг ечими ушбу**

$$u(x)=-\frac{1}{(n-2)|S_1|}\int_S \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \overline{n}}\, f(\xi)d_\xi S, \qquad (n>2), \qquad \textbf{(4)}$$

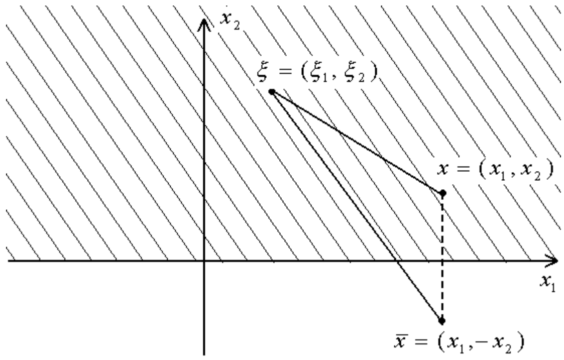
$$u(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \overline{n}}\, f(\xi)d_\xi S, \qquad (n=2) \qquad \textbf{(5)}$$

функциялар ёрдамида топилади.

1. Юšори ярим текисликда берилган Лаплас тенгламаси учун šўйилган Дирихле масаласини ечиш

Бу ќолда (2) чегаравий шарт $U\big|_{x_2=0}=\varphi(x_1)$ кўринишда бўлади.

Аввало Грин функциясини тузамиз. Бунинг учун Юкори ярим текисликда ихтиёрий $x=(x_1,x_2)$ ва $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ нуšталарни оламиз. $x=(x_1,x_2)$ нуšтани тайинланган нуšта деб хисоблаймиз:



Агар

$$\xi=(\xi_1,\xi_2)\in S$$

бўлса,

$$|\xi-x|=|\xi-\bar{x}|$$

бўлади. Шунга кўра ушбу

$$G(x,\xi)=\ln\frac{1}{|\xi-x|}-\ln\frac{1}{|\xi-\bar{x}|}=\ln\frac{1}{\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2}}-$$
$$-\ln\frac{1}{\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2+x_2)^2}}$$

функция $x_2>0$ соќа учун Грин функцияси бўлади.

Энди $\left.\dfrac{\partial G(x,\xi)}{\partial \overline{n}}\right|_{\xi\in S}$ ни ќисоблаймиз:

$$\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \overline{n}}\right|_{\xi\in S}=-\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \xi_2}\right|_{\xi_2=0}=\{\frac{1}{2}\cdot\frac{2(\xi_2-x_2)}{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2}-$$

$$\left.-\frac{1}{2}\cdot\frac{2(\xi_2+x_2)}{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2+x_2)^2}\}\right|_{\xi_2=0}=-\frac{2x_2}{(\xi_1-x_1)^2+x_2^2}.$$

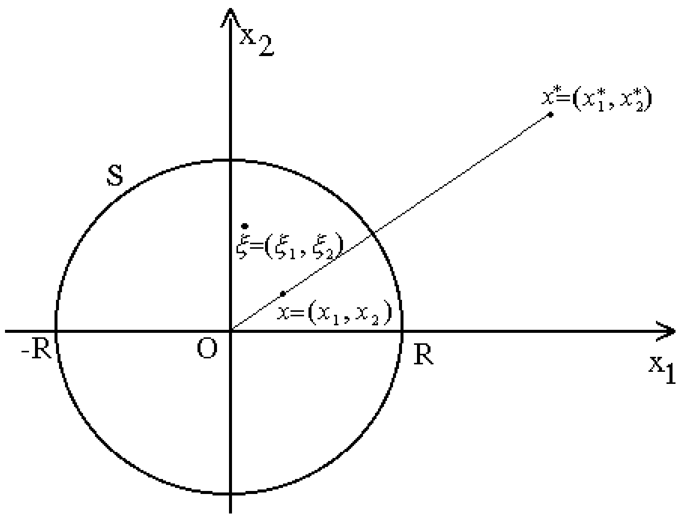
(5) формулага асосан

$$u(x_1,x_2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x_2}{(\xi_1-x_1)^2+x_2^2}.f(\xi_1)d\xi_1$$

келиб чиšади.

2. Доирада берилган Лаплас тенгламаси учун šўйилган Дирихле масаласини ечиш

Аввало Грин функциясини тузамиз. Бунинг учун доира ичида ихтиёрий $x=(x_1,x_2)$ ва $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ нуšталарни оламиз. $x=(x_1,x_2)$ нуšтани тайинланган нуšта деб ќисоблаймиз:



Бу ерда x^{-} ва x^{*} нуўталар S айланага нисбатан симметрик бўлган нуўталардир, яъни

$$\overline{OX^{*}} = \lambda \overline{OX}, \ (\lambda > 0)$$

ва

$$\left|\overline{OX^{*}}\right| \cdot \left|\overline{OX}\right| = R^{2}. \tag{6}$$

Бундан

$$\lambda = \frac{R^{2}}{\left|\overline{OX^{*}}\right|^{2}}, \quad \overline{OX^{*}} = \frac{R^{2} \cdot \overline{OX}}{\left|\overline{OX}\right|^{2}}, \tag{7}$$

яъни

$$x_{1}^{*} = \frac{R^{2} \cdot x_{1}}{x_{1}^{2} + x_{2}^{2}}, \qquad x_{2}^{*} = \frac{R^{2} \cdot x_{2}}{x_{1}^{2} + x_{2}^{2}}. \tag{8}$$

Агар $\xi=(\xi_1,\xi_2)\in S$ **бўлса, Ушбу**

$$\frac{1}{|\xi-x|}=\frac{R}{|x|\cdot|\xi-x^*|},\qquad \frac{|\xi-x^*|}{|\xi-x|}=\frac{R}{|x|} \tag{9}$$

тенглик ўринли бўлади. Бунга кўра

$$G(x,\xi)=\ln\frac{1}{|\xi-x|}-\ln\frac{R}{|x|\cdot|\xi-x^*|}=\ln\frac{1}{\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2}}-$$
$$-\ln\frac{R}{|x|\cdot\sqrt{(\xi_1-x_1^*)^2+(\xi_2-x_2^*)^2}}$$

бўлади.

Энди $\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\overline{n}}\right|_{\xi\in S}$ **ни ќисоблаймиз:**

$$\xi\in S,\quad \overline{n}=\frac{1}{R}(\xi_1,\xi_2),$$

$$\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\overline{n}}\right|_{\xi\in S}=\left.\left(\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\xi_1}n_1+\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\xi_2}n_2\right)\right|_{\xi\in S}=$$

$$=\frac{1}{R}\cdot\left.\left\{\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2(\xi_1-x_1)}{|\xi-x|^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2(\xi_1-x_1^*)}{|\xi-x^*|^2}\right)\cdot\xi_1+\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2(\xi_2-x_2)}{|\xi-x|^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2(\xi_2-x_2^*)}{|\xi-x|^2}\right)\cdot\xi_2\right\}\right|_{\xi\in S}=$$

$$=\frac{1}{R}\cdot\left.\left\{\frac{-\xi_1^2+\xi_1x_1-\xi_2^2+\xi_2x_2}{|\xi-x|^2}+\frac{\xi_1^2-\xi_1x_1^*+\xi_2^2-\xi_2x_2^*}{|\xi-x^*|^2}\right\}\right|_{\xi\in S}=$$

$$=\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{|\xi-x|^2}\left\{\xi_1x_1+\xi_2x_2-R^2+\frac{|x|^2}{R^2}(R^2-\xi_1x_1^*-\xi_2x_2^*)\right\}=$$

Агар

$$x_1 = \rho\cos\theta, \qquad x_2 = \rho\sin\theta, \ (0 \le \theta \le 2\pi, \ 0 \le \rho \le R),$$
$$\xi_1 = R\cos\psi, \quad \xi_2 = R\sin\psi, \ (0 \le \psi \le 2\pi)$$

десак,

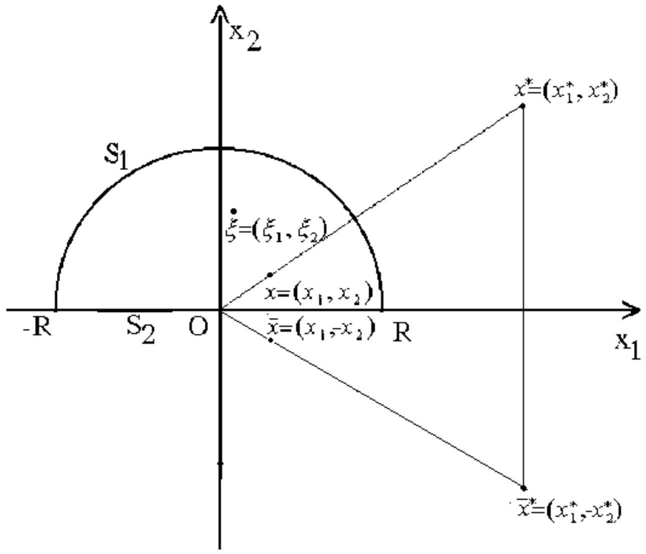
$$\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \overline{n}}\right|_{\xi\in S} = -\frac{1}{R}\cdot\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho[\cos\psi\cos\theta+\sin\psi\sin\theta]+\rho^2} =$$
$$. \qquad = -\frac{1}{R}\cdot\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\psi-\theta)+\rho^2} \qquad \textbf{(15)}$$

(5) формулага асосан

$$U(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi R}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\psi-\theta)+\rho^2}f(\psi)d\psi\,. \qquad \textbf{(16)}$$

4. Ярим доирада берилган Лаплас тенгламаси учун куйилган Дирихле масаласини ечиш

Аввало Грин функциясини тузамиз. Бунинг учун ярим доира ичида ихтиёрий $x=(x_1,x_2)$ ва $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ нуšталарни оламиз.



$x=(x_1,x_2)$ нуšтани тайинланган нуšта деб ќисоблаймиз:

Бу ерда $\bar{x}$ ва x^* нуšталар S айланага нисбатан симметрик бўлган нуšталардир. $\overline{OX^*}=\lambda\overline{OX},\ (\lambda>0)$ ва $\left|\overline{OX^*}\right|\cdot\left|\overline{OX}\right|=R^2$.

