ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

**А. ГАЗИЕВ, И. ИСРАИЛОВ, М. ЯХШИБОЕВ**

# МАТЕМАТИК АНАЛИЗДАН МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

## 1 - ҚИСМ

*(ўқув қўлланма)*

ТОШКЕНТ – 2012

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
← →
|← →|
Оркага
Тулик экран
Чикиш

А. Газиев, И. Исраилов, М. Яхшибоев. **«Математик анализдан мисол ва масалалар», 1-қисм** (ўқув қўлланма). Т. “Турон-Иқбол”. 2012 й.

Ушбу қўлланма математик анализнинг тўплам, тўпламлар устида амаллар, ҳақиқий сонлар, йиғинди, математик индукция усули, функция тушунчаси, функциянинг синфлари, сонлар кетма-кетлиги ва унинг лимити, функциянинг лимити, функция графигининг асимптоталари, функциянинг узлуксизлиги ва текис узлуксизлиги, функциянинг ҳосиласи ва дифференциали, функциянинг юқори тартибли ҳосиласи ва дифференциаллари, дифференциал ҳисобнинг асосий теоремалари, Лопитал қоидалари, Тейлор формуласи, функцияни ҳосила ёрдамида текшириш мавзулари бўйича талабаларда мисол ва масалаларни мустақил ечиш кўникмасини ҳосил қилишга мўлжалланган.

Қўлланманинг ҳар бир параграфида, аввало мавзунинг назарий қисмидан қисқача ахборот берилган, сўнгра мавзуга мос типик мисол ва масалалар батафсил ечиб кўрсатилган ҳамда мустақил ишлаш учун етарли миқдорда мисол ва масалалар жавоблари билан берилган.

Ўқув қўлланма бакалавриатнинг «математика», «механика», «амалий математика ва информатика», «физика» йўналишлари ва техника йўналишларининг «Олий математика» чуқурлаштирилган дастур асосида ўқитиладиган талабалари ҳамда ўқитувчилар учун мўлжалланган.

**Тақризчилар:**

| | |
|---|---|
| Физика-математика фанлари доктори, проф. | **А. Солеев** |
| Физика - математика фанлари доктори, проф. | **А.Жалилов** |
| Физика - математика фанлари номзоди, доц. | **У. Нарзуллаев** |

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

# Мундарижа

Титул варак

Мундарижа

1-боб

2-боб

3-боб

Адабиётлар

Оркага

Тулик экран

Чикиш

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

## III-боб. Дифференциал ҳисоб ва унинг тадбиқлари

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
← →
⇤ ⇥
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

# Сўз боши

«Математик анализ» фанининг ўқув дастурига кирган тўплам, тўпламлар устида амаллар, ҳақиқий сонлар, йиғинди, математик индукция усули, функция тушунчаси, функциянинг синфлари, сонлар кетма-кетлиги ва унинг лимити, функциянинг лимити, функция графигининг асимптоталари, функциянинг узлуксизлиги ва текис узлуксизлиги, функциянинг ҳосиласи ва дифференциали, функциянинг юқори тартибли ҳосиласи ва дифференциаллари, дифференциал ҳисобнинг асосий теоремалари, Лопитал қоидалари, Тейлор формуласи, функцияни ҳосила ёрдамида текшириш бўлимларини ўзлаштиришда талабалар анча қийинчиликларга дуч келади, бу уларнинг юқоридаги бўлимлар бўйича мисол ва маслаларни ечишида яққол кўринади.

Муаллифлар мазкур қўлланмани ёзишда ўз олдиларига талабаларда кўрсатилган бўлимларга оид мисол ва масалаларни самарали йўл билан ечиш кўникмалари хосил қилишни мақсад қилиб қўйишди ва қўлланма талабалар учун доимий маслаҳатчи бўлиб қолишига ишонадилар.

Ўқув қўлланма учта бобдан иборат бўлиб, унинг биринчи бобида дастлабки асосий тушунчалар, иккинчи бобида функция ва унинг лимити ҳамда функциянинг узлуксизлиги қаралган. Қўлланманинг учинчи бобида ҳосиладан фойдаланиб функциянинг графигини чизиш қаралган. Ўз навбатида ҳар бир боб тегишли

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

параграфларга бўлинган бўлиб, ҳар бир параграф мавзуга тааллуқли асосий таърифлар, тасдиқлар, теоремаларни ўз ичига олади, шунингдек, уларнинг ҳар бири анъанавий мисолларни батафсил таҳлил ёрдамида ечиш орқали намойиш қилинган. Қўлланмада жами 304 та мисол ва масалалар ечилган, 1703 та мисол ва масалалар мустақил ечиш учун тавсия қилинган ҳамда уларнинг жавоблари берилган. Ҳозирги вақтда амалиётда бир неча яхши ривожланган математик дастурлар (Mathcad, Maple, Mathematica, Mathlab ва ҳ.к.) математик масалаларни компьютер имкониятларидан фойдаланиб ечишда самарали натижалар бермоқда. Шу анъанадан четда қолмаслик учун, қўлланмада баъзи бўлимлар бўйича мисол ва масалалар ечишда «Maple» тизимининг қўлланилиши ва унинг қулайликлари намойиш этилган.

Ушбу қўлланмани ёзишга муаллифларни ундаган нарса, уларнинг кўп йиллар мобайнида Самарқанд давлат университетида математик анализ курсидан олиб борган маъруза ва амалий машғулотларида орттирган тажрибаси натижасидир. Ўйлаймизки, қўлланма ўз ўқувчиларини топади ва бошқа мавжуд ўқув адабиётлари қаторида математик анализ курсининг айтиб ўтилган бўлимлари бўйича уларга билимларини оширишга кўмак беради.

Ўқув қўлланма ҳақидаги фикр мулоҳазалар, ундаги мавжуд камчиликлар бўйича таклифларни мамнуният билан қабул қиламиз

**Муаллифлар**

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

# I-боб. ДАСТЛАБКИ ТУШУНЧАЛАР

## 1-§. ТЎПЛАМ ТУШУНЧАСИ. ТЎПЛАМЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

### 1.1. Тўплам тушунчаси.

"Тўплам" тушунчаси математиканинг таърифсиз қабул қилинган асосий тушунчаларидан бири бўлиб, баъзи белгиларига асосланиб биргаликда қараладиган объектлар ёки нарсалар (предметлар) мажмуасидир. Тўпламни ташкил қилувчи ҳар бир объект ёки нарса унинг "элементи" дейилади. Тўплам тушунчаси мисоллар ёрдамида тушунтирилади. Масалан, Тошкент шаҳридаги олий ўқув юртларида ўқийдиган талабалар, барча бутун сонлар, кутубхонадаги китоблар ва ҳакозалар тўпламни ташкил этади.

Тўпламлар лотин ёки грек алфавитининг бош ҳарфлари билан, унинг элементлари эса, кичик ҳарфлар билан белгиланади. Масалан, $A, B, C, D,\ldots,X, Y, Z$ лар билан тўпламни, $a, b, c, d,\ldots,x, y, z$ лар балан эса, тўпламнинг элементлари белгиланади.

Агар $A$ тўпламнинг элементи $a$ бўлса, $a\in A$ каби ёзилади ва "$a$ элемент $A$ тўпламга тегишли" деб ўқилади. Акс ҳолда, яъни $a$ элемент $A$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

тўпламга тегишли бўлмаса, унда $a \notin A$ (ёки $a \overline{\in} A$ ) каби ёзилади ва "$a$ элемент $A$ тўпламга тегишли эмас" деб ўқилади. Масалан, $A = \{2,4,6,8\}$ бўлса, у ҳолда $4 \in A$, $3 \notin \mathrm{A}$.

Чекли сондаги элементлардан ташкил топган тўплам чекли, чексиз сондаги элементлардан ташкил топган тўпламга эса, чексиз тўплам деб аталади. Масалан, Самарқанд Давлат университети қошидаги Жомий номли илмий кутубхонадаги мавжуд китоблар тўплами чекли тўпламни, натурал сонлар тўплами эса чексиз тўпламни ташкил этади.

Битта ҳам элементга эга бўлмаган тўплам бўш тўплам дейилади ва $\varnothing$ каби белгиланади. Бўш тўпламларга қуйидагилар мисол бўла олади: $a$) $x^2 + 4 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизлари тўплами; $b$) ўзаро параллел иккита турли тўғри чизиқнинг умумий нуқталари тўплами; $c$) $|x - 4| < -2$ тенгсизликнинг ечимлари тўплами ва ҳ.к .

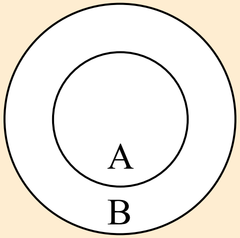
Кўпинча тўпламлар, уларнинг элементлари чекли ёки чексиз бўлишидан қатъий назар, символик равишда доирачалар билан тасвирланади. Бу тасвирлаш тўпламлар устида бажариладиган амалларни тасаввур қилишда ва улар орасидаги муносабатларни ўрганишда анча қулайликлар туғдиради.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

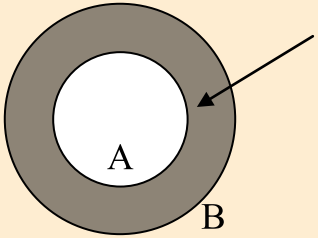
**1.1-таъриф.** Агар $A$ тўпламнинг ҳар бир элементи $B$ тўпламнинг ҳам элементи бўлса, $A$ тўплам $B$ тўпламнинг қисми ёки қисмий тўплами (тўплам ости) деб аталади ва $A \subset B$ каби белгиланади (1.1-чизма). Бу қуйидагича ўқилади: "$B$ тўплам $A$ тўпламни ўз ичига олади".

**1.1-эслатма.** Бўш тўплам ҳар қандай $A$ тўпламнинг қисм тўплами ҳисобланади: $\varnothing \subset A$. Ҳар қандай $A$ тўплам ўз-ўзининг қисм тўплами ҳисобланади: $A \subset A$.

**1.2-эслатма**. $n$ та элементдан иборат бўлган тўпламнинг қисим тўпламлар сони $2^n$ га тенг.



1.1-чизма.



1.2-чизма.

**1.3-эслатма**. Агар $A, B, C, ....$ тўпламларнинг ҳар бири $J$ тўпламнинг қисм тўпламлари бўлса, $J$ тўпламга универсал тўплам дейлади.

**1.2-таъриф.** Агар $A$ тўплам $B$ тўпламнинг қисми, $B$ тўплам $A$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

тўпламнинг қисми бўлса, яъни $A\subset B$, $B\subset A$ бўлса, у ҳолда $A$ ва $B$ тўпламлар бир-бирига тенг дейилади ва $A=B$ каби ёзилади.

**1.1-мисол.** Ушбу $A=\{x: x\in N, -5<x\le 7\}$ тўпламнинг элементларини аниқланг?

**Ечилиши.** Берилган $A$ тўпламнинг элементлари натурал сонлардан иборат бўлиб, $-5<x\le 7$ тенгсизликни қаноатлантириши керак. Бу тенгсизликни қаноатлантирувчи натурал сонлар $1,2,3,4,5,6$ *ва* $7$ дан иборат.

Демак, $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

**1.2-мисол.** Сонлар ўқида $\{M:|OM|=3\}$ шартни қаноатлантирувчи $M$ нуқталар тўпламини аниқланг ва элементларини ёзинг.

**Ечилиши.** Изланувчи тўпламнинг элементлари сон ўқида жойлашган нуқталардан иборат бўлиб, улар санок боши $O$ дан уч бирлик узоқликда масофада жойлашган бўлади.

Демак, улар $-3$ ва $3$ дан иборат, яъни $A=\{-3, 3\}$.

**1.3-мисол.**Ушбу $A=\{-6,-4,-2,0,1,3,5,7\}$ ва $B=\{1,3,5\}$ тўпламлар берилганда, $B\subset A$ эканлигини кўрсатинг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**Ечилиши.** $B$ тўпламнинг барча элементлари $A$ тўпламнинг элементлари бўлганлиги учун 1.1-таърифга асосан, $B \subset A$ бўлади.

**1.4-мисол.** $a, b, c$ элементлардан ташкил топган $A$ тўплам берилган бўлсин. $A$ тўпламнинг қисим тўпламларини аниқланг.

**Ечилиши.** $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \varnothing$ тўпламлар 1.1-таърифга асосан, берилган $A$ тўпламнинг қисим тўпламлари бўлади.

**1.5-мисол.** Агар $A = \{x : x \in R, x^2 - 5x + 6 = 0\}$ ва $B = \{2, 3\}$ тўпламлар берилган бўлса, $A = B$ эканлигини кўрсатинг.

**Ечилиши.** Маълумки, $x^2 - 5x + 6 = 0$ тенглама $x_1 = 2,\ x_2 = 3$ илдизларга эга бўлганлиги учун $A = \{2,\ 3\}$ бўлади.

Демак, 1.2-таърифга асосан, $A = B$ бўлади.

**1.6-мисол.** Ушбу $\{a, b, c\} = \{\{a, b\}, c\}$ муносабат ўринли бўладими?

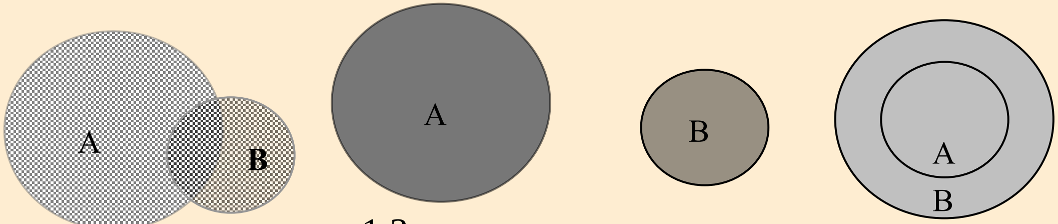
**Ечилиши.** Бу муносабат ўринли бўлмайди, чунки тенгликнинг чап томонидаги тўплам учта $a,\ b,\ c$ элементларларга эга, ўнг томондаги тўплам эса иккита, тўплам $\{a,\ b\}$ ва $c$ элементдан иборат. Ўнг томондаги тўпламнинг $\{a,\ b\}$ элементи чап томондаги тўпламга тегишли эмас.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

## 1.2. Тўпламлар устида амаллар.

**1.3- таъриф.** $B$ ихтиёрий тўплам бўлиб, $A$ тўплам унинг бирор қисми бўлсин. $B$ тўпламнинг $A$ га кирмаган барча элементларидан ташкил топган тўплам $A$ нинг $B$ га қадар тўлдирувчиси дейилади ва у $C_B(A)$ каби белгиланади (1.2-чизма).

**1.4-таъриф.** $A$ ва $B$ ихтиёрий тўпламлар бўлсин. Агар $C$ тўплам $A$ ва $B$ тўпламларнинг барча элементларидан иборат бўлиб, бошқа элементлари бўлмаса, у ҳолда $C$ тўплам $A$ ва $B$ тўпламларнинг йиғиндиси (бирлашмаси) дейилади ва $A \cup B = C$ каби белгиланади (1.3-чизма).



1.3-чизма.

**1.5-эслатма.** Шуни қайд қилиб ўтиш керакки, агар бирор элемент ҳам $A$ тўпламга, ҳам $B$ тўпламга қарашли бўлса, бу элемент $C$ тўпламда бир марта ҳисобланади.

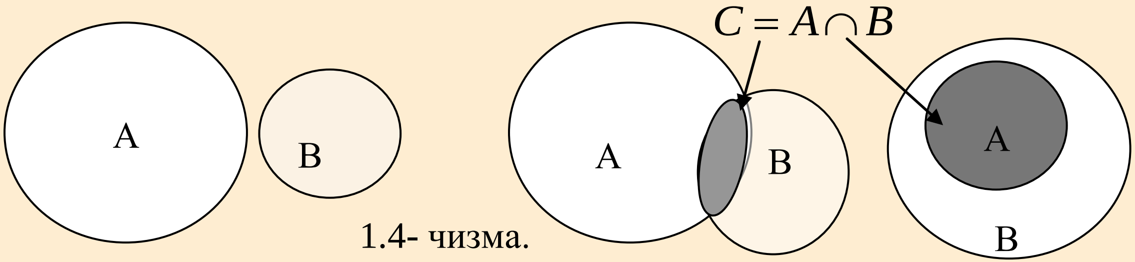
Юқоридаги 1.4-таърифдан тўпламларнинг қуйидаги хоссалари келиб

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

чиқади:

$1^0.\ A\cup A=A.\quad 2^0.\ A\cup B=B\cup A.\quad 3^0. A\cup\varnothing=A.$

$4^0$. Агар $A\subset B$ бўлса, $A\cup B=B$ бўлади.



1.4- чизма.

**1.5-таъриф.** $A$ ва $B$ тўпламларнинг умумий элементларидан ташкил топган $C$ тўплам, $A$ ва $B$ тўпламларнинг умумий қисми ёки кўпайтмаси (кесишмаси) дейилади ва $C=A\cap B$ каби белгиланди (1.4-чизма).

Тўпламларнинг қуйидаги ҳоссалари 1.5-таърифдан бевосита келиб чиқади:

$5^0.\ A\cap A=A.\quad 6^0.\ A\cap B=B\cap A.\quad 7^0.\ A\cap\varnothing=\varnothing.$

$8^0$. Агар $A\subset B$ бўлса, у ҳолда $A\cap B=A$ бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**1.6-эслатма.** Биз тўпламларнинг йиғиндиси ҳамда кўпайтмаси таърифларини иккита тўплам учун келтирдик. Агар $A_1, A_2,\ldots,A_n$ тўпламлар берилган бўлса, уларнинг йиғиндиси $A_1 \cup A_2 \cup \ldots.\cup A_n$ ҳамда кўпайтмаси $A_1 \cap A_2 \cap \ldots.\cap A_n$ ҳам юқоридаги 1.4- ва 1.5- таърифларга ўхшаш берилади.

**1.6-таъриф.** $A$ тўпламнинг $B$ тўпламга тегишли бўлмаган барча элементларидан тузилган $C$ тўплам $A$ ва $B$ тўпламларнинг айирмаси дейилади ва $C = A \setminus B$ каби белгиланади (1.5-чизма).

Тўпламларнинг қуйидаги ҳоссалари 1.6-таърифдан бевосита келиб чиқади:

$9^0$. $A \setminus \varnothing = A$. $10^0$. $\varnothing \setminus A = \varnothing$. $11^0$. $A \setminus A = \varnothing$.

**1.7-таъриф.** $A$ тўпламнинг $B$ тўпламга тегишли бўлмаган элементларидан ва $B$ тўпламнинг $A$ тўпламга тегишли бўлмаган элементларидан тузилган $C$ тўплам $A$ ва $B$ тўпламларнинг симметрик айирмаси деб аталади ва $C = A\Delta B$ каби белгиланади, яъни $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (1.6-чизма).

**1.8-таъриф.** Биринчи элемент $X$ тўпламга ва иккинчи элемент $Y$ тўпламга кирган барча $(x, y)$ жуфтлардан иборат бўлган нуқталар тўплами $X$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

ва $Y$ тўпламларнинг Декарт (тўғри) кўпайтмаси дейилади ва у $[X, Y]$ ёки $X\times Y$ каби белгиданади, яъни $C=X\times Y=\{(x,y): x\in X,\ y\in Y\}$.

**1.7-эслатма.** $A$ тўпламнинг ўз-ўзига Декарт кўпайтмаси қуйидагича белгиланади.

$$A\times A=A^2=\{(x,y): x\in A,\ y\in A\}.$$

**1.7-мисол.** Ушбу $A=\{x: x\in R, x^3-2x^2-x+2=0\}$ ва $B=\{-1,\ 2\}$ тўпламлар берилган бўлса, $C_B(A)$ ни топинг.

**Ечилиши.** Равшанки $x^3-2x^2-x+2=0$ тенглама $-1, 1$ ва $2$ илдизларга эга. Демак, $A=\{-1, 1, 2\}$, $B=\{-1,\ 2\}$. Унда 1.3- таърифга асосан $C_B(A)=\{1\}$.

**1.8-мисол.** Ушбу $A=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$ ва $B=\{1,\ 2,3,4,5\}$ тўпламлар берилган бўлса, $C=A\cup B$ ни топинг.

**Ечилиши.** 1.4- таърифга асосан $C=A\cup B=\{-4,-3,-2,-1,\ 0,\ 1,\ 2,3,4,\ 5\}$ бўлади.

**1.9-мисол.** Ушбу $A=\{x: x\in R,\ x>2\}$ ва $B=\{x: x\in R,\ x<3\}$ тўпламлар берилган бўлса, $C=A\cup B$ ни топинг.

**Ечилиши.** Равшанки, $A$ тўпламга $x>2$ тенгсизликни қаноатлантирадиган, $B$ тўпламга эса, $x<3$ тенгсизликни қаноатлантирадиган

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

ҳақиқий сонлар киради. Шунинг учун, 1.3-эслатмага кўра $C = A \cup B = R$ бўлади.

**1.10-мисол.** Ушбу $A = \{1, 2, 3\}$ ва $B = \{x : x \in R,\ x^2 + 2 = 0\}$ тўпламлар берилган бўлса, $C = A \cup B$ ни топинг.

**Ечилиши.** Равшанки, $x^2 + 2 = 0$ тенглама ҳақиқий илдизга эга бўлмагани учун $B = \varnothing$ бўлади. Тўпламлар йиғиндисининг $3^0$-хоссасига асосан $C = A \cup B = A \cup \varnothing = A = \{1, 2, 3\}$.

**1.11-мисол.** Ушбу $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ва $B = \{x : x \in N, -2 < x \le 5\}$ тўпламлар берилган бўлса, $C = A \cup B$ тўпламнинг элементларини кўрсатинг.

**Ечилиши.** Берилган $B$ тўпламнинг элементлари $-2 < x \le 5$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $1, 2, 3, 4, 5$ натурал сонлардан иборат, яъни $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Демак, $B \subset A$ бўлганлиги учун тўпламлар йиғиндисининг $4^0$-хоссасига асосан, $A \cup B = A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

**1.12-мисол.** Ушбу $A = \{\pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, .....\}$ ва $B = \{\pm 5, \pm 10, \pm 15, \pm 20, \pm 25, \pm 30, .....\}$ тўпламлар берилган бўлса, $C = A \cap B$ ни топинг.

**Ечилиши.** $A$ ва $B$ тўпламларнинг берилишини эътиборга олган ҳолда

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

1.5-таърифга кўра, изланувчи тўплам $C = A \cap B = \{\pm 10, \pm 20, \pm 30, .....\}$ .

**1.13-мисол.** Ушбу $A = \{2, 4, 6, 8, .....\}$ ва $B = \{1, 3, 5, 7, \ .....\}$ тўпламлар берилган бўлса, $C = A \cap B$ ни топинг.

**Ечилиши.** $A$ ва $B$ тўпламларнинг берилишини эътиборга олган ҳолда 1.5-таърифга асосан, изланувчи тўплам $C = A \cap B = \varnothing$.

**1.14-мисол.** Ушбу $A = \{\pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 15, \pm 18, .....\}$ ва $B = \{\pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, .....\}$ тўпламлар берилган бўлса, $C = A \setminus B$ ни топинг.

**Ечилиши.** $A$ ва $B$ тўпламларнинг берилишини эътиборга олган ҳолда 1.6-таърифга асосан, $C = A \setminus B = \{\pm 3, \pm 9, \pm 15, \pm 21, ....\}$ бўлади.

**1.15-мисол.**Ушбу $A \setminus (B \cup C) = A \setminus B \setminus C$ айниятни исботланг.

**Исботи.** Агар $x \in A \setminus (B \cup C)$ бўлса, $x \in A$ ва $x \notin (B \cup C)$, $x \notin B$, $x \notin C$ эканлиги келиб чиқади. $x \in A$ $x \notin B$ бўлганлиги учун $x \in A \setminus B$, $x \notin C$, бундан $x \in A \setminus B \setminus C$ бўлади. Демак, $A \setminus (B \cup C) \subset A \setminus B \setminus C$.

Энди $x \in A \setminus B \setminus C$ бўлсин деб фараз қиламиз, бундан $x \in A \setminus B$ ва $x \notin C$. $x \in A \setminus B$ бўлганлигидан $x \in A$ $x \notin B$ келиб чиқади. У ҳолда $x \notin (B \cup C)$ (чунки $x \notin B$, $x \notin C$). $x \in A$ бўлганлиги учун $x \in A \setminus (B \cup C)$ бўлади. Демак, $A \setminus B \setminus C \subset A \setminus (B \cup C)$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Шундай қилиб, $A\setminus(B\cup C)=A\setminus B\setminus C$ айниятни исботланди.

**1.16-мисол.** $A$, $B$ ва $C$ тўпламлар берилган. Тўпламларнинг йиғиндиси, айирмаси ва кўпайтмасининг таърифларидан фойдаланиб қуйидаги тўпламларни ёзинг: элементлари: 1) учала тўпламга ҳам тегишли; 2) ҳеч бир тўпламга тегишли эмас; 3) ҳеч бўлмаганда битта тўпламга тегишли; 4) $A$ тўпламга тегишли, $B$ ва $C$ тегишли эмас; 5) $A$ ва $B$ тўпламларга тегишли, $C$ тўпламга тегишли эмас; 6) ҳеч бўлмаганда берилган тўпламларнинг иккитасига тегишли.

**Ечилиши.** 1) Тўпламлар кўпайтмасининг таърифига кўра, элементлари берилган тўпламларнинг учаласига ҳам тегишли. Бунда изланувчи тўплам, $A\cap B\cap C$ дан иборат бўлади; 2) 1.3-эслатмага асосан, яъни унверсал тўплам ҳамда тўпламлар йиғиндисининг таърифига асосан, элементлар берилган тўпламларнинг ҳеч бирига тегишли эмас. Бунда изланувчи тўплам, $(J\setminus A)\cup(J\setminus B)\cup(J\setminus C)$ тўпламдан иборат; 3) элемент берилган тўпламларнинг ҳеч бўлмаганда биттасига тегишли, тўпламлар йиғиндисининг таърифига асосан, изланувчи тўплам, $A\cup B\cup C$ тўпламдан иборат; 4) тўпламлар айирмасининг таърифига кўра, $x\in(A\setminus B)\setminus C)$ бўлса, $x\in A$, $x\notin B, x\notin C$ бўлади.

Шунинг учун изланувчи тўплам, $(A\backslash B)\backslash C)$ тўпламдан иборат ; 5) тўпламлар кўпайтмаси ва айирмасининг таърифига кўра, элементлари $A$ ва $B$ тўпламларга тегишли, $C$ тўпламга тегишли эмас. Бунда изланувчи тўплам, $(A\cap B)\backslash C$ тўпламдан иборат. Ҳақиқатан ҳам, агар $x\in(A\cap B)\backslash C$ бўлса, $x\in A$, $x\in B$, $x\notin C$ бўлади; 6) элементлари ҳеч бўлмаганда берилган тўпламларнинг иккитасига тегишли, тўпламлар кўпайтмаси ва йиғиндисининг таърифига асосан, изланувчи тўплам $A\cap B\cup B\cap C\cup A\cap C$ тўпламдан иборат. Ҳақиқатан ҳам, агар $x\in A\cap B\cup B\cap C\cup A\cap C$ бўлса, $x\in A\cap B$, $x\in B\cap C$, $x\in A\cap C$ бўлади, бундан эса $x\in A$, $x\in B$, ёки $x\in B$, $x\in C$, ёки $x\in A, x\in C$ бўлади.

**1.17-мисол.** Агар $A=\{x: x\in N,\ x^2-4x\leq 0\}$, $B=\{x: x\in Z,\ x^2-x-6\leq 0\}$ бўлса, у ҳолда $A\Delta B$ тўпламни тузинг.

**Ечилиши.** Равшанки, $x^2-4x\leq 0$ тенгсизликнинг натурал ечимлари 1,2,3,4 лардан иборат бўлиб, $A=\{1,2,3,4\}$ тўпламни ҳосил қилади.

$x^2-x-6\leq 0$ тенгсизликнинг бутун ечимлари -2,-1,0,1,2,3 лардан иборат бўлиб, улар $B=\{-2,-1,0,1,2,3,\}$ тўпламни ташкил этади. 1.7- таърифга кўра, $A\Delta B=\{-2,-1,0,4\}$ дан иборат бўлади.

**1.18-мисол**. Ушбу $A$={Факультетдаги битта гурух талабалари},

Титул варақ
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Орқага
Тулик экран
Чикиш

$B$={Факультетдаги аълочи талабалар} тўпламлар берилган бўлса, у ҳолда $A\Delta B$ тўпламни тузинг.

**Ечилиши.** Симметрик айирманинг таърифига кўра, $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ = {берилган гуруҳда аълочи бўлмаган талабалар ва факультетдаги $A$ тўпламга кирмайдиган аълочи талабалар}.

**1.19-мисол.** Ушбу $A=\{a,b,c\}$, $B=\{\alpha,\beta\}$ тўпламларнинг Декарт кўпайтмасини топинг.

**Ечилиши.** 1.8-таърифга кўра, $A$ ва $B$ тўпламларнинг берилишини эътиборга олган ҳолда, уларнинг Декарт кўпайтмаси

$$A\times B=\{(a,\alpha),(a,\beta),(b,\alpha),(b,\beta),(c,\alpha),(c,\beta)\}$$

бўлади.

### Мустақил ечиш учун мисоллар ва масалалар

Қуйида берилган $A$ тўпламнинг элементларини аниқланг.

**1.1.** $A=\{x\in Z:(x-6)(x^2-4)=0,\quad x\geq 0\}$. **1.2.** $A=\{x\in R:x^3-5x^2+6x=0\}$.

**1.3.** $A=\{x\in R:x+\dfrac{1}{x}\leq 2,\quad x>0\}$. **1.4.** $A=\{x\in N:x^2-5x-6\leq 0\}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**1.5.** $A=\{x\in Z:\frac{1}{9}\le 3^x<10\}$.  **1.6.** $A=\{x\in R:\cos^2 2x=1,\quad 0<x\le 2\pi\}$.

**1.7.** Ушбу $\{\{1;2\},\{2;3\}\}=\{1;2;3\}$ тенглик ўринлими?

**1.8.** Ушбу $A=\{x\in R: x^3-7x^2+16x-12=0\}$ ва $B=\{2;3\}$ тўпламларнинг тенглигини кўрсатинг.

**1.9.** $\{1;2\}\subset\{\{1,2,3\},\{1,3\},1,2\}$ муносабат ўринлими?

**1.10.** $\{1;2\}\subseteq\{\{1,2,3\},\{1,3\},1,2\}$ муносабат ўринлими?

**1.11.** Ушбу $\varnothing=\{\varnothing\}$ тенглик ўринлими?

**1.12.** $0$ сондан тузилган тўплам бўш тўплам бўладими?

Қуйида берилган тўпламларнинг ҳамма қисм тўпламларини топинг.