Бундан

$$\lambda=\frac{R^2}{\left|\overline{OX}\right|^2},\quad \overline{OX^*}=\frac{R^2\cdot\overline{OX}}{\left|\overline{OX}\right|^2},$$

яъни

$$x_1^*=\frac{R^2\cdot x_1}{x_1^2+x_2^2},\qquad x_2^*=\frac{R^2\cdot x_2}{x_1^2+x_2^2}.$$

Агар $\xi=(\xi_1,\xi_2)\in S_1$ бўлса,

$$\frac{1}{|\xi-x|}=\frac{R}{|x|\cdot|\xi-x^*|},\qquad \frac{1}{|\xi-\bar{x}|}=\frac{R}{|x|\cdot|\xi-\bar{x}^*|}$$

$\xi \in S_2$ **бўлса,**

$$|\xi - x| = |\xi - \bar{x}|, \qquad |\xi - x^*| = |\xi - \bar{x}^*|. \tag{17}$$

$$\bar{x} = (x_1 - x_2), \qquad \frac{1}{|\xi - x^*|} = \frac{|x|}{R} \cdot \frac{1}{|\xi - x|}$$

тенгликлар ўринли бўлади. Бунга кўра

$$G(x,\xi) = \left(\ln\frac{1}{|\xi - x|} - \ln\frac{R}{|x| \cdot |\xi - x^*|} \right) - \left(\ln\frac{1}{|\xi - \bar{x}|} - \ln\frac{R}{|x| \cdot |\xi - \bar{x}^*|} \right) =$$
$$= \left(\ln\frac{1}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}} - \ln\frac{R}{|x| \cdot \sqrt{(\xi_1 - x_1^*)^2 + (\xi_2 - x_2^*)^2}} \right) - \tag{18}$$
$$- \left(\ln\frac{1}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 + x_2)^2}} - \ln\frac{R}{|x| \cdot \sqrt{(\xi_1 - x_1^*)^2 + (\xi_2 + x_2^*)^2}} \right)$$

Энди $\left.\dfrac{\partial G(x,\xi)}{\partial \bar{n}}\right|_{\xi \in S}$ **ни ќисоблаймиз:**

$$\xi = (\xi_1, \xi_2) \in S_1, \; \bar{n} = \frac{1}{|\xi|}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{R}(\xi_1, \xi_2)$$

$$\xi \in S_2, \; \bar{n} = \frac{1}{|\xi|}(0, \xi_2) = (0, -1)$$

$$\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \overline{n}}\right|_{\xi\in S_1}=\left.\left(\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \xi_1}n_1+\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \xi_2}n_2\right)\right|_{\xi\in S_1}=$$

$$=\frac{1}{R}\cdot\left\{\left[\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2(\xi_1-x_1)}{|\xi-x|^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2(\xi_1-x_1^*)}{|\xi-x^*|^2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2(\xi_1-x_1)}{|\xi-\overline{x}|^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2(\xi_1-x_1^*)}{|\xi-\overline{x}^*|^2}\right)\right]\cdot\xi_1+\right.$$

$$\left.\left.+\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2(\xi_2+x_2)}{|\xi-\overline{x}|^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2(\xi_2-x_2^*)}{|\xi-\overline{x}^*|^2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2(\xi_2-x_2)}{|\xi-x|^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2(\xi_2-x_2^*)}{|\xi-\overline{x}^*|^2}\right)\right]\cdot\xi_2\right\}\right|_{\xi\in S_1}=$$

$$=\frac{1}{R}\cdot\left\{\left[\frac{-\xi_1^2+\xi_1x_1-\xi_2^2+\xi_2x_2}{|\xi-x|^2}+\frac{\xi_1^2-\xi_1x_1^*+\xi_2^2-\xi_2x_2^*}{|\xi-x^*|^2}\right]+\right.$$

$$\left.\left.+\left[\frac{-\xi_1^2+\xi_1x_1-\xi_2^2+\xi_2x_2}{|\xi-\overline{x}|^2}+\frac{\xi_1^2-\xi_1x_1^*+\xi_2^2-\xi_2x_2^*}{|\xi-\overline{x}^*|^2}\right]\right\}\right|_{\xi\in S_1}=$$

$$=\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{|\xi-x|^2}\left\{\xi_1x_1+\xi_2x_2-R^2+\frac{|x|^2}{R^2}(R^2-\xi_1x_1^*-\xi_2x_2^*)\right\}+$$

$$+\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{|\xi-\overline{x}|^2}\left\{R^2-\xi_1x_1+\xi_2x_2-\frac{|x|^2}{R^2}(R^2-\xi_1x_1^*-\xi_2x_2^*)\right\}=$$

$$=\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{|\xi-x|^2}\left\{\xi_1x_1+\xi_2x_2-R^2+|x|^2-\frac{|x|^2}{R^2}\cdot\xi_1\cdot\frac{R^2x_1}{|x|^2}-\frac{|x|^2}{R^2}\cdot\xi_2\cdot\frac{R^2x_2}{|x|^2}\right\}+$$

$$+\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{|\xi-\overline{x}|^2}\left\{R^2-\xi_1x_1+\xi_2x_2-|x|^2+\frac{|x|^2}{R^2}\cdot\xi_1\cdot\frac{R^2x_1}{|x|^2}-\frac{|x|^2}{R^2}\cdot\xi_2\cdot\frac{R^2x_2}{|x|^2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{|\xi-x|^2}\cdot(|x|^2-R^2)+\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{|\xi-\overline{x}|^2}(R^2-|x|^2)=$$

$$=\frac{1}{R}\cdot(|x|^2-R^2)\left(\frac{1}{|\xi-x|^2}-\frac{1}{|\xi-\overline{x}|^2}\right)\qquad\textbf{(19)}$$

Агар

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\theta, & 0 \le \rho \le R \\ x_2 = \rho\sin\theta, & 0 \le \theta \le \pi, \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi_1 = R\cos\psi, \\ \xi_2 = R\sin\psi, \ 0 \le \psi \le \pi \end{cases}$$

десак,

$$\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \overline{n}}\right|_{\xi\in S_1} = -\frac{1}{R}\cdot\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho[\cos\psi\cos\theta+\sin\psi\sin\theta]+\rho^2} +$$

$$+\frac{1}{R}\cdot\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho[\cos\psi\cos\theta-\sin\psi\sin\theta]+\rho^2} =$$

$$= -\frac{1}{R}\cdot\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\psi-\theta)+\rho^2}+\frac{1}{R}\cdot\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\psi+\theta)+\rho^2}. \quad (20)$$

$$\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \overline{n}}\right|_{\xi\in S_2} = \left.\left(\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \xi_1}n_1 + \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \xi_2}n_2\right)\right|_{\xi\in S_2} =$$

$$= -\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \xi_2}\right|_{\xi_2=0} = -\left.\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2(\xi_2-x_2)}{|\xi-x|^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2(\xi_2-x_2^*)}{|\xi-x^*|^2}\right)\right|_{\xi_2=0} +$$

$$\left.\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2(\xi_2+x_2)}{|\xi-\overline{x}|^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2(\xi_2+x_2^*)}{|\xi-\overline{x}^*|^2}\right)\right|_{\xi_2=0} =$$

$$-\frac{x_2}{(\xi_1-x_1)+x_2^2}+\frac{x_2^*}{(\xi_1-x_1^*)+x_2^{*2}}-\frac{x_2}{(\xi_1-x_1)+x_2^2}+\frac{x_2^*}{(\xi_1-x_1^*)+x_2^{*2}}=$$

$$=\frac{2x_2}{(\xi_1-x_1)+x_2^2}+\frac{2x_2}{(\xi_1-x_1^*)+x_2^{*2}}=$$

$$-\frac{2x_2}{(\xi_1-x_1)+x_2^2}+\frac{2\frac{R^2}{|x|^2}x_2}{(\xi_1-\frac{R^2}{|x|^2}x_1)^2+\left(\frac{R^2}{|x|^2}\right)^2x_2^2}=$$

$$=-\frac{2x_2}{(\xi_1-x_1)+x_2^2}+\frac{2x_2}{\frac{|x|^2}{R^2}\cdot\frac{R^2}{|x|^2}\cdot\left(\frac{|x|^2}{R^2}\cdot(\xi_1-\frac{R^2}{|x|^2}x_1)^2\right)+\frac{R^2}{|x|^2}x_2}=$$

$$=-\frac{2x_2}{(\xi_1-x_1)+x_2^2}+\frac{2x_2}{\frac{|x|^2}{R^2}\cdot\frac{1}{|x|^4}\cdot(|x|^2\cdot\xi_1-R^2x_1)^2+\frac{R^2}{|x|^2}x_2^2}=$$

$$=-\frac{2x_2}{(\xi_1-x_1)+x_2^2}+\frac{2x_2R^2|x|^2}{(|x|^2\cdot\xi_1-R^2x_1)^2+R^4x_2^2} \qquad (21)$$

$$U(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_S\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\overline{n}}f(\xi)d_\xi S=-\frac{1}{2\pi}\int_{S_1}\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\overline{n}}f(\xi)d_\xi S-$$

$$-\frac{1}{2\pi R}\int_{S_1}\left(\frac{|x|^2-R^2}{|\xi-x|^2}-\frac{|x|^2-R^2}{|\xi-\overline{x}|^2}\right)f(\xi)d_\xi S+$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\left(\frac{x_2}{(\xi_1-x_2)+x_2^2}-\frac{|x|^2\cdot R^2\cdot x_2}{(|x|^2\xi-R^2x_1)^2+R^4x_2^2}\right)f(\xi_1)d\xi_1$$

ЯЪНИ,

$$U(x)=\frac{1}{2\pi R}\int_0^\pi\left(\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2\rho R\cos(\psi-\theta)+\rho^2}-\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2\rho R\cos(\psi+\theta)+\rho^2}\right)f(\psi)d\psi+$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\left(\frac{x_2}{(\xi_1-x_2)+x_2^2}-\frac{|x|^2\cdot R^2\cdot x_2}{(|x|^2\xi-R^2x_1)^2+R^4x_2^2}\right)f(\xi_1)d\xi_1$$

Адабиётлар

1.Салоќитдинов М.С., Математик физика тенгламалари, Т., «Ўзбекистон», 2002.