**1.13.** $\varnothing$.  **.14.** $\{\varnothing\}$.  **.15.** $\{1,2\}$.  **16.** $\{a,b,c,d\}$ .

**1.17.** $\forall a,b,c,d$ элементлар учун $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$ бўлса, $a=c$ ва $b=d$ тенг эканлигини исботланг ва аксинча.

**1.18.** Қуйидаги берилган $A$ ва $B$ тўпламларга кўра $A\cup B$, $A\cap B,\ A\setminus B,\ B\setminus A,\ A\Delta B$ тўпламларни топинг.

1) $A=\{x\in R: x^2+x-20=0\}$  $B=\{x\in R: x^2-7x+12=0\}$;

**2)** $A=\{x\in R:-2\le x\le 3\}=[-2;3]$, $B=\{x\in R:1\le x\le 4\}=[1;4]$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

3) $A=\{x\in N:\ x^2-4x\le 0\},\quad B=\{x\in Z: x^2-x-6\le 0\}.$

**1.19.** Агар $A=\{x\in N:\ 2<x\le 6\},\quad B=\{x\in N: 1<x<4\},\ C=\{x\in N:\ x^2-4=0\}$ бўлса, 1) $B\cup C$, 2) $A\cap B\cap C$, 3) $A\cup B\cup C$ 4) $(A\cap B)\cup(B\cap C)$ тўпламларни топинг

Қуйидаги муносабатларнинг ўринли бўлишини кўрсатинг:

**1.20.** $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\bigcap C)$. **1.21.** $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

**1.22.** $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\bigcap B)$. **1.23.** $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

**1.24.** $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

Қуйида берилган тўпламларни коордиинаталар текислигида тасвирланган.

**1.25.** $\{(x,y)\in R^2:\ x+3y-6=0\}$.

**1.26.** $\{(x,y)\in R^2: x^2+y^2\le 4\}$.

**1.27.** $\{(x,y)\in R^2 :(x^2-1)\cdot(y+2)=0\}$.

**1.28.** $\{(x,y)\in R^2:\ y>\sqrt{2x+1},\ \ 2x+1\ge 0\}$.

**1.29.** $\left\{(x,y)\in R^2:\ \frac{1}{x}>\frac{1}{y},\ \ x\ne 0,\ \ y\ne 0\right\}$.

**1.30.** $\{(x,y)\in R^2:\ y^2>2x+1\}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Қуйидаги берилган $A$ ва $B$ тўпламларга кўра $A\times B$ Декарт кўпайтмани топинг:

**1.31.** $A=\{1,3\},\ B=\{2,4\}$. **1.32.** $A=R^1\ \ B=R^1$.

**1.33.** $A=[1;2]\ \ B=[1;2]$. **1.34.** $A=[1;3]\ \ B=[2;4]$.

## Мустақил ечиш мисол ва масалаларининг жавоблари

**1.1.** $A=\{2,6\}$. **1.2.** $A=\{0,2,3\}$. **1.3.** $A=\{1\}$. **1.4.** $A=\{1,2,3,4,5,6\}$.

**1.5.** $A=\{-2,-1,0,1,2\}$. **1.6.** $A=\{\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi\}$. **1.7.** Йўқ. **1.9.** Йўқ. **1.10.** Ҳа. **1.11.** Йўқ.

**1.12.** Йўқ. **1.13.** $\varnothing$. **1.14.** $\varnothing,\ \{\varnothing\}$. **1.15.** $\{1\},\{2\},\{1,2\},\varnothing$.

**1.16.** $\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\ \{a,c\},\ \{a,d\},\ \{b,c\},\ \{b,d\},\ \{c,d\},$ $\{a,b,c\},\ \{b,c,d\},\ \{a,b,d\},\ \{a,c,d\},\ \{a,b,c,d\},\varnothing$. **1.18.** 1) $A\cup B=\{-5,3,4,\}$, $A\cap B=\{4\}$, $A\setminus B=\{-5\}$, $B\setminus A=\{3\}$, $A\Delta B=\{-5,3\}$. 2) $A\cup B=[-2;4]$, $A\cap B=[1;3]$, $A\setminus B=[-2,1)$, $B\setminus A=(3;4]$, $A\Delta B=[-2;1)\cup(3;4]$. 3) $A\cup B=\{-2,-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $A\cap B=\{1,\ 2,\ 3\}$, $A\setminus B=\{4\}$, $B\setminus A=\{-2,\ -1,\ 0\}$, $A\Delta B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 4\}$.

**1.19.** 1) $B\cup C=\{2;3\}$, 2) $A\cap B\cap C=\varnothing$, 3) $A\cup B\cup C=\{2,\ 3,\ 4\ ,5,\ 6\ \}$, 4) $(A\cap B)\cup(B\cap C)=\{2;3\}$ **1.31.** $A\times B=\{(1;2),(1;4),(3;2),(3;4)\}$.

**1.32.** $A\times B = R^1\times R^1 = R^2 = \{(x,y): -\infty < x < \infty, +\infty < y < \infty\}$.

**1.33.** $A\times B = \{(x,y): x\in[1;2], y\in[1;2]\}$. **1.34.** $A\times B = \{\{(x,y): x\in[1;3], y\in[2;4]\}$.

## 2- §. ҲАҚИҚИЙ СОНЛАР

### 2.1. Сонли тўпламлар.

Саноқ учун ишлатиладиган сонлар *натурал сонлар* деб аталади. Натурал сонлар тўплами

$$N = \{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$$

каби белгиланади.

Ишораси натурал сонларнинг ишорасига қарама-қарши бўлган сонлар *манфий натурал* сонлар дейилади. Барча манфий натурал сонлар, нол сони ва барча натурал сонлардан иборат тўплам *бутун сонлар тўплами* дейилади ва у одатда

$$Z = \{\ldots,-n,\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$$

каби белгиланади.

Равшанки, натурал сонлар тўрплами бутун сонлар тўпламининг қисм

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

тўпламидир: $N \subset Z$.

Қисқармайдиган $\frac{p}{q}$, $p \in Z$, $q \in N$ каср кўринишда тасвирланадиган ҳар бир сон *рационал сон* дейилади. Барча рационал сонлар тўплами

$$Q = \left\{ x : x = \frac{p}{q}, \quad p \in Z, \quad q \in N \right\}$$

каби белгиланади.

Равшанки, $Z \subset Q$, демак $N \subset Q$, чунки, $N \subset Z$. Жумладан, агар $q = 1$ бўлса, $Z = Q$ бўлади.

## 2.1. Ҳақиқий сонлар.

Маълумки, ҳақиқий сонлар назарияси асосан, икки хил, конструктив ва аксиоматик усуллар билан қурилади.

**Конструктив усул.** Ҳақиқий сонлар назариясини бу усул ёрдамида қуришда, одатда, рационал сонлар назарияси маълум деб фараз қилинади ва иррационал сонларни қуриш йўллари кўрсатилади.

**Аксиоматик усул.** Ҳақиқий сонлар назариясини бу усулда қуриш

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

жараёни, натурал сонлар назариясини аксиоматик қуришдан бошланади. Бу жараённи схематик қуйидагича изоҳлаш мумкин: бирор бўш бўлмаган $N$ тўплам олиниб, бу тўплам элементлари орасидаги муносабатлар, амаллар, амаллар бўйсинадиган қонунлар, бу амаллар ва муносабатларнинг боғланиши қандайдир аксиомалар системаси орқали берилади ва у натурал сонлар тўплами, унинг элементлари эса, натурал сонлар деб айтилади.

Ҳақиқий сонлар назариясини қуришда бир нечта конструктив назариялар мавжуд бўлиб, уларга Кантор, Дедекинд, Вейерштрасс, Коши томонидан таклиф қилинган назариялар киради.

Биз ҳақиқий сонлар назариясини қуришда қисқача Дедекинд назариясини баён қилиш билан чегараланамиз. Ҳақиқий сонларни қуришда Дедекинд назарияси рационал сонлар тўплами $Q$ нинг тартибланганлик хоссасига асосланган бўлиб, у қуйидагича қурилади: $Q$ бўш бўлмаган ва кесишмайдиган иккита, қуйидаги шартларни қаноатлантирадиган, $A$ ва $B$ синфларга ажратилади:

1) $A \cup B = Q;$

2) $\forall a \in A,\ \forall b \in B \Rightarrow a < b.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$Q$ ни бундай тартибда синфларга ажратишда $A$ ва $B$ тўпламлар $Q$ да кесим бажаради дейилади ва у $(A,B)$ каби белгиланади, бунда $A$- кесимнинг қуйи синфи, $B$ эса, унинг юқори синфи дейилади.

Мисоллар: $Q$ - рационал сонлар тўплами берилган бўлиб, уни қуйидагича синфларга ажратамиз:

$$1)\ A=\{a:a\in Q,\ a<3\},\ B=\{b:b\in Q,\ b\geq 3\};$$

$$2)\ A=\{a:a\in Q,\ a\leq 3\},\ B=\{b:b\in Q,\ b>3\};$$

$$3)\ A=\{a:a\in Q,\ a^2<3\},\ B=\{b:b\in Q,\ b^2>3\}.$$

Осонлик билан кўрсатиш мумкинки, $Q$ ни юқоридаги 1)-3) кўринишларда $A$ ва $B$ синфларга ажратишда $A$ ва $B$ тўпламлар кесим бажаради.

Ҳақиқатан ҳам, 1) да $A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing, Q=A\cup B,\ A\cap B=\varnothing$ бўлади. $\forall a\in A,\ \forall b\in B\Rightarrow a<b$ эканлиги келиб чиқади.

$3\in B$ бўлиб, у $B$ тўпламда энг кичик сон бўлади, лекин $A$ да энг катта сон йўқ. Тескарисини фараз қилайлик, яъни $a$ сон $A$ тўпламда энг катта сон бўлсин, десак, $a<3$ бўлгани учун рационал сонларнинг зичлик хоссасига

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

асосан, $a$ ва 3 сонлар орасида бирорта рационал $a_1$ сонни кўрсатиш мумкин, яъни $a < a_1 < 3$. Натижада, $a_1 \in A$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $a$ сони $A$ синфда энг катта сон бўлсин деган фаразимиз нотўғри эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, $A$ да энг катта сон мавжуд эмаслигига ишонч ҳосил қилдик.

Худди шундай, $Q$ тўпламни 2) шаклда синфларга ажратганда ҳам, $A$ ва $B$ тўпламлар $Q$ да кесим бажаришини ҳамда $A$ синфда энг катта сон мавжуд ва у 3 га тенглиги, $B$ синфда эса, энг кичик сон мавжуд эмаслиги кўрсатилади.

3) $A = \{a : a \in Q,\ a^2 < 3\}$, $B = \{b : b \in Q,\ b^2 > 3\}$ дейлик.

$Q$ тўпламни 3) шаклда синфларга ажратишда $A$ ва $B$ тўпламларнинг $Q$ тўпламда кесим бажаришига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Бу ҳолда қуйи синф $A$ да энг катта ва юқори синф $B$ да эса, энг кичик сон йўқ эканлигини кўрсатамиз. Шундан, биринчи тасдиқнинг тўғрилигини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан ҳам, $\forall\ a \in A$ бўлса, $a^2 < 3$ бўлади.

Шундай натурал $n$ сон мавжуд бўлиб, $a^2 < 3$ тенгсизликни қаноатлантирувчи

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$a$ билан бирга, $a+\frac{1}{n}$ сон ҳам $A$ га тегишли, яъни $(a+\frac{1}{n})^2<3$ бўлишлигини кўрсатамиз. Бу тенгсизликдан

$$\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<3-a^2. \tag{2.1}$$

$\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<\frac{2a}{n}+\frac{1}{n}$ тенгсизлик ўринли бўлгани учун, агар $\frac{2a}{n}+\frac{1}{n}<3-a^2$ тенгсизлик ўринли бўлса, (2.1) тенгсизлик албатта бажарилади. Кейинги тенгсизликдан $n>\frac{2a+1}{3-a^2}$.

Шундай қилиб, $a\in A$ сон $A$ тўпламда энг катта сон бўлсин десак, ундан катта $a+\frac{1}{n}$ сон топиладики, у ҳам $A$ га тегишли бўлади. Демак, $A$ тўпламда энг катта сон йўқ экан. Худди юқоридагидек $B$ тўпламда ҳам энг кичик сон йўқлиги кўрсатилади.

Бу мисоллардан кўринадики, 1) да $A$ синфда энг катта сон мавжуд эмас, $B$ синфда эса, энг кичик сон мавжуд. 2) да $A$ синфда энг катта сон мавжуд, $B$ синфда эса, энг кичик сон мавжуд эмас. 3) да эса, $A$ синфда энг катта сон, $B$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

синфда энг кичик сон мавжуд эмас. Шундай қилиб, $Q$ да бажариладиган кесимлар фақат уч хил бўлиши мумкин экан:

1) қуйи синф $A$ да энг катта сон мавжуд эмас, юқори $B$ синфда энг кичик сон мавжуд.

2) қуйи синф $A$ да энг катта сон мавжуд, юқори синф $B$ да энг кичик сон мавжуд эмас.

3) қуйи синф $A$ да энг катта сон, юқори синф $B$ да энг кичик сон мавжуд эмас.

1)- ва 2)- ҳолларда $(A, B)$ кесим бирор чегаравий рационал $r$ сонни аниқлайди. 3) -ҳолда $A$ ва $B$ синфларни чегараловчи чегаравий рационал сон йўқ, яъни кесим ҳеч қандай рационал сони аниқламайди.

1)- ва 2)- ҳолларда кесим рационал кесим, 3)- ҳолдаги кесим эса, иррационал кесим дейилади. Иррационал кесим ҳосил қилувчи сонлар тўпламини $I$ орқали белгилаймиз.

Барча рационал ва иррационал сонлар тўплами биргаликда ҳақиқий сонлар тўплами дейилади ва у $R$ билан белгиланади, яъни $R = Q \cup I$.

Осонлик билан кўриш мумкинки, $R \setminus Q = I$, $R \setminus I = Q$, $R \cap Q = Q$, $Q \cap I = \varnothing$,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$I \subset R,\ Q \subset R$ бўлади.

**2.1-мисол.** $c$ - бутун соннинг квадратига тенг бўлмаган мусбат сон бўлсин. Ушбу $A=\{a : a \in Q,\ a^2 < c\},\ B=\{a : a \in Q,\ a^2 > c\}$ кўринишда қурилган $A$ ва $B$ тўпламлар $Q$ рационал сонлар тўпламида кесим бажаради ва бу кесим бирор $\sqrt{c}$ - ҳақиқий сонни аниқлайди. Қуйи синф $A$ да энг катта сон ва юқори синф $B$ да эса, энг кичик сон мавжуд эмаслигини исботланг.

**Ечилиши**. $a \in B$ бўлсин, унда $a^2 > c$ бўлади. $(a-\frac{1}{n})^2 > c$ тенгсизликни қаноатлантирадиган шундай натурал $n$ соннинг мавжудлигини кўрсатамиз.

$$\left(a-\frac{1}{n}\right)^2 = a^2 - \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} > c. \qquad (2.2)$$

Агар $a^2 - \frac{2a}{n} > c$ бўлса, у вақтда (2.2) тенгсизлик албатта бажарилади. Кейинги тенгсизликдан $n > \frac{2a}{a^2 - c}$ деб олиш етарли. ($n = \left[\frac{2a}{a^2 - c}\right] + 1$ деб олиш мумкин).

Демак, $B$ синфдан ҳар қандай $a$ сон олинганда ҳам $B$ синфда ундан кичик сон ҳар доим топилади. Шундай қилиб, $B$ синфда энг кичик соннинг мавжуд эмаслиги исботланди. $A$ синфда энг катта сон мавжуд эмаслиги ҳам

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

худди шундай исботланади.

**2.2.-мисол**. Ушбу $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ соннниng иррационал сон эканлигини исботланг.

**Исботи.** Тескарисини фараз қилайлик, яъни $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ сон рационал сон бўлсин. У ҳолда

$$\sqrt{5}+\sqrt{3}=\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

бу сон ҳам рационал сон бўлади, чунки, у иккита рационал сонининг нисбатидан иборат. Иккинчи томондан, равшанки,

$$\sqrt{3}=\frac{1}{2}\left[(\sqrt{5}+\sqrt{3})-(\sqrt{5}-\sqrt{3})\right]$$

тенглик ўринли. Бундан, $\sqrt{3}$ иккита рационал соннинг айирмаси сифатида яна рационал сон бўлади, лекин $\sqrt{3}$ сон эса, иррационал сондир. Бу қарама-қаршилик фаразимизнинг нотўғри эканлигини кўрсатади.

## 2.3. Сон ўқи.

Бирор $l$ тўғри чизиқда ихтиёрий $O$ нуқтани белгилаб ($O$ нуқта саноқ боши), сўнгра [0;1] бирлик кесмани танлаймиз ва йўналишни белгилаймиз.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

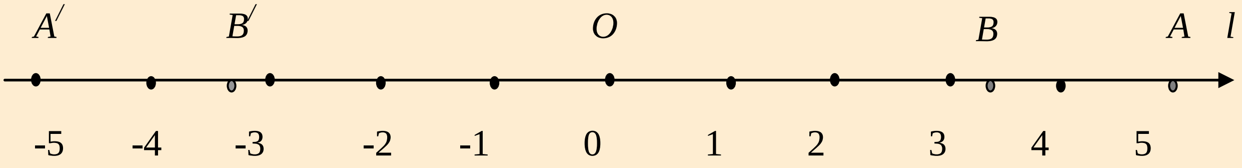
Бундай ҳолда координата тўғри чизиғи, яъни сон ўқи_берилган дейилади (2.1-чизма). Ҳар бир натурал ёки каср сонга $l$ тўғри чизиқда битта нуқта мос келади. Масалан, 5 сони берилган бўлсин. $O$ нуқтадан (саноқ бошидан) берилган йўналишда бирлик кесмани 5 марта қўямиз. Натижада $A$ нуқтани ҳосил қиламиз, бу нуқта 5 сонига мос келади. $3\frac{1}{7}$ сонини олайлик, $O$ нуқтадан берилган йўналишда бирлик кесмани 3 марта, сўнгра бирлик кесманинг $\frac{1}{7}$ қисмини қўямиз. Натижада $B$ нуқтани ҳосил қиламиз. Бу нуқта $3\frac{1}{7}$ сонга мос келади.

Агар $l$ тўғри чизиқнинг $M$ нуқтаси бирор $r$ сонга мос келса, бу сон $M$ нуқтанинг координатаси дейилади ва у $M(r)$ каби белгиланади. Масалан, $A$ ва $B$ нуқталарнинг координаталари мос равишда 5 ва $3\frac{1}{7}$ сонлардан иборат бўлади, яъни $A(5)$, $B(3\frac{1}{7})$. Саноқ боши $O$ нуқтанинг координатаси нол сонидан иборат бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Энди бирлик кесмани $O$ нуқтадан бошлаб берилган йўналишга қарама-қарши йўналишда 5 марта қўямиз. Санок боши $O$ га нисбатан $A$ нуқтага симметрик $A'$ нуқтани ҳосил қиламиз. $A'$ нуқтанинг координатаси -5 сон бўлади, яъни $A'(-5)$. Шунга ўхшаш $B$ нуқтага симметрик $B'$ нуқтанинг координатаси $-3\frac{1}{7}$ сони топилади. 5 ва -5, $3\frac{1}{7}$ ва $-3\frac{1}{7}$ сонларга мос равишда *қарама-қарши сонлар* деб аталади. Координата тўғри чизиғида берилган йўналищда жойлашган нуқталарга мос келувчи сонлар *мусбат сонлар* дейилади. Координата тўғри чизиғида берилган йўналишга қарама-қарши йўналишда жойлашган нуқталарга мос келувчи сонлар *манфий сонлар* дейилади.

**Эслатма.** Координата боши $O$ нуқтага мос келган "0" (нол) сони мусбат ҳам, манфий ҳам ҳисобланмайди, у координата тўғри чизиғидаги мусбат



2.1-чизма.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

координатали нуқталарни манфий координатали нуқталардан ажратиб турувчи сон бўлиб ҳисобланади.

Координата тўғри чизиғидаги берилган йўналишни (одатда у ўнг томонга йўналган) мусбат, берилган йўналишга қарама-қарши йўналишни эса, манфий йўналиш дейилади.

## 2.4. Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати.

Ҳақиқий сон $a$ нинг абсолют қиймати деб, агар $a \geq 0$ бўлса, бу соннинг ўзига, агар $a < 0$ бўлса, унга қарама-қарши сон $-a$ га айтилади. $a$ соннинг абсолют қиймати $|a|$ каби белгиланади. Шундай қилиб,

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Геометрик нуқтаи назардан $|a|$ ифода координата тўғри чизиғидаги $a$ нуқтадан $O$ нуқтагача бўлган масофани билдиради.

*Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати қуйидаги хоссаларга эга*:

**1-хосса.** $\forall x \in R$ учун

$$|x| \geq 0, \qquad |x| = |-x|, \qquad x \leq |x|, \qquad -x \leq |x|$$

муносабатлар ўринлидир.

**2-хосса.** $a > 0, \quad |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a, \quad |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

муносабатлар ўринлидир.

**3-хосса.** $\forall x, y \in R$

$$|x+y| \le |x|+|y|, \qquad |x-y| \ge \big||x|-|y|\big|,$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} (y \ne 0)$$

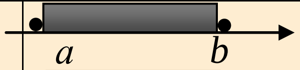
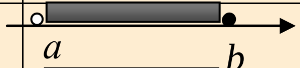
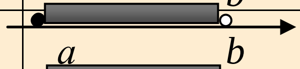
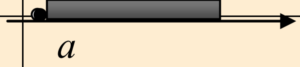
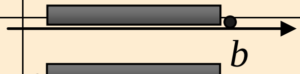
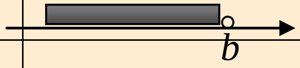
муносабатлар ўринлидир.

## 2.5. Сонли тўпламларнинг чегаралари.

$a < b$ шартни қаноатлантирадиган $a$ ва $b$ сонларни оламиз ва уларни кооррдината тўғри чизиғида нуқталар билан белгилаймиз.

Амалда "интервал", "кесма", "ярим интервал", "нур" терминларидан кўпинча фойдаланмасдан, улар бир ном билан, "сонли оралиқ" деб ишлатилади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

| Оралиқлар тури | Геометрик тасвири | Белгиланиши | Тенгсизликлар ёрдамида ёзилиши |
|---|---|---|---|
| Интервал |  | $(a,b)$ | $a<x<b$ |
| Кесма |  | $[a,b]$ | $a\leq x\leq b$ |
| Ярим интервал |  | $(a,b]$ | $a<x\leq b$ |
| Ярим интервал |  | $[a,b)$ | $a\leq x<b$ |
| Нур |  | $[a,+\infty)$ | $x\geq a$ |
| Нур |  | $(-\infty;b]$ | $x\leq b$ |
| Очиқ нур |  | $(a,+\infty)$ | $x>a$ |
| Очиқ нур |  | $(-\infty;b)$ | $x<b$ |
| Сон ўқи |  | $(-\infty;\infty)$ | $-\infty<x<\infty$ |

Бирор $X$ тўплам **(** $X\subset R$ ) берилган бўлсин.

**2.1-таъриф**. Агар шундай $M$ сон ($m$ сон) мавжуд бўлиб, $\forall x\in X$ учун $x\leq M$ ($x\geq m$) тенгсизлик бажарилса, $X$ тўплам *юқоридан (қуйидан)*

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

*чегараланган* дейилади. Масалан, $X=\left\{\frac{1}{2n} : n=1, 2, 3, ....\right\}$ тўплам юқоридан $\frac{1}{2}$ (қуйидан $0$) билан чегараланган.

**2.2-таъриф**. Агар $\forall\, M$ сон ($\forall\, m$ сон) олинганда ҳам шундай $x_0 \in X$ топилсаки, $x_0 > M$ $(x_0 < m)$ тенгсизлик бажарилса, $X$ тўплам *юқоридан (қуйидан) чегараланмаган* дейилади. .

Масалан, $Z=\{\dots,-n,\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots,n,\dots\}$ тўплам ҳам юқоридан ҳам қуйидан чегараланмаган.

**2.3-таъриф**.Агар $X$ тўплам ҳам қуйидан, ҳам юқоридан чегараланган бўлса *$X$ тўплам чеграланган* дейилади.

**2.1.-теорема**. Ҳар қандай юқоридан чегараланган тўплам учун уни юқоридан чегараловчи сонлар ичида энг кичиги мавжуд.

**2.4-таъриф.** Юқоридан чегараланган $X$ тўплам учун юқоридан чегараловчи сонларнинг ичида энг кичиги, $X$ тўпламнинг аниқ юқори чегараси дейилади ва $\sup X$ каби белгиланади.

**2.2.-теорема**. Ҳар қандай қуйидан чегараланган тўплам учун уни қуйидан чегараловчи сонлар ичида энг каттаси мавжуд.

**2.5-таъриф.** Қуйидан чегараланган $X$ тўплам учун қуйидан чегараловчи

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

сонларнинг ичида энг каттаси, $X$ тўпламнинг аниқ қуйи чегараси дейилади ва $\inf X$ каби белгиланади.

Тўпламнинг аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегараларини мос равишда қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин, яъни

$$\sup X = a \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \forall x \in X, & x \le a, \\ 2) \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 \in X, & x_0 > a - \varepsilon\ . \end{cases}$$

$$\inf X = b \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \forall x \in X, & x \ge b, \\ 2) \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 \in X, & x_0 < b + \varepsilon\ . \end{cases}$$

Тўпламнинг аниқ қуйи ва аниқ юқори чегаралари қуйидаги хоссаларга эга:

**1-хосса**. Агар $X\,(X \subset R)$ тўплам юқоридан чегараланган бўлиб, $X_1 \subset X$ бўлса, $\sup X_1 \le \sup X$ бўлади.

**2-хосса**. Агар $X\,(X \subset R)$ тўплам қуйидан чегараланган бўлиб, $X_1 \subset X$ бўлса, $\inf X_1 \ge \inf X$ бўлади.

**3-хосса**. Агар $X\,(X \subset R)$ тўплам чегараланган бўлиб, $X_1 \subset X$ бўлса, $\inf X \le \inf X_1 \le \sup X_1 \le \sup X$ бўлади.

**4-хосса**. Агар $\forall x \in X$ учун $x \le a\ \ (x \ge b)$ тенгсизлик бажарилса,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$\sup X \le a$ $(\inf X \ge b)$ тенгсизлик ўринли бўлди.

### Мустақил ечиш учун мисоллар

**2.1.** Ушбу $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ сонннинг иррационал сон эканлигини исботланг.

**2.2.** 1) $\sqrt{5}$; 2) $2^{\sqrt{2}}$ сонни аниқловчи кесим тузинг.

**2.3.** Кесим ёрдамида

1) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$; 2) $\sqrt{3}+\sqrt{12}=\sqrt{27}$

эканлигини кўрсатинг.

**2.4.** Кесим ёрдамида

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$; 2) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{15}$

эканлигини кўрсатинг.

**2.5.** Кесим ёрдамида $\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$ бўлишини кўрсатинг

**2.6.** Ушбу

1) $X=\left\{\frac{1}{n}: n=1,\ 2,\ 3,\ .....\right\}$; 2) $Y=\{n: n=1,\ 2,\ 3,\ .....\}$;

3) $Z=\{z: 4<z<7\}$; 4) $W=\{w: -2<w<4\}$

тўпламларнинг аниқ юқори чегараси ҳамда аниқ қуйи чегараларини аниқланг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**2.7.** Ушбу $\left\{\frac{m}{n}\right\}=\left\{\frac{m}{n}:\ m\in N,\ n\in N,\ m<n\right\}$ тўпламнинг аниқ юқори чеграси $\sup\left\{\frac{m}{n}\right\}=1$, тўпламнинг аниқ қуйи чегараси $\inf\left\{\frac{m}{n}\right\}=0$ бўлишини исботланг.

**2.8.** $X=\{x\}$ ва $Y=\{y\}$ ҳақиқий сонлар тўпламлари берилган бўлиб, $\{x+y\}$ тўплам эса $\{x+y:x\in X,\ \ y\in Y\}$ йиғиндилардан иборат тўплам бўлсин. Унда

1) $\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}$,
2) $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$

бўлишини исботланг.

**2.9.** $X=\{x\}$ ва $Y=\{y\}$ манфий бўлмаган ҳақиқий сонлар тўпламлари берилган бўлиб, $\{x\cdot y\}$ тўплам эса $\{x\cdot y:x\in X,\ \ y\in Y\}$ кўпайтмаларидан иборат тўплам бўлсин. Унда

1) $\sup\{x\cdot y\}=\sup\{x\}\cdot\sup\{y\}$,
2) $\inf\{x\cdot y\}=\inf\{x\}\cdot\inf\{y\}$

бўлишини исботланг.

**2.10.** $X=\{x\}$ ҳақиқий сонлар тўплами берилган бўлиб, $\{-x\}$ тўплам

Титул варақ
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$-x$ сонлардан ( $x \in X$ )иборат тўплам бўлсин. Унда

1) $\sup\{-x\} = -\inf\{x\}$,

2) $\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$

бўлишини исботланг.

**2.11.** Тенгсизликни ечинг

1) $|2x-5| \le 7$;  2) $|3x-5| > 10$;  3) $\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right| > 2$;

4) $|x-2| + |x+2| \le 12$;  5) $|x-1| - |x-2| + |x-3| - |x-4| + |x-5| < 3$.