2.Владимиров В.С., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1981.

3.Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1977.

Маъруза № 11

Фазода Грин функцияси ёрдамида Лаплас тенгламаси учун šўйилган Дирихле масаласини ечишга доир мисоллар

Режа

1. Ярим фазо учун Дирихле масаласи.
2. Шар учун Грин функцияси.
3. Ярим шар учун Грин функцияси.

Ярим фазо учун Дирихле масаласи

Ушбу

$$D^{+} = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in E_3 : x_3 > 0\}$$

соќа учун Дирихле масаласи

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0, \quad u \in C^2(D^{+}) \bigcap \left(\overline{D^{+}}\right)$$

$$u\big|_{\sigma:y_3=0} = u(x_1, x_2, x_3)\big|_{\sigma:y_3=0} = f(x) \in C(\sigma)$$

бўлиб

$$f(x) = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{|x|}\right), \ |x| \to \infty$$

шартни šаноатлантиради. Бизга маълумки бу масаланинг ечими *u(x)* ни Грин функцияси ёрдамида

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_3} \int\limits_{y_3=0} f(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu} d\sigma_y \qquad \textbf{(14)}$$

топиш мумкин. (13) дан фойдаланиб (14) ни šуйидагича ёзамиз:

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_3} \int\limits_{y_3=0} f(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu} d\sigma_y = \left| \begin{matrix} \omega_3 = 4\pi \\ r = 1 \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{y_3=0} f(y_1, y_2) \frac{x_3}{\left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2\right)^{\frac{3}{2}}} dy_1 dy_2 = \qquad \textbf{(15)}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) \frac{x_3}{\left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2\right)^{\frac{3}{2}}} dy_1 dy_2$$

Шундай šилиб биз šуйидаги теоремани исботлашимиз мумкин:

Теорема. **Агар** $f(x) = f(x_1, x_2)$ **функция** $x \in E_2$ **текисликда чегараланган узлуксиз ёки узлуксиз ва**

$$f(x)=\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

шарт бажарилса, у ќолда

$$\Delta u=0,\ u\in C^2\left(D^+\right)\cap C\left(\overline{D^+}\right),\ \ D^+=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in E_3 : x_3>0\},$$

$$u(x)\big|_{x_3=0}=f(x),\ \ f(x)\in C(\sigma),$$

$$f(x)=\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

ёки

$$|f(x)|\le A,\quad \forall x\in E_2$$

Дирихле масаласининг ечими (15) формула ёрдамида топилади.

Шар учун грин функцияси

x **ва** x **нуўтада** $\sigma:|x|=a$ **сферага нисбатан симметрик функциялар булсин.**

$$x\in D^+=B(0,a):|x|<a$$

шарда ётсин, у холда

$$x^1 \in D^-, x^1 \notin D^+.$$

Бу симметрик нуšталар учун, ушбу

$$x^1 = \frac{a^2}{|x|^2} \cdot x \quad , \qquad x = \frac{a^2}{|x^1|^2} \cdot x^1 \qquad \textbf{(1)}$$

$$x = (x_1, x_{2,} x_3), \quad x^1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1) \in E_3$$

мунасабатлар ўринли, яъни

$$|x| \cdot |x^1| = a^2 \qquad \textbf{(2)}$$

Энди, биз $\forall y \in \sigma$ **бўлганда** $x \in D^+, x^1 \in D^-$ **симметрик нуšталар учун, Ушбу**

$$\frac{|x^1 - y|}{|x - y|} = canst \qquad \textbf{(3)}$$

мунасабатнинг бажарилишини кўрсатамиз

$$\left|x^1-y\right|^2=\left(x^1-y\right)=x^{12}-2x^1y+y^2=$$

$$\frac{a^4}{|x|^4}x^2-2\frac{a^2}{|x|^2}\cdot x\cdot y+y^2=\frac{a^2}{|x|^2}\left(\frac{a^2}{|x|^2}\cdot x^2-2xy+\frac{|x|^2}{a^2}y^2\right)^2=$$

$$=\left\|\begin{matrix}|x|^2=x^2\\ |y|^2=y^2=a^2\end{matrix}\right\|=\frac{a^2}{|x|^2}\left(a^2-2xy+x^2\right)=\frac{a^2}{|x|^2}\left(x^2-2xy+y^2\right)=\frac{a^2}{|x|^2}|x-y|^2 \quad \Rightarrow$$

$$\left|x^1-y\right|=\frac{a}{|x|}\cdot|x-y|,\quad y\in\sigma \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\left|x^1-y\right|}{|x-y|}=\frac{a}{|x|}=canst,\qquad y\in\sigma \qquad (3')$$

Бундан фойдаланиб

$$E_3\supset D^+=B(0,a)$$

лар учун Грин функциясини куйидагича тузамиз: E_3 **- ќолда фундаментал ечим, ушбу**

$$\varepsilon(x,y)=\frac{1}{|x-y|}$$

кўринишда бўлади. Ушбу

$$g(x,y)=-\frac{a}{|x|}\frac{1}{\left|x^1-y\right|},$$

функция ***y*** **ўзгарувчи бўйича** $D^+=B(0,a)$**- шарда гармоник**

бўлади. Шунинг учун šуйидаги функция

$$G(x,y)\Big|_{y\in\sigma} \underset{(3')}{=} \left(\frac{1}{|x-y|} - \frac{a}{|x|}\frac{1}{|x^1-y|}\right)\Bigg|_{y\in\sigma} = 0 \qquad \begin{matrix} x\in D \\ y\in\sigma \end{matrix}$$

шартни šаноатлантиради. Энди (4) дан фойдаланиб

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}$$

ν **- нормал бўйича олинган ќосилани ќисоблаймиз.**

$$\frac{a}{|x|}\frac{1}{|x^1-y|} \underset{(1)}{=} \frac{a}{|x|}\frac{1}{\left|\frac{a}{\frac{1}{|x|^2}}x-y\right|} = \frac{a}{|x|}\frac{1}{\frac{a}{|x|}\left(\frac{a}{|x|}x-\frac{|x|}{a}y\right)} = \frac{1}{\left(\frac{a}{|x|}x-\frac{|x|}{a}y\right)} = \frac{1}{\left|\frac{a}{|x|}x-\frac{|x|}{a}\right|}$$

бундан фойдаланиб (4) Грин функциясини šуйидагича ёзиб оламиз:

$$G(x,y) = \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{\left|\frac{a}{|x|}x-\frac{|x|}{a}y\right|} \qquad \textbf{(5)}$$

$$\varepsilon(x,y)=\frac{1}{|x-y|}$$

бўлса,

$$g(x,y)=\frac{1}{\left|\frac{a}{|x|}x-\frac{|x|}{a}y\right|}=\varepsilon\left(\frac{a}{|x|}x,\frac{|x|}{a}y\right).$$

у ќолда

$$G(x,y)=\varepsilon(x,y)-\varepsilon\left(\frac{a}{|x|}x,\frac{|x|}{a}y\right)$$

кўринишни олади.

ν **- нормал векторнинг йўналиши радиус йўналиши билан бир хил, шунинг учун**

$$\cos\alpha_k=\frac{y_k}{a},\qquad k=1,2,3,.$$

а – радиус $cos\alpha_k$ **- йўналтирувчи косинуслар:** $\sum_{k-1}^{3}\cos^2\alpha_k=1$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)=\frac{\partial}{\partial\nu}\left(|x-y|^{-1}\right)\overset{def}{=}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(|x-y|^{-1}\right)\cos\alpha_k=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(|x-y|^{-1}\right)\frac{y_k}{a}$$

бу ерда

$$|x-y|^{-1}=\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(|x-y|^{-1}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\left(|x-y|^{-1}\right)=\frac{x_k-y_k}{|x-y|^3}$$

бундан фойдаланамиз.

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\left|x-y\right|^{-1}\right)=\sum_{k=1}^{3}\frac{x_k-y_k}{\left|x-y\right|^3}\frac{y_k}{a}=\frac{1}{a\left|x-y\right|^3}\sum_{k=1}^{3}x_k y_k-\sum_{k=1}^{3}y_k^2=\frac{xy-a^2}{a\left|x-y\right|^3}=-\frac{a^2-xy}{a\left|x-y\right|^3}$$

энди, ушбу

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{\left|\frac{a}{|x|}x-\frac{|x|}{a}y\right|}\right)=\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\left|\frac{a}{|x|}x-\frac{|x|}{a}y\right|^{-1}\right)=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\left|\frac{a}{|x|}x-\frac{|x|}{a}y\right|^{-1}\right)\cos\alpha_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{a}{|x|}x_j-\frac{|x|}{a}y_j\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{y_k}{a}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\left(\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{a}{|x|}x_1-\frac{|x|}{a}y_1\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)=$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\left(\frac{a}{|x|}x_1-\frac{|x|}{a}y_1\right)^2+\left(\frac{a}{|x|}x_2-\frac{|x|}{a}y_2\right)^2+\left(\frac{a}{|x|}x_3-\frac{|x|}{a}y_3\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{a}{|x|}x_1-\frac{|x|}{a}y_1\right)^2+\left(\frac{a}{|x|}x_2-\frac{|x|}{a}y_2\right)^2+\left(\frac{a}{|x|}x_3-\frac{|x|}{a}y_3\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(-2\frac{|x|}{a}\right)\left(\frac{a}{|x|}x_1-\frac{|x|}{a}y_1\right)=$$

$$=\frac{|x|\left(\frac{a}{|x|}x_1-\frac{|x|}{a}y_1\right)}{a\left|\frac{a}{|x|}x-\frac{|x|}{a}y\right|^3}$$