## Мустакил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

**2.6.** 1) $\sup X = 1$; $\inf X = 0$;  2) $\inf Y = 1$; 3) $\sup Z = 7$; $\inf Z = 4$;

4) $\sup W = 4$; $\inf W = -2$. **2.11.** 1) $-1 \le x \le 6$;  2) $x < -\dfrac{5}{3}$, $x > 5$  3) $(0;\,1) \cup (1;\,4)$;

4) $[-6;\,6]$;  5) $(0;\,2) \cup (2;\,4) \cup (4;\,6)$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

# 3-§. МАТЕМАТИК ИНДУКЦИЯ УСУЛИ

## 3.1. Йиғинди.

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ берилган сонлар. Уларнинг $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ йиғиндисини $\sum_{k=1}^{n} a_k$ деб белгилаймиз, яъни

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,$$

бунда $k$ йиғиндининг *индекси* дейилади. Йиғиндининг индекси қандай ҳарф билан белгиланишига боғлиқ эмас, яъни

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

Йиғинди чизиқлилик хоссасига эга, яъни ихтиёрий $\alpha$ ва $\beta$ сонлар учун

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k$$

тенглик ўринли бўлади.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

йиғиндини ҳисоблаш масаласини қараймиз, бунда $f(k)$ берилган функция, одатда $S_n$ йиғиндини ҳисоблашда уни $k$ нинг функцияси деб қаралади. Масалан, агар $f(k)=a_{k+1}-a_k$ бўлса, (бунда $\{a_n\}$ берилган кетма-кетлик), унда

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(k)=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\ldots+ \\ +(a_n-a_{n-1})+(a_{n+1}-a_n)=a_{n+1}-a_1 \qquad (3.1)$$

**3.1- мисол.** Қуйидаги йиғиндини ҳисобланг:

$$1)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}; \qquad 2)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)};$$

**Ечилиши.** 1) $\dfrac{1}{k(k+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$ бўлгани учун (3.1) формулага асосан,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(n+1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

эканлигини топамиз.

$$2)\ \frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$

эканлигини ҳисобга олиб, (3.1) формулага асосан,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

**3.2.- мисол.** Ушбу йиғиндини ҳисобланг:

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\sin kx.$$

**Ечилиши.** Ушбу $S_n(x)\cdot 2\sin\frac{x}{2}=\sum_{k=1}^{n}2\sin kx\sin\frac{x}{2}$ тенгликни қараймиз:

$$2\sin kx\sin\frac{x}{2}=\cos(k-\frac{1}{2})x-\cos(k+\frac{1}{2})x$$

бўлгани учун (3.1) формулага асосан,

$$S_n\cdot 2\sin\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})=2\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{n}{2}x,$$

бундан, агар $\sin\frac{x}{2}\neq 0$ бўлса, $S_n(x)=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$, агар $\sin\frac{x}{2}=0$ бўлса,

унда $S_n(x)=0$. Шундай қилиб,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$S_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}\sin\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}, & \text{агар} \quad \sin\dfrac{x}{2}\neq 0 \quad \text{бўлса},\\ 0, \quad \text{агар} \quad \sin\dfrac{x}{2}=0 \quad \text{бўлса}.\end{cases}$$

**3.3- мисол.** $\{x_n\}$ кетма-кетлик ушбу $x_n=ax_{n-1}+b$ формула билан берилганда: 1) $x_n$, 2) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$ ларни $x_1,a,b$ ва $n$ орқали ифодаланг.

**Ечилиши.** 1) $x_k=ax_{k-1}+b,\ \ x_{k-1}=ax_{k-2}+b$ бўлгани учун

$x_k-x_{k-1}=a(x_{k-1}-x_{k-2})=a^2(x_{k-2}-x_{k-3})=\ldots=a^{k-2}(x_2-x_1)$ бўлади, яъни

$$x_k-x_{k-1}=a^{k-2}(x_2-x_1)\ .$$

Бу формулага кетма-кет $k=2,3,\ldots,n$ қийматларни қўйиб, сўнгра ҳосил бўлган тенгликларни қўшиш натижасида

$$\sum_{k=2}^{n}(x_k-x_{k-1})=(x_2-x_1)\sum_{k=2}^{n}a^{k-2} \quad \text{ёки}$$

$$x_n-x_1=(x_2-x_1)\frac{a^{n-1}-1}{a-1}=((a-1)x_1+b)\frac{a^{n-1}-1}{a-1}$$

га бўламиз. Бундан

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$x_n = a^{n-1}x_1 + b\frac{a^{n-1}-1}{a-1}, \quad a \neq 1$$

формулани ҳосил қиламиз. $a=1$ десак, у ҳолда $\{x_n\}$кетма-кетликнинг айирмаси $b$ га тенг бўлган арифметик прогрессия эканлигига ишонч ҳосил қиламиз, яъни $x_n = x_1 + (n-1)b.$

$$2)\ S_n = x_1 + \sum_{k=2}^{n} x_k = x_1 + a\sum_{k=2}^{n} x_{k-1} + (n-1)b,$$

$$S_n = x_1 + a(S_n - x_n) + (n-1)b,$$

$$S_n(1-a) = x_1 - ax_n + (n-1)b = x_1 - a^n x_1 - ab\frac{a^{n-1}-1}{a-1} + (n-1)b,$$

бу ердан

$$S_n = \frac{(n-1)b}{1-a} + \frac{ab}{(a-1)^2}(a^{n-1}-1) + \frac{a^n-1}{a-1}x_1, \quad a \neq 1$$

формулани ҳосил қиламиз.

**3.4- мисол.** $\{a_n\}$ ҳадлари нолдан фарқли ва айирмаси $d \neq 0$ бўлган арифметик прогрессияни ташкил қилса, у ҳолда

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

тенгликнинг ўринли эканлигини исботланг.

**Ечилиши.** $\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{(a_{k+1} - a_k)} \left( \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right)$ тенглик ўринли бўлгани учун, ҳамда мисолнинг шартини эътиборга олган ҳолда

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right)$$

га эга бўламиз. Бундан (3.1) формулани этиборга олсак, натижада исбот қилиниши керак бўлган тенгликни ҳосил қиламиз, яъни

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d} \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \right).$$

**3.5- мисол.** Ушбу йиғиндиларни ҳисобланг.

1) $A_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1};$

2) $B_n(x) = x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2n-1};$

3) $C_n(x) = 1 + 3x^2 + 5x^4 + \ldots + (2n-1)x^{2n-2};$

4) $D_n(x) = 1 + 4x + 9x^2 + \ldots + n^2 x^{n-1};$

5) $H_n(x) = 1 + 2^3 x + 3^3 x^2 + \ldots + n^3 x^{n-1}.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**Ечилиши.** 1) $x=1$ бўлганда $A_n(1)=1+2+3+\ldots+n;$

Бундан арифметик прогрессия $n$ та ҳадларининг йиғиндиси

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}n \qquad (3.2)$$

формулани эътиборга олсак, $A_n(1)=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Энди $x\neq 1$ бўлсин.

$$A_n(x)=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1} \qquad (3.3)$$

(3.3) тенгликнинг иккала томомнини $x$ га кўпайтириб, ҳосил бўлган тенгликни (3.3) тенгликдан айирамиз:

$$(1-x)A_n=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}-nx^n,$$

бундан, геометрик прогрессиянинг дастлабки $n$ та ҳадининг йиғиндиси

$$S_n=b_1\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{b_nq-b_1}{q-1}, \quad q\neq 1 \qquad (3.4)$$

формулани эътиборга олиб

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$(1-x)A_n = \frac{1-x^n}{1-x} - nx^n, \quad A_n = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x} =$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{nx^{n+1}-(1+n)x^n}{(1-x)^2}$$

ни топамиз. Шундай қилиб, қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$A_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{nx^{n+1}-(1+n)x^n}{(1-x)^2}, & x \neq 1\ , \\ \dfrac{n(n+1)}{2}, & x = 1\,. \end{cases}$$

2) $x = \pm 1$ бўлганда $B_n(1) = 1+1+\ldots+1 = n,$

$$B_n(-1) = -1-1-1-\ldots-1 = -n.$$

$$B_n(x) = x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2n-1}$$

тенгликнинг иккала томонини $x$ га кўпайтирамиз.

$$xB_n(x) = x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{2n} = x^2(1 + x^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^2)^{n-1})$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги қавс ичидаги йиғиндига (3.4) формулани қўлласак, натижада

$$xB_n(x) = x^2\frac{1-(x^2)^n}{1-x^2} = x^2\frac{1-x^{2n}}{1-x^2},$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

бундан

$$B_n(x)=\frac{x}{1-x^2}-\frac{x^{2n+1}}{1-x^2}$$

га эга бўламиз. Шундай қилиб, қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$B_n(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-x^2}-\dfrac{x^{2n+1}}{1-x^2}, & \text{агар} \quad x\neq\pm1 \ \text{бўлса},\\ \pm n, \quad \text{агар} \quad x=\pm1 \quad \text{бўлса}. & \end{cases}$$

1) $x=\pm1$ бўлганда, $C_n(\pm1)=1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$. Энди $x\neq\pm1$ бўлсин.

$$C_n(x)=1+3x^2+5x^4+\ldots+(2n-1)x^{2n-2}. \tag{3.5}$$

(3.5) тенгликнинг иккала томонини $x^2$ кўпайтириб, ҳосил бўлган тенгликни (3.5) тенгликдан айирамиз:

$$(1-x^2)C_n(x)=1+2x^2+2x^4+2x^6+\ldots+2x^{2n-2}-(2n-1)x^{2n}=$$
$$=1+2x^2(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n-4})-(2n-1)x^{2n}.$$

(3.5) тенгликнинг ўнг томонидаги қавс ичидаги ифодага (3.4) формулани қўллаб, $(1-x^2)C_n(x)=1+2x^2\left(\dfrac{1-x^{2n-2}}{1-x^2}\right)-(2n-1)x^{2n}$ га эга бўламиз. Бундан,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$C_n(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}+\frac{(2n-1)x^{2n+2}-(2n+1)x^{2n}}{(1-x^2)^2}.$$

Шундай қилиб,

$$C_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}+\dfrac{(2n-1)x^{2n+2}-(2n+1)x^{2n}}{(1-x^2)^2}, & \text{агар} \quad x\neq\pm1 \quad \text{бўлса},\\ \pm n, \quad \text{агар} \quad x=\pm1 \quad \text{бўлса}. \end{cases}$$

4) $D_n(x)=1+4x+9x^2+\ldots+n^2x^{n-1}$ тенгликнинг иккала томонини $x$ га кўпайтириб, ҳосил бўлган тенгликдан олдинги тенгликни айирамиз:

$$D_n(x)(x-1)=\sum_{k=2}^{n+1}(k-1)^2x^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}k^2x^{k-1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2x^{k-1}+n^2x^n-\sum_{k=1}^{n}k^2x^{k-1}=$$

$$=n^2x^n-\sum_{k=1}^{n}(2k-1)x^{k-1}=n^2x^n-2\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}+\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}=$$

$$=n^2x^n-2\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}+\frac{x^n-1}{x-1}.$$

Бундан,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$D_n(x)=\frac{n^2x^n(x-1)^2-2nx^n(x-1)+(x^n-1)(x+1)}{(x-1)^3}.$$

5) $H_n(x)=1+2^3x+3^3x^2+\ldots+n^3x^{n-1}$ йиғинди топиш учун 4) даги сингари ушбу

$$xH_n(x)-H_n(x)=n^3x^n-3\sum_{k=1}^{n}k^2x^{k-1}+3\sum_{k=1}^{n}k\,x^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}$$

айирмани тузамиз. Тенгликнинг ўнг томонидаги йиғиндиларнинг ўрнига 4) да олинган ифодаларни қўйсак, натижада

$$(x-1)H_n(x)=n^3x^n-3\,\frac{n^2x^n(x-1)^2-2nx^n(x-1)+(x^n-1)(x+1)}{(x-1)^3}+$$

$$+3\,\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}-\frac{x^n-1}{x-1}.$$

Бундан,

$$H_n(x)=\frac{n^3x^n(x-1)^3-3n^2x^n(x-1)^2+3nx^n(x^2-1)-(x^n-1)(x^2+4x+1)}{(x-1)^4}.$$

Арифметик ва геометрик прогрессиялар дастлабки, $n$ та ҳадлари йиғиндисини топиш масаласи ва уларга ўхшаш кўпгина масалаларни қуйидаги умумий масаланинг хусусий ҳоли деб қараш мумкин: $f(x)$ - барча $x \geq 0$ лар тўпламида аниқланган ихтиёрий функция бўлса,

$$f(0)+f(1)+\ldots+f(n-1) \qquad (3.6)$$

йиғиндини ҳисобланг. Охирги масала каби масалаларни ечишда қуйидаги теоремадан фойдаланиш мақсадга мувофиқ бўлади.

**3.1- теорема.** Агар берилган $\varphi(x)$ функция, $x \geq 0$ лар тўпламида аниқланган $f(x)$ функция учун, ушбу

$$\varphi(x+1)-\varphi(x)=f(x) \qquad (3.7)$$

тенгламани қаноатлантирса, у ҳолда

$$f(0)+f(1)+\ldots+f(n-1)=\varphi(n)-\varphi(0) \qquad (3.8)$$

тенглик ўринли.

3.1- теоремани қўллаб ечиладиган баъзи мисолларни қараймиз.

**3.6- мисол.** Геометрик прогрессиянинг дастлабки $n$ та ҳади йиғиндисини топинг.

**Ечилиши**. $\varphi(x)=aq^{x}$ деб оламиз. Унда

$$\varphi(x+1)-\varphi(x)==aq^{x+1}-aq^{x}=aq^{x}(q-1)$$

бўлади. Демак, $f(x)$ функция сифатида

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$f(x) = aq^x (q-1) \tag{3.9}$$

функцияни ҳосил қиламиз. Энди (3.9) дан фойдаланиб (3.6) йиғиндисини топамиз:

$$f(0) + f(1) + \ldots + f(n-1) = a(q-1) + aq(q-1) + \ldots + aq^{n-1}(q-1).$$

Бундан, (3.8) тенгликни эътиборга олиб

$$f(0) + f(1) + \ldots + f(n-1) = \varphi(n) - \varphi(0) = aq^{n-1} - a$$

ҳосил қиламиз. Бундан, геометрик прогрессия дастлабки $n$ та ҳадлари йиғиндиси учун, талаб қилинган,

$$a + aq + \ldots + aq^{n-1} = \frac{aq^{n-1} - a}{q-1} = \frac{a - aq^{n-1}}{1-q}$$

формулани ҳосил қиламиз.

**3.7- мисол.** Арифметик прогрессия дастлабки $n$ та ҳадлари йиғиндисини топинг.

**Ечилиши.** Бунда

$$\varphi(x) = \frac{a + [a + (x-1)d]}{2} x$$

деб олсак, (3.7) тенглама, $\varphi(x+1) - \varphi(x) = a + dx = f(x)$ кўринишда бўлади. Бундан (3.6) йиғиндини тузамиз ва (3.8) ни эътиборга олиб

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$f(0)+f(1)+\ldots+f(n-1)=a+(a+d)+\ldots+[a+(n-1)d]$$

$$a+(a+d)+\ldots+[a+(n-1)d]=\varphi(n)-\varphi(0)=\frac{a+[a+(n-1)d]}{2}d$$

ҳосил қиламиз, бу эса, талаб қилинган формулани ифодалайди.

**3.8- мисол.** Ушбу $(n+1)^2-n^2$ айирма 1 дан $n$ гача бўлган қандай сонларнинг йиғиндисини ифодалашини кўрсатинг.

**Ечилиши.** $\varphi(x)=x^2$ деб олиб, (3.7) тенгликни тузамиз:

$$\varphi(x+1)-\varphi(x)=(x+1)^2-x^2=2x+1=f(x).$$

Сўнгра, (3.6) йиғиндини тузсак, $1+3+5+\ldots+(2n-1)$ ифодани, яъни қаралаётган айирма 1 дан $n$ гача бўлган барча тоқ сонлар йиғиндисини ифодалашини оламиз. Қўшимча равишда, (3.8) формуладан фойдаланиб,

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

бўлишини оламиз.

**3.9- мисол.** Ушбу $\dfrac{n}{2n+1}$ ифода қандай $n$ та сонлар йиғиндисини ифодалашини кўрсатинг.

**Ечилиши.** $\varphi(x)=\dfrac{x}{2x+1}$ деб олиб, (3.7) тенгламани тузамиз:

$$\varphi(x+1)-\varphi(x)=\frac{x+1}{2x+3}-\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{(2x+1)(2x+3)}=f(x).$$

Натижада изланаётган йиғинди учун, (3.6) ифодадан фойдаланиб,

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

ифодани ҳосил қиламиз. Энди, (3.8) формулага асосан,

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

тенгликни оламиз.

**3.10- мисол.** Ушбу $\frac{10^{n+1}-9n-10}{27}$ ифода қандай $n$ та сонлар йиғиндисини беради?

**Ечилиши.** $\varphi(x)=\frac{10^{x+1}-9x-10}{27}$ деб олиб, (3.7) тенгламани тузамиз:

$$\varphi(x+1)-\varphi(x)=f(x) \text{ ёки } \frac{10^{x+1}-1}{3}=f(x).$$

Демак, (3.8) формулага асосан,

$$3+33+333+\ldots+\underbrace{333\ldots3}_{n}=\frac{10^{n+1}-9n-10}{27}$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

тенгликни ҳосил қиламиз.

### 3.2. Математик индукция усули.

Ҳар қандай математик изланишнинг асосида дедуктив ва индуктив услублар ётади.

Умумий хулосадан хусусий хулосаларни келтириб чиқариш усули *дедуктив усули* дейилади.

Хусусий тасдиқдан умумий тасдиқни келтириб чиқариш усули *индуктив ёки индукция усули* дейилади.

Индукция усули тўла ва тўла бўлмаслиги мумкин.

Агар тасдиқ кузатишга охиригача етказилмаган ҳолларга ҳам тегишли бўлса, бунга тўла бўлмаган *математик индукция усули* дейилади.

Агар мулоҳазалар рўй бериши мумкин бўлган барча ҳолларни ўз ичига олса ва шу асосда хулоса қилинса, бундай индукция *тўла математик индукция усули* дейилади.

Тўла математик индукция усулига қуйидаги тамойил асос қилиб олинади: бирор $p(n)$ тасдиқ берилганда:

I) $n=1$ учун $p(n)$ тасдиқнинг тўғрилиги текширилади;

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

II) $n = k$ $(k \in N)$ учун $p(k)$ тасдиқ тўғри деб фараз қилинганда, ундан $n = k + 1$ учун $p(k+1)$ тасдиқнинг тўғрилиги келиб чиқса, бу $p(n)$ тасдиқ ҳар қандай натурал $n$ учун ўринли бўлади, деб хулоса чиқарилади. Бу тамойилнинг I) бандига индукция базиси, II) бандига эса, индукция қадами дейилади.

Баъзи ҳолларда $p(n)$ тасдиқни $n$ нинг фақат натурал қийматлари учунгина эмас, балки унинг $Z$ тўпламга қарашли барча қийматлари учун ҳам тўғрилигини исботлаш талаб қилинади. Бундай ҳолларда юқоридаги тўла математик индукция усулидан фойдаланиш мақсадга мувофиқ бўлади.

**3.11-мисол.** Математик индукция усулидан фойдаланиб, ихтиёрий $n$ $(n \in N)$ лар учун ушбу

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (3.10)$$

тенгликнинг тўғрилигини исботланг.

**Ечилиши. Бу** ерда ва бундан кейинги мисолларда тасдиқларни $p(n)$ орқали белгилаймиз.

I. $n = 1$ бўлганда , $S_1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$, демак $p(1)$ тасдиқ тўғри.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

II. Ихтиёрий $k$ натурал сон учун $p(k)$ тасдиқ ўринли, яъни

$$S_k = 1+2+3+....+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

тенглик ўринли бўлсин. Бу тенгликнинг иккала томонига $k+1$ ни қўшиб

$$S_k + k + 1 = 1+2+3+....+k+k+1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

ни ҳосил қиламиз.

Демак,

$$S_{k+1} = 1+2+3+....+k+k+1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \ ,$$

бу эса, $p(k+1)$ тасдиқнинг ўринли эканлигини исботлайди. Шундай қилиб, математик индукция усулига кўра (3.1) тенглик $\forall n \ (n \in N)$ лар учун тўғри экан.

**3.12-мисол.** Барча $n \ (n \in N)$ лар учун ушбу

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + .... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (3.11)$$

тенгликнинг тўғрилигини исботланг.

**Ечилиши.** I. $n = 1$ бўлганда , $S_1 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$ бўлади. Демак, $p(1)$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

тасдиқ тўғри.

II.Энди ихтиёрий $k$ натурал сон учун $p(k)$ тасдиқ , яъни

$$S_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \qquad (3.12)$$

тенглик ўринли бўлсин, деб фараз қилиб, ушбу

$$S_{k+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \qquad (3.13)$$

тенгликнинг тўғрилигини исботлаймиз. (3.12) тенгликнинг иккала томонига $(k+1)^2$ ни қўшиб,

$$S_k + (k+1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \qquad (3.14)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу тенгликнинг ўнг томонини қуйидагича шакл алмаштирамиз:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \qquad (3.15)$$

Шундай қилиб, (3.14) ва (3.15) дан (3.13) тенгликка эга бўламиз, яъни $p(k+1)$ тасдиқнинг ўринли эканлиги исбот бўлади.

Демак, математик индукция усулига кўра (3.11) тенглик $\forall\ n\ (n \in N)$ лар учун тўғри экан.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**3.13-мисол.** Барча $n$ $(n \in N)$ сонлар учун ушбу

$$S_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$$

соннинг 133 га каррали эканлигини исботланг.

**Ечилиши.** I. $n = 1$ бўлганда , $S_1 = 11^{1+2} + 12^{2+1} = 11^3 + 12^3 = 133 \cdot 23$ бўлиб, $S_1$ сон 133 га каррали. Демак, $p(1)$ тасдиқ тўғри.

II. $n = k$ натурал сон учун $S_k$ сон 133 га каррали бўлсин, яъни $S_k = 133 \cdot m$ $(m \in N)$ деб фараз қилиб, $n = k+1$ бўлганда $S_{k+1}$ соннинг 133 га каррали эканлигини, яъни $S_{k+1} = 133 \cdot q$ $(q \in N)$ бўлишини исботлаймиз.

Ҳақиқатан ҳам,

$$S_{k+1} = 11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11 \cdot 11^{k+2} + 12^2 \cdot 12^{2k+1} = 11 \cdot 11^{k+2} + 144 \cdot 12^{2k+1} =$$
$$= 11 \cdot (11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133 \cdot 12^{2k+1} = 11 \cdot S_k + 133 \cdot 12^{2k+1} = 11 \cdot 133 \cdot m + 133 \cdot 12^{2k+1} =$$
$$= 133 \cdot (11 \cdot m + 12^{2k+1}) = 133 \cdot q,$$

бунда $q = 11 \cdot m + 12^{2k+1}$

Демак, математик индукция усулига асосан, $\forall n$ $(n \in N)$ лар учун $S_n$ соннинг 133 га каррали эканлиги исботланди.

**3.14-мисол.** Ушбу

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdots\cos 2^{n}\alpha=\frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\cdot\sin\alpha}$$

айниятни исботланг.

**Исботи.** I. $n=0$ бўлганда, $\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2\cdot\sin\alpha}$ бўлади. Демак, $p(0)$ тасдиқ тўғри.

II. Энди ихтиёрий $k$ натурал сон учун $p(k)$ тасдиқ , яъни

$$\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdots\cos 2^{k}\alpha=\frac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\cdot\sin\alpha}$$

тенглик ўринли бўлсин, деб фараз қилиб. $n=k+1$ бўлганда $p(k+1)$ тасдиқнинг ўринли эканлигини исботлаймиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdots\cos 2^{k}\alpha\cdot\cos 2^{k+1}\alpha=\frac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\cdot\sin\alpha}\cdot\cos 2^{k+1}\alpha=\frac{\sin 2^{k+2}\alpha}{2^{k+2}\cdot\sin\alpha}.$$

Шундай қилиб, математик индукция усулига асосан, $n$ $(n\in Z_0)$ лар учун берилган айният ўринли экан.

**3.15-мисол.** Барча $n>1\,(n\in N)$ сонлар учун ушбу

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$$

тенгсизликнинг тўғрилигини исботланг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**Ечилиши.** Тенгсизликнинг чап томонини $S_n$ билан белгилаймиз.

I. $n=2$ бўлганда , $\frac{7}{12}=\frac{14}{24}>\frac{13}{24}$ бўлиб, бу эса, $p(2)$ тасдиқнинг ўринли эканлигини исботлайди.

II. $n=k$ натурал сон учун $S_k>\frac{13}{24}$ тенгсизлик тўғри деб фараз қилиб, $n=k+1$ бўлганда, $S_{k+1}>\frac{13}{24}$ тенгсизликнинг тўғрилигини исботлаймиз. Ушбу

$$S_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k} \text{ ва } S_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$$

ифодаларни таққослаймиз. Булардан

$$S_{k+1}-S_k=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}$$

$\forall k\ (k\in N)$ учун охирги тенгликнинг ўнг томони мусбат бўлганлигидан, $S_{k+1}>S_k$ бўлади. Ўз навбатида, $S_k>\frac{13}{24}$ бўлганлиги учун, $S_{k+1}>\frac{13}{24}$ тенгсизлик ҳам ўринли бўлади. Бу эса, $p(k+1)$ тасдиқнинг ўринли эканлигини исботлайди.

Шундай қилиб, математик индукция усулига асосан, $n>1$ $(n\in N)$ лар

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

учун берилган тенгсизлик ўринли экан.

**3.16-мисол.** $\{x_n\}$ кетма-кетлик, ушбу

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2} \quad (n > 2)$$

шартлар билан берилган бўлса, $x_n = \frac{1}{2}\left(3^{n-1} + 3\right)$ бўлишини исботланг.

**Исботи.** $x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2}$ рекуррент формуладан фойдаланиб,

$$x_3 = 4x_2 - 3x_1 = 6,\ x_4 = 4x_3 - 3x_2 = 15,\ x_5 = 4x_4 - 3x_3 = 42$$

сонларни топамиз. Топилган сонларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x_3 = \frac{1}{2}(3^{3-1} + 3) = 6,\ x_4 = \frac{1}{2}(3^{4-1} + 3) = 15,\ x_5 = \frac{1}{2}(3^{5-1} + 3) = 42\,.$$

Ушбу қонуниятдан $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг умумий ҳади учун

$$x_n = \frac{1}{2}\left(3^{n-1} + 3\right) \tag{3.16}$$

формулани ёзиш мумкин.

Математик индукция усулидан фойдаланиб, ихтиёрий $n$ $(n \in N)$ лар учун (3.16) формулани исботлаймиз.

I. $n = 1$ бўлганда , $x_1 = 2 = \frac{1}{2}(3^{1-1} + 3) = 2$ бўлади. Демак, $p(1)$ тасдиқ тўғри.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

II. $n = k$ натурал сон учун $x_k = \frac{1}{2}\left(3^{k-1} + 3\right)$ тенглик тўғри деб фараз қилиб.

$n = k + 1$ бўлганда, $x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(3^k + 3\right)$тенгликнинг тўғрилигини исботлаймиз.

Рекуррент формула ва юқорида қилинган фаразимиздан фойдалансак,

$$x_{k+1} = 4x_k - 3x_{k-1} = 2\left(3^{k-1} + 3\right) - \frac{3}{2}\left(3^{k-2} + 3\right) = 2 \cdot 3^{k-1} - \frac{1}{2} \cdot 3^{k-1} + 6 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}\left(3^k + 3\right).$$

Демак, математик индукция усулига асосан, $\forall n \ (n \in N)$ лар учун берилган (3.16) формула ўринли экан.

**3.17-мисол.** Ҳар қандай $n$ бурчакли кўпбурчакнинг ички бурчаклар йиғиндисининг $(n-2) \cdot 180^0$ га тенглигини исботланг.

**Исботи.** I. $n = 3$ бўлганда, учбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси $180^0$ га тенг. Демак, $p(3)$ тасдиқ тўғри.

II. $p(n)$ тасдиқни ихтиёрий $k \ (k < n)$натурал сон учун $(k-2) \cdot 180^0$ формула тўғри деб фараз қиламиз.

Маълумки, ҳар қандай $n \ (n \geq 4)$ бурчакли кўпбурчакнинг ҳеч бўлмаганда битта диагонали бутунлай унинг ичида ётади. Шунинг учун, ҳар қандай $n$ бурчакли кўпбурчакни унинг ичида ётувчи битта диагонали орқали

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Орқага
Тулик экран
Чиқиш

иккита кўпбурчакларга ажратиш мумкин. Агар бу кўбурчаклардан биттасиниг томонлари сони $k+1$ га тенг бўлса, қолган иккинчи кўбурчакнинг томонлари сони эса, $n-k+1$ га тенг бўлади, бунда иккала кўпбурчакнинг томонлар сони $n$ дан кичик бўлади. Юқоридаги мулоҳазаларимизга кўра, ҳосил бўлган кўпбурчакларнинг ички бурчаклари йиғиндиси, мос равишда, $(k-1)\cdot 180^0$ ва $(n-k-1)\cdot 180^0$ га тенг бўлади. $n$ бурчакли кўпбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси ҳосил бўлган кўпбурчаклар ички бурчаклари йиғиндисига тенг бўлади, яъни $(k-1)\cdot 180^0 + (n-k-1)\cdot 180^0 = (n-2)\cdot 180^0$.

Демак, ҳар қандай $n$ бурчакли кўпбурчакнинг ички бурчаклар йиғиндиси учун $(n-2)\cdot 180^0$ формула ўринли бўлар экан.

**3.18-мисол.** Ҳар қандай $a$ ва $b$ сонлар, ҳамда ихтиёрий $n$ $(n \in N)$ лар учун ушбу

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + + \cdots + C_n^m a^{n-m}b^m + \cdots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n \qquad (3.17)$$

формула ўринли эканлигини исботланг, бунда $C_n^m$ - $n$ та турли элементдан $m$ тадан такрорлашсиз группалашлар сони $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

**Исботи.** $n=1$ бўлганда , $(a+b)^1 = a+b$ бўлади. Демак, $p(1)$ тасдиқ тўғри.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

II. $n=k$ бўлганда, $p(k)$ тасдиқ ўринли, яъни

$$(a+b)^k = a^k + C_k^1 a^{k-1}b + C_k^2 a^{k-2}b^2 +$$

$$+ \cdots + C_k^m a^{k-m}b^m + \cdots + C_k^{k-1} ab^{k-1} + b^k \qquad (3.18)$$

формула ўринли бўлсин, деб фараз қиламиз. Энди $n=k+1$ бўлганда

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + C_{k+1}^2 a^{k-1}b^2 +$$

$$+ \cdots + C_{k+1}^m a^{k+1-m}b^m + \cdots + C_{k+1}^k ab^k + b^{k+1} \qquad (3.19)$$

формула ўринли эканлигини исботлаймиз. (3.18) нинг иккала томонини $a+b$ га кўпайтирамиз:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k (a+b) = (a^k + C_k^1 a^{k-1}b + C_k^2 a^{k-2}b^2 +$$

$$+ \cdots + C_k^m a^{k-m}b^m + \cdots + C_k^{k-1} ab^{k-1} + b^k) \cdot (a+b) =$$

$$= a^{k+1} + \left(1 + C_k^1\right) a^k b + \left(C_k^1 + C_k^2\right) a^{k-1}b^2 +$$

$$+ \cdots + \left(C_k^m + C_k^{m+1}\right) a^{k-m} b^{m+1} + \cdots + b^{k+1}.$$

Бунда $C_k^0 = 1$, $C_k^m + C_k^{m+1} = C_{k+1}^{m+1}$ эканлигини эътиборга олсак, натижада (3.19) га эга бўламиз.