Демак,

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\left|\frac{a}{|x|}x-\frac{|x|}{a}y\right|^{-1}\right)=\sum_{k=1}^{3}\frac{|x|\left(\frac{a}{|x|}x_k-\frac{|x|}{a}y_k\right)}{a\left(\frac{a}{|x|}x-\frac{|x|}{a}y\right)^3}\frac{y_k}{a}=\frac{|x|}{a^2\left|\frac{a}{|x|}x-\frac{|x|}{a}y\right|^3}\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{a}{|x|}x_k y_k-\sum_{k=1}^{3}\frac{|x|}{a}y_k^2\right)=$$

$$=\frac{|x|}{a^2\left|\frac{a}{|x|}x-\frac{|x|}{a}y\right|^2}\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{a}{|x|}x_k y_k-\sum_{k=1}^{3}\frac{|x|}{a}y_k^2\right)=\frac{|x|}{a^2\left|\frac{a}{|x|}x-\frac{|x|}{a}y\right|^3}\left(\frac{a}{|x|}xy-\frac{|x|}{a}a^2\right)=\frac{xy-|x|^2}{a\left|\frac{a}{|x|}x-\frac{|x|}{a}y\right|^3}=$$

$$=-\frac{|x|^2-xy}{a\left|\frac{a}{|x|}x-\frac{|x|}{a}y\right|^3}$$

Грин функциянинг чегарадаги šиймати нол бўлгани учун, яъни

$$G(x,y)\big|_{y\in\sigma}=\left(\varepsilon(x,y)-\varepsilon\left(\frac{a}{|x|}x,\frac{|x|}{a}y\right)\right)_{y\in\sigma}\Rightarrow\left|\frac{a}{|x|}x-\frac{|x|}{a}y\right|\Bigg|_{y\in\sigma}=|x-y|\big|_{y\in\sigma}$$

бўлади. Бундан фойдаланиб юšоридаги тенгликни šуйидагича ёзамиз: $y\in\sigma$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\left|\frac{a}{|x|}x-\frac{|x|}{a}y\right|^{-1}=-\frac{|x|^2-xy}{a|x-y|^3}\right)$$

Шундай šилиб,

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial\nu}=\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{|x-y|}-\frac{2}{\left|\frac{a}{|x|}x-\frac{|x|}{a}y\right|}\right)\Bigg|_{y\in\sigma}=-\frac{a^2-xy}{a|x-y|^3}+\frac{|x|^2-xy}{a|x-y|^3}=-\frac{a^2-|x|^2}{a|x-y|^3}$$

Ушбу

$$\Delta u = 0,$$

$x \in D^{+} = B(0,a)$**-шар** E_3 **да**

$$u\big|_{\sigma} = f(x), \qquad f(x) \in C(\sigma), \qquad x \in \sigma \qquad (6)$$

Дирихле масаласини ечамиз

$$u(x) \in C^{2}(B(0,a)) \cap C\left(\overline{B(0,a)}\right)$$

ни Грин функциясидан фойдаланиб топамиз:

$$u(x) = -\frac{1}{\varpi_3}\int_{\sigma} f(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}d\sigma_y = \frac{1}{\varpi_3}\int_{\sigma} f(y)\frac{a^2-|x|^2}{a|x-y|^3}d\sigma_y = \qquad (7)$$
$$\frac{1}{4\pi a}\int_{|y|=a} f(y)\frac{a^2-|x|^2}{a|x-y|^3}d\sigma_y$$

(7) га Пуассон формуласи дейилади.

Теорема. Агар

$$f(x) \in C(\sigma), \quad \sigma = \partial D^{+} = \{x : |x| = a\}$$

бўлса, у ќолда ушбу

$$u(x) = \frac{1}{4\pi a}\int_{|y|=a} f(y)\frac{a^2-|x|^2}{a|x-y|^3}d\sigma_y$$

формула орšали анишланган $u(x)$ функция $D^+ = B(0,a)$- шарда гармоник, яъни $\Delta u = 0$ бўлиб,

$$\lim_{x \to x'} u(x) = f(x'), \qquad x' \in \sigma$$

чегаравий шартни $\forall x \in B(0,a)$ да šаноатлантиради, яъни

$$u(x)\Big|_{x \in \sigma} = f(x)$$

бўлади.

Ярим шар учун Грин функцияси

$|x| \cdot |x^1| = a^2$, a-радиус.

$$x^1 = \frac{a^2}{|x|^2} \cdot x \qquad x = \frac{a^2}{|x|^2} \cdot x^1.$$

Шар учун ушбу

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{a}{|x|} \cdot \frac{1}{|x^1 - y|}$$

тенглик маълум. Энди

$$\frac{1}{|\bar{x} - y|} = \frac{a}{|x|} \cdot \frac{1}{|\bar{x} - y|}$$

ни кўрсатамиз:

Бунинг учун

$$\left(\bar{x}-y\right)^2=\left(\overset{-1}{x}\right)^2-2\overset{-1}{x}y+y^2=\frac{a^2}{|x|^4}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-2\frac{a^2}{|x|^2}\left(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\right)+a^2=$$

$$=\frac{a^2}{|x|^2}\left(a^2-2\left(x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3\right)+|x|^2\right)=\frac{a^2}{|x|^2}\left(\bar{x}-y\right)^2$$

$$\left|\overset{-1}{x}-y\right|=\frac{a}{|x|}\left|\bar{x}-y\right| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\left|\bar{x}-y\right|}=\frac{a}{|x|}\cdot\frac{1}{\left|\overset{-1}{x}-y\right|}$$

$$G(x,y)=\frac{1}{|x-y|}-\frac{a}{|x|}\cdot\frac{1}{\left|\overset{-1}{x}-y\right|}-\left(\frac{1}{\left|\bar{x}-y\right|}-\frac{a}{|x|}\cdot\frac{1}{\left|\overset{-1}{x}-y\right|}\right)$$

Грин функцияси.

$x=\left(x_1,x_2,x_3\right)$, $\bar{x}=\left(x_1,x_2,x_3\right)$, $x^1=\frac{a^2}{|x|^2}\left(x_1,x_2,x_3\right)$ $\overset{-1}{x}=\frac{a^2}{|x|^2}\left(x_1,x_2,x_3\right)$

$y=\left(y_1,y_2,y_3\right)$

$$G(x,y)\Big|_{y\in\sigma_1}=0$$

эканлигини биламиз.

$$G(x,y)\Big|_{y\in\sigma_2}=0$$

эканлигини кўрсатамиз: $\left(\sigma_2 : y_3=0\right)$

$$\left(x^1-y\right)^2=\left(x^1\right)^2-2x^1y+y^2=\frac{a^4}{|x|^4}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-2\frac{a^2}{|x|^2}\left(x_1y_1+x_2y_2\right)+y^2=$$

$$=\left(\overset{-1}{x}\right)^2-2\overset{-1}{x}y+y^2=\left(\overset{-1}{x}-y\right)^2$$

$$\left|x^1-y\right|=\left|\overset{-1}{x}-y\right|$$

$$(x-y)^2=\left(\bar{x}-y\right)^2,$$

чунки $y_3=0$.

Демак,

$$G(x,y)\big|_{y\in\sigma_2} = 0.$$

1) $y\in\sigma_1$, $\quad \bar{n} = \frac{1}{a}(y_1, y_2, y_3)$

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial \bar{n}}\bigg|_{y\in\sigma_1} = \frac{\partial G(x,y)}{\partial y_1}\frac{y_1}{a} + \frac{\partial G(x,y)}{\partial y_2}\frac{y_2}{a} + \frac{\partial G(x,y)}{\partial y_3}\frac{y_3}{a};$$

2) $y\in\sigma_2$ $\quad \bar{n} = (0,0,-1)$

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial \bar{n}_1}\bigg|_{\substack{y\in\sigma_2\\ y_3=0}} = -\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_3}\bigg|_{y_3=0},$$

чунки $\bar{n}$-ташқи нормал қарама – қарши йўналган.

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial \bar{n}}\bigg|_{y\in\sigma_1} = \frac{1}{a}\left\{\left[-\frac{y_1-x_1}{|x-y|^3} + \frac{a}{|x|}\frac{y_1 - \frac{a^2}{|x|^2}x_1}{|x^1-y|} + \frac{y_1-x_1}{|\bar{x}-y|^3} - \frac{a}{|x|}\frac{y_1 - \frac{a^2}{|x|^2}x_1}{|\bar{x}^1-y|}\right]y_1 + \right.$$

$$+\left[-\frac{y_2-x_2}{|x-y|^3} + \frac{a}{|x|}\frac{y_2 - \frac{a^2}{|x|^2}x_2}{|x^1-y|} + \frac{y_2-x_2}{|\bar{x}-y|^3} - \frac{a}{|x|}\frac{y_2 - \frac{a^2}{|x|^2}x_2}{|\bar{x}^1-y|}\right]y_2 +$$

$$\left.\left.+\left[-\frac{y_3-x_3}{|x-y|^3} + \frac{a}{|x|}\frac{y_3 - \frac{a^2}{|x|^2}x_3}{|x^1-y|} + \frac{y_3+x_3}{|\bar{x}-y|^3} - \frac{a}{|x|}\frac{y_3 + \frac{a^2}{|x|^2}x_3}{|\bar{x}^1-y|}\right]y_3\right\}\right|_{y\in\sigma_1} =$$

$$=\frac{1}{a}\left\{\left[\frac{-y_1^2+x_1y_1-y_2^2+x_2y_2-y_3^2+x_3y_3}{|x-y|^3}+\right.\right.$$

$$\frac{a}{|x|}\frac{y_1^2-\frac{a^2}{|x|^2}\left(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\right)+y_2^2+y_3^2}{|x^1-y|^3}+$$

$$+\frac{y_1^2-x_1y_1+y_2^2-x_2y_2+y_3^2+x_3y_3}{|\bar{x}-y|^3}+$$

$$\left.\left.\left.\frac{a}{|x|}\frac{y_1^2-\frac{a^2}{|x|^2}\left(x_1y_1+x_2y_2\right)-\frac{a^2}{|x|^2}x_3y_3-y_2^2-y_3^2}{|\bar{x}^1-y|^3}\right]\right\}\right|_{y\in\sigma_1}=$$