Демак, математик индукция усулига асосан, $\forall n$ $(n \in N)$ лар учун

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Орқага
Тулик экран
Чикиш

берилган (3.17) формула ўринли экан.

## Мустақил ечиш учун мисоллар

**3.1.** Ушбу йиғиндиларни ҳисобланг:

$$1)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)},\quad 2)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)},$$

$$3)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)},\quad 4)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

**3.2.** $\{a_n\}$ ҳамма ҳадлари ва айирмаси $d$ нолдан фарқли арифметик прогрессия бўлганда қуйидаги тенгликларни исботланг:

$$1)\qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2}}=\frac{1}{2d}\left(\frac{1}{a_1 a_2}-\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}\right).$$

$$2)\qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3}}=\frac{1}{3d}\left(\frac{1}{a_1 a_2 a_3}-\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}}\right).$$

**3.3.** Ушбу тенгликларни исботланг:

$$1)\qquad \sum_{k=0}^{n}\cos(x+k\alpha)=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\cos(x+\frac{\pi}{2}\alpha)}{\sin\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq 2\pi k,\ \ k\in Z\,.$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

2) $$\sum_{k=0}^{n}\sin(x+k\alpha)=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\sin(\frac{\pi}{2}\alpha+x)}{\sin\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq 2\pi k,\ k\in Z$$

**3.4.** Қуйидаги йиғиндиларни ҳисобланг:

1) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}.$ 2) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}.$

3) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}.$ 4) $\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x$. 5) $\sum_{k=1}^{\infty}\cos^2 kx.$

**3.5.** Қуйидаги ифодаларнинг қандай $n$ та сонларнинг йиғиндисини ифодалашини кўрсатинг:

1) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$ 2) $\frac{n(4n^2-1)}{3};$ 3) $n^2(n+1);$

4) $\frac{(n-1)n(n+1)}{3};$ 5) $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2;$ 6) $\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12};$

7) $\frac{n}{4n+1};$ 8) $\frac{n+2}{2n+2};$ 9) $\frac{10^{n+1}-9n-10}{81};$

10) $3-\frac{2n+3}{2^n};$ 11) $\frac{1-(n+2)x^{n+1}(n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2},\ x\neq 1;$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

12) $\frac{x^{n+2}-(n+1)x^2+n^x}{(x-1)^2}$, $x\neq 1$; 13) $\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

14) $\frac{1}{18}-\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$; 15) $\frac{\sin 2nx}{2\sin x}$; 16) $\frac{n}{2}-\frac{\sin nx\cos(n+1)x}{2\sin x}$;

17) $\frac{\cos\frac{3(n+1)x}{2}\sin\frac{3}{2}nx}{4\sin\frac{3x}{2}}+\frac{3\cos\frac{n+1}{3}x\sin\frac{nx}{2}}{4\sin\frac{x}{2}}$.

Математик индукция усулидан фойдаланиб, ихтиёрий $n$ $(n\in N)$ лар учун қуйида берилган тенгликларнинг тўғрилигини исботланг.

**3.6.** $1+3+5+....+(2n-1)=n^2$.

**3.7.** $1^2+3^2+5^2+....+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$.

**3.8.** $1^3+2^3+3^3...+n^3=(1+2+3+....+n)^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

**3.9.** $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2+....+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$.

**3.10.** $1^3+3^3+5^3+....+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$.

**3.11.** $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+....+(n-1)\cdot n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**3.12.** $1\cdot4+2\cdot7+3\cdot10+....+n\cdot(3n+1)=n\cdot\left(n+1\right)^2.$

**3.13.** $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+....+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)\left(n+3\right)}{4}.$

**3.14.** $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot\left(n+1\right)}=\dfrac{n}{n+1}.$

**3.15.** $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots+\dfrac{1}{\left(2n-1\right)\cdot\left(2n+1\right)}=\dfrac{n}{2n+1}.$

**3.16.** $\dfrac{1}{1\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot9}+\dfrac{1}{9\cdot13}+\cdots+\dfrac{1}{\left(4n-3\right)\cdot\left(4n+1\right)}=\dfrac{n}{4n+1}.$

**3.17.** $\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot10}+\cdots+\dfrac{1}{\left(3n-2\right)\cdot\left(3n+1\right)}=\dfrac{n}{3n+1}.$

**3.18.** $\dfrac{1^2}{1\cdot3}+\dfrac{2^2}{3\cdot5}+\dfrac{3^2}{5\cdot7}+\cdots+\dfrac{n^2}{\left(2n-1\right)\cdot\left(2n+1\right)}=\dfrac{n\left(n+1\right)}{2\cdot(2n+1)}.$

**3.19.** $(1-\dfrac{1}{4})\cdot(1-\dfrac{1}{9})\cdots\left(1-\dfrac{1}{\left(n-1\right)^2}\right)=\dfrac{n+2}{2n+2}.$

**3.20.** $x+2x^2+3x^3+....+nx^n=\dfrac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2},\quad x\neq1.$

**3.21.** $1+x+x^2+....+x^n=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x},\quad x\neq1.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**3.22.** $1+2x+3x^2+....+nx^{n-1}=\dfrac{1+(n-1)x^n-nx^{n-1}}{(1-x)^2}, \quad x\neq 1.$

**3.23.** $x+x^3+x^5+....+x^{2n-1}=\dfrac{x-x^{2n+1}}{1-x^2}, \quad x\neq \pm 1.$

**3.24.** $1+3x^2+5x^4+....+(2n-1)x^{2n-2}=\dfrac{1+x^2+(2n-1)x^{2n+2}-(2n+1)x^{2n}}{(1-x^2)^2}, \quad x\neq \pm 1.$

**3.25.** $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}+\cdots+\dfrac{2^n}{1+x^{2^n}}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}.$

Математик индукция усулидан фойдаланиб, ихтиёрий $n$ $(n\in N)$ лар учун қуйида берилган тенгсизликларнинг тўғрилигини исботланг.

**3.26.** $2^n>2n+1, \quad n>3.$ **3.27.** $2^n>n^3, \quad n\geq 10.$

**3.28.** $(1+a)^n\geq 1+na, \quad a>-1.$ **3.29.** $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}, \quad n>1.$

**3.30.** $\sqrt{n}<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}, \quad n>1.$

**3.31.** $\dfrac{4^n}{n+1}<\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}, \quad n>1.$ **3.32.** $2\leq\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<3.$

**3.33.** $n!>\left(\dfrac{n}{3}\right)^n.$ **3.34.** $n!>n^{\frac{n}{2}}, \quad n>2.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**3.35.** $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^2.$ **3.36.** $2^n \cdot n! < n^n,\ n > 2.$

**3.37.** $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},\ x_i > 0,\ i = 1,\ldots,n.$

**3.38.** $\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \le$

$$\le \sqrt{\frac{x^2{}_1 + x^2{}_2 + \cdots + x^2{}_n}{n}}, \quad 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n.$$

Математик индукция усулидан фойдаланиб, ихтиёрий $n$ $(n \in N)$ лар учун қуйида берилган тенгликларнинг тўғрилигини исботланг.

**3.39.** $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \sin\frac{(n+1)x}{2} \cdot \sin\frac{nx}{2} \cdot \left(\sin\frac{x}{2}\right)^{-1}.$

**3.40.** $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2(n-1)x}{2\sin x}.$

**3.41.** $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \sin\frac{2n+1}{2}x \cdot \left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{-1}.$

**3.42.** $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**3.43.** $\sin x+2\sin 2x+\cdots+n\sin nx=\dfrac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}.$

**3.44.** $\cos x+2\cos 2x+\cdots+n\cos nx=\dfrac{(n+1)\cos nx-n\cos(n+1)x-1}{4\sin\dfrac{x}{2}}.$

**3.45.** $\dfrac{1}{2}tg\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2^2}tg\dfrac{x}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}tg\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{1}{2^n}ctg\dfrac{x}{2^n}-ctgx,\quad x\neq m\pi,\ m\in Z.$

Математик индукция усулидан фойдаланиб, ихтиёрий $n\ (n\in N)$ лар учун қуйидаги берилган муносабатларнинг тўғрилигини исботланг ($a$ соннинг $m$ га қолдиқсиз бўлиниши $a\vdots m$ каби белгиланади).

**3.46.** $\left(6^{2n}-1\right)\vdots 35.$

**3.47.** $\left(4^n+15n-1\right)\vdots 9.$

**3.48.** $\left(3^{2n+1}+40n-67\right)\vdots 64.$

**3.48.** $(n^3+11n)\vdots 6.$

**3.50.** $\left(7^n+3n-1\right)\vdots 9.$

**3.51.** $\left(3^{2n+3}-3\right)\vdots 8.$

**3.52.** $\left(8^{n+2}+9^{2n+1}\right)\vdots 73.$

**3.53.** Айланага ички чизилган $2^n$ томонли мунтазам кўпбурчакнинг томони

$$a_{2^n}=R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{(n-2)\quad ma\quad 2}}$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

формула билан ифодаланишини исботланг, бунда $R$ – айлана радиуси.

**3.54.** $P$ периметрли мунтазам $2^n$ бурчакка ички ва ташқи чизилган айланаларнинг $r_n$ ва $R_n$ радиусларини ҳисоблаш қоидасини кўрсатинг.

**3.55**. Ихтиёрий $n$ та квадрат берилган. Уларни шундай қисмларга бўлиш мумкинлигини исботлангки, ҳосил бўлган қисмлардан янги квадрат ясаш мумкин бўлсин.

**3.56.**Учта қирраси перпендикуляр бўлган параллелепипедлардан ҳажми энг катта бўлганини топинг.

**3.57.** Битта текисликда ётиб, бир нуқтадан ўтувчи $n$ та тўғри чизиқ бу текисликни $2n$ қисмга бўлишини исботланг.

**3.58.** Ҳар қандай қаварик $n$ бурчак учун $D_n = \frac{1}{2}n(n-3)$ формула ўринли бўлишини исботланг, бунда $D_n$ - кўпбурчак диагоналларининг сони.

**3.59.** $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ геометрик прогрессияда $b_n = b_1 q^{n-1}$ бўлишини исботланг, бунда $q$ – айирма, $n \in N$.

**3.60.** $\{x_n\}$ кетма-кетлик ушбу

$$x_0 = 2,\ x_1 = \frac{5}{2},\ x_n = \frac{5}{2}x_{n-1} - x_{n-2} \quad (n > 1)$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

шартлар билан берилган бўлса, $x_n = 2^n + 2^{-n}$ бўлишини исботланг.

**3.61.** $\{x_n\}$ кетма-кетлик ушбу

$$x_0 = 2,\ x_1 = 3,\ x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1}$$

шартлар билан берилган бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг $n$- ҳади учун формула топинг.

**3.62.** $\{x_n\}$ кетма-кетлик ушбу

$$x_1 = 2,\ x_2 = 7,\ x_{n+1} = 3x_n + 1$$

шартлар билан берилган бўлса, $x_n = \frac{1}{2}\left(5 \cdot 3^{n-1} - 1\right)$ бўлишини исботланг.

**3.63.** $\{x_n\}$ кетма-кетликда ушбу

$$x_0 = 1,\ x_1 = 1,\ x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$$

шартлар билан берилган бўлса, $x_{2n+1} = 1 + x_2 + x_4 + \ldots + x_{2n}$ тенгликни исботланг.

**3.64.** $\{x_n\}$ кетма-кетлик ушбу

$$x_0 = 1,\ x_1 = 1,\ x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$$

шартлар билан берилган бўлса, $x_n x_{n+1} = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + \ldots + x_n{}^2$ тенгликни исботланг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

## Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

**3.1.** 1) $\frac{n}{3n+1}$; 2) $\frac{n}{4n+1}$; 3) $\frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}$; 4) $\frac{1}{18}-\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$. **3.4**

1) $\frac{10^{n+1}-9n-10}{81}$; 2) $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}(-1)^n$; 3) $\frac{15+(2n-1)2^{2-2n}-(2n+1)2^{4-2n}}{9}$; 4) $\frac{\sin^2 nx}{\sin x}$;

5) $\frac{n}{2}+\frac{\sin nx\cdot\cos(n+1)x}{2\sin x}$. **3.5.** 1) $1^2+2^2+\ldots+n^2$; 2) $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2$;

3) $1\cdot 2+2\cdot 5+\ldots+n(3n-1)$; 4) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-1)n$;

5) $1^3+2^3+\ldots+n^3$; 6) $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+3\cdot 4^2+\ldots+(n-1)n^2$; 7)

$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; 8) $\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$; 9)

$1+11+111+\ldots+\underbrace{11\ldots1}_{n}$; 10) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}$; 11) $1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)x^n$;

12) $x^n+2x^{n-1}+\ldots+(n-1)x^2+nx$; 13) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}$; 14)

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$; 15) $\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x$; 16) $\sum_{k=1}^{n}\sin^2 kx$; 17) $\sum_{k=1}^{n}\cos^3 kx$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

# I I боб. ФУНКЦИЯ ВА УНИНГ ЛИМИТИ. ФУНКЦИЯНИНГ УЗЛУКСИЗЛИГИ

## 4-§. ФУНКЦИЯ ТУШУНЧАСИ

**4.1. Функциянинг таърифи.** $X$ ва $Y$ ҳақиқий сонлар тўпламлари берилган бўлиб, улар $R$ нинг бўш бўлмаган қисм тўпламлари $(X\subset R,\ \ Y\subset R)$, $x$ ва $y$ лар эса мос равишда уларнинг элементлари $(x\in X,\ \ y\in Y)$ бўлсин.

**4.1-таъриф.** Агар $X$ тўпламдаги ҳар бир $x$ сонга бирор қоида ёки қонунга кўра $Y$ тўпламдан битта $y$ сон мос қўйилса, $X$ тўпламда $y$ *функция берилган (аниқланган)* деб аталади ва у символик равишда $f:x\to y$ ёки $y=f(x)$ каби белгиланади.

Бунда $x$- аргумент ёки эркли ўзгарувчи, $y$- функция ёки эрксиз ўзгарувчи, $f$ - харктеристика (қонун ёки қоида); $X$- тўплам функциянинг *аниқланиш соҳаси*, $Y=\{y:y=f(x),\ x\in X\}$ тўплам эса, унинг *қийматлари тўплами (ўзгариш соҳаси)* дейилади. Бундан кейин биз функциянинг *аниқланиш соҳасини* $D(f)$, *қийматлар тўпламини эса,* $E(f)$ билан

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

белгилаймиз.

**4.2. Функциянинг берилиш усуллари.** Функция умумий ҳолда *аналитик, жадвал, график ва сўз усуллари* билан берилиши мумкин.

**Аналитик усул.** Кўпинча $x$ ва $y$ ўзгарувчилар орасидаги боғланиш формулалар ёрдамида ифодаланади. Бунда аргумент $x$ нинг ҳар бир қийматига мос келадиган $y$ функциянинг қиймати, $x$ устида аналитик амаллар - қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш, илдиздан чиқариш, логарифмлаш ва ҳ.к. амалларни бажариш натижасида топилади. Одатда бундай усул - функциянинг аналитик усулда берилиши дейилади.

*Функция аналитик усулда қуйидаги шаклларда берилиши мумкин:*

1) $y=f(x)$ ёки $x=g(y)$ шаклдаги формулалар билан берилган функциялар *ошкор шаклда берилган функциялар* дейилади. Масалан, $y=6x-2,\ y=x^2+\ln x$ функциялар ошкор шаклда берилган. Аналитик усулда берилган функция бир нечта формулалар воситасида ёзилиши ҳам мумкин, масалан:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & -\pi\le x\le 0\,,\\ 1, & 0<x<1,\\ \dfrac{1}{x}, & 1\le x\le 2.\end{cases}$$

Бу функциянинг аниқланиш соҳаси $[-\pi;2]$ бўлиб, у учта формула ёрдамида берилган.

2) Агар $x$ ва $y$ ўзгарувчилар қандайдир $F(x,y)=0$ тенглама билан боғланган, яъни тенглама $y$ га нисбатан ечилмаган бўлса, у ҳолда функция *ошкормас* шаклда берилган дейилади. Масалан, $x^2+y^2-R^2=0$ тенглама ошкормас шаклда берилган функцияни ифодалайди, уни $y$ га нисбатан ечиш натижасида иккита функцияни ҳосил қиламиз:

$$y=\pm\sqrt{R^2-x^2}\,.$$

Баъзи бир ошкормас шаклдаги функцияларни $y=f(x)$ (ошкор) шаклда ифодалаш ҳам мумкин. Ҳар қандай ошкор шаклдаги $y=f(x)$ функцияни ошкормас шаклда ёзиш ҳам мумкин: $y-f(x)=0$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

3) Параметрик шаклда, яъни $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\varphi(t) \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$ шаклда берилиши. $y=f(x)$ функцияда $x$ нинг $y$ га мос қўйилиши *параметр* деб аталадиган учинчи бир t ўзгарувчи ёрдамида ифодаланиши мумкин:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta,$$

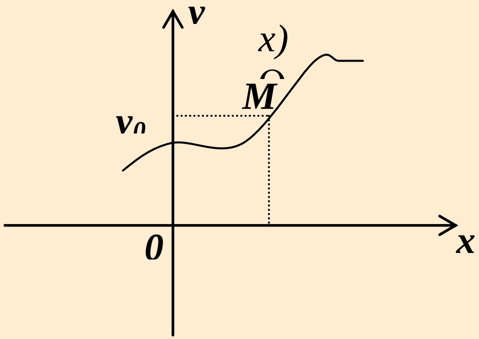
бу ерда $\varphi(t)$ ва $\psi(\mathrm{t})$ лар ҳам аналитик усулда берилган функциялар бўлиб, $D(\varphi)\cap D(\psi)\neq\varnothing$ деб ҳисобланади. Функциялар берилишининг энг кўп учрайдиган усули аналитик усулдир. Бу усул математик анализда жуда кўп ишлатилади.

**Жадвал усул**. Баъзи ҳолларда $x\in X$ ва $y\in Y$ ўзгарувчилар орасидаги боғланиш формулалар ёрдамида берилмасдан, жадвал орқали берилган бўлиши ҳам мумкин. Масалан, $t$ - январ ойининг биринчи декадаси (10 кунлиги) кунлари номери бўлса, $T$ - шу номерли куни соат $16^{00}$ да Самарқанд шаҳрида кузатилган ҳаво ҳароратини билдирсин, натижада қуйидаги жадвалга келамиз:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $-3^0$ | $-5^0$ | $+2^0$ | $+5^0$ | $+1^0$ | $0^0$ | $-2^0$ | $-5^0$ | $-3^0$ | $-1^0$ |

бунда $t$ - аргумент, $T$ - функция бўлади. Боғланишнинг бундай берилиши, функциянинг жадвал усулда берилиши деб аталади. Бу усулдан, кўпинча, миқдорлар орасида тажрибалар ўтказиш жараёнида фойдаланилади.



4.1-чизма.

Жадвал усулининг қулайлиги шундан иборатки, аргументнинг у ёки бу аниқ қийматларида функцияни ҳисобламасдан, унинг қийматларини аниқлаш

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

мумкин. Жадвал усулининг қулай бўлмаган томони шундан иборатки, аргументнинг ўзгариши билан функциянинг ўзгариш характерини тўлиқ аниқлаб бўлмайди.

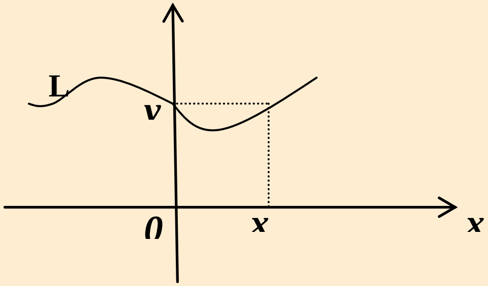
**График усул**. $xOy$ координаталар текислигида $x$ нинг $X$ тўплам $\left(X = D(f)\right)$ дан олинган ҳар бир қиймати учун $M(x,y)$ нуқта ясалади, бунда нуқтанинг абсциссаси $x$, ординатаси эса $y$ бўлиб у , $y$ функциянинг $x$ га мос келган қийматига тенг. Ясалган нуқталарни бирлаштирсак, натижада бирор чизиқ ҳосил бўлади, ҳосил бўлган бу чизиқ берилган функциянинг графиги деб қаралади (4.1-чизма).

**4.2-таъриф**. Текисликнинг $\left(x, f(x)\right)$ каби аниқланган нуқталаридан иборат ушбу

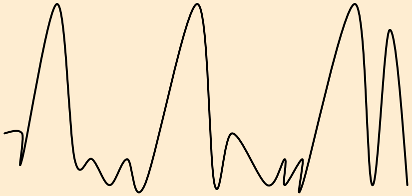
$$\{(x, f(x))\} = \{(x, f(x)) : x \in X,\ y = f(x) \in Y\}$$

тўплам, функциянинг графиги деб аталади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



4.2-чизма.



4.3-чизма.

$xOy$ текислигида шундай $L$ чизиқ берилган бўлсин, $Ox$ ўқда жойлашган нуқталардан шу ўққа ўтказилган перпендикуляр бу $L$ чизиқни фақат битта нуқтада кесиб ўтсин.

$Ox$ ўқдаги бундай нуқталардан иборат тўпламни $X$ орқали белгилаймиз. $X$ тўпламдан ихтиёрий $x$ ни олиб, бу нуқтадан $Ox$ ўққа перпендикуляр ўтказамиз. Бу перпендикулярнинг $L$ чизиқ билан кесишган нуқтасининг ординатасини $y$ билан белгилаймиз. Натижада $X$ тўпламдан олинган ҳар бир $x$ га юқорида кўрсатилган қоидага кўра битта $y$ мос қўйилиб, функция ҳосил бўлади. Бунда $x$ ва $y$ ўзгарувчилар орасидаги боғланиш $L$ чизиқ ёрдамида берилган бўлади (4.2-чизма). Одатда функциянинг бундай берилиши унинг график усулда берилиши деб аталади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Функциянинг график усулда берилиши илмий тадқиқотларда ва ҳозирги замон ишлаб чиқариши жараёнларида кенг қўлланилади. Масалан, тиббиётда учрайдиган электрокардиограмма графиги-юрак мускулларидаги ток импульсларининг вақт бўйича ўзгаришини кўрсатади. Бу график аналитик тарзда ёзилиши шарт бўлмаган қандайдир $y=f(x)$ функциянинг графигидир, бу функциянинг формуласи табиб учун унчалик қизиқарли эмас (4.3-чизма).

Функциянинг график усулда берилишининг камчилиги шундан иборатки, аргументнинг сонли қийматида берилган функциянинг аниқ шаклини ҳар доим топиб бўлмайди, лекин бу усулнинг бошқа усуллардан афзаллиги унинг таъсири яққол кўзга кўриниб туришидадир.

**Сўзлар орқали ифодаланадиган усул.** Бу усулда $(x\in X,\quad y\in Y)$ ўзгарувчилар ўртасидаги функционал боғланиш фақат сўзлар орқали ифодаланади. Масалан:

1) Ҳар бир рационал сонга 1 ни, ҳар бир иррационал сонга 0 ни мос қўйиш натижасида ҳам функция ҳосил бўлади. Бу функция, одатда, Дирихле функцияси дейилади ва $D(x)$ каби белгиланади:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса.}\end{cases}$$

2) $f$-ҳар бир ҳақиқий $x$ сонга унинг бутун қисми $[x]$ ни мос қўювчи қоида бўлсин. Демак, $f: x \to [x]$ ёки $y=[x]$ функцияга эга бўламиз.

3) $f$-ҳар бир ҳақиқий $x$ сонга унинг каср қисми $\{x\}$ ни мос қўядиган қоида бўлсин, яъни $f: x \to \{x\}$. Бу ҳолда биз $y=\{x\}$ функцияга эга бўламиз.

### 4.3. Функциянинг аниқланиш соҳаси.

**4.3-таъриф.** Аргументнинг функция маъносини йўқотмайдиган (яъни чексиз ёки мавҳумликка айлантирмайдиган) ҳамма қийматлари тўплами, шу *функциянинг аниқланиш соҳаси* дейилади.

Агар функция жадвал шаклида берилса, унинг аниқланиш соҳаси $x$ нинг жадвалда кўрсатилган қийматларидан иборат бўлади.

Агар функция график шаклда берилса, унинг аниқланиш соҳаси графикдан кўриниб туради.

Функция аналитик шаклда берилганда эса, $x$ нинг функцияни аниқлайдиган формула маънога эга бўладиган қийматлари тўплами шу функциянинг аниқланиш соҳаси бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Функциянинг аниқланиш соҳасини топиш вақтида функция кўринишини бошқа шаклга келтириш тавсия этилмайди.

**4.1-мисол** $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-6x+8}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

**Ечилиши.** $\dfrac{x^3-1}{x^2-6x+8}$ функциянинг маҳражи нолга айланадиган нуқталарда функция маънога эга бўлмайди. Махражни нолга айлантирадиган нуқталарни топиш учун $x^2-6x+8=0$ тенгламани ечамиз. Бу тенгламанинг ечими $x_1=2,\ \ x_2=4$ лардан иборат.

Демак, бу функциянинг аниқланиш соҳасини топишда $x^2-6x+8\neq 0$ ёки $x_1\neq 2,\ \ x_2\neq 4$ шартларнинг бажарилишини талаб қилиш керак. Шундай қилиб, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси учта оралиқлар бирлашмасидан иборат, яъни

$$D(f)=(-\infty;2)\cup(2;4)\cup(4;+\infty).$$

Хулоса. Функциялар каср шаклида берилган бўлса, унинг аниқланиш соҳаси аргументнинг каср махражини нолдан фарқли қиладиган қийматлари тўпламидан иборат бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**4.2-мисол.** Ушбу $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{7-x}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

**Ечилиши.** Берилган функциянинг аниқланиш соҳаси $x$ нинг иккала қўшилувчининг ҳам ҳақиқий қийматларни қабул қиладиган қийматлар тўпламидан иборат. Бу қийматлар тўпламини топиш учун

$$\begin{cases} x-2\geq 0, \\ 7-x\geq 0 \end{cases}$$

шартларнинг бажарилишини талаб қилиш керак. Бу тенгсизликлар системасини ечиш натижасида $x\geq 2;\quad x\leq 7$ бўлишини топамиз.

Шундай қилиб, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси $[2;7]$ сегментдан иборат бўлар экан.

**4.3-мисол.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

**Ечилиши.** Функциянинг берилишига кўра, биринчидан, $x\geq 0$ бўлиши; иккинчидан эса, $x\neq -1$ шартнинг бажарилиши талаб қилинади. Бу икки шартлардан, функция маънога эга бўлиши учун $x\geq 0$ шартнинг бажарилиши етарли. Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f)=[0;+\infty)$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

бўлади.

**4.4- мисол.** $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x-2}{x-3}}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

**Ечилиши**. Берилган илдиз остидаги ифоданинг қиймати манфий бўлса ҳам, функция маънога эга бўлади, чунки илдиз кўрсаткичи тоқ сондир. Бу функция маънога эга бўлиши учун $x\neq 3$ шарт бажарилиши етарли. Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси

$$D(f)=(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$$

бўлади.

**4.5-мисол.** $f(x)=\sqrt{2\sin x-1}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

**Ечилиши.** Берилган функция жуфт даражали илдиз орқали берилгани учун $2\sin x-1\geq 0$ шарт бажарилганда, функция маънога эга бўлади. Бу тенгсизликни ечамиз:

$$\sin x\geq\frac{1}{2},\quad \frac{\pi}{6}+2\pi n\leq x\leq\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\quad n\in Z.$$

Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси

$$D(f)=[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n],\quad n\in Z.$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**Хулоса.** Юқорида кўрсатилган мисолларнинг ечилишидан қуйидаги хулосани чиқариш мумкин: функция $f(x)=\sqrt[2n]{\varphi(x)}\quad(n\in N)$ шаклда берилганда, унинг мавжуд бўлиши учун $\varphi(x)\geq 0$ шарт бажарилиши керак.

**4.6-мисол**. $f(x)=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

**Ечилиши.** Берилган функция маънога эга бўлиши учун, биринчидан, $\lg\dfrac{5x-x^2}{4}\geq 0$ шарт бажарилиши керак. Иккинчидан, бу шарт бажарилиши учун $\dfrac{5x-x^2}{4}\geq 1$ ёки $x^2-5x+4\leq 0$ бўлиши керак. Кейинги тенгсизликнинг ечими $1\leq x\leq 4$. Шундай қилиб, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси

$$D(f)=[1;4]$$

экан.

**4.7-мисол.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}}{\lg(x-2)}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

**Ечилиши**. Берилган функциянинг кўринишини эътиборга олганда, унинг мавжуд бўлиши учун, биринчидан, $4-x\geq 0$ ёки $x\leq 4;$ иккинчидан,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$x-2>0$ ёки $x>2$; учинчидан, $\lg(x-2)\neq 0$ ёки $x\neq 3$ шартлар бажарилиши керак. Бу шартларни эътиборга олсак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси

$$D(f)=(2;3)\cup(3;4]$$

бўлади.

**4.8-мисол.** $f(x)=\log_{x^3}(x^2-6x+8)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

**Ечилиши.** Берилган функциянинг мавжуд бўлиши учун, биринчидан, $x^2-6x+8>0$ ёки $(x-2)(x-4)>0$ ёки $-\infty<x<2,\ 4<x<\infty$ бўлиши; иккинчидан, $x^3>0,\ x^3\neq 1$ ёки $x>0,\ x\neq 1$ бўлиши керак. $x$ нинг бу шартларни бир вақтда қаноатлантирадиган барча қийматлари тўплами

$$D(f)=(0;1)\cup(1;2)\cup(4;\infty)$$

бўлади.

**4.9-мисол**. $f(x)=\log_{x^4}(6-x)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

**Ечилиши.** Берилган функция маънога эга бўлиши учун

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$6-x>0,\ x\neq 0,\ x^4\neq 1$ ёки $x<6,\ x\neq 0$ шартлар бажарилиши керак. Бу шартлар бажарилганда, берилган функция аниқланиш соҳаси

$$D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;6).$$

**Хулоса**. Шундай қилиб, юқоридаги 4.8-, 4.9- мисолларнинг ечилишини эътиборга олган ҳолда қуйидаги хулосани чиқариш мумкин: $\log_{\varphi(x)} f(x)$ функция маънога эга бўлиши учун, $f(x)>0$, $\varphi(x)>0$ ва $\varphi(x)\neq 1$ шартларнинг бажарилишини талаб қилиш етарли.

**4.10-мисол.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{6x-6}}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

**Ечилиши.** Берилган функция маънога эга бўлиши учун, биринчидан, $x-1\geq 0$ ёки $x\geq 1$ бўлиши; иккинчидан, $x+4\geq 0$ ёки $x\geq -4$ бўлиши; учинчидан, $\sqrt{x+4}-\sqrt{6x-6}\neq 0$ ёки $x\neq 2$ бўлиши керак. Юқоридаги шартларни эътиборга олган ҳолда, функциянинг аниқланиш соҳаси

$$D(f)=[1;2)\cup(2;+\infty)$$

эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

**4.11-мисол.** $f(x)=\arccos\dfrac{3}{4+2\sin x}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

**Ечилиши**. Биринчидан, арккосинус функция маънога эга бўлиши учун унинг белгиси остидаги ифоданинг абсолют қиймати 1 дан катта бўлмаслиги; яъни $-1\leq\dfrac{3}{4+2\sin x}\leq 1$ бўлиши керак. $\forall x$ учун $4+2\sin x>0$ бўлгани учун, юқоридаги шарт $\dfrac{3}{4+2\sin x}\leq 1$ шартга тенг кучли. Бундан $3\leq 4+2\sin x$ ёки $\sin x\geq-\dfrac{1}{2}$. Бу тенгсизликни ечиш натижасида,

$$-\frac{\pi}{6}+2\pi k\leq x\leq\frac{7\pi}{6}+2\pi k\quad(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$$

эканлигини топамиз.

**4.12-мисол**. $f(x)=\dfrac{\arcsin(x-2)+\sqrt{9-x^2}}{\log_3(5-2x)}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

**Ечилиши.** Биринчидан, арксинус функция маънога эга бўлиши учун унинг белгиси остидаги ифоданинг абсолют қиймати 1 дан катта бўлмаслиги;

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

яъни $|x-2|\leq 1$ ёки $1\leq x\leq 3$ бўлиши; иккинчидан $9-x^2\geq 0$ ёки $-3\leq x\leq 3$ бўлиши; учинчидан эса, $5-2x>0$ ёки $\log_3(5-2x)\neq 0$ ва $x<2{,}5$ ёки $x\neq 2$ бўлиши керак. $x$ нинг юқоридаги учта шартни бир вақтда қаноатлантирадиган барча қийматлари тўплами

$$[1;2)\cup(2;2{,}5)$$

дан иборат.

Шундай қилиб, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси

$$D(f)=[1;2)\cup(2;2{,}5).$$

**Хулоса**. $f(x)=\varphi(x)\pm\phi(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси $\varphi(x)$ ва $\phi(x)$ функциялар аниқланиш соҳаларининг умумий қисмидан иборат.

**6.13-мисол.** $f(x)=(4-x)^{\sqrt{x-3}}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

**Ечилиши.** Биринчидан, $x\geq 3$, иккинчидан, $4-x\geq 0$ ёки $x\leq 4$ бўлиши керак. $x$ нинг бу икки шартни қаноатлантирадиган қийматлар тўплами $[3;4]$ сегментдан иборат.

Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси

$$D(f)=[3;4]$$

бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**Хулоса**. Функция $U(x)^{V(x)}$ $(U(x)\geq 0)$ шаклида берилганда унинг асоси ва даража кўрсаткичи аргументнинг бир хил қийматларида бир вақтда нолга айланмаслиги керак ($0^0$ шаклдаги аниқмаслик).

**4.14-мисол.** $|f|=9-x^2$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

**Ечилиши.** Берилган функция шаклига кўра $|f|$ - манфий бўлмаган сон бўлгани учун $9-x^2\geq 0$ ёки $|x|\leq 3$ бўлиши керак.

Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси

$$D(f)=[-3;3].$$

**4.15-мисол.** $|f|=\lg(5-x)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

**Ечилиши**. Берилган функциянинг аниқланиш соҳаси

$$\begin{cases}\lg(5-x)\geq 0,\\ 5-x>0\end{cases}$$

системанинг ечимидан иборат. Системанинг биринчисидан, $5-x\geq 1$ ёки $x\leq 4$ бўлиши; иккинчисидан эса $5-x>0$ ёки $x<5$ бўлиши келиб чиқади.

Демак, $x\leq 4$. Берилган функциянинг аниқланиш соҳаси

$$D(|f|)=(-\infty;4].$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**4.4. Функциянинг ўзгариш соҳаси.** $y = f(x)$ функция $x \in X$ тўпламда берилган бўлсин.

Функциянинг ўзгариш соҳаси дискрет нуқталардан, нуқтадан, оралиқ, сегмент, бир неча оралиқлардан ва ҳ.к. иборат бўлиши мумкин. Жадвал ёки график усулда берилган функцияларнинг ўзгариш соҳалари ўз-ўзидан маълум. Аналитик усулда, яъни $y = f(x)$ шаклда берилганда функциянинг ўзгариш соҳасини топиш учун $y$ нинг $f(x) = y$ тенглама ҳақиқий ечимга эга бўладиган барча қийматларини топиш талаб қилинади.

Функциянинг ўзгариш соҳасини топишда қуйидаги тасдиқларни эътиборга олиш лозим:

$1^0$. Агар берилган функция (бу ерда узлуксиз функция назарда тутилади) қаралган соҳада энг кичик ва энг катта қийматга эришса, $f(x)$ функциянинг ўзгариш соҳаси, унинг энг кичик ва энг катта қиймати ҳамда улар орасидаги барча сонлар тўпламидан иборат бўлади.

**4.16-мисол.** $[0;\sqrt{2}]$ кесмада $f(x) = x^4 + 9$ функциянинг ўзгариш соҳасини топинг.

**Ечилиши.** $[0;\sqrt{2}]$ кесмада берилган функциянинг энг кичик қиймати

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$f(0)=9$, энг катта қиймати $f\left(\sqrt{2}\right)=13$ бўлгани учун, унинг ўзгариш соҳаси

$$E(f)=[9;\,13]$$

дан иборат.

$2^0$. Агар функция энг кичик (катта) қийматга эга бўлса-ю, аммо энг катта (кичик) қийматга эришмаса (яъни у чексиз орта (камая) борса), функциянинг ўзгариш соҳаси функциянинг энг кичик (катта) қиймати ва шу қийматдан катта (кичик) барча сонлар тўпламидан иборат бўлади.

**4.17-мисол.** $f(x)=ax^2+bx+c$ функциянинг ўзгариш соҳасини топинг.

**Ечилиши.** Берилган функцияни

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

шаклда ифодалаймиз.

Агар $a>0$ $(a<0)$ бўлса, берилган функция $x=-\frac{b}{2a}$ нуқтада энг кичик $f_{\min}=f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{4ac-b^2}{4a}$ (энг катта $f_{\max}=f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{4ac-b^2}{4a}$) қийматига эришади, аммо энг катта (кичик) қийматига эга бўлмайди.

Демак, $a>0$ $(a<0)$ бўлганда берилган функциянинг ўзгариш соҳаси

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$E(f)=\left[\frac{4ac-b^2}{4a};+\infty\right) \quad \left(E(f)=\left(-\infty;\frac{4ac-b^2}{4a}\right]\right)$$

дан иборат бўлади.

**4.18-мисол**. $f(x)=\sqrt{x^2-4x+9}$ функциянинг ўзгариш соҳасини топинг.

**Ечилиши.** Квадрат илдиз остидаги $x^2-4x+9$ ифодада $a=1>0$ ва $f(x)=\sqrt{x^2-4x+9}=\sqrt{(x-2)^2+5}$ эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда (4.17-мисолга қаранг)функция $x=2$ нуқтада энг кичик $f_{\min}(2)=\sqrt{5}$ қийматига эришади, лекин унинг энг катта қиймати йўқ.

Демак, берилган функциянинг ўзгариш соҳаси, $2^0$- тасдиққа асосан,

$$E(f)=[\sqrt{5};\infty)$$

дан иборат бўлади.

$3^0$. Агар $y=f(x)$ функция берилган бўлиб, уни $x$ га нисбатан ечиш мумкин бўлса, яъни $x=\varphi(y)$ шаклда ёзиш мумкин бўлса, $y=f(x)$ функциянинг ўзгариш соҳасини топиш учун, $x=\varphi(y)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топиш етарли. Демак, $x=\varphi(y)$ функциянинг аниқланиш соҳаси $y=f(x)$ функциянинг ўзгариш соҳасидан иборат бўлади: $D(\varphi)=E(f)$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**4.19-мисол.** $y=x^2-8x+7$ функциянинг ўзгариш соҳасини топинг.

**Ечилиши.** Ушбу $x^2-8x+7-y=0$ тенгламани $x$ га нисбатан ечамиз:

$$x_{1,2}=4\pm\sqrt{9+y}$$

Берилган функциянинг мавжудлик соҳаси $9+y\geq 0$ ва $y\geq -9$ дан иборат.

Демак, $3^0$ – тасдиққа биноан, берилган функциянинг ўзгариш соҳаси $E(f)=[-9;+\infty)$ бўлади.

$4^0$. Умумий ҳолда $y=f(x)$ функциянинг ўзгариш соҳаси $a\leq y\leq b$ $(b>0)$, $y=\varphi(x)$ функциянинг ўзгариш соҳаси эса $c\leq y\leq d$ $(d>0)$ бўлганда $f(x)+\varphi(x)$ функциянинг ўзгариш соҳасини $a+c\leq y\leq b+d$ каби аниқлаш, $f(x)\cdot\varphi(x)$ функциянинг ўзгариш соҳасини эса $ac\leq y\leq bd$ каби аниқлаш мумкин эмас.

Ҳақиқатан ҳам, $\sin x$ ва $\cos x$ функцияларнинг ўзгариш соҳалари $-1\leq y\leq 1$ бўлгани ҳолда, $\sin x+\cos x$ функциянинг ўзгариш соҳасини $-1-1\leq y\leq 1+1$ ёки $-2\leq y\leq 2$ каби аниқлаб бўлмайди.

**4.20.- мисол.** $f(x)=a\cos x+b\sin x$ $(a^2+b^2>0)$ функциянинг ўзгариш соҳасини топинг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**Ечилиши.** Берилган функцияни ушбу

$$f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$$

шаклда ёзиш мумкин, бунда

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$|\cos(x-\alpha)|\le 1$ бўлгани учун, $f(x)$ функциянинг энг катта қиймати $f_{\max}=\sqrt{a^2+b^2}$ $(\cos(x-\alpha)=1$ бўлганда), энг кичик қиймати $f_{\min}=-\sqrt{a^2+b^2}$ $(\cos(x-\alpha)=-1$ бўлганда) бўлади.

Демак, $1^0$- тасдиққа асосан, берилган функциянинг ўзгариш соҳаси: $E(f)=[-\sqrt{a^2+b^2};\ \sqrt{a^2+b^2}]$.

**4.21.- мисол.** $f(x)=\sin x+\cos x$ функциянинг ўзгариш соҳасини топинг.

**Ечилиши.** Берилган функцияни қуйидаги шаклда ёзиш мумкин:

$$f(x)=\sin x+\cos x=\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Маълумки, $-1\le\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le 1$, бу ердан,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$-\sqrt{2}\le\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}\ \text{ ёки }\ -\sqrt{2}\le f\le\sqrt{2}$$

бўлгани учун, функциянинг ўзгариш соҳаси $E(f)=[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$ бўлади.

**4.22- мисол**. $f(x)=\frac{1}{4}\sin x\cdot\cos x$ функциянинг ўзгариш соҳасини топинг.

**Ечилиши.** Берилган функцияни қуйидаги шаклда ёзиш мумкин:

$$f(x)=\frac{1}{4}\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{8}\sin 2x.$$

Маълумки, $-1\le\sin 2x\le 1$. Бундан

$$-\frac{1}{8}\le\frac{1}{8}\sin 2x\le\frac{1}{8}.$$

Демак, берилган функциянинг ўзгариш соҳаси

$$E(f)=\left[-\frac{1}{8};\frac{1}{8}\right]$$

бўлади.

$5^0$. Агар $y=f(x)$ функциянинг ўзгариш соҳаси $a\le y\le b$ бўлса, $g(x)=mf(x)$ функциянинг ўзгариш соҳаси, $m>0$ бўлганда $ma\le g\le mb$; $m<0$ бўлганда эса, $ma\ge g\ge mb$ бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Агар $y=f(x)$ функциянинг ўзгариш соҳаси $a\le y\le b$ бўлса, $g(x)=n+f(x)$ функциянинг ўзгариш соҳаси $n+a\le g(x)\le n+b$ дан иборат бўлади.

**4.23- мисол.** $f(x)=-\frac{3}{\sqrt{5}}\left(\cos 2x-\sqrt{5}\right)$ функциянинг ўзгариш соҳасини топинг.

**Ечилиши.** Берилган функцияни қуйидаги шаклга келтирамиз: $f(x)=-\frac{3}{\sqrt{5}}\cos 2x+3,$ бунда $m=-\frac{3}{\sqrt{5}}<0,\ n=3>0$. Маълумки, $-1\le\cos 2x\le 1$ бўлгани учун $\frac{3}{\sqrt{5}}\ge-\frac{3}{\sqrt{5}}\cos 2x\ge-\frac{3}{\sqrt{5}}$ ва $3+\frac{3}{\sqrt{5}}\ge-\frac{3}{\sqrt{5}}\cos 2x+3\ge 3-\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Демак, берилган функциянинг ўзгариш соҳаси

$$E(f)=[3-\frac{3}{\sqrt{5}};3+\frac{3}{\sqrt{5}}].$$

**4.24- мисол.** $f(x)=3\cos x+4\sin x-6$ функциянинг ўзгариш соҳасини топинг.

**Ечилиши.** Берилган функцияни қуйидагича тасвирлаймиз (4.20-мисолга

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

қаранг): $f(x)=5\cos(x-\alpha)-6,$ бунда $\cos\alpha=\frac{3}{5},\ \sin\alpha=\frac{4}{5}$

$m=5>0,\ n=-6<0\ -1\le\cos(x-\alpha)\le1$ бўлгани учун $-5\le5\cos(x-\alpha)\le5$ $-6-5\le5\cos(x-\alpha)-6\le5-6$ ёки $-11\le5\cos(x-\alpha)-6\le-1.$

Демак, берилган функциянинг ўзгариш соҳаси $E(f)=[-11;-1]$ бўлади.

$6^0$. Агар $y=f(x)$ функциянинг ўзгариш соҳаси $-a\le y\le a$ $(-\infty\le y\le\infty)$ бўлса, у ҳолда $y_1=|f(x)|$ ёки $y_2=f^2(x)$ функциянинг ўзгариш соҳаси $0\le y_1\le a$ ёки $0\le y_2\le\infty$ бўлади. Масалан, $y=\cos x$ нинг ўзгариш соҳаси $-1\le y\le1$ бўлган ҳолда, $y_1=|\cos x|$ ёки $y_2=\cos^2 x$ функциянинг ўзгариш соҳаси бир хил, яъни $0\le y_1\le1$ бўлади. $y=\mathrm{tg}x$ нинг ўзгариш соҳаси $\infty<y<\infty$ бўлган ҳолда, $y_1=|\mathrm{tg}\,x|$ ёки $y_2(x)=\mathrm{tg}^2x$ функциянинг ўзгариш соҳаси бир хил, яъни $0\le y\le\infty$ бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

## Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг:

**4.1.** $f(x)=\frac{3x}{x^2-9}.$

**4.2.** $f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}.$

**4.3.** $f(x)=\frac{1}{x^4-x}.$

**4.4.** $f(x)=\frac{x}{(2^x-4)^2}.$

**4.5.** $f(x)=\sqrt{9x^2-1}.$

**4.6.** $f(x)=\sqrt[4]{\frac{3}{25-x^2}}.$

**4.7.** $f(x)=\sqrt[7]{\frac{x-3}{(x^2-4)(x^2+4)}}.$

**4.8.** $f(x)=\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x}}}.$

**4.9.** $f(x)=\sqrt{|x|-8}+\sqrt{x^2-16}.$

**4.10.** $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-4}-\sqrt{6-x}}.$

**4.11.** $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}.$

**4.12.** $f(x)=\frac{x}{|x|}.$

**4.13.** $f(x)=\frac{x}{x^2-x-2}.$

**4.14.** $f(x)=\log_4(x^2-2x).$

**4.15.** $f(x)=\sqrt{\log_2 x-1}+\frac{1}{x^2-16}.$

**4.16.** $f(x)=\frac{\sqrt{4x-x^2}}{\log_3|x-4|}.$

**4.17.** $f(x)=\log_3\left(2^{\log_{x-3}0,5}-1\right)+\frac{1}{\log_3(2x-6)}.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**4.18.** $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-1}{(x-3)(x+4)}}+\frac{1}{\log_8(x-4)}.$

**4.19.** $f(x)=\sqrt{\log_{0,3}\frac{x-1}{x+5}}.$

**4.20.** $f(x)=\lg(3^x-3^{-x}).$

**4.21.** $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{\sin x-1}.$

**4.22.** $f(x)=\sqrt{-2\cos^2 x+3\cos x-1}.$

**4.23.** $f(x)=\sqrt{\sin^2 x-\sin x}.$

**4.24.** $f(x)=\lg\sin(x-3)-\sqrt{16-x^2}.$

**4.25.** $f(x)=\sqrt{\frac{x}{\sin x}}+\sqrt{\frac{10-x^2}{x^4-11x^2+18}}.$

**4.26.** $f(x)=\log_9\frac{\sin 3x}{x}-\frac{\sqrt{4x^2-x^4+5}}{\cos\pi x}-x.$

**4.27.** $f(x)=\sqrt{\frac{\log_{0,3}|x-2|}{|x|}}.$

**4.28.** $f(x)=\frac{x^2}{\sin x}+\frac{tgx\cdot\sqrt{3-x^2}}{1-x^2}.$

**4.29.** $f(x)=\lg\left(\sqrt{8^{-2+\lg x}}-\sqrt[3]{4^{2-\lg x}}\right).$

**4.30.** $f(x)=\frac{2}{\sin^4 x+\cos^4 x}.$

**4.31.** $f(x)=\frac{\sin x}{1-\cos x}.$

**4.32.** $f(x)=\sqrt{\sin(\cos x)}.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**4.33.** $f(x)=\sqrt{\lg(\cos 2\pi x)}$ .

**4.34.** $f(x)=(2x)!$ .

**4.35.** $f(x)=\log_{\cos x}\sin x$ .

**4.36.** $f(x)=\lg(1-tgx)$ .

**4.37.** $f(x)=\arcsin\frac{4}{2-x}$.

**4.38.** $f(x)=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$.

**4.39.** $f(x)=\sqrt{\arcsin(\log_2 x)}$.

**4.40.** $f(x)=\arcsin(1+tg^2\pi x)$.

**4.41.** $f(x)=ctg\,\pi x+\arccos 2^x$.

**4.42.** $f(x)=\arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$.

**4.43.** $f(x)=\arccos\sqrt{x^2-1}$.

**4.44.** $f(x)=\frac{1}{x-0,5}+3^{\arcsin x}+\frac{1}{\sqrt{x-3}}$.

**4.45.** $f(x)=\log_{3+x}(x^2-1)$.

**4.46.** $f(x)=\lg(1-\log_{1/2}(x+5))$.

**4.47.** $f(x)=\lg(4-x^2)\sqrt{\frac{1+\lg^2 x}{\lg x^2}-1}$.

**4.48.** $f(x)=\log_2\log_3\sqrt{4x-x^2-2}$.

**4.49.** Нечта бутун сон $f(x)=\sqrt{\log_{0,5}(x-2)+2}$ функциянинг аниқланиш соҳасига тегишли?

**4.50**. $y=f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси $[-1;2]$ дан иборат бўлса, $y=f(x+1)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг:

**4.51.** $|y|=9-x^2$.

**4.52.** $|y|=\lg(3-x)$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**4.53.** $y = \frac{1}{[x]}$.

**4.54.** $y = \frac{1}{\{x\}}$.

**4.55.** $y = \sqrt{[x]-3}$.

**4.56.** $y = \sqrt{\{x\}-3}$.

**4.57.** $y = \frac{1}{27^{x^2} - 3^x}$.

**4.58.** $y = (x^2 - x + 1)^{-\frac{3}{2}}$.

**4.59.** $y = \sqrt{2^x - e^x}$.

**4.60.** $y = \frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$.

**4.61.** $y = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$.

**4.62.** $y = \frac{1}{\log_2(2-x)} + \sqrt{x+3}$.

**4.63.** $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$.

**4.64.** $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-2}}$.

Қуйидаги функцияларнинг ўзгариш соҳаларини топинг.

**4.65.** $f(x) = \frac{x+4}{x-5}$.

**4.66.** $f(x) = \frac{x^2-5}{2x-4}$.

**4.67.** $f(x) = \frac{8}{x^2+4}$.

**4.68.** $f(x) = \frac{1}{tg^2 x + 1}$.

**4.69.** $f(x) = x^2 - 4x + 9$.

**4.70.** $f(x) = \sqrt{x - x^2}$.

**4.71.** $f(x) = \lg(3x^2 - 4x + 5)$.

**4.72.** $f(x) = |x-3| + |x-5|$.

**4.73.** $f(x) = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{3-x}$.

**4.74.** $f(x) = 5 - 4\sin x - \sin^2 x$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**4.75.** $f(x)=3^{2+\sin x}$.

**4.76.** $f(x)=3\sin x+4\cos x$.

**4.77.** $f(x)=\lg(1-2\cos x)$.

**4.78.** $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x^2-x+2}$.

**4.79.** $f(x)=(-1)^x$.

**4.80.** $f(x)=\sqrt{-x^2+x+2}$.

**4.81.** $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$.

**4.82.** $f(x)=\arcsin\sqrt{9-x^2}$.

**4.83.** $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$.

**4.84.** $f(x)=4\cos x-4$.

**4.85.** $f(x)=(2x+1)e^{2x}$.

**4.86.** $f(x)=x-1+\ln(3-x)$.

**4.87.** $f(x)=\dfrac{4^x-3\cdot 2^x}{\ln 2}+x$.

**4.88.** $f(x)=x+\ln(x^2+1)$.

**4.89.** $f(x)=x+signx$.

**4.90.** $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}$.

**4.91.** $f(x)=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x^2}{2}}$.

**4.92.** $f(x)=-x^2+5x-6$.

**4.93.** $f(x)=\dfrac{x}{1+9x^2}$.

**4.94.** $f(x)=2^{\arccos(1-x)}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

# Мустақил ечиш учун берилган мисол ва масалаларнинг жавоблари

**4.1.** $(-\infty;-3)\cup(-3;3)\cup(+3;\infty)$. **4.2.** $(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$. **4.3.** $(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$. **4.4.** $(-\infty;\ 2)\cup(2;+\infty)$. **4.5.** $(-\infty;-\frac{1}{3}]\cup[\frac{1}{3};+\infty)$. **4.6.** $(-5{,}5)$. **4.7.** $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;\infty)$. **4.8.** $\{0\}\cup[1;+\infty)$. **4.9.** $(-\infty;-8]\cup[8;+\infty)$. **4.10.** $[4;5)\cup(5;6]$. **4.11** $(-\infty;2)\cup(2;\infty)$. **4.12.** $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$. **4.13.** $(-\infty;-1)\cup(-1;2)\cup(2;\infty)$. **4.14.** $(-\infty;0)\cup(2;\infty)$. **4.15.** $[2;4)\cup(4;+\infty)$. **4.16.** $[0;3)\cup(3;4)$. **4.17.** $(3;\ 3{,}5)\cup(3{,}5;\ 4)$. **4.18.** $(4;\ 5)\cup(5;+\infty)$. **4.19.** $(1;+\infty)$. **4.20.** $(0;+\infty)$. **4.21.** $\left[-3;\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2};3\right]$. **4.22.** $\left[\frac{\pi(6n-1)}{3};\ \frac{\pi(6n+1)}{3}\right],\ n\in Z$. **4.23.** $\left\{\frac{\pi(4n+1)}{2},\ n\in Z\right\}\cup\{[\pi(2m+1);2\pi(m+1)],\ m\in Z\}$.

**4.24.** $(3-2\pi;\ 3-\pi)\cup(3;\ 4]$. **4.25.** $(-\pi;\ -3)\cup(-\sqrt{2};\ 0)\cup(0;\ \sqrt{2})\cup(3;\ \pi)$. **4.26.** $0<|x|<\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}<|x|<\frac{\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3}<|x|\le\sqrt{5}$. **4.27.** $[1;\ 2)\cup(2;\ 3]$. **4.28.** $[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}]\setminus\{0,\pm1,\ \pm\frac{\pi}{2}\}$. **4.29.** $(100;+\infty)$. **4.30.** $(-\infty;+\infty)$. **4.31.** $x\neq 2\pi k,\ \ k\in Z$. **4.32.** $-\frac{\pi}{2}+2\pi k\le x\le\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$. **4.33.** $x=k,\ \ k\in Z$. **4.34.**

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$x=\frac{m}{2},\quad m=0,1,2,\ldots$ . **4.35.** $2\pi k<x<\frac{\pi}{2}(4k+1),\ k\in Z.$ **4.36.** $-\frac{\pi}{2}+\pi k<x<\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z.$

**4.37.** $(-\infty;\,-2]\cup[6;\,+\infty)$. **4.38.** $(-\infty;\,+\infty)$. **4.39.** $[1;\,2]$. **4.40.** $x=k,\ k\in Z.$ **4.41.**

Бутун бўлмаган барча манфий сонлар. **4.42.** $[1;\,100]$. **4.43.** $[-\sqrt{2};\,-1]\cup[1;\,\sqrt{2}]$. **4.44.**

$\varnothing$. **4.45.** $(-3;\,-2)\cup(-2;\,-1)\cup(-1;\,+\infty)$. **4.46.** $(4{,}5;\,+\infty)$. **4.47.** $(1;\,2)$. **4.48.**

$(1;\,3)$. **4.49.** 4 та. **4.50.** $[-2;\,1]$. **4.51.** $[-3;\,3]$. **4.52.** $(-\infty;\,2]$. **4.53.**

$(-\infty;\,0)\cup[1;\,+\infty)$. **4.54.** $\{x:x\in R\ x\notin Z\}$. **4.55.** $[3;\,+\infty)$. **4.56.** $\varnothing$. **4.57.**

$(-\infty;\,0)\cup(0;\,\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3};\,+\infty)$. **4.58.** $(-\infty;\,+\infty)$. **4.59.** $(-\infty;\,0]$. **4.60.** $\varnothing$. **4.61.** $(-\infty;\,0)$.

**4.62.** $[-3;\,1)\cup(1;\,2)$. **4.63.** $\varnothing$. **4.64.** $[1;\,3)\cup(3;\,+\infty)$. **4.65.** $(-\infty;\,1)\cup(1;\,+\infty)$. **4.66.**

$(-\infty;+\infty)$.

**4.67.** $(0;\,2]$. **4.68.** $(0;\,1]$. **4.69.** $[5;\,+\infty)$. **4.70.** $[0;\,0{,}5]$. **4.71.** $[\lg\frac{11}{3};\,+\infty)$. **4.72.** $[2;\,+\infty)$.

**4.73.** $[\sqrt{2};\,\sqrt{10}]$. **4.74.** $[0;\,8]$. **4.75.** $[3;\,27]$. **4.76.** $[-5;\,5]$. **4.77.** $(-\infty;\,\lg 3]$. **4.78.**

$\left[\frac{9-4\sqrt{2}}{7};\ \frac{9+4\sqrt{2}}{7}\right]$. **4.79.** $\{-1;\,1\}$. **4.80.** $[0;\,\frac{3}{2}]$. **4.81.** $\{-1;\,1\}$. **4.82.** $[0;\,\frac{\pi}{2}]$. **4.83.**

$[0{,}5;\,1]$. **4.84.** $[-8;\,0]$. **4.85.** $[-e^{-2};\,1]$. **4.86.** $[\ln 3-1;\,1]$. **4.87.** $\left[-\frac{2}{\ln 2};\,1-\frac{2}{\ln 2}\right]$. **4.88.**

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$[-3+\ln 10;\ 0]$.**4.89.** $(-\infty;-1)\cup\{0\}\cup(1;+\infty)$.**4.90.** $(-\infty;\ +\infty)$.**4.91.** $[0;\ \frac{\pi}{4}]$. **4.92.** $(-\infty;\ 0{,}25]$.**4.93.** $[-\frac{1}{6};\ 0)\cup(0;\ \frac{1}{6}]$. **4.94.** $[1;\ 2^{\pi}]$.

## 5-§. ФУНКЦИЯНИНГ СИНФЛАРИ

Одатда функциялар қуйидаги синфларга ажратилади: жуфт ва тоқ, даврий, бир қийматли ва кўп қийматли, чегараланган ва чегараланмаган, монотон, тескари, мураккаб ва элементар функциялар**.**

### 5.1. Жуфт ва тоқ функциялар.

**5.1-таъриф.** Агар исталган $x\in X$ $(X\subset R)$ учун $-x\in X$ бўлса, у ҳолда $X$ тўплам О нуқтага (координаталар бошига) нисбатан *симметрик тўплам* дейилади.

Бутун сонлар тўплами $Z$, $[-a,a]$, $(-a,a)$, $(-\infty,\infty)$ каби тўпламлар координаталар бошига нисбатан симметрик тўпламлардир.

$y=f(x)$ функция О нуқтага нисбатан симметрик бўлган $X$ тўпламда аниқланган бўлсин.

**5.2-таъриф.** Агар исталган $x\in X$ учун $f(-x)=f(x)$ бўлса, у ҳолда

$f(x)$ $X$ тўпламда *жуфт функция* дейилади.

$y=x^2$, $y=\cos x$, $y=|x|$, $y=f(|x|)$ функциялар координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган тўпламларда қаралса бўлса, улар жуфт функциялар бўлади. Таърифда $X$ тўпламнинг координаталар бошига нисбатан симметриклиги муҳимдир. Масалан, $y=x^2$, $x\in[-1,2]$ функция

берилган бўлса, у жуфт функция бўлмайди, чунки $[-1,2]$ тўплам координаталар бошига нисбатан симметрик эмас.