$$\frac{1}{a}\left[\frac{-a^2+xy}{|x-y|^3}+\frac{a}{|x|}\frac{a^2-\frac{a^2}{|x|^2}xy}{|x^1-y|^3}+\frac{a^2-\bar{x}y}{|\bar{x}-y|^3}+\frac{a}{|x|}\frac{-a^2+\frac{a^2}{|x|^2}\bar{x}y}{|\bar{x}^1-y|^3}\right]=$$

$$\frac{1}{a}\left[\frac{-a^2+xy}{|x-y|^3}+\frac{a}{|x|}\left(\frac{|x|}{a}\right)^3\frac{a^2-\frac{a^2}{|x|^2}xy}{|x-y|^3}+\frac{a^2-\bar{x}y}{|\bar{x}-y|^3}+\frac{a}{|x|}\left(\frac{|x|}{a}\right)^3\frac{-a^2+\frac{a^2}{|x|}\bar{x}y}{|\bar{x}-y|^3}\right]=$$

$$=\frac{1}{a}\left[\frac{|x|^2-a^2}{|x-y|^3}-\frac{|x|^2-a^2}{|\bar{x}-y|^3}\right]=\frac{|x|^2-a^2}{a}\left[\frac{1}{|x-y|^3}-\frac{1}{|\bar{x}-y|}\right]$$

$$\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial\bar{n}}\right|_{y_3=0}=\frac{|x|^2-a^2}{a}\left[\frac{1}{|x-y|^3}-\frac{1}{|\bar{x}-y|^3}\right]$$

$$\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_3}\right|_{y_3=0}=\left.\left(-\frac{y_3-x_3}{|x-y|^3}-\frac{a}{|x|}\frac{y_3-\frac{a^2}{|x|^2}}{|x^1-y|^3}+\frac{y_3+x_3}{|\bar{x}-y|^3}-\frac{a}{|x|}\frac{y_3+\frac{a^2}{|x|^2}x_3}{|\bar{x}^{-1}-y|^3}\right)\right|_{y_3=0}=$$

$$=\left.\left(\frac{2x_3}{|x-y|^3}-\frac{a}{|x|}\frac{2\frac{a^2}{|x|^2}x_3}{|x^1-y|^3}\right)\right|_{y_3=0}=$$

$$\left(\frac{2x_3}{\left(\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2}\right)^3}-\frac{a}{|x|}\frac{2\frac{a^2}{|x|^2}}{\left(\sqrt{\left(\frac{a^2}{|x|^2}x_1-y_1\right)^2+\left(\frac{a^2}{|x|^2}x_2-y_2\right)^2+\frac{a^4}{|x|^4}x_3^4}\right)^3}\right)$$

$$u(x)=-\frac{1}{\varpi_3}\int_{\sigma_1}f(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial\bar{n}}d\sigma_y-\frac{1}{\varpi_3}\int_{\sigma_2}f(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial\bar{n}_1}d\sigma_2=$$

$$=-\frac{1}{4\pi a}\int_{|y|=a}f(y)\left[\frac{|x|^2-a^2}{a}\left(\frac{1}{|x-y|^3}-\frac{1}{|\bar{x}-y|}\right)\right]d\sigma_y-$$

$$-\frac{1}{4\pi a}\int_{|y|=a}f(y)\left[\frac{2x_3}{|x-y|^3}-\frac{a}{|x|}\frac{2\frac{a^2}{|x|}x_3}{|x^1-y|}\right]dy_1dy_3$$

Адабиётлар

1.Салоҳитдинов М.С., Математик физика тенгламалари, Т., «Ўзбекистон», 2002.

2.Владимиров В.С., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1981.

3.Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1977.

Маъруза № 12

Потенциаллар назарияси

Режа

1. Иккиланган šатлам потенциали.
2. Гаусс интеграли.
3. Оддий šатлам потенциали.

Таянч тушунчалар

Иккиланган šатлам потенциали, Гаусс интеграли.

Агар *D* бўлаклари силлиš *S* сирт билан чегараланган соќа бўлиб,

$$u(x) \in C^2(D) \bigcap C^1(\overline{D})$$

синфга тегишли бўлса, у ќолда *u(x)* функция учун šуйидаги интеграл тасвир ўринли.

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)|S_1|} \int_S \left(\frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}}\right) d_\xi S - \frac{1}{(n-2)|S_1|} \int_D \frac{\Delta u(\xi)}{r^{n-2}} d_\xi$$

(1)

бу ерда S_1 – бирлик сфера, унинг сирти юзи

$$|S_1| = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Бу интеграл ифода махсус кўринишга эга бўлган ва математик физикада роль ўйнайдиган учта интеграл операторни киритишга имкон беради. (1) формулада $\Delta u(\xi), u(\xi)$ ва $\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}$ функцияларни мос равишда ихтиёрий $\rho(\xi), \mu(\xi)$ ва $\sigma(\xi)$ функциялар билан алмаштирамиз.

Натижада *x* га параметр сифатида боғлик бўлган учта

$$u(x) = \int_D \frac{\rho(\xi)}{r^{n-2}} d_\xi, \qquad \vartheta(x) = \int_S \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} d_\xi S,$$

$$\omega(x) = \int_S \frac{\sigma(\xi)}{r^{n-2}} d_\xi S, \qquad r = |x - \xi|$$

интегралга эга бўламиз.

u(x) **ҳажм потенциали ёки Ньютон потенциали, $\vartheta(x)$ иккиланган қатлам потенциали, $\omega(x)$ эса оддий қатлам потенциали дейилади. $\rho(\xi), \mu(\xi)$ ва $\sigma(\xi)$ функциялар бу потенциалларнинг зичлиги деб аталади.**

1. Иккиланган қатлам потенциали. Ушбу

$$\vartheta(x) = \int_S \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} d_\xi S \qquad (2)$$

иккиланган šатлам потенциалини текширамиз.

Лемма. Агар $\mu(\xi)$ зичлик S да интегралланувчи бўлса, $\vartheta(x)$ потенциал S билан умумий нуŝтага эга бўлмаган ихтиёрий чекли ёки чексиз соќада гармоник функция бўлади.

Исбот. Ќаšиšатан ќам, $x \notin S$ да $\vartheta(x)$ барча тартибли ќосилаларга эга ва бу ќосилаларни интеграл остида дифференциаллаб ќисоблаш мумкин. Бундан дарќол $x \neq \xi$ да $\frac{1}{r^{n-2}}$ гармоник функция бўлгани учун $\vartheta(x)$ нинг ќам гармониклиги келиб чиšади.

x нуŝта S сиртнинг ташšарисида ётган ќолда $\vartheta(x)$ нинг чексиз узоšлашган нуŝтадаги характерини аниšлаймиз.

Шу маšсадда $\vartheta(x)$ ни баќолаймиз:

$$|\vartheta(x)| \leq \int_S |\mu(\xi)| \left| \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} \right| d_\xi S \leq (n-2) \int_S |\mu(\xi)| \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{x_i - \xi_i}{r^n} \right| |\cos(n, x_i)| d_\xi S$$

Ушбу

$$|r| = |x - \xi| \geq |x| - |\xi|, r \geq \frac{|x|}{2}, |x_i - \xi_i| \leq r |\cos(n, x_i)| \leq 1$$

тенгсизликларга асосан

$$|\vartheta(x)| \le \frac{2^{n-1} n(n-2)}{|x|^{n-1}} \int_S |\mu(\xi)| d_\xi S$$

тенгсизликни ќосил šиламиз. $\mu(\xi)$ зичлик интегралланувчи бўлгани учун олдинги тенгсизликнинг ўнг томонидаги интеграл чеклидир.

Шундай šилиб, иккиланган šатлам потенциали ***S*** сиртдан ташšари барча E^n фазода гармоник бўлиб, чексизликда $|x|^{-(n-1)}$ каби нолга интилади. Гаусс интегралидан кўринадики, умуман айтганда иккиланган šатлам потенциали ***x*** нуšта ***S*** сиртни кесиб ўтганда узулишга эга.

Гаусс интеграли. Иккиланган šатлам потенциалининг зичлиги бирга тенг бўлган ќолда, у яъни

$$\vartheta_0(x) = \int_S \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} dS \qquad (3)$$

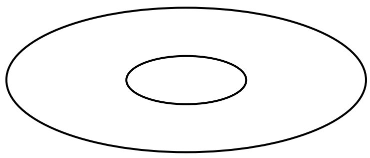
интеграл Гаусс интеграли дейилади.

Агар ***S*** ёпиš Ляпунов сирти бўлса,

$$\vartheta_0(x)=\begin{cases} -(n-2)\left|S_1\right| = -\dfrac{2(n-2)\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}, \ x \text{ нукта } S \text{ нинг ичида ётса} \\ 0, \ x \text{ нукта } S \text{ нинг ташкарисида ётса} \\ -\dfrac{(n-2)}{2}\left|S_1\right| = -\dfrac{(n-2)\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}, \quad x\in S, \quad n\le 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$\int_S \frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}dS=\begin{cases} -2\pi, \quad x \text{ нукта } S \text{ нинг ичида ётса} \\ 0, \ x \text{ нукта } S \text{ нинг ташкарисида ётса} \\ -\pi, \ x\in S, \ n=2 \end{cases} \quad (5)$$

тенгликлар ўринли бўлади. (4) формуладаги биринчи иккита тенглик ихтиёрий бўлаклари силлиš ёпиš *S* сирт учун ќам туѓри бўлади. Ќašиšатан ќам, *S* шундай сирт бўлиб, *x* нуšта *S* нинг ичида ётсин. Бу нуšтани марказ šилиб, ε радиусли *S* нинг ичида ётувчи $S_\varepsilon(x)$ сфера чизамиз.