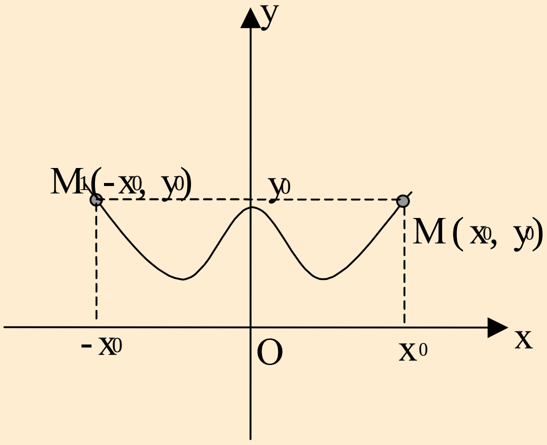
Жуфт функцияларнинг графиги ордината ўқига нисбатан симметрик бўлади (5.1-чизма).

**5.3-таъриф.** Агар исталган $x\in X$ учун $f(-x)=-f(x)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$, $X$ тўпламда *тоқ функция* дейилади.

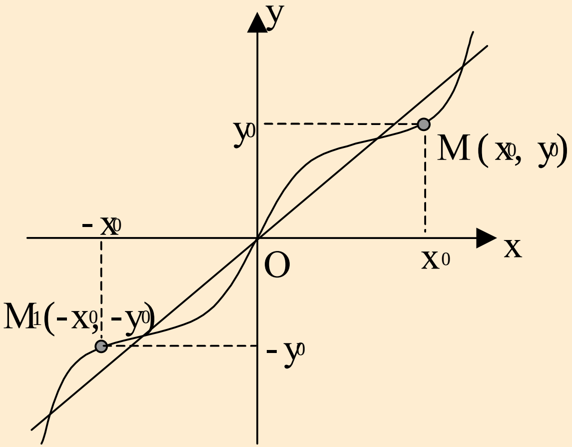
$y=x^3$, $y=tg\,x$, $y=\frac{|x|}{2x}$ функциялар ўзларининг аниқланиш соҳаларида тоқ функциялар бўлади.

Тоқ функциянинг графиги координаталар бошига нисбатан симметрик бўлади (5.2-чизма).

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



5.1-чизма



5.2-чизма

Агар исталган $x \in X$, $-x \in X$ лар учун $f(-x) \neq \pm f(x)$ шартлар ўринли бўлса, у ҳолда $y = f(x)$ функция $X$ тўпламда жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас дейилади.

Ушбу $f(x) = x^2 - x$, $\varphi(x) = \sin x - \cos x$ функциялар ўзларининг аниқланиш соҳасида жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас.

Жуфт функциянинг графигини чизишда аргументнинг мусбат қийматлари учун графикнинг ўнг шохини чизиб, кейин уни чап томонга $y$ ўқига нисбатан симметрик равишда кўчириш етарли.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Тоқ функциянинг графигини чизишда эса аргументнинг мусбат қийматлари учун графикнинг ўнг шохини чизиб, кейин уни координата бошига нисбатан симметрик кўчириш етарли.

**5.1-мисол.** Қуйидаги берилган функцияларни жуфт ва тоқликка текширинг:

$a)\quad f(x)=\frac{x}{x^4+2}, x\in R$ $\qquad b)\quad f(x)=x^2-3|x|+2,\ x\in R;$

c) $f(x)=\frac{x-3}{x^2-25}, x\in(-\infty;-5)\cup(-5;5)\cup(5;\infty);$

d) $f(x)=|x+1|+|x-1|, x\in R$ $\qquad$ e) $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}, x\in(-1{,}1);$

f) $f(x)=4-2x^4+\sin^2 x,\ x\in R$ .

**Ечилиши.** $a)\quad f(x)+f(-x)=0$ эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам, $f(x)+f(-x)=\frac{x}{x^4+2}+\frac{-x}{x^4+2}=\frac{x}{x^4+2}-\frac{x}{x^4+2}=0,$ демак, $f(x)+f(-x)=0,\ \forall x\in R$ .

Шундай қилиб, берилган функция 5.3- таърифга асосан, тоқ функция.

$b)\quad f(x)=x^2-3|x|+2, x\in R;$ бўлганлигидан, $f(-x)=(-x)^2-3|-x|+2=$ $=x^2-3|x|+2=f(x)$, яъни $\forall x\in R$ учун $f(x)=f(-x)$ бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

c) Берилган функция $f(x)=\frac{x-3}{x^2-25}$ бўлганлиги учун, бундан $f(-x)=\frac{-x-3}{(-x)^2-25}=\frac{-x-3}{x^2-25}=-\frac{x+3}{x^2-25}$, демак, $\forall x\in(-\infty;-5)\cup(-5;5)\cup(5;\infty)$ лар учун $f(-x)\neq f(x)$ ва $f(-x)\neq -f(x)$ бўлгани учун берилган функция жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас.

d) $f(x)=|x+1|+|x-1|$ бўлгани учун, бундан $f(-x)=|-x+1|+|-x-1|=|-(x-1)|+|-(x+1)|=|x-1|+|x+1|=f(x),\ \forall x\in R$. Демак, берилган функция, 5.2- таърифга асосан, жуфт функция бўлади.

e) $f(-x)=\lg\frac{1+x}{1-x}=\lg(\frac{1-x}{1+x})^{-1}=-\lg\frac{1-x}{1+x}$. Демак, $\forall x\in(-1;1)$ лар учун $f(-x)=-f(x)$ тенглик ўринли бўлганлигидан, 5.3- таърифга асосан, берилган функция тоқ функциядир.

f) $f(-x)=4-2(-x)^4+(\sin(-x))^2=4-2x^4+\sin^2 x$. Бундан $\forall x\in R$ лар учун $f(x)=f(-x)$ тенгликнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

Демак, 5.2- таърифга кўра, берилган функция жуфт функциядир.

*Жуфт ва тоқ функциялар қуйидаги хоссаларга эга*:

$1^0$. Иккита жуфт функциянинг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

нисбати (махраж нолдан фарқли бўлганда), яна жуфт функция бўлади.

$2^0$. Иккита тоқ функциянинг йиғиндиси ва айирмаси, яна тоқ функция бўлади.

$3^0$. Иккита тоқ функциянинг кўпайтмаси ва нисбати (махраж нолдан фарқли бўлганда) жуфт функция бўлади.

$4^0$. Агар $y = f(x), x = \varphi(t)$ тоқ функция бўлса, у ҳолда $y = f(\varphi(t))$ мураккаб функция (8-§. 7.б.- га қ.) ҳам тоқ функция бўлади.

$5^0$. Агар $y = f(x)$ жуфт функция, $x = \varphi(t)$ эса, тоқ (жуфт) функция бўлса, у ҳолда $y = f(\varphi(t))$ мураккаб функция ҳам жуфт функция бўлади.

Симметрик бўлмаган тўпламда аниқланган функцияларнинг жуфт ва тоқлиги тўғрисида сўз юритиш маънога эга эмас.

Аниқланиш соҳасининг координаталар бошига нисбатан симметриклиги функциянинг жуфт ва тоқлиги учун зарурий шарт бўлиб, етарли шарт бўла олмайди. Масалан, $y = x + 3$ ва $y = 3^x$ функциялар $D(f)$ = (-∞;∞) симметрик тўпламда аниқланган, лекин улар жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас.

**Теорема**. Координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган $X$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

тўпламда аниқланган ҳар қандай $f(x)$ функция жуфт ва тоқ функциялар йиғиндиси кўринишда ифодаланади:

$$F(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

Бунда биринчи ҳад- жуфт функция, иккинчи ҳад эса, – тоқ функциядир.

Мисол.

$$e^{x}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}+\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}. \tag{5.1}$$

функцияни қараймиз. Бу ерда $e^x$ функция (-∞;∞) да аниқланган бўлиб, у жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас. (5.1) тенгликнинг ўнг томонидаги йиғиндиларнинг биринчиси жуфт функция, иккинчи эса тоқ функция.

**5.2- мисол**. Юқоридаги хоссалар ёрдамида, ушбу

1) $f(x)=x^3-3x;$ 2) $f(x)=x^2+|x|;$ 3) $f(x)=3+2x^2;$

4) $f(x)=\frac{\sin x}{x},(x\neq 0);$ 5) $f(x)=x\frac{a^x+1}{a^x-1},a>1;$

6) $f(x)=2tgx+\sin 2x$ функцияларнинг жуфт ва тоқлигини аниқланг.

**Ечилиши**: 1) Маълумки, $x^3$ ва $3x$ функциялар тоқ функциялар бўлганлиги учун, берилган $f(x)=x^3-3x;$ функция иккита тоқ функциянинг

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

айирмасидан иборат бўлгани учун, 2- хоссага биноан, тоқ функция бўлади.

2) $x^2$ ва $|x|$ функциялар жуфт функциялар бўлгани учун, берилган $f(x)=x^2+|x|$ функция, иккита жуфт функциянинг йиғиндиси сифатида, жуфт функция бўлади.

3) Равшанки, 3 ва $2x^2$ функциялар жуфт функциялар бўлгани учун, берилган $f(x)=3+2x^2$;функция, иккита жуфт функциялар йиғиндиси сифатида, жуфт бўлади.

4) sin$x$ ва $x$ функциялар тоқ функциялар бўлгани учун, берилган $f(x)=\frac{\sin x}{x},(x\neq 0);$ функция, иккита тоқ функциянинг нисбати сифатида, $1^0$- хоссага асосан, жуфт бўлади.

5) $g(x)=\frac{a^x+1}{a^x-1}$, $g(-x)=\frac{a^{-x}+1}{a^{-x}-1}=\frac{(1+a^x)a^x}{a^x(1-a^x)}=\frac{1+a^x}{1-a^x}=-g(x).$

Демак, $g(x)=\frac{a^x+1}{a^x-1}$ тоқ функция экан. У ҳолда, берилган $f(x)=x\frac{a^x+1}{a^x-1}$, $(a>1)$ функция, $3^0$- хоссага асосан, иккита тоқ функцияларнинг кўпайтмаси сифатида, жуфт бўлади.

6) Маълумки, $2tgx$ ва $\sin 2x$ функциялар тоқ бўлгани учун, берилган

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

функция, $2^0$- хоссага асосан, иккита тоқ функциянинг йиғиндиси сифатида, тоқ бўлади.

**5.3- мисол**. Қуйидаги функцияларни жуфт ва тоқ функция йиғиндиси шаклида тасвирланг:

1) $f(x)=(x+1)^3$; 2) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^4}$; 3) $f(x)=\sin(x+1)$

**Ечилиши.** 1) Берилган $f(x)=(x+1)^3$ функцияни, ушбу кўринишда тасвирлаймиз: $f(x)=(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1=(x^3+3x)+(3x^2+1)$. Маълумки, $x^3+3x$, $3x^2+1$ функциялар мос равишда тоқ ва жуфт функциялардан иборат.

Шундай қилиб, берилган функция жуфт ва тоқ функцияларнинг йиғиндиси сифатида тасвирланади.

2) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^4}$ функцияни ушбу кўринишда тасвирлаймиз:

$f(x)=\dfrac{x-3}{x^4}=\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}$;бунда $\dfrac{1}{x^3}$-тоқ, $\dfrac{3}{x^4}$- жуфт функциядир. Шундай қилиб, берилган функция жуфт ва тоқ функцияларнинг йиғиндиси шаклида тасвирланади.

3) $f(x)=\sin(x+1)$ функцияни қуйидагича тасвирлаймиз: $f(x)=\sin(x+1)=$ $=\sin x\cos 1+\cos x\sin 1$, бунда $\cos 1\sin x$-тоқ функция, $\cos x\sin 1$- жуфт

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

функция.

**5.4-мисол**. Қуйидаги функцияларнинг жуфт ҳам, тоқ ҳам эмаслигини кўрсатинг:

1) $f(x)=5^x$; 2) $f(x)=\dfrac{a^x}{x+2}$;

3) $f(x)=\sin x+\cos x$; 4) $f(x)=x^3-2x^2+9$

**Ечилиши:** 1) $f(x)=5^x,\ f(-x)=5^{-x}=\dfrac{1}{5^x}\neq\pm f(x)$.Шундай қилиб, берилган функция жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас.

2) $f(x)=\dfrac{a^x}{x+2};\quad f(-x)=\dfrac{a^{-x}}{-x+2}=\dfrac{1}{a^x(2-x)}\neq\pm f(x)$. Шундай қилиб, берилган функция жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас.

3) $f(x)=\sin x+\cos x,\qquad f(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x\neq\pm f(x)$.Бу функция ҳам жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас.

4) $f(x)=x^3-2x^2+9,\quad f(-x)=(-x)^3-2(-x)^2+9=-x^3-2x^2+9\neq\pm f(x)$. Демак, берилган функция жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**5.2.Даврий функциялар.** $f(x)$ функция $X$ ($X \subset R$) тўпламда аниқланган бўлсин.

**5.4-таъриф.** Агар шундай ўзгармас $T(T \neq 0)$ сон мавжуд бўлсаки, исталган $x, x+T \in X$ лар учун

$$f(x+T) = f(x) \tag{5.2}$$

тенглик ўринли бўлса, $f(x)$ *даврий функция* дейилади, бунда $T$ сон, *функциянинг даври* деб аталади.

(5.2) шартни қаноатлантирувчи мусбат $T$ ларнинг энг кичиги (агар у мавжуд бўлса) функциянинг *асосий даври* деб аталади.

Агар $y = f(x)$ функция $T$ даврга эга бўлса, у ҳолда $nT(n \in Z)$ ҳам функциянинг даври бўлади.

Агар даврий функция $T_0$ – асосий даврга эга бўлса, қолган даврларнинг ҳаммаси $T_0$ га каррали бўлади.

Функция энг кичик мусбат даврга эга бўлмаслиги ҳам мумкин. Масалан, $f(x)$=5 функция учун ихтиёрий ҳақиқий сон давр бўлади, лекин у асосий даврга эга эмас. Ҳақиқатан ҳам, $f(x) = const$, $\alpha \neq 0$ ихтиёрий ҳақиқий сон бўлсин. $f(x+\alpha) = f(x) = const$. Бу ердан келиб чиқадики, $\alpha$ давр энг кичик

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

мусбат давр эмас.

**5.5-таъриф.** Агар

$$f(x+\omega)=-f(x), \quad (\ \omega \neq 0)$$

бажарилса, у ҳолда $f(x)$ *анти даврий функция* дейилади.

*Даврий функциялар қуйидаги хоссаларга эга:*

$1^0$. Иккита $T$ даврга эга бўлган функциянинг йиғиндиси, кўпайтмаси яна даврий функция бўлади ва унинг даври $T$ га тенг бўлади.

$2^0$. Агар $T(T \neq 0)$ $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг энг кичик мусбат даври бўлса, бу сон $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ учун энг кичик мусбат давр бўлмаслиги ҳам мумкин. Масалан, **1)** $f(x)=3\sin x+2$, $g(x)=2-3\sin x$ функциялар энг кичик мусбат $T=2\pi$ даврга эга, лекин уларнинг йиғиндиси $f(x)+g(x)=4$ эса, энг кичик асосий даврга эга эмас. **2)** $f(x)=\sin x+1$, $g(x)=1-\sin x$ функцияларнинг энг кичик мусбат даври $T=2\pi$, лекин $f(x)\cdot g(x)=\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ кўпайтманинг энг кичик мусбат даври $T=\pi$ бўлади.

$3^0$. Агар $f(x)$ функция $T$ даврга эга бўлса, у ҳолда $f(a\ x)$, $f(a\ x)+b$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

функциялар $\tau=\frac{T}{a}$ даврга эга (бунда $a\neq 0$ ихтиёрий ҳақиқий сон, $x$, $ax\in X$) бўлади.

$4^0$. Агар $f(x)$ функция $T$ даврга эга бўлса, у ҳолда $A\,f(a\,x+b)$ $(A=const,\ a>0)$ ҳам даврий функция бўлади ва унинг даври $\tau=\frac{T}{a}$ га тенг бўлади.

Агар исталган $x\in X$ ва баъзи бир $T$ лар учун $f(x+T)=\frac{1}{f(x)}$ $(T\neq 0)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $2T$ даврга эга бўлади.

$5^0$. $u=\varphi(x)$ даврий функция бўлсин. Агар $f(x)$ функция қатъий монотон бўлса, у ҳолда $y=f[\varphi(x)]$ мураккаб функция ҳам даврий бўлади ва уларнинг даврлари бир-бирига тенг бўлади.

$6^0$. Агар $y=f(u)$ функция қатъий монотон бўлмаса, у ҳолда $y=f[\varphi(x)]$ функциянинг даври $u=\varphi(x)$ функциянинг давридан кичик бўлиши ҳам мумкин.

**5.5- мисол.** Ушбу $f(x)=\sin 2x$ функциянинг даврий функция эканлигини кўрсатинг ва энг кичик мусбат даврини топинг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**Ечилиши.** Фараз қилайлик, бирор $T\neq 0$ учун $\sin 2(x+T)=\sin 2x$ тенглик ўринли бўлсин, бундан $\sin 2(x+T)-\sin 2x=0$ ёки $2\sin T\cos(2x+T)=0$ тенгламага эга бўламиз.Бу тенглик $\sin T=0$ учун ҳам ўринли бўлади, бундан $T=n\pi, n\in Z$. Демак, шундай $T=n\pi, n\in Z$ ўзгармас сон мавжуд экан. Берилган функциянинг энг кичик мусбат даври $T_0=\pi$ га тенг бўлади.

**5.6-мисол.** Қуйидаги функцияларни даврийликка текширинг:

1) $f(x)=x^2+x+1;$ 2) $f(x)=x+\cos x;$ 3) $f(x)=\sin^4 x.$

**Ечилиши. 1)** Фараз қилайлик, $f(x)=x^2+x+1;$ даврий функция бўлсин, у ҳолда даврий функциянинг таърифига кўра, шундай ўзгармас $T\neq 0$ сон мавжуд бўлиб, $(x+T)^2+(x+T)+1=x^2+x+1$ тенглик ўринли бўлади. Охирги тенгликни $T$ га нисбатан ечиб, $T$ ни топамиз:

$$x^2+2Tx+T^2+x+T+1=x^2+x+1, \quad T^2+(2x+1)T=0; T_1=0; T_2=-2x-1.$$

$T_1$ ва $T_2$ нинг шартга кўра топилган қийматлари даврий функциянинг таърифини қаноатлантирмайди ($T$ нолдан фарқли ўзгармас сон бўлиши, яъни $x$ га боғлиқ бўлмаслиги керак эди). Демак, берилган функция даврий функция эмас.

2) Фараз қилайлик, берилган функция $T$ даврга эга бўлган даврий

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

функция бўлсин. У ҳолда,

$$x+T+\cos(x+T)=\cos x+x \quad \text{ёки} \quad \cos(x+T)-\cos x=-T, -2\sin(x+\frac{T}{2})\sin\frac{T}{2}=-T,$$

$\sin(x+\frac{T}{2})=\frac{T}{2\sin\frac{T}{2}}$. Бу тенгликнинг ўнг томони ўзтармас миқдор, чап томони эса, $x$ нинг функцияси. Бундай бўлиши мумкин эмас, яъни тенгликни $\forall x$ лар учун қаноатлантирадиган $T\neq 0$ ўзгармас сон мавжуд эмас. Шунинг учун, берилган функция даврий функция эмас.

3) Берилган $f(x)=\sin^4 x$. функция даврий функция бўлсин ва даври $T$ га тенг бўлсин. У ҳолда $\sin^4(x+T)=\sin^4 x$ ёки $\sin^4(x+T)-\sin^4 x=0$ ёки $[\sin^2(x+T)+\sin^2 x]\cdot[\sin^2(x+T)-\sin^2 x]=0$ тенглик $x$ нинг ихтиёрий қийматларида ўринли бўлади. Бунда $\sin^2(x+T)+\sin^2 x\geq 0$ бўлиб, у айнан нолга тенг эмас, унда $\sin^2(x+T)-\sin^2 x=0$ ёки $\frac{1-\cos(2x+2T)}{2}-\frac{1-\cos 2x}{2}=0$, $\cos 2x-\cos(2x+2T)=0$, $2\sin(2x+T)\sin T=0$ бўлади. Бунда $\sin(2x+T)\neq 0$ бўлгани учун $\sin T=0$ бўлиши керак. Бу тенгликни қаноатлантирадиган энг кичик мусбат сон $\pi$ бўлади. Демак, берилган функция даврий функция бўлади ва унинг даври $T=\pi$.

**5.7- мисол.** Даврий функцияларнинг хоссаларидан фойдаланиб,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Орқага
Тулик экран
Чикиш

қуйидаги функцияларнинг энг кичик мусбат даврини топинг:

1) $f(x)=\frac{1}{3}tgx+\frac{2}{5}ctgx;$ 2) $f(x)=\sin\frac{3}{4}x+5\cos(\frac{2}{3}x+5)$ 3) $f(x)=2+tg\frac{x}{3}$

**Ечилиши. 1)** Маълумки, tg$x$ ва ctg$x$ ларнинг энг кичик мусбат даври $\pi$ бўлганлиги учун $1^0$- хоссага асосан, берилган функциянинг ҳам энг кичик мусбат даври $\pi$ га тенг бўлади.

**2)** Маълумки, sin$x$ ва cos$x$ функцияларнинг энг кичик мусбат даври $2\pi$ дан иборат бўлгани учун

$a)$ $\sin\frac{3}{4}x$ функциянинг даври, $3^0$- хоссага асосан, $a=\frac{3}{4}, T_1=\frac{2\pi}{a}=\frac{2\pi}{\frac{3}{4}}=\frac{8\pi}{3}.$

$b)$ $5\cos(\frac{2}{3}x+5)$ функциянинг даври, $4^0$- хоссага асосан, $a=\frac{2}{3}, T_2=\frac{2\pi}{a}=\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$ .

Демак, берилган функциянинг энг кичик мусбат даври, $\frac{8}{3}\pi$ ва $3\pi$ сонларининг энг кичик умумий карралисидан иборат бўлади, яъни $T$ =24$\pi$

**3)** Маълумки, tg$x$ функциянинг энг кичик мусбат даври $\pi$. Демак,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

берилган функциянинг энг кичик мусбат даври , $3^0$- хоссага асосан, $a=\frac{1}{3}, T=\frac{\pi}{a}=3\pi$ .

**5.8- мисол.** $f(x)$ функция $X$ тўпламда аниқланган бўлиб, шундай $T\neq 0$ сони топилсаки, $\forall x\in X$ лар учун $x\pm T\in X$ бўлиб, $f(x+T)=\frac{f(x)+a}{bf(x)-1}$ шарт бажарилса, $f(x)$ функциянинг даврийлигини исбот қилинг.

**Ечилиши.** Ихтиёрий $x$ лар учун $f(x+T)=\frac{f(x)+a}{bf(x)-1}$ тенглик ўринли бўлгани учун $x$ ни $x+T$ га алмаштириб,

$$f(x+2T)=\frac{f(x+T)+a}{bf(x+T)-1}=\frac{\frac{f(x)+a}{bf(x)-1}+a}{b\frac{f(x)+a}{bf(x)-1}-1}=\frac{f(x)(1+ab)}{1+ab}=f(x)$$

тенгликни оламиз . Демак, берилган функция даврий бўлиб, унинг даври $2T$ га тенг.

Энг кичик мусбат даврга эга бўлган функциялар йиғиндисининг энг кичик мусбат даври, қўшилувчи функцияларнинг даврларининг энг кичик умумий карралисига тенг бўлади. Бунда, шакл алмаштиришлар натижасида

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

нолга айланадиган қўшилувчи функцияларнинг даври ҳисобга олинмайди.

Масалан, ушбу

$$f(x) = 2\sin 4x + ctg3x + 3\sin x + \sin(x-\pi) + 2\sin(x+\pi)$$

функцияни шакл алмаштиришлар натижасида қуйидаги $f(x) = 2\sin 4x + ctg3x,$ кўринишда ифодалаш мумкин, бунда $3\sin x + \sin(x-\pi) + 2\sin(x+\pi) = 0.$ $a)$ $g(x) = 2\sin 4x$ функциянинг энг кичик мусбат даври, $3^0$- хоссага асосан, $T_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$ $b)$ $h(x) = ctg3x$ функциянинг энг кичик мусбат даври $T_2 = \frac{\pi}{3}.$ $\frac{\pi}{2}$ ва $\frac{\pi}{3}$ сонларнинг энг кичик карралиси $\pi.$ Шундай қилиб, юқоридаги тасдиққа асосан, берилган *f(x)* функциянинг энг кичик мусбат даври $\pi$ га тенг бўлади.

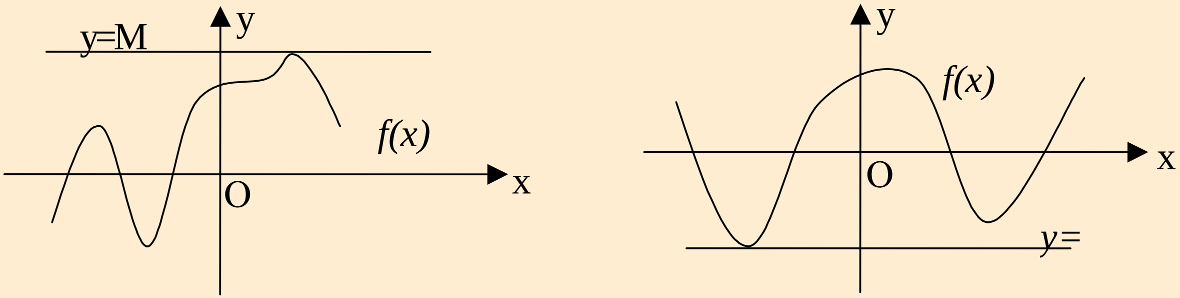
**5.3. Бир қийматли ва кўп қийматли функциялар.** Агар $X$ тўпламдаги ҳар бир $x$ сонга бирор қоида ёки қонунга кўра $Y$ тўпламдан битта $y$ сон мос қўйилса, у ҳолда *y бир қийматли функция* дейилади, яъни $\forall\, x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$

Агар $X$ тўпламдаги ҳар бир $x$ сонга бирор қоида ёки қонунга кўра $Y$ тўпламдан биттадан ортиқ ёки чексиз кўп $y$ сон мос қўйилса, у ҳолда функция *кўп қийматли* дейилади. Масалан: 1) $y=\pm\sqrt{x}$ - икки қийматли функция; 2) $y = Arc\sin x$ – кўп қийматли функция; 3) $y = 3x + 2$ – бир қийматли функция.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**5.4. Чегараланган ва чегараланмаган функциялар.** $y = f(x)$ функция $X$ тўпламда аниқланган бўлсин.

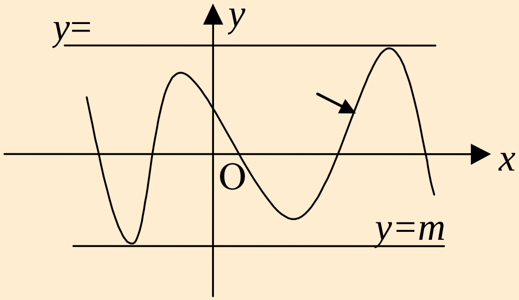
**5.6-таъриф.** Агар шундай ўзгармас $M$ (ўзгармас $m$) сон топилиб, исталган $x \in X$ учун $f(x) \le M$ $(f(x) \ge m)$ тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция $X$ тўпламда юқоридан (қуйидан) чегараланган дейилади, акс ҳолда эса, функция юқоридан (қуйидан) чегараланмаган дейилади (5.3-чизма).



$a)$ юқоридан чегараланган функция $b)$ қуйидан чегараланган функция

5.3-чизма

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



5.4-чизма

5.7-**таъриф.** Агар $f(x)$ функция $X$ тўпламда ҳам юқоридан, ҳам қуйидан чегараланган бўлса, яъни шундай ўзгармас $M$ ва $m$ сонлар мавжуд бўлиб, исталган $x \in X$ учун

$$m \le f(x) \le M \tag{5.3}$$

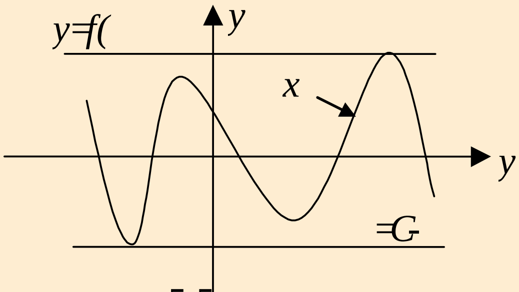
тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $X$ тўпламда *чегараланган* дейилади (5.4-чизма).

$m = \inf\limits_{x \in X}\{f(x)\}$сон $f(x)$ функциянинг $X$ тўпламдаги аниқ қуйи чегараси,

$M = \sup\limits_{x \in X}\{f(x)\}$ сон эса, $f(x)$ функциянинг $X$ тўпламдаги аниқ юқори чегараси

дейилади. $M - m$ айирма $f(x)$ функциянинг $X$ *тўпламдаги тебраниши* деб аталади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



5.5-чизма.

Агар $f(x)$ функция чегараланган бўлиб, $m$ ва $M$ сонлар унинг аник қуйи ва аник юқори чегаралари бўлса, у ҳолда

$$|f(x)| \leq C \tag{5.4}$$

тенгсизлик ўринли бўлади, бунда $C = \max\{|M|, \ |m|\}$. (5.3) билан (5.4) тенгсизликлар ўзаро тенг кучлидир (5.5-чизма). Демак, (5.4) тенгсизлик функциянинг чегараланганлик шартини ифодалайди.

Чегараланган функцияларнинг графиги $Ox$ ўққа параллел бўлган $y = C$ ва $y = -C$ тўғри чизиқлар орасида бўлади (5.5-чизма).

Қуйидан чегараланган $(f(x) \geq m)$ функциянинг графиги $Ox$ ўққа параллел бўлган $y = m$ тўғри чизиқдан юқорида жойлашган бўлади (5.3-$b$) чизма).

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Юқоридан чегараланган функциянинг графиги $(f(x)\le M)$ $Ox$ ўққа параллел бўлган $y=M$ тўғри чизиқдан пастда жойлашади (5.3-$a$ чизма).

**5.8-таъриф.** Агар исталган мусбат $C>0$ сон учун шундай $x_c\in X$ топилиб, $|f(x_c)|>C$ тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция $X$ тўпламда чегараланмаган дейилади.

$f(x)$ функция $x_0$ нуқтанинг бирор атрофида чегараланмаган бўлса, у $x_0$ *нуқтада чегараланмаган* дейилади.

$f(x)$ функциянинг $[a;b]$ кесмада чегараланган бўлиши учун унинг $[a;b]$ кесманинг ҳар бир нуқтасида чегараланган бўлиши зарур ва етарлидир.

*Чегараланган функция қуйидаги хоссаларга эга:*

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $X$ тўпламда аниқланган бўлиб, улар шу тўпламда чегараланган бўлса, у ҳолда

$$a)\ f(x)\pm g(x);\quad b)\ f(x)\cdot g(x);\quad c)\ \frac{f(x)}{g(x)},(g(x)\neq 0, x\in X);\qquad d\,|f(x)|,|g(x)|$$

функциялар ҳам $X$ тўпламда чегараланган бўлади.

**5.9- мисол.** Қуйидаги функцияларни ўз аниқланиш соҳаларида чегараланганликка текширинг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Орқага
Тулик экран
Чикиш

1) $f(x) = -x^2 + 4x - 3;$ 2) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^4 + 9};$ 3) $f(x) = 3^{\sin^2 x} + 5\cos 2x$

4) $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 + x^4};$ 5) $f(x) = tgx$.

**Ечилиши. 1)** Берилган учҳадни тўлиқ квадратга келтирамиз: $f(x) = -x^2 + 4x - 3 = -(x-2)^2 + 1$. Функция $x$=2 нуқтада энг катта қийматга эришади ва у *1* га тенг. Берилган функциянинг қийматлар соҳаси $E(f) = (-\infty;\ 1]$.

Демак, функция юқоридан чегараланган, қуйидан чеараланмаган, яъни $-\infty < f(x) \le 1$.

**2)** Ўрта арифметик ва ўрта геометрик қийматлар орасидаги муносабатлардан, яъни $0 \le \left(x^2 - 3\right)^2$ ёки $6x^2 \le x^4 + 9$, ушбу $0 \le \dfrac{3x^2}{x^2 + 9} \le \dfrac{1}{2}$ тенгсизлик келиб чиқади. Демак, берилган функция бутун сон ўқида чегараланган (бунда $M = \dfrac{1}{2}$, $m = 0$) ва унинг графиги $y = M = \dfrac{1}{2}$ ва $y = m = 0$ тўғри чизиқлар орасида жойлашади.

**3)** Равшанки, берилган функция бутун сон ўқида аниқланган ва қуйидан

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$3^{\sin^2 x}+5\cos 2x \ge 3-5=-2$ билан чеараланган, юқоридан эса $\left|3^{\sin^2 x}+5\cos 2x\right| \le \left|3^{\sin^2 x}\right|+5\left|\cos 2x\right| \le 3+5=8$ чегараланган. Демак, қаралаётган функция чегараланган $(C=8, C_1=-2)$ ва унинг графиги $y=C=8$ ва $y=C_1=-2$ тўғри чизиқлар орасида жойлашган бўлади.

**4)** Равшанки, $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}>0$, бундан функциянинг қуйидан *0* билан чегараланганлиги келиб чиқади. $(1-x^2)^2 \ge 0$ тенгсизликдан $\dfrac{x^2}{1+x^4} \le \dfrac{1}{2}$ тенгсизлик келиб чиқади. $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}=\dfrac{1}{1+x^4}+\dfrac{x^2}{1+x^4} \le 1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$, чунки $1+x^4 \ge 1$. Демак, сон ўқидаги ихтиёрий $x$ ларда $0<f(x)\le\dfrac{3}{2}$ тенгсизлик бажарилгани учун, берилган функция чегараланган.

**5)** Маълумки, $f(x)=tgx$ функция $x=R\setminus\{x:x\in R; x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}; k\in Z\}$ тўпламда аниқланган. Равшанки, $f(x)=tgx$ функция даврий функция бўлиб, унинг энг кичик мусбат даври $\pi$ га тенг. Берилган функцияни $(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2})$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

интервалда қараганимизда, у $[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]\subset(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ сегментда чегараланган, яъни $|tgx|\le 1$. Демак, tg*x* функция $-\frac{\pi}{2}<a<b<\frac{\pi}{2}$ шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий $[a;b]$ сетментда чегараланган, лекин $(-\frac{\pi}{2};0]$, $[0;\frac{\pi}{2})$ интервалларда эса, чегараланмаган.

**5.10-мисол.** Ушбу $f(x)=\frac{x}{1+x}$ функциянинг $0\le x<\infty$ даги аниқ қуйи, аниқ юқори чегараларини ва тебранишини топинг.

**Ечилиши.** Равшанки, 1) $0\le x<\infty$ оралиқдаги ихтиёрий *x* лар учун $\frac{x}{1+x}\ge 0$ ; 2) $(0;1)$ интервалдан ихтиёрий $\varepsilon$ сонни олсак, у ҳолда $\forall x\in(0;\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon})$ лар учун $f(x)=\frac{x}{1+x}<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Демак, $\inf\limits_{0\le x<+\infty}\{f(x)\}=0$.

$0\le x<\infty$ даги ихтиёрий *x* лар учун $f(x)=\frac{x}{1+x}<1$ тенгсизлик ўринли. У ҳолда, юқоридаги олинган $\varepsilon$ лар учун $x>\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ бўлганда $f(x)=\frac{x}{1+x}>1-\varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Бу тенгсизликдан $\sup\limits_{0\le x<+\infty}\{f(x)\}=1$ эканлиги келиб чиқади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Шундай қилиб, берилган функциянинг аниқ қуйи чегараси $m=0$, аниқ юқори чегараси $M=1$. Демак, функциянинг $[0;+\infty)$ даги тебраниши $w=M-m=1$ бўлади.

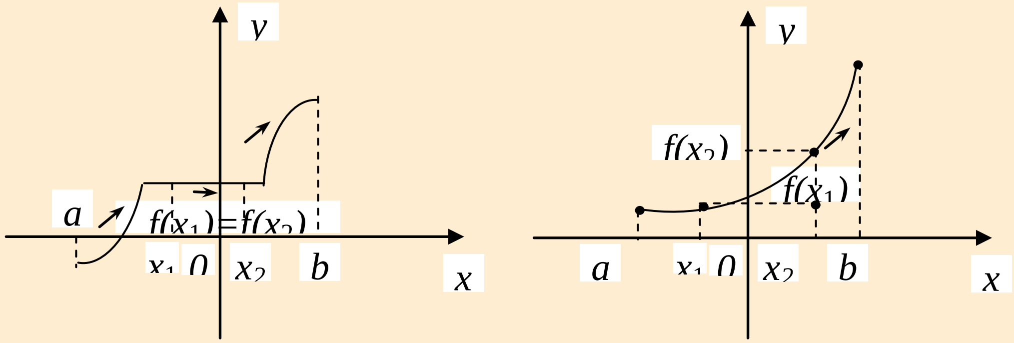
### 5.5. Монотон функциялар.

$y=f(x)$ функция $X=[a,b]$ $(X\subset R)$ тўпламда берилган бўлсин.

**5.9-таъриф.** Агар исталган $x_1,x_2\in X$ лар учун , $x_1<x_2$ бўлганда

$f(x_1)\le f(x_2)$ $(f(x_1)<f(x_2))$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция $X$ тўпламда ўсувчи ёки камаймовчи (қатъий ўсувчи) деб аталади (5.6-$a$) чизма,5.6-$b$) чизма).



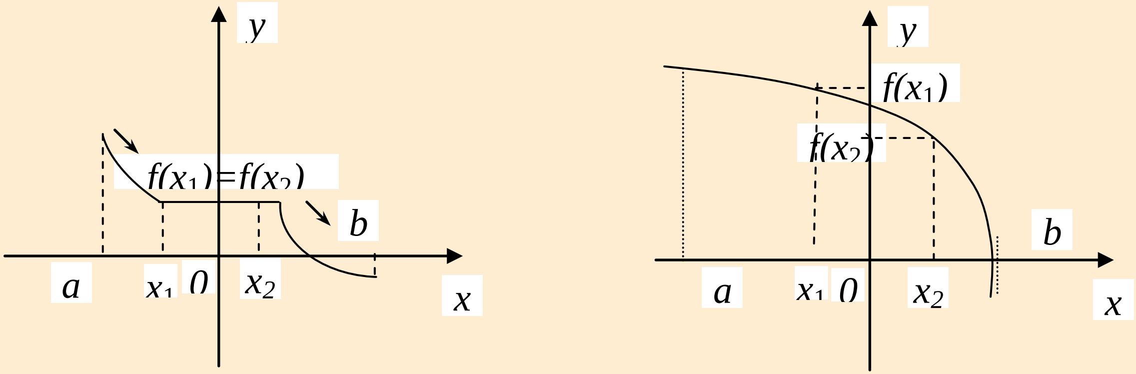
*a* )                                    *b*)

5.6-чизма.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**5.10-таъриф.** Агар исталган $x_1, x_2 \in X$ лар учун $x_1 < x_2$ бўлганда $f(x_1) \geq f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция X тўпламда камаювчи ёки ўсмовчи (қатъий камаювчи) деб аталади (5.7-$a$) чизма, 5.7-$b$) чизма).

Ўсувчи ва камаювчи функциялар *монотон функциялар* деб аталади.



*a*)　　*b*)

5.7-чизма.

Фунцияни монотонликка текширишда қуйидаги умумий тасдиқлар муҳим аҳамиятга эга:

1. Агар *f(x)* функция *X* тўпламда ўсувчи бўлса, у ҳолда *f(x)+C* (*C*- ихтиёрий ўзгармас сон) функция ҳам *X* тўпламда ўсувчи бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

2. Агар $f(x)$ функция X тўпламда ўсувчи бўлса, у ҳолда $cf(x)$ $(c>0)$ функция ҳам $X$ тўпламда ўсувчи бўлади.

3. Иккита ўсувчи (камаювчи) функцияларнинг йиғиндиси яна ўсувчи (камаювчи) функция бўлади.

4. Иккита мусбат ўсувчи (камаювчи) функцияларнинг кўпайтмаси яна ўсувчи (камаювчи) бўлади.

5. Агар $f(x)$ функция $X$ тўпламда ўсувчи, мусбат ва $n \in N$ бўлса, $f^n(x)$ функция ҳам $X$ тўпламда ўсувчи бўлади.

6. Агар $f(x)$ функция ўсувчи бўлса, $-f(x)$ функция камаювчи бўлади ва аксинча.

7. Агар $f(x)$ функция ўсувчи бўлиб, исталган $x \in X$ учун $f(x) \neq 0$ бўлса, $\frac{1}{f(x)}$ функция камаювчи бўлади.

8. Агар $f(x)$ функция қатъий ўсувчи бўлса, $x = f^{-1}(y)$ (8-§ нинг 6-б. қ.) функция ҳам бир қийматли ва қатъий ўсувчи бўлади.

9. Агар $x = f(t), t \in [\alpha, \beta]$ да ўсувчи, $y = F(x)$ функция эса, $[f(\alpha), f(\beta)]$ да ўсувчи бўлса, $y = F(f(x))$ функция ҳам $[\alpha, \beta]$ да ўсувчи бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

10. Агар $x = f(t), t \in [\alpha, \beta]$ да камаювчи, $y = F(x)$ функция эса, $[f(\alpha), f(\beta)]$ да камаювчи бўлса, $y = F(f(x))$ функция $[\alpha, \beta]$ да ўсувчи бўлади.

11. Агар $x = f(t), t \in [\alpha, \beta]$ да ўсувчи $y = F(x)$ функция эса, $[f(\alpha), f(\beta)]$ да камаювчи бўлса, $y = F(f(x))$ функция $[\alpha, \beta]$ да камаювчи бўлади.

12. Агар $\varphi(x), \psi(x)$ ва $f(x)$ функциялар ўсувчи бўлиб, $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$ тенгсизлик ўринли бўлса, $\varphi(\varphi(x)) \le f(f(x)) \le \psi(\psi(x))$ тенгсизлик ўринли бўлади.

**5.11- мисол**. Қуйидаги функцияларни монотонликка текширинг:

1) $f(x) = x^3 + x;$ 2) $f(x) = \sin x, \quad x \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$

3) $f(x) = (x^2 + 4x + 6) \cdot \ln(x^2 + 4x + 6);$ 4) $f(x) = \frac{4 - x^2}{x}.$

**Ечилиши. 1)** $f(x) = x^3 + x$ функция $R$ да аниқланган. $R$ дан ихтиёрий иккита $x_1$ ва $x_2$ нуқта оламиз. Аниқлик учун, $x_1 < x_2$ бўлсин. $f(x_2) - f(x_1)$ айирмани қараймиз:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot (x_2^2 + x_2 x_1 + x_2^2 + 1).$$

иккинчи кўпайтувчи $x_1$ ва $x_2$ нинг ҳар қандай ҳақиқий қийматида мусбат.

Титул варак
Мундарижа
1- боб
2- боб
3- боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Ҳақиқатан, ҳам

$$x_2^2+x_2x_1+x_1^2+1=(x_1+\frac{x_2}{2})^2+\frac{3}{4}x_2^2+1.$$

Шартга кўра $x_2-x_1>0$, у ҳолда $f(x_2)-f(x_1)>0$, яъни $f(x_2)>f(x_1)$. Охирги тенгсизлик , $f(x)$ функциянинг $R$ да қатъий ўсувчи эканлигини билдиради.

**2)** Аниқлик учун, $x_1<x_2$ бўлсин. $f(x_2)-f(x_1)$ айирмани тузамиз:

$$f(x_2)-f(x_1)=\sin x_2-\sin x_1=2\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cdot\cos\frac{x_2+x_1}{2}..$$

$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ кесмадан олинган $0<\frac{x_2-x_1}{2}\leq\frac{\pi}{2}$ лар учун $\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0$ ва

$-\frac{\pi}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\pi}{2}$ лар учун $\cos\frac{x_1+x_2}{2}>0$. Шундай қилиб, $\sin x_2>\sin x_1$ . Демак, $f(x)=\sin x$ функция $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ да қатъий ўсувчидир.

**3)** $z=x^2+4x+6=(x+2)^2+2$ бўлсин. У ҳолда $x<-2$ учун $z$ функция камаювчи, $x\geq-2$ учун $z$ функция ўсувчи бўлади. Бу қийматлар учун $z>1$ бўлади. Энди $y=z\ln z$ функцияни қарасак, $y$ $x\geq-2$ да ўсувчи, $x<-2$ да эса, камаювчи бўлади, чунки, агар $x_1<x<-2$ бўлса, $z_1>z_2>1$ ва демак, $y_1=z_1\ln z_1>z_2\ln z_2=y_2$, яъни берилган $y=z\ln z$ функция камаювчидир. 4)

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$f(x)=\frac{4-x^2}{x}$ функцияни $f(x)=\frac{4}{x}-x$ кўринишда тасвирлаймиз. Бу функция нолни ўз ичида сақламайдиган ҳар қандай интервалда $y_1=\frac{1}{x}$ ва $y_2=-x$ камаювчи бўлган иккита функциялар йиғиндисидан иборат. $3^0$-хоссага кўра, берилган функция камаювчидир.

**5.12- мисол.** $f(x)=x^n$ $(n\in N)$ функциянинг $[0;\infty)$ да ўсувчи эканлигини кўрсатинг.

**Ечилиши.** Маълумки, $0\le x_1<x_2$ дан $\forall n\in N$ учун $x_1^n<x_2^n$ тенгсизлиги келиб чиқади. Демак, берилган функция $[0;\infty)$ да ўсувчи.

**5.13- мисол.** Ушбу $f(x)=\frac{1}{x^4+5x^2+7}$ функциянинг $[0;\infty)$ да камаювчи эканлигини кўрсатинг.

**Ечилиши.** Маълумки, $x^4+5x^2+7$ функция $[0;\infty)$ да манфий эмас ва ўсувчи. У ҳолда, 5) ва 2) тасдиқларга биноан, $x^4$ ва $5x^2$ функциялар ҳам $[0;\infty)$ да ўсувчи. 1) ва 3) тасдиқларга асосан , $x^4+5x^2+7$ функция ҳам $[0;\infty)$ да ўсувчи бўлади. Шундай қилиб, 7) тасдиққа асосан, берилган $f(x)=\frac{1}{x^4+5x^2+7}$ функция $[0;\infty)$ да камаювчи.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**5.14- мисол.** Ушбу *а)* $f(x)=\sin x+\cos x$; *b)* $f(x)=tg(x+\frac{\pi}{3})$ функцияларнинг монотонлик оралиқларини аниқланг.

**Ечилиши.** *а)* Тригонометриядаги маълум формуладан фойдаланиб, берилган функцияни, ушбу $f(x)=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$ кўринишга келтирамиз. Маълумки, cos$x$ функция $[2n\pi;(2n+1)\pi]$ оралиқда камаяди, $[(2n-1)\pi;2n\pi],(n=0;\pm1;\pm2,...)$ оралиқда эса, ўсади. Шунинг учун , $f(x)=\sin x+\cos x$; функциянинг камайиш оралиғи $[\frac{\pi}{4}+2n\pi;\frac{\pi}{4}+(2n+1)\pi],(n=0;\pm1;\pm2,...)$, ўсиш оралиғи эса, $[\frac{\pi}{4}+(2n-1)\pi;\frac{\pi}{4}+2n\pi],(n=0;\pm1;\pm2,...)$ дан иборат бўлади.

б) Маълумки, tg$x$ функция $(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $(n=0;\pm1;\pm2,\ldots)$ оралиқда ўсади, у ҳолда берилган функция ҳам $(-\frac{5\pi}{6}+k\pi;\frac{\pi}{6}+k\pi)$, $(n=0;\pm1;\pm2,\ldots)$ оралиқда ўсади.

**5.6. Тескари функциялар**. $f(x)$ функция $X$ тўпламда аниқланган бўлиб, функциянинг ўзгариш (қийматлари) соҳаси $Y$ бўлсин.

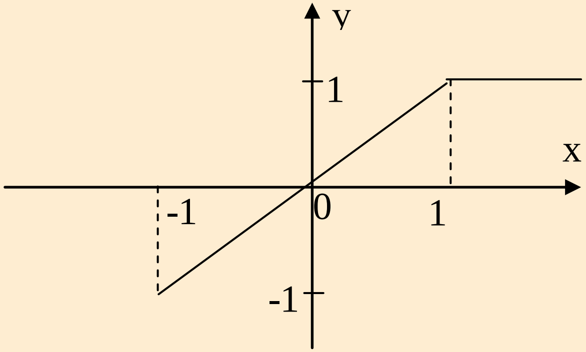
Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**5.11-таъриф.** $y = f(x)$ функциянинг ҳар бир $y \in Y$ қийматига бирор, $g$ муносабатга кўра, $X$ дан фақат битта $x$ қиймат мос келса, $Y$ тўпламда функция аниқланган бўлади, ва у $y = f(x)$ га нисбатан *тескари функция* дейилади ва $x = f^{-1}(y) = g(y)$ кўринишда белгиланади.

Одатдагидек, функцияни $y$ билан, аргументни эса $x$ билан белгилашларга мувофик, $x = f^{-1}(y)$ кўринишда ёзишади. $f^{-1}(x) = g(x)$ десак, $y = g(x)$ бўлади.

**5.1-теорема.** $f(x)$ функция $D(f)$ тўпламда тескари $g(x)$ функцияга эга бўлиши учун ўз аниқланиш соҳасидаги аргументнинг ҳар хил қийматига функциянинг ҳам ҳар хил қиймати мос келиши зарур ва етарли, яъни $\forall x_1, x_2 \in D(f)$ лар учун $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



5.8-чизма.

**5.2-теорема**. Агар $y = f(x)$ функция $X$ да аниқланган қатъий монотон ўсувчи (камаювчи) бўлса, $Y$ да $y = f(x)$ га тескари функция мавжуд, бу функция ҳам қатъий монотон ўсувчи (камаювчи) бўлади.

5.1-**эслатма**. Агар функция монотон бўлиб, лекин қатъий монотон бўлмаса, бу функциянинг тескариси мавжуд бўлмайди. Буни, масалан, 5.8-чизмада кўрсатилган,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < -1 \text{ бўлганда}, \\ x, & -1 \leq x \leq 1 \text{ бўлганда}, \\ 1, & x > 1 \text{ бўлганда} \end{cases}$$

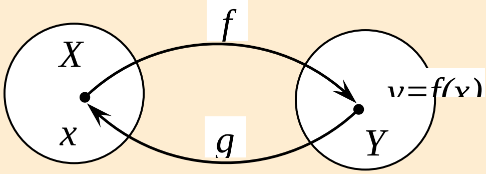
функция мисолида кўриш мумкин.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

5.2-**эслатма**. Жуфт функциянинг тескариси мавжуд эмас. Хусусий ҳолда, аниқланиш соҳасининг функция қатъий монотон бўлган қисмларида тескари функция мавжуд бўлади. Масалан, $y = x^2$ функция учун $[0,+\infty)$ да $y = \sqrt{x}$ тескари функция бўлади.

5.3-**эслатма**. Даврий функциянинг тескариси мавжуд эмас. Хусусий ҳолда, аниқланиш соҳасининг функция қатъий ўсувчи (камаювчи) бўлган қисмларида тескари функциялар мавжуд бўлади. Масалан, $f_1(x) = \sin x$ $(x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right])$; $f_2(x) = \cos x \quad (x \in [0,\pi])$; $f_3(x) = tgx \quad (x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$; $f_4(x) = ctgx(x \in (0,\pi))$ функциялар учун кўрсатилган оралиқларда $g_1(y) = \arcsin y \ (y \in [-1,1])$, $g_2(y) = \arccos y \ (y \in [-1,1])$; $g_3(y) = arctgy \ (y \in (-\infty,+\infty))$; $g_4(y) = arcctgy \ (y \in (-\infty,+\infty))$ тескари функциялар мавжуд, чунки бу оралиқларда улар қатъий монотондир:

**5.4-эслатма.** $y = f(x)$ функция ва бу функцияга тескари бўлган $x = f^{-1}(y)$ функциянинг аниқланиш соҳаси ва ўзгариш соҳаси ўз ролларини алмаштиради, яъни $y = f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси тескари функциянинг ўзгариш соҳаси бўлади,



5.9-чизма.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$y=f(x)$ функциянинг ўзгариш соҳаси эса, тескари функциянинг аниқланиш соҳаси бўлади.

$y=f(x)$ функция бирор $X$ тўпламда аниқланган бўлиб, унинг қийматлари тўплами $Y$ бўлсин. $g(y)$ функция $Y$ тўпламда аниқланган бўлиб, $X$ тўплам эса унинг қийматлари тўплами бўлсин.

5.3-**теорема**. $g(y)$ функция $y=f(x)$ га тескари функция бўлиши учун

$$g(f(x))=x \ \ (x\in X) \ \ (f(g(y))=y \ \ (y\in Y)) \tag{5.5}$$

шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир (5.9-чизма).

**Мисоллар**: **1)** $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ функциялар (5.5) шартни қаноатлантиради. Ҳақиқатан, ҳам $f(g(x))=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$. Демак, улар бир-бирига тескари функциялар бўлади.

**2)** $f(x)=-x,\ g(x)=-x,\ x\in(-\infty,+\infty)$ функциялар (5.5) шартни қаноатлантиради, яъни $f(g(x))=-(-x)=x$. Демак, улар бир-бирига тескари функциялар бўлади.

$y=f(x)$ тўғри функциядан $x=f^{-1}(y)$ тескари функцияга ўтиш ва унинг

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

графигини чизиш учун қуйидаги амалларни бажариш мақсадга мувофиқ:

1. $y = f(x)$ тенглама $x$ ўзгарувчига нисбатан (агар тенгламани $x$ га нисбатан ечиш мумкин бўлса) ечилади:

$$x = f^{-1}(y) = g(y).$$

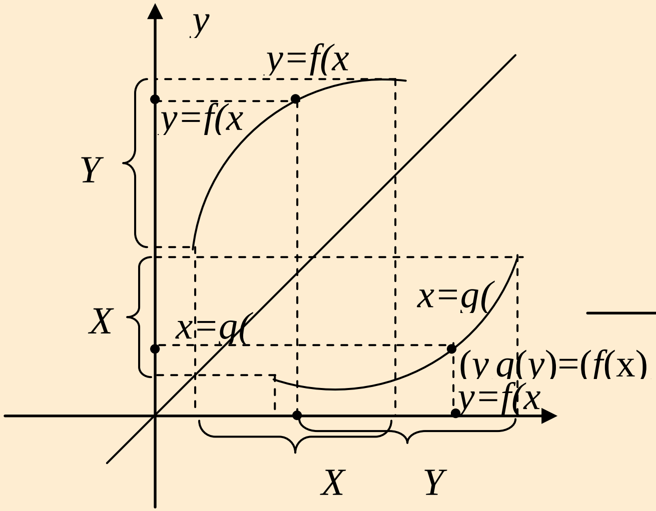
2. $x$ ни $y$ билан $y$ ни $x$ билан алмаштирилади:

$$y = f^{-1}(x) = g(x).$$

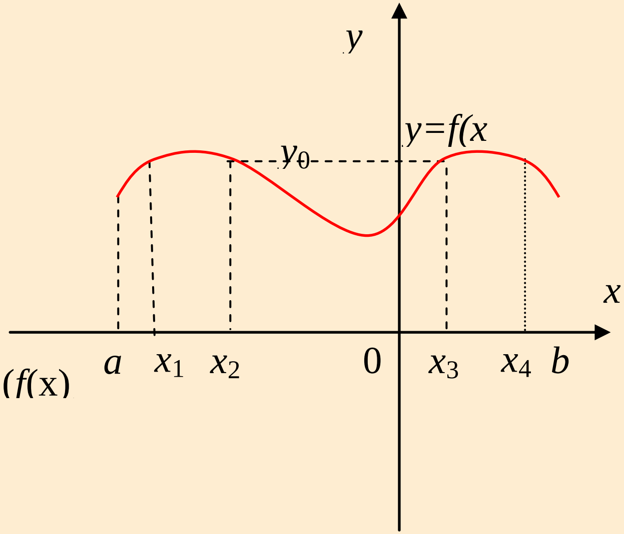
3. $y = f(x)$ тўғри функциянинг графиги чизилади.

4. Ҳосил қилинган $y = f(x)$ функциянинг графигини I ва III чорак

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



5.10-чизма.



5.11-чизма.

координаталар бурчакларидан ўтувчи биссектрисага нисбатан симметрик алмаштириш натижасида тескари функция графиги ҳосил қилинади.

$f(x)$ функциянинг графиги $\{(x,y): x \in X, y \in Y\}$ нуқталар тўпламидан, $g(y)$ функциянинг графиги эса $\{(y,g(y)) = (f(x),x)\}$ нуқталар тўпламидан тузилади (5.10-чизма).

5.11-чизмадаги $y = f(x)$ функция учун тескари функция мавжуд эмас, чунки $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ да $y_0 = f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$ бўлади, бу эса тескари

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

функция мавжуд бўлиши шартига зиддир.

**5.15-мисол**. $y=5x+7$ функцияга тескари функцияни топинг.

**Ечилиши.** $y=5x+7$ функция бутун сон ўқида аниқланган ва қатъий ўсувчи. Шунинг учун бу функцияга тескари функция мавжуд ва у ҳам ўсувчи. $y=5x+7$ тенгламани $x$ га нисбати ечамиз: $x=\frac{y-7}{5}$ (-∞<$y$<∞ ).

Энди $x$ ни $y$ га ва $y$ ни $x$ га алмаштирамиз, натижада изланаётган тескари функцияга эга бўламиз: $y=\frac{x-7}{5}$.

**5.16- мисол.** Ушбу $f(x)=x^2-x+1, x\geq\frac{1}{2}$ ва $\varphi(x)=\frac{1}{2}+\sqrt{x-\frac{3}{4}}$ функцияларнинг ўзаро тескари эканлигини кўрсатинг.

**Ечилиши.** $y=f(x)=x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ функция $\frac{1}{2}\leq x<\infty$ да ўсувчи. $x$ шу оралиқда ўзгарганда, $\frac{3}{4}\leq y<\infty$. Демак, берилган функцияга тескари функция мавжуд ва у $x^2-x+(1-y)=0$ тенгламадан топилади:

$$x=g(y)=\frac{1}{2}+\sqrt{y-\frac{3}{4}}=\varphi(y).$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**5.17- мисол.** Ушбу $y=2^x$ функцияга тескари функция мавжудми?

**Ечилиши.** Берилган функциянинг аниқланиш соҳаси- бутун сон ўқи; ўзгариш соҳаси эса (0;∞) дан иборат бўлиб, у (-∞;∞) тўпламда қатъий ўсувчи бўлади.

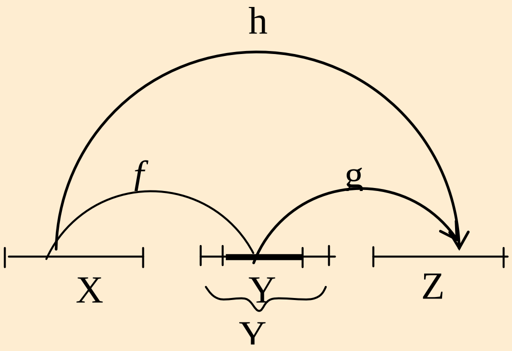
Демак, 5.2- теоремага кўра, берилган функцияга тескари $\log_2 x$ функция мавжуд: $f^{-1}(f(x))=\log_2 2^x = x\log_2 2 = x$

**5.18- мисол.** Ушбу *y*=cos*x* функцияга тескари бўлган функцияни топинг.

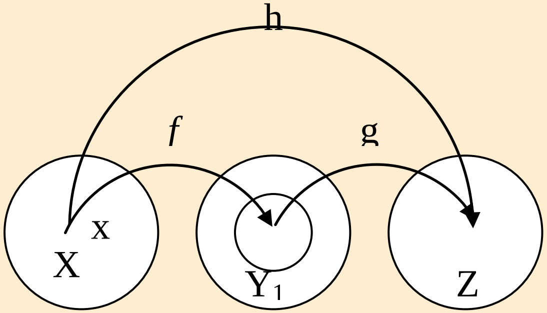
**Ечилиши.** Маълумки, *y*=cos*x* функциянинг аниқланиш соҳаси $D(y)=R=(-\infty;\infty)$, қийматлари тўплами $E(y)=[-1;1]$ дан иборат бўлиб, у тескари функциянинг мавжудлик шартини қаноатлантирмайди.