S **ва** $S_\varepsilon(x)$ **сиртлар билан чегараланган соќада** $\dfrac{1}{r^{n-2}}$ **гармоник функция бўлгани учун**

$$\int_S \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}dS + \int_{S_\varepsilon(x)} \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}dS_\varepsilon = 0$$

S_ε **да** $\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}} = -\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}\bigg|_{r=\varepsilon} = \frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}$

Демак,

$$\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}dS_\varepsilon = \frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}\int_{S_\varepsilon} dS_\varepsilon = (n-2)\frac{|S_\varepsilon|}{\varepsilon^{n-1}} = (n-2)|S_{1.}|$$

Агар *x* нуšта *S* сиртдан ташšарида ётган бўлса, $\frac{1}{r^{n-2}}$ **функция *S* нинг ичида гармоник бўлади, у ќолда**

$$\int_S \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}dS = 0$$

Энди *S* ёпиš Ляпунов сирти бўлиб, $x \in S$ **бўлсин. *x* нуšтани марказ šилиб етарли кичик** $\varepsilon,\ 0 < \varepsilon < d$**, радиусли** $S_\varepsilon(x)$ **сфера чизамиз. *S* сиртнинг** S_ε **сферадан ташšарида ётган šисмини *S*ı орšали,** S_ε **сферанинг *S* ичидаги šисмини** S_ε^1 **орšали белгилаб оламиз.**

Хосмас интегралнинг таърифига асосан

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_1}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}dS_1=\int_S\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}dS. \qquad (6)$$

x нуšта S_1 ва S_ε^1 сиртлар билан чегараланган соќадан ташšарида ётганлиги учун, бу соќада $\frac{1}{r^{n-2}}$ гармоник функция бўлади. У ќолда

$$\int_{S_1}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}dS_1+\int_{S_\varepsilon^1}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}dS_\varepsilon^1=0.$$

Демак, (6) га асосан

$$\int_S\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}dS=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon^1}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}dS_\varepsilon^1. \qquad (7)$$

S_ε^1 бўйича олинган интегралнинг šийматини ќисоблаймиз. S_ε^1 да

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}=-\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}\bigg|_{r=\varepsilon}=\frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}$$

бўлгани учун

$$\int_{S_\varepsilon^1}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}dS_\varepsilon^1=\frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}\int_{S_\varepsilon^1}dS_\varepsilon^1=(n-2)\frac{|S_\varepsilon^1|}{\varepsilon^{n-1}}.$$

ε етарли кичик бўлганда S_ε^1 сирт уринма текисликка ёпишган

ярим сферага яšин бўлади. Шу сабабли

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{S_\varepsilon^1}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}dS_\varepsilon^1=(n-2)\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\left|S_\varepsilon^1\right|}{\varepsilon^{n-1}}=(n-2)\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\varepsilon^{n-1}\left|S_1\right|}{2\varepsilon^{n-1}}=\frac{(n-2)}{2}\left|S_1\right|.$$

$x_0\in S$ бўлсин. *x* нуšта *S* нинг ичида ётиб, x_0 нуšтага интилгандаги $\vartheta(x)$ нинг šийматини $\vartheta_i(x_0)$ орšали, *x* нуšта *S* дан ташšарида ётиб, x_0 нуšтага интилгандаги šийматини $\vartheta_e(x_0)$ орšали белгилаймиз. $\vartheta(x)$ нинг $x_0\in S$ нуšтадаги šиймати бу потенциалнинг тўѓри šиймати дейилади ва у $\overline{\vartheta}(x_0)$ орšали белгиланади.

Теорема. Агар *S* ёпиš Ляпунов сирти бўлиб, $\mu(\xi)$ зичлик *S* да узлуксиз бўлса, иккиланган šатлам потенциали $\vartheta(x)$ учун šуйидаги лимит муносабатлар ўринлидир:

$$\begin{cases}\vartheta_i(x_0)=-\dfrac{n-2}{2}\left|S_1\right|\mu(x_0)+\overline{\vartheta}(x_0)\\ \vartheta_e(x_0)=\dfrac{n-2}{2}\left|S_1\right|\mu(x_0)+\overline{\vartheta}(x_0), \qquad n>2\end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases}\vartheta_i(x_0)=-\pi\mu(x_0)+\overline{\vartheta}(x_0)\\ \vartheta_e(x_0)=\pi\mu(x_0)+\overline{\vartheta}(x_0), \qquad n=2\end{cases} \tag{9}$$

Исбот. $\vartheta(x)$ функцияни šуйидаги

$$\vartheta(x)=\int_{S}[\mu(\xi)-\mu(x_0)]\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}d_\xi S+$$
$$+\mu(x_0)\int_{S}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}d_\xi S=\vartheta_1(x)+\mu(x_0)\vartheta_0(x) \qquad (10)$$

кўринишда ёзиб оламиз.

$\vartheta_1(x)$ потенциалнинг x_0 нуўтада узлуксиз эканини кўрсатамиз. Шу маўсадда x_0 нуўтани марказ ўилиб η радиусли сфера чизамиз. *S* сиртнинг бу сфера ичидаги ўисмини *S*1 орўали, ташўарисидагини *S*2 орўали белгилаб оламиз. У ќолда

$$\vartheta_1(x)=\int_{S_1}[\mu(\xi)-\mu(x_0)]\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}d_\xi S_1+$$
$$+\int_{S_2}[\mu(\xi)-\mu(x_0)]\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}d_\xi S_2=\vartheta_1^1(x)+\vartheta_1^2(x).$$

Бунга асосан

$$\left|\vartheta_1(x)-\overline{\vartheta_1}(x_0)\right|\le\left|\vartheta_1^1(x)\right|+\left|\overline{\vartheta_1^1}(x_0)\right|+\left|\vartheta_1^2(x)-\overline{\vartheta_1^2}(x_0)\right| \qquad (11)$$

$\mu(\xi)$ функция узлуксиз бўлгани учун η ни шундай танлаймизки, $|\xi-x_0|<\eta$ бўлганда $|\mu(\xi)-\mu(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3c}$ бўлсин, бу ерда

$$\left|\int_S\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}d_\xi s\right|\le c.$$

Бу ќолда , $\forall x \in \mathrm{E}^n$ **учун**

$$\left|\vartheta_1^1(x)\right| = \int\limits_{S_1} \left|\mu(\xi) - \mu(x_0)\right| \left|\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}\right| d_\xi S_1 < \\ < \frac{\varepsilon}{3c}\int\limits_{S1}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}} d_\xi S_1 \le \frac{\varepsilon}{3c}\int\limits_{S}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}} d_\xi s \le \frac{\varepsilon}{3}. \tag{12}$$

Хусусий ќолда

$$\left|\overline{\vartheta}_1^1(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{13}$$

$\vartheta_1^2(x)$ **потенциалда интеграл** S_2 **бўйича бажарилаяпди,** x_0 **нуўта эса** S_1 **да ётади. Шунинг учун узлуксиз, яъни шундай** $\delta > 0$ **сон мавжуд бўладики,** $|x - x_0| < \delta$ **бўлганда**

$$\left|\vartheta_1^2(x) - \vartheta_1^2(x_0)\right| = \left|\vartheta_1^2(x_0) - \overline{\vartheta}_1^2(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{14}$$

(11)-(14) муносабатларга асосан, агар $|x - x_0| < \delta$ **бўлса,**

$$\left|\vartheta_1(x) - \overline{\vartheta}_1(x_0)\right| < \varepsilon \tag{15}$$

бўлади, яъни x_0 **нуўта** $\vartheta_1(x)$ **потенциал узлуксиз. Шундай экан** $\vartheta_1(x)$ **потенциалнинг лимит ўийматлари ва т**ўѓ**ри ўиймати** x_0

нуўтада устма-уст тушади, яъни

$$\vartheta_{1i}(x_0)=\vartheta_{1e}(x_0)=\overline{\vartheta_1}(x_0) \qquad (16)$$

(4) формулага асосан

$$\vartheta_{0i}(x_0)=-(n\text{-}2)|S_1|, \quad \vartheta_{0e}(x_0)=0, \quad \overline{\vartheta_0}(x_0)=-\frac{(n\text{-}2)}{2}|S_1|.$$

(10) ва (16) формулалардан $\vartheta_i(x_0)$ ва $\vartheta_e(x_0)$ лимит ўийматларнинг мавжудлиги келиб чиўади, шу билан бирга

$$\vartheta_i(x_0)=\overline{\vartheta_1}(x_0)+\mu(x_0)\vartheta_{0i}(x_0)=\overline{\vartheta_1}(x_0)-(n-2)|S_1|\mu(x_0) \qquad (17)$$

$$\vartheta_e(x_0)=\overline{\vartheta_1}(x_0)+\mu(x_0)\vartheta_{0e}(x_0)=\overline{\vartheta_1}(x_0).$$

Сўнгра

$$\overline{\vartheta_1}(x_0)=\int_S[\mu(\xi)-\mu(x_0)]\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}d_\xi S=\overline{\vartheta}(x_0)+\frac{(n-2)|S_1|}{2}\mu(x_0). \qquad (18)$$

(17) ва (18) муносабатлардан дарќол (8) формулалар келиб чиўади.

3. Оддий ўатлам потенциали.

Ушбу

$$\omega(x) = \int_S \frac{\sigma(\xi)}{r^{n-2}} d_\xi S \qquad \textbf{(19)}$$

оддий šатлам потенциали $\sigma(x)$ зичлик интегралланувчи бўлганда $x \notin S$ нуšталарда гармоник функция бўлиб, чексизликда $|x|^{-(n-2)}$ каби нолга интилишига худди иккиланган šатлам потенциалига ўхшаш ишонч ќосил šилиш šийин эмас.

Лемма 2. Агар *S* ёпиš Ляпунов сирти бўлиб, $\sigma(x)$ зичлик интегралланувчи ва чегараланган бўлса, оддий šатлам потенциали барча E^n фазода узлуксиз бўлади.

Исбот

$\omega(x)$ функциянинг $x \notin S$ да узлуксизлиги равшан бўлгани учун, $x \in S$ нуšталарда унинг узлуксизлигини кўрсатамиз. Бунинг учун (19) интегрални *S* сирт нуšталарида текис яšинлашувчи бўлишини исботлаш кифоя. Шу маšсадда *x* нуšтани марказ šилиб, η радиусли S_η сфера чизамиз. *S* сиртнинг бу сфера ичидаги šисмини S_η^1 орšали белгилаб оламиз. $y - E^n$ фазонинг иќтиёрий нуšтаси бўлсин. S_η^1 да *x* нуšтасини марказ šилиб $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ координаталар системасини тузиб оламиз.

***y* нуšтасининг *S* га *x* нуšтада ўтказилган уринма текисликдаги, яъни $\xi_n = 0$ текисликдаги проекцияси y' бўлсин.**

y' **нуўтанинг координаталари** $(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, 0)$ **бўлади.** $\rho^2 = \sum_{k=1}^{n-1}(\xi_k - y_k)^2$ **белгилаш киритамиз.** ρ – ξ **ва** ***y*** **нуўталарни бирлаштирувчи кесманинг** $\xi_n = 0$ **текисликдаги проекциясининг узунлигидир. Равшанки,** $\rho \le |\xi - y|$**.** S_η^1 **сиртнинг** $\xi_n = 0$ **текисликдаги проекциясини** D_η^1 **десак,**

$$d\xi_n....d\xi_n = \cos(\nu, \xi_n) d_\xi S$$

формулани эътиборга олиб,

$$|\sigma(\xi)| \le M = const, \quad \cos(\nu, \xi_n) \ge 2$$

тенгсизликларга асосан

$$|\omega_1(y)| = \left| \int_{S_\eta^1} \frac{\sigma(\xi)}{|\xi - y|^{n-2}} d_\xi S \right| \le 2M \int_{D_\eta^1} \frac{d\xi_1 ... d\xi_{n-1}}{\rho^{n-2}}$$

тенгсизликни ќосил ўиламиз.

Энди ***y*** **нуўтани** ***x*** **нуўтага шундай якин килиб оламизки,**

$$|y - x| < \frac{\eta}{2}$$

булсин. Агар $\xi \in S_\eta^1$ **булса,**

$$\rho \le |\xi - y| = |\xi - x + x - y| \le |\xi - x| + |x - y| < \frac{3\eta}{2}.$$

Бу тенгсизлик D_{η}^{1} соханинг (*n*-1) улчовли $\rho < \frac{3\eta}{2}$ шарда тўла ётишини кўрсатади. Демак,

$$|\omega_1(y)| \le 2M \int_{\rho<\frac{3\eta}{2}} \frac{d\xi_1 ... d\xi_{n-1}}{\rho^{n-2}} \qquad (20)$$

E^{n-1} фазода маркази y' нуштада бўлган сферик координаталарни киритамиз. У ќолда

$$d_{\xi_1}, ..., d_{\xi_{n-1}} = \rho^{n-2} d\rho\, dS_1,$$

бу ерда dS_1 орšали E^{n-1} фазодаги S_1 бирлик сфера юзининг элементи белгиланган. У ќолда (20) тенгсизлик

$$|\omega_1(y)| \le 2M \int_0^{\frac{3\eta}{2}} d\rho \int_{S_1} dS_1 = 3M\eta |S_1|$$

кўринишда ёзилади. Бу бахо *x* нуšта *S* сиртнинг šаерида ётишига боѓлиš эмас. $\varepsilon > 0$ берилган сон бўлсин. η сонни шундай танлаймизки,

$$\eta = \frac{\varepsilon}{3M|S_1|}$$

бўлсин. Бу ҳолда

$$|y-x|<\frac{\varepsilon}{3M|S_1|}$$

бўлса,

$$|\omega_1(x)|=\left|\int_{S_\eta^1}\frac{\sigma(\xi)}{|\xi-y|^{n-2}}d_\xi S\right|<\varepsilon \qquad (21)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Равшанки (21) тенгсизлик $y=x$ бўлганда ҳам ўринли бўлади. (21) тенгсизлик (19) интегралнинг x нуқтада текис яқинлашувчилигини билдиради. Лемма 2 исботланди.

Адабиётлар

1.Салоҳитдинов М.С., Математик физика тенгламалари, Т., «Ўзбекистон», 2002.

2.Владимиров В.С., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1981.

3.Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1977.

Маъруза № 13

Оддий šатлам потенциалининг нормал ќосиласи

Режа

1. Оддий šатлам потенциалининг нормал ќосиласи.
2. Дирихленинг ички масаласи.
3. Нейманнинг ташši масаласи.

Таянч тушунчалар

Оддий šатлам потенциалининг кўриниши, Дирихленинг ички масаласи šандай кўринишда изланади, Нейманнинг ташši масаласи šандай кўринишда изланади.

Аввалгидай *S* ни ёпиš Ляпунов сирти деб ќисоблаймиз. $x - E^n$ фазонинг ихтиёрий нуšтаси, *n* эса *x* нуšтадан ўтувчи *S* сиртнинг ташši нормали бўлсин.

Агар $x \notin S$ бўлса, у ќолда (19) потенциалнинг *n* нормал йўналиши бўйича ќосиласини тўѓридан-тўѓри интеграл белгиси остида дифференциаллаш билан ќисоблаш мумкин:

$$\frac{\partial \omega(x)}{\partial n} = \int_S \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} d_\xi S .$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} = -\frac{(n-2)}{r^{n-1}} \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{(n-2)}{r^{n-1}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial \xi_i} \cos(n, \xi_i) .$$

$$\frac{\partial r}{\partial \xi_i} = \frac{\xi_i - x_i}{r} = \cos(n, \xi_i)$$

бўлгани учун

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}} = -\frac{(n-2)}{r^{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\cos(r,\xi_i)\cos(n,\xi_i) = -\frac{(n-2)}{r^{n-1}}\cos(r,n). \quad (22)$$

Бунга асосан

$$\frac{\partial\omega(x)}{\partial n} = (n-2)\int_S \sigma(\xi)\frac{\cos(r,n)}{r^{n-1}}d_\xi S. \quad (23)$$

$x\in S$ бўлсин. Агар $\sigma(\xi)$ зичлик интегралланувчи ва чегараланган,

$$|\sigma(\xi)| \le M = const$$

бўлса, (23) интеграл яšинлашувчи бўлишини исботлаймиз. *S* сиртнинг S_η, $\eta<d$ сфера ичида ётувчи S_η^1 šисмини ажратиб оламиз.

Ушбу

$$\int_{S_\eta^1}\sigma(\xi)\frac{\cos(r,n)}{r^{n-1}}d_\xi S.$$

интегралнинг яšинлашувчи бўлишини кўрсатиш етарли.

Маркази *x* нуšтада бўлган координаталар системасини киритиб, оќирги интегрални

$$\int_{S_\eta^1}\sigma(\xi)\frac{\cos(r,n)}{r^{n-1}}d_\xi S=\int_{D_\xi^1}\sigma(\xi)\frac{\cos(r,n)d_\xi,...,d_{\xi_{n-1}}}{r^{n-1}\cos(v,\xi_n)}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бу интеграл остидаги функцияни баќолаймиз:

$$\left|\sigma(\xi)\frac{\cos(r,n)}{r^{n-1}\cos(v,\xi_n)}\right|\leq\frac{2M}{\rho^{n-1}}\left|\cos(r,n)\right|,\ \ \rho^2=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$$

$\left|\cos(r,n)\right|\leq a_2r^\alpha,\ r\leq 2\rho$ **тенгсизликларга асосан, олдинги тенгсизлик šуйидаги кўринишда ёзилади:**

$$\left|\sigma(\xi)\frac{\cos\ (r,n)}{r^{n-1}\cos\ (v,\xi_n)}\right|\leq\frac{2^{\alpha+1}a_2M}{\rho^{n-1-\alpha}}.$$

Бу тенгсизлик, (23) интегралнинг яšинлашувчанлигини билдиради.

(23) интегралнинг $x\in S$ **нуšтасидаги šиймати оддий šатлам потенциал нормал ќосиласининг туѓри šиймати дейилади ва** $\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial n}$ **орšали белгиланади. *S* сиртнинг ичидан ёки ташšарсидан** $x'\to x\in S$ **даги** $\frac{\partial\omega}{\partial n}$ **нинг лимит šийматларини (агар улар мавжуд бўлса), яъни**

$$\lim_{x'\to x}\frac{\partial\omega(x')}{\partial n}$$

ни $\dfrac{\partial\omega(x)}{\partial n_i}$, $\dfrac{\partial\omega(x)}{\partial n_l}$ орšали бегилаймиз.

Теорема. Агар *S* ёпиš Ляпунов сирти бўлиб, $\sigma(\xi)$ зичлик *S* да узлуксиз функция бўлса, оддий šатлам потенциали *S* да унинг ичидан ќам ташšарисидан ќам туѓри нормал ќосилаларга эга бўлади ва бу ќосилалар šуйидаги формулалар орšали ифодаланади:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial n_i} = \dfrac{n-2}{2}|S_1|\sigma(x) + \dfrac{\partial\overline{\omega}}{\partial n} \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial n_e} = -\dfrac{n-2}{2}|S_1|\sigma(x) + \dfrac{\partial\overline{\omega}}{\partial n} \end{cases} \qquad n > 2; \qquad (24)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial n_i} = \pi\sigma(x) + \dfrac{\partial\overline{\omega}}{\partial n} \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial n_e} = -\pi\sigma(x) + \dfrac{\partial\overline{\omega}}{\partial n} \end{cases} \qquad n = 2; \qquad (25)$$

4. Дирихлениң ички масаласи.

D **соќада гармоник $\overline{D} = D \cup S$ да узлуксиз ва**

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = \varphi(x_0), \quad x_0 \in S, \ x \in D \qquad (26)$$

Чегаравий шартни šаноатлантирувчи $u(x)$ функция топилсин.

Дирихле масаласини

$$u(x)=\int_S \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{n-2}}d_\xi S \qquad \textbf{(27)}$$

иккиланган šатлам кўринишида излаймиз.

(26) чегаравий шарт ва (8) формулага асосан

$$\lim_{x\to x_0}u(x)=-\frac{(n\text{-}2)|S_1|}{2}\mu(x_0)+\int_S \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{|\xi-x_0|^{n-2}}d_\xi S=\varphi(x_0)$$

тенгликни ќосил šиламиз. Бу тенгликда x_0 ўрнига x ёзиб, уни $-\frac{2}{(n-2)|S_1|}$ га купайтириб, $\mu(x)$ ноъмалум функцияга нисбатан ушбу

$$\mu(x)-\frac{2}{(n-2)|S_1|}\int_S \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{n-2}}d_\xi S=-\frac{2}{(n-2)|S_1|}\varphi(x) \qquad \textbf{(28)}$$

интеграл тенгламага эга бўламиз.

5. Нейманнинг ташšи масаласи.

D_1 соќада гармоник, унинг нормал бўйича олинган ќосиласи S да аввалдан берилган šийматларни šабул šилсин,

яъни

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\partial u}{\partial n}=\varphi(x_0),\quad x_0\in S,\ x\in D_1 \qquad (29)$$

ќамда функциянинг ўзи чексиз узоšлашган нуšтада $n>2$ бўлган ќолда нолда, $n=2$ да эса чекли лимитга интиладиган $u(x)$ функция топилсин.

Нейман масаласини

$$u(x)=\int_S\frac{\sigma(\xi)}{r^{n-2}}d_\xi S \qquad (30)$$

оддий šатлам кўринишида излаймиз.

(29) чегаравий шарт ва (24) формулага асосан

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\partial u(x)}{\partial n}=-\frac{(n\text{-}2)|S_1|}{2}\sigma(x_0)+\int_S\sigma(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|\xi-x_0|^{n-2}}d_\xi S=\varphi(x_0)$$

тенгликни ќосил šиламиз. Бу тенгликда x_0 ўрнига x ёзиб, уни $-\dfrac{2}{(n-2)|S_1|}$ га кўпайтириб, $\sigma(x)$ ноъмалум функцияга нисбатан ушбу

$$\sigma(x)-\frac{2}{(n-2)|S_1|}\int_S\sigma(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}d_\xi S=-\frac{2}{(n-2)|S_1|}\psi(x) \qquad (31)$$

интеграл тенгламага эга бўламиз.

Энди Дирихленинг ички ва Нейманнинг ташќи масалаларига мос келадиган интеграл тенгламалар ихтиёрий $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ узлуксиз функциялар учун ягона ечимга эга бўлишини кўрсатамиз.

Шу маќсадда (31) тенгламага мос бўлган ушбу

$$\sigma_0(x)-\frac{2}{(n-2)|S_1|}\int_S \sigma_0(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}d_\xi S=0 \qquad (32)$$

бир жинсли тенгламани текширамиз.

Фараз ќилайлик, (32) тенгламанинг нолдан фарќли бўлган узлуксиз $\sigma_0(x)$ ечими мавжуд бўлсин. Бу ечим ёрдамида ќуйидаги оддий ќатлам потенциалини тузамиз:

$$\omega_0(x)=\int_S \sigma_0(\xi)\frac{1}{r^{n-2}}d_\xi S$$

бу потенциал *S* ташќарисидан тўѓри нормал ћосилага эга ва бу (24) формулага асосан ушбу кўринишга эга:

$$\frac{\partial\omega_0(x)}{\partial n_e}=-\frac{n-2}{2}|S_1|\sigma_0(\xi)+\int_S \sigma_0(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}d_\xi S.$$

бундан (32) тенгламага асосан, бу нормал ћосиланинг нолга тенглиги келиб чиšади, яъни

$$\frac{\partial \omega_0(x)}{\partial n_e} = 0.$$

Нейман ташšи масаласининг ягоналигига асосан

$$\omega_0(x) \equiv 0, \quad x \in \Omega_1.$$

Оддий šатлам потенциали барча фазода узлуксиз бўлгани учун

$$\omega_0(x) \equiv 0, \quad x \in S \qquad (33)$$

Энди, $\omega_0(x)$ ни Ω соќада текширамиз. Бу соќада $\omega_0(x)$ гармоник функция ва S да (33) шартни šаноатлантиради.

Дирихле ички масаласи ечимининг ягоналигига асосан

$$\omega_0(x) \equiv 0, \quad x \in \Omega.$$

Аммо бу ќолда

$$\frac{\partial \omega_0(x)}{\partial n_i} \equiv 0.$$

(24) формулага асосан

$$\frac{\partial \omega_0(x)}{\partial n_i} - \frac{\partial \omega_0(x)}{\partial n_e} = (n-2)|S_1|\sigma_0(x) = 0$$

Демак, $\sigma_0(x) = 0$, яъни (32) бир жинсли интеграл тенглама фašат нолга тенг ечимга эга. Фредгольм альтернативасига кўра Нейман ташšи масаласининг интеграл тенгламаси ихтиёрий узлуксиз $\psi(x)$ функция учун бирдан-бир ечимга эга бўлади. Шундай šилиб, параметрнинг $\lambda = \dfrac{2}{(n-2)|S_1|}$ šиймати $\dfrac{\partial}{\partial n}\dfrac{1}{r^{n-2}}$ ядро учун характеристик сон эмас. Фредгольмнинг теоремасига асосан бу сон $\dfrac{\partial}{\partial \nu}\dfrac{1}{r^{n-2}}$ šўшма ядро учун ќам характеристик сон бўлмайди. Бундан дарќол Дирихле ички масаласининг интеграл тенгламаси ихтиёрий $\varphi(x)$ узлуксиз функция учун ягона ечимга эга эканлиги келиб чиšади.

<u>Ќулоса.</u> **Агар S Ляпунов сирти бўлса, у ќолда Дирихле ички ва Нейман ташќи масалалари бу сирт учун ихтиёрий узлуксиз чегаравий шартларда ечимга эга ва бу ечимлар мос равишда иккиланган ќатлам ва оддий ќатлам потенциаллари билан ифодаланади.**

Адабиётлар

1.Салоќитдинов М.С., Математик физика тенгламалари, Т., «Ўзбекистон», 2002.

2.Владимиров В.С., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1981.

3.Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1977.

Маъруза № 14

Доира учун Лаплас тенгламасига šўйилган Дирихле ички масаласини ечиш

$$D^{+}:\ u(x)\in C^{2}(D),\ \Delta u=0,\quad u(x)\in C(\overline{D}\cup S) \qquad \textbf{(1)}$$

$$\lim_{x\to x_0} u(x)=\varphi(x_0),\quad x_0\in S,\ x\in D \qquad \textbf{(2)}$$

чегаравий шартни šаноатлантирувчи *u*(x) функция топилсин. Бу ерда *D* соќа очиš доира *S* айлана.

$$S: x_1^2+x_2^2=R^2$$

Дирихле масаласини

$$u(x)=\int_S \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}\,d_{\xi}S \qquad \textbf{(3)}$$

иккаланган šатлам потенциали кўринишида излаймиз. Энди $x(x_1,x_2)$ **ва** $\xi(\xi_1,\xi_2)$ **нуšталар *S* айланада ётганда иккиланган šатлам потенциалининг ядросини ќисоблаймиз.**

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\xi_1}\cos(\nu\ ,\xi_1)-\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\xi_2}\cos(\nu\ ,\xi_2)=-\frac{\cos(\nu\ ,r)}{r}$$

ν – **векторнинг йўналиши радиус вектор йўналиши бўйича йўналган**

(ξ нуştадан чиşувчи).

$$(\nu, r) = \beta,$$

$$r = 2R\sin\frac{\pi - 2\beta}{2} = 2R\cos\beta$$

Бундан

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r} = -\frac{1}{2R}; \qquad x \in S,\ \xi \in S \tag{4}$$

θ **ва** ω **орşали,** ***Ох*** **ва** $O\xi$ **радиус векторларни** x_1 **ўş билан ташкил şилган бурчакларини белгилаймиз. У ќолда** $d_\xi S = Rd\omega$ **бўлади.**

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = -\pi\mu(x_0) + \int_S \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{|\xi - x_0|}d_\xi S = \varphi(x_0)$$

$$\mu(x) - \frac{1}{\pi}\int_S \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}d_\xi S = -\frac{1}{\pi}\varphi(x) \tag{5}$$

(5) интеграл тенгламага келамиз. Номаълум $\mu(\xi)$ **ни** $x, \xi \in S$ **бўлган ќолда топамиз.**

$$\mu(\theta) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mu(\omega)d\omega = -\frac{1}{\pi}\varphi(\theta) \tag{6}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mu(\omega)d\omega = c \tag{7}$$

деб,

$$\mu(\theta)+c=-\frac{1}{\pi}\varphi(\theta) \qquad (8)$$

ни топамиз. (8) ни (7) га šўйиб,

$$c=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\omega)d\omega$$

ни топамиз.

$$\mu(\theta)=-\frac{1}{\pi}\varphi(\theta)-c$$

ва

$$u(x)=-\int_S\left[\frac{1}{\pi}\varphi(\omega)+c\right]\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}d_\xi S=-\frac{R}{\pi}\int_S\varphi(\omega)\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}d\omega-c\int_S\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}d_\xi S$$

Энди $x\in D$ (x нуšта айлана ичида) ётсин, у ќолда Гаусс интегралининг šийматига кўра

$$u(x)=-\frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\omega)\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}d\omega-2\pi c=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[2R\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}-1\right]\varphi(\omega)d\omega$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}=-\frac{1}{r^2}\left[(\xi_1-x_1)\cos(\nu,\xi_1)+(\xi_2-x_2)\cos(\nu,\xi_2)\right]=$$

$$-\frac{1}{Rr^2}\left[(\xi_1-x_1)\xi_1+(\xi_2-x_2)\xi_2\right]=-\frac{R^2-(\xi_1x_1+\xi_2x_2)}{Rr^2}$$

$$r^2 = (\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 = R^2 + \rho^2 - 2(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)$$

$$\rho^2 = x_1^2 + x_2^2, \qquad -\left[2R\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r} - 1\right] = \frac{R^2 - \rho^2}{r^2},$$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\omega)\frac{R^2 - \rho^2}{r^2}d\omega \qquad (9)$$

(9) га айлана учун Пуассон интеграли дейилади.

Адабиётлар

1.Салоќитдинов М.С., Математик физика тенгламалари, Т., «Ўзбекистон», 2002.

2.Владимиров В.С., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1981.

3.Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики, М, «Наука», 1977.