*R*=(- ∞; ∞) ни, ушбу $n\pi-\frac{\pi}{2}\le x\le n\pi+\frac{\pi}{2},(n=0;\pm1;\pm2;\pm3;\ldots)$ оралиқларга ажратамиз. Агар *n*- жуфт бўлса, у ҳолда cos*x* функция $n\pi-\frac{\pi}{2}\le x\le n\pi+\frac{\pi}{2}$, $(n=0;\pm1;\pm2;\pm3;\ldots)$ оралиқларда ўсувчи, *n*- тоқ бўлганда эса, у $n\pi-\frac{\pi}{2}\le x\le n\pi+\frac{\pi}{2},(n=0;\pm1;\pm2;\pm3;\ldots)$ оралиқларда камаювчи бўлгани учун, кўрсатилган оралиқларда [-1;1] да аниқланган тескари функция мавжуд

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



5.12-чизма.



5.13-чизма.

бўлади. Хусусий ҳолда, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ ораликда cos*x* га тескари *x*=arccos*y* функция мавжуд бўлади. $n\pi - \frac{\pi}{2} \le x \le n\pi + \frac{\pi}{2}, (n = 0;\pm1;\pm2;\pm3;\ldots)$ оралиқда *y*=cos*x* функцияга тескари бўлган функциянинг кўриниши қуйидагича бўлади: $x = \pm\arccos y + 2\pi k, k \in Z$.

**5.7. Мураккаб функциялар.** $f$ ва $g$ функциялар, мос равишда, $X$ ва $Y_1$ тўпламларда берилган бўлиб, $f$ функциянинг қийматлари тўплами $E(f)=Y$, $g$ функциянинг қийматлари тўплами $E(g)=Z$ ва $Y \subseteq Y_1$ ( $f$ функциянинг қийматлари тўплами, $g$ функциянинг аниқланиш соҳасида сақлансин) шарт бажарилганда $X$ тўпламда $F=g(f(x))=h(x)$ $(F=g(y), y=f(x))$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

мураккаб функция ёки $g$ ва $f$ *функцияларнинг композицияси аниқланган* дейилади ва у $z = g \circ f$ каби белгиланади (5.12, 5.13-чизмалар). Демак, $\forall x \in X$ учун $f$ функция ёрдамида битта $y \in Y$ мос қўйилади, сўнгра $\forall y \in Y$ учун $g$ функция ёрдамида битта $z \in Z$ мос қўйилади. Шундай қилиб, $z = g(f(x))$ функциянинг аниқланиш соҳаси $y = f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасига устма-уст тушади ёки унинг қисми бўлади. Бунда $f$ функциянинг қийматлари соҳаси, $g$ функциянинг аниқланиш соҳасида ётиши муҳим, акс ҳолда $g$ ва $f$ функцияларнинг композицияси аниқланмайди.

**5.19- мисол.** Ушбу $z=\sin y$ ва $y=x^2$ функциялардан мураккаб функция тузиш мумкинми?

**Ечилиши.** Берилган $z=\sin y$ ва $y=x^2$ функцияларнинг, мос равишда, $D(z)$, $E(y)$ соҳаларини топамиз. Маълумки, $z=\sin y$ функциянинг аниқланиш соҳаси бутун сон ўқидан, яъни $D(z) = R = (-\infty;\infty)$ дан иборат. $y=x^2$ функциянинг қийматлари тўплами $E(y)=[0;\infty)$. Бундан, $E(y) \in D(z)$ эканлиги келиб чиқади, яъни юқоридаги, мураккаб функцияни тузиш шарти бажарилаяпти. Шунинг учун, бу функциялардан мураккаб функция тузиш мумкин: $z=\sin x^2$ . Бу функциянинг ҳам аниқланиш соҳаси $R=(-\infty;\infty)$ дан иборат.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**5.20 - мисол.** $z=\sqrt{y+4}$ ва $y=3^x$ функциялардан мураккаб функция тузиш мумкинми?

**Ечилиши.** Маълумки, $y=3^x$ функция *D*(*y*)=(- ∞;∞) да аниқланган бўлиб, унинг ўзгариш соҳаси *E*(*y*)=(0;∞) дан иборат. $z=\sqrt{y+4}$ функциянинг аниқланиш соҳаси *D*(*z*)=[- 4;∞). Равшанки, $E(y)\in D(z)$, мураккаб функция тузиш шарти бажарилганлиги учун, берилган функциялардан [- 4; ∞) да аниқланган $z=\sqrt{3^x+4}$ мураккаб функцияни тузиш мумкин.

**5.21- мисол.** $z=\arcsin y$ ва $y=5+x^4$ функциялардан мураккаб функция тузиш мумкинми?

**Ечилиши.** Маълумки, $z=\arcsin y$ функция *D*(*z*)=[-1;1] да аниқланган, лекин $y=5+x^4$ функциянинг ўзгариш соҳаси *E*(*y*) ихтиёрий *x* ларда *D*(*z*)=[-1;1] да ётмайди.

Демак, мураккаб функция тузиш шарти бажарилмайди. Шунинг учун берилган функциялардан муракаб функция тузиш мумкин эмас.

**5.22- мисол.** Ушбу $f(x)=x^2$ ва $g(x)=3^x$ функциялар берилган. $f(f(x)),\ f(g(x)),\ g(g(x))$ функцияларни топинг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**Ечилиши.** Функцияларнинг берилишига кўра,

$$f(f(x))=f(x^2)=(x^2)^2=x^4,\quad f(g(x))=f(3^x)=(3^x)^2=3^{2x}$$

$g(g(x))=g(3^x)=3^{3^x}$ бўлади ва улар ўз навбатида мураккаб функцияни ташкил этади, чунки $E(f)=[0;\infty)\subset D(f)=(-\infty;\infty), E(g)=(0;\infty)\subset D(f)$, $E(g)=(0;\infty)\subset D(g)=(-\infty;\infty)$.

**5.23- мисол.** Ушбу $f(x)=3^x$ ва $f^{-1}(x)=\log_3 x$ функцияларнинг $f(f^{-1}(x)), f^{-1}(f(x))$ композицияларини топинг.

**Ечилиши.** Тескари функциянинг таърифига кўра,

$$f(f^{-1}(x))=3^{f^{-1}(x)}=3^{\log_3 x}=x,\quad f^{-1}(f(x))=\log_3 f(x)=\log_3 3^x=x.$$

**5.24-мисол.** Ушбу $g(x)=\sqrt{3-x},\quad D(g)=(-\infty,3]$ ва $f(x)=x^2-1,\ D(f)=(-\infty,\infty)$ функциялардан $f\circ g,\quad g\circ f$ композициялар топинг.

**Ечилиши**. Таърифга кўра,

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\left(\sqrt{3-x}\right)^2-1=3-x-1=2-x$$

ва

$D(f\circ g)=\{x\in D(g):g(x)\in D(f)\}=D(g)$, чунки $D(f)$ барча ҳақиқий

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

сонлардан иборат. Демак, $D(f\circ g)=(-\infty,3]$ экан.

Энди $(g\circ f)(x)$ нинг ифодасини ва аниқланиш соҳасини топамиз:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{3-(x^2-1)}=\sqrt{4-x^2}.$$

ва

$$D(g\circ f)=\{x\in D(f):\ f(x)\in(-\infty,3]=\{x:\ x^2-1\le 3\}=[-2,2].$$

Демак, $D(g\circ f)=[-2,2]$.

**5.25-мисол.** Ушбу $f(x)=\frac{1}{x};\quad g(x)=x^2+1,\quad h(x)=\cos x$ функцияларнинг $(f\circ g\circ h)(x)$ композициясини ёзинг.

**Ечилиши**. Таърифга кўра,

$$(f\circ g\circ h)(x)=f(g(h(x)))=\frac{1}{g(h(x))}=\frac{1}{[h(x)]^2+1}=\frac{1}{\cos^2 x+1}.$$

**5.26-мисол.** $f\circ g=F$ композицияда $F(x)=(x+1)^5$ бўлса, $f$ ва $g$ функцияларни топинг.

**Ечилиши**. $F(x)$ функция $x$ га 1 ни қўшиб, кейин бу ифодани 5-даражага кўтаришдан иборат бўлганлигидан, биз

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$g(x)=x+1$ ва $f(x)=x^5$ деб олиш мақсадга мувофиқ бўлади. Ҳақиқатан ҳам, юқоридаги белгилашларда,

$(f\circ g)(x)= f(g(x))=[g(x)]^5=(x+1)^5$ бўлади.

**5.27-мисол.** Берилган жадвални тўлдиринг.

| № | $g(x)$ | $f(x)$ | $(f\circ g)(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1) | ? | $\sqrt{x-5}$ | $\sqrt{x^2-5}$ |
| 2) | ? | $1+\dfrac{1}{x}$ | $x$ |
| 3) | $\dfrac{1}{x}$ | ? | $x$ |
| 4) | $\sqrt{x}$ | ? | $x$ |

**Ечилиши.** 1) Шартга кўра, $f(x)=\sqrt{x-5}$,

$(f\circ g)(x)= f(g(x))=\sqrt{x^2-5}$, бўлганлиги учун

$f(g)=\sqrt{g-5}$, $\sqrt{g-5}=\sqrt{x^2-5}$ , бундан $g-5=x^2-5$, $g(x)=x^2$.

**2)** Шартга кўра, $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$, $(f\circ g)(x)=x$ бўлганлиги учун,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$f(g)=1+\frac{1}{g}$, $1+\frac{1}{g}=x$ бўлади. Бундан $g(x)=\frac{1}{x-1}$.

**3)** Шартга кўра, $g(x)=\frac{1}{x}$, $(f\circ g)(x)=x$ бўлганлиги учун, $f(g)=f\left(\frac{1}{x}\right)=x$,

бу ерда $\frac{1}{x}=t$ деб олсак, у ҳолда $f(t)=\frac{1}{t}$.

**4)** Шартга кўра, $g(x)=\sqrt{x}$, $(f\circ g)(x)=x$ бўлганлиги учун, $f(g)=f\left(\sqrt{x}\right)=x$,

бу ерда $\sqrt{x}=t$ деб белгиласак, у ҳолда $x=t^2$, $f(t)=t^2$.

**5.8. Элементар функциялар.** Математиканинг кўп масалаларида қўлланиладиган қуйидаги функцияларга *асосий элементар* функциялар дейилади. Улар

1. $y=b$ - ўзгармас функция $(b=const)$, $b\in R$.
2. $y=x^{\alpha}$ - даражали функция, $\alpha$ - ҳақиқий сон.
3. $y=a^{x}$ - кўрсаткичли функция, бунда $a>0$, $a\neq 1$.
4. $y=\log_a x$ - логарифмик функция $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$.
5. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tgx$, $y=ctgx$, $y=\frac{1}{\cos x}=\sec x$, $y=\frac{1}{\sin x}=\operatorname{cosec}x$ -

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

тригонометрик функциялар.

6. $y = \arcsin$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$ - тескари тригонометрик функциялар.

Асосий элементар функцияларнинг хоссалари умумий ўрта таълим мактаби кўрсидан маълум.

Асосий элементар функцияларнинг устида чекли сондаги қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш амалларини бажариш ва мураккаб функция ҳосил қилиш натижасида юзага келадиган (аналитик усулда берилган) функциялар *элементар функциялар* дейилади. Масалан, ушбу

$$y = 3^{x+tg\frac{1}{x}}, \quad y = \arcsin x^2, \quad y = \log_3\left(x^2 - 4x + 3\right)$$

функциялар элементар функциялардир.

Элементар бўлмаган функцияларга мисоллар келтирамиз:

1. $y = \sin x + 3^{4x} + arctg\, 2x^2 + \ldots$

2. $y = x + 2x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \ldots$

3. Дирихле функцияси:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$D(x)=\begin{cases}0, & x \text{ иррационал сон бўлганда,}\\ 1, & x \text{ рационал сон бўлганда.}\end{cases}$$

1, 2 - мисолларда амаллар чекли марта бажарилмаган, 3 - мисолда эса элементар функциялар қатнашгани йўқ.

Элементар функциялар қуйидаги асосий синфларга бўлинади:

**1) Бутун рационал функция (кўпхад).** Бундай функциянинг умумий кўриниши қуйидагича:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+....+a_{n-1}x+a_n,$$

бунда $a_0$, $a_1,...,a_n$ - ҳақиқий сонлар, $a_0 \neq 0$ (кўпхаднинг коэффициентлари), $n$ - манфий бўлмаган бутун сон (кўпхаднинг даражаси). $a_0$, $a_1,...,a_n$ сонлар ва $x$ устида чекли сондаги қўшиш ва кўпайтириш амаллари бажарилган. Бутун рационал функциянинг аниқланиш соҳаси $R$ дан иборат . Хусусий холда, $y=ax+b$ - чизиқли функция, ва $y=ax^2+bx+c$ - квадрат учҳад бутун рационал функциялардир.

**2) Каср-рационал функция.** Иккита қисқармас бутун рационал функциянинг (кўпхаднинг) нисбатидан тузилган

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+....+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+....+b_m}$$

функция *каср - рационал функция* деб аталади. Каср - рационал функция

$$X=R\ \setminus\{x:x\in R,\ Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m=0\}$$

тўпламда, яъни махражни нолга айлантирувчи нуқталардан фарқли бўлган барча ҳақиқий сонлардан иборат тўпламда аниқланган. Хусусий ҳолда, $y=\dfrac{x^5+2}{x^2+3x}$ ва $y=\dfrac{x}{x^4-1}$ - каср рационал функциялар бўлади.

Бутун рационал ва каср - рационал функциялар биргаликда рационал функциялар синфини ташкил қилади.

3) **Иррационал функция.** Таркибида иррационал ифодалар қатнашган алгебраик ифодаларнинг мослик қонунини рационал ифодалар ёрдамида кўрсатиш мумкин бўлмаса, бундай ифодалар *иррационал функциялар* дейилади. Масалан, ушбу

$$y=\frac{3x^3+\sqrt{x^3-4}}{\sqrt[3]{1+6x}-4},\ \ y=\sqrt[3]{x+2},\ \ y=\sqrt{x}$$

функциялар иррационал функциялардир.

3) **Алгебраик функция.** Рационал ва иррационал функциялар

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

синфлари биргаликда алгебраик функциялар синфини ташкил қилади. Ушбу

$$A_0(x)y^n + A_1(x)y^{n-1} + \ldots + A_{n-1}(x)y + A_n(x) = 0$$

тенгламани қаноатлантирадиган ҳар қандай $y = f(x)$ функция *алгебраик функция* дейилади. Бунда $A_0(x), A_1(x), \ldots, A_n(x)$ - берилган бутун рационал функциялар, $A_0(x) \neq 0$ ва $n$ - бутун мусбат сон.

Мисоллар. 1. $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$ - алгебраик функциядир, чунки у $y^3 - x^2 - 1 = 0$ тенгламани қаноатлантиради.

2. Ушбу $xy^2 - 2(x^2 - 1)y - 4x = 0$ тенглама билан аниқланган функция иккита алгебраик функциядан иборат бўлади, яъни

$$y = \frac{x^2 - 1 + \sqrt{(x^2 - 1)^2 + 4x^2}}{x} = 2x,$$

$$y = \frac{x^2 - 1 - \sqrt{(x^2 - 1)^2 + 4x^2}}{x} = -\frac{2}{x}$$

3. Ушбу $x^4 y^5 + xy - x^3 + 4 = 0$ тенглама билан аниқланган функция ҳам алгебраик функция бўлади, лекин бу функцияни ошкор кўринишда ёзиш мумкин эмас, чунки уни радикалга нисбатан ечиб бўлмайди. Бу ҳолда биз ошкормас алгебраик функцияга эга бўламиз.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

4)**Трансцендент функциялар.** Барча алгебраик бўлмаган функциялар *трансцендент функциялар* деб аталади (кўрсаткичли, логарифмик, тригонометрик функциялар ва тескари тригонометрик функциялар-трансцендент функциялардир). Масалан: $y=\sin 3x$, $y=2^{x+3}$, $y=arctg5x$ функциялар трансцендент функциялардир.

Шундай қилиб, барча элементар функциялар алгебраик ва *трансцендент функциялар синфларига бўлинади*.

## 5.9. Функция графиги устида элементар шакл алмаштиришлар.

Биз қуйида элементар функцияларнинг баъзи синфларини алоҳида қараймиз ва уларнинг, асосий элементар функцияларнинг маълум хоссаларига таянган ҳолда келиб чиқадиган, асосий (бош) хоссаларини ҳамда функция устида маълум бир амаллар бажариш натижасида унинг графиги шаклини алмаштириш қоидаларини келтирамиз.

Фараз қилайлик, Х тўпламдан аниқланган $y=f(x)$ функциянинг графиги чизилган бўлсин. Қуйидаги жадвалда $f(x)$ функция ёки унинг аргументини маълум бир шакл алмаштириш натижасида бу график қандай

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

ўзгариши баёни берилган

| Функция | $y=f(x)$ функция графиги устида $xOy$ текисликда амалга ошириши лозим бўлган (шакл) алмаштиришлар |
|---|---|
| $f(x)+A,\ \ A\neq 0$ | $y=f(x)$функция графигини $Oy$ ўқ бўйлаб: $A>0$ бўлган $A$ бирлик юқорига; $A<0$ бўлганда $\lvert A\rvert$ бирлик қўйига (пастга) силжитиш (кўчириш) |
| $f(x-a),\ a\neq 0$ | $y=f(x)$функция графигини $Ox$ ўқ бўйлаб: $a>0$бўлганда$a$ бирлик ўнгга; $a<0$бўлганда $\lvert a\rvert$ бирлик чапга силжитиш (кўчириш) |
| $k\ f(x),\ k>0, k\neq 1$ | $y=f(x)$ функция графигини $Oy$ ўқ бўйлаб $Ox$ ўққа нисбатан: $k>1$ бўлганда $k$ марта чўзиш; $0<k<1$ бўлганда, $\frac{1}{k}$ марта қисиш. |
| $f(\kappa x),\ \kappa>0,\ \kappa\neq 1$ | $y=f(x)$ функция графигини $Ox$ ўқ бўйлаб $Oy$ ўққа нисбатан: $k>1$ бўлганда $k$ марта қисиш; $0<\kappa<1$ |

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

| | |
|---|---|
| | бўлганда, $\frac{1}{k}$ марта чўзиш. |
| $-f(x)$ | $y=f(x)$ функция графигининг $Ox$ ўққа нисбатан симметрик акслантириш. |
| $\|f(x)\|$ | $y=f(x)$ функция графигининг $Ox$ ўқдан пастда жойлашган қисми шу ўққа нисбатан симметрик акслантирилиб, графикнинг қолган қисми ўзгармасдан қолдирилади? |
| $f(-x)$ | $y=f(x)$ функция графигини $Oy$ ўққа нисбатан симметрик акслантириш |
| $f(\|x\|)$ | $y=f(x)$ функция графигининг $Oy$ ўқдан чапда жойлашган қисмини ўчириб ташлаш; графикнинг $Oy$ ўқдан ўнгда ва ўқнинг устида жойлашган қисмини ўз ҳолида қолдириш; функция графигининг $x\geq 0$ соҳада ётган қисмини $x<0$ соҳага $Oy$ ўққа нисбатан симметрик акслантириш. |

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Умумий ҳолда, $y = Cf(ax+b)+D$ функция графигини чизиш, $y = f(x)$ функция графиги устида бир неча шакл алмаштиришлар (силжитиш, қисми, акслантири ва ҳоказо) бажаришга келтиради.

Аввало уни қуйидаги $y = Cf[a\left(x+\frac{b}{a}\right)]+D$ кўринишда тасвирлаймиз. Бундан, бу функция графигини (ясаш) чизиш учун, $y_1 = Cf[a\left(x+\frac{b}{a}\right)]$ функция графигини чизиш етарли эканлиги кўринади. $y_1$ функция графигини чизиш учун эса, $y_2 = f[a\left(x+\frac{b}{a}\right)]$ функция графигини чизиш етарли. Ўз навбатда, $y_2$ функциянинг графигини чизиш учун, $y_3 = f(ax)$ функция графигини чизиш етарли. Демак, берилган $y = Cf[a\left(x+\frac{b}{a}\right)]+D$ функция графигини чиқиш учун $f(x)$ функция графиги устида қуйидаги (шакл) алмаштиришларни бажариш зарур бўлади:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
← →
|← →|
Оркага
Тулик экран
Чикиш

1. $f(x)$ функция графигини:, $a>o$ бўлганда $Ox$ ўқ бўйлаб $Oy$ ўққа нисбатан қисиш ёки чўзиш; $a<o$ бўлганда $Oy$ ўққа нисбатан симметрик акслаштириш ва $Ox$ ўқ бўйлаб $Oy$ ўққа нисбатан, қисиш ёки чўзиш.

2. $f(ax)$ функциянинг ҳосил бўлган графигини $Ox$ ўқ бўйлаб $\frac{b}{a}>o$ бўлганда $\frac{b}{a}$ бирликка чапга силжитиш; $\frac{b}{a}<o$ бўлганда, $\left|\frac{b}{a}\right|$ бирликка ўнгга силжитиш.

3. $f\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]$ функциянинг ҳосил бўлган графигини: $C>o$ бўлганда $Oy$ ўқ бўйлаб $Ox$ ўққа нисбатан қисиш ва чўзиш; $C<o$ бўлганда $Ox$ ўққа нисбатан симметрик акслантириш ва $Oy$ ўқ бўйлаб $Ox$ ўққа нисбатан қисиш ёки чўзиш.

4. $C\,f\left[\alpha\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]$ функциянинг ҳосил бўлган графигини: $D>0$ бўлганда $D$ бирлик юқорига, $D<0$ бўлганда эса, $|D|$ бирлик пастга силжитиш.

$$y=C\,f(ax+b)+D$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

функция графигини чизишда амалга оширилган шакл алмаштиришлар кетма – кетлигини қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин бўлади:

$$f(x)\to f(ax)\to f\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]=f(ax+b)\to C\,f(ax+b)\to C\,f(ax+b)+D$$

Унда берилган функция графигини ясашда қандай функция графиги асосий роль ўйнаши кўриниб турибди.

**5.22-мисол.** Ушбу $y=\log_2(3x+1)+5$ функция графиги эскизини чизинг.

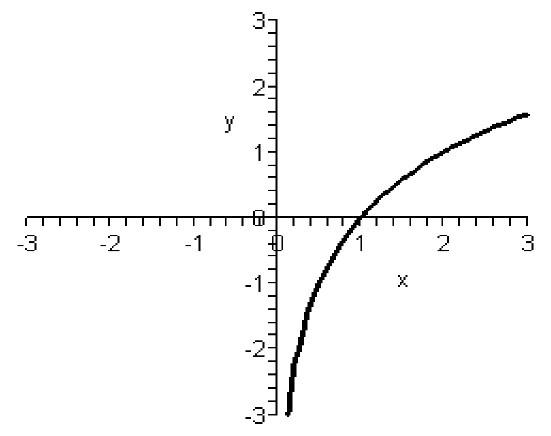
**Ечилиши**. $y=\log_2(1+3x)+5$ функция графиги эскизини чизишда амалга ошириладиган шакл алмаштиришлар кетма-кетлигини қуйидаги кўринишда ифодалаймиз:

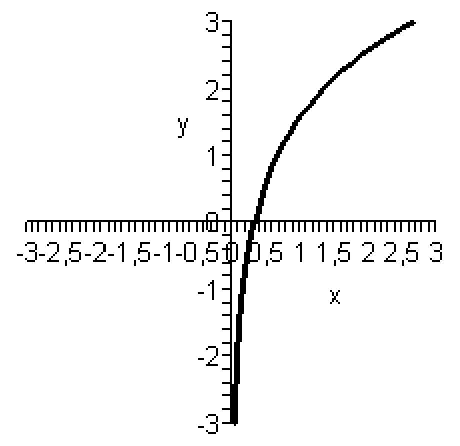
$$\log_2 x\to\log_2 3x\to\log_2\left[3(x+\frac{1}{3})\right]\equiv\log_2(3x+1)+5.$$

Демак, берилган функция графиги эскизини чизиш учун аввало: 1) $y_1=\log_2 x$ функция графиги ( 5.14. а) – чизма) чизилади; 2) сўнгра чизилган график $Ox$ ўқ бўйлаб, $Oy$ ўққа нисбатан 3 бирликга қисилади (5.14. $b$)-

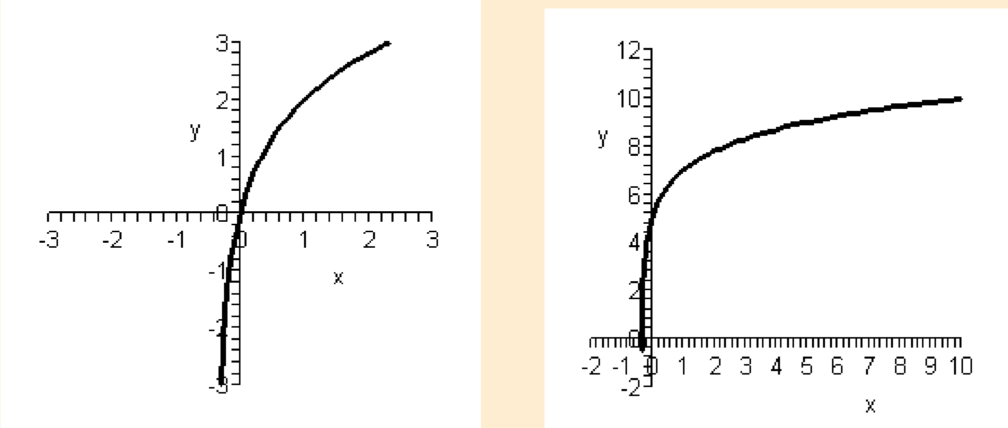
Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

чизма); 3) $\log_2 3x$ функциянинг ҳосил бўлган графиги чапга $\left|-\frac{1}{3}\right|$ бирликка силжитилади (5.14. $c$) - чизма); 4) $\log_2[3\left(x+\frac{1}{3}\right)]$ функциянинг ҳосил бўлган графиги $Oy$ ўқ бўйлаб юқорига 5 бирликка силжитилади (5.14. $d$) - чизма). Натижада берилган $y=\log_2\left(1+3x\right)+5$ функция графиги эскизи ҳосил бўлади.





Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



5.14-чизма.

5.2**3-мисол**. Ушбу $y=-2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ функция графиги эскизини чизинг.

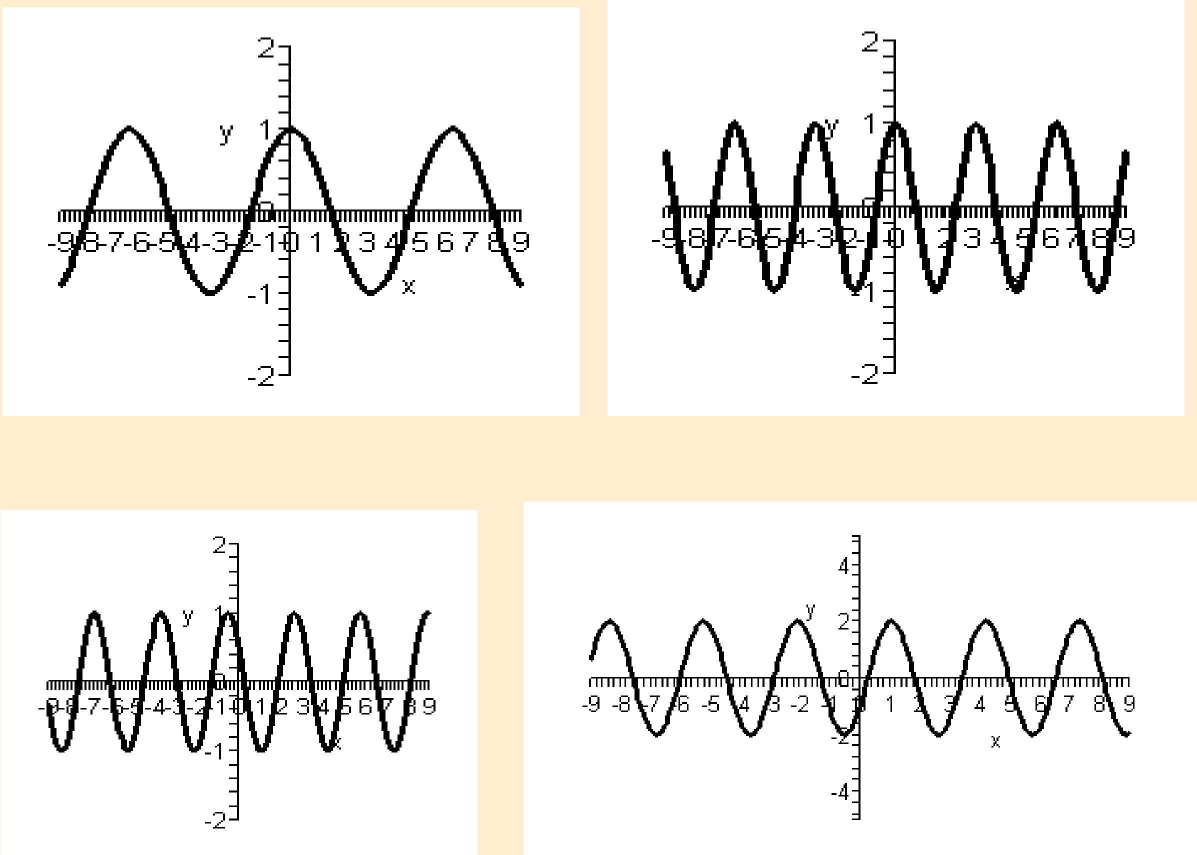
**Ечилиши**. Аввало, $y=-2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ функция графигининг эскизини чизишда амалга ошириладиган шакл алмаштиришлар кетма – кетлигини тузамиз:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\cos x \to \cos 2x \to \cos[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)] = \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \to -2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

Шундай қилиб, $y = -2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ функция графиги эскизини чизиш учун аввало: 1) $y_1 = \cos x$ функция графиги (5.15. $a$)- чизма) чизилади; 2) $y_1 = \cos x$ функция графиги $Ox$ ўқ бўйлаб, $Oy$ ўққа нисбатан 2 бирликка қисилади (5.15. $b$) -чизма); 3) $y_2 = \cos 2x$ функциянинг ҳосил бўлган графиги чапга $\frac{\pi}{6}$ бирлик силжитилади (5.15. $c$)-чизма); 4) $y_3 = \cos[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)]$ функциянинг ҳосил бўлган графиги $Ox$ ўққа нисбаттан симметрик акслантирилиб, график $Oy$ ўқ бўйлаб $Ox$ ўққа нисбатан $|-2|$ бирликка чўзилади ((5.15. $d$)- чизма). Натижада берилган функция графигининг эскизи ҳосил бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



5.15-чизма

**5.24-мисол.** Ушбу $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{7}{2}$ функция графигининг эскизини чизинг.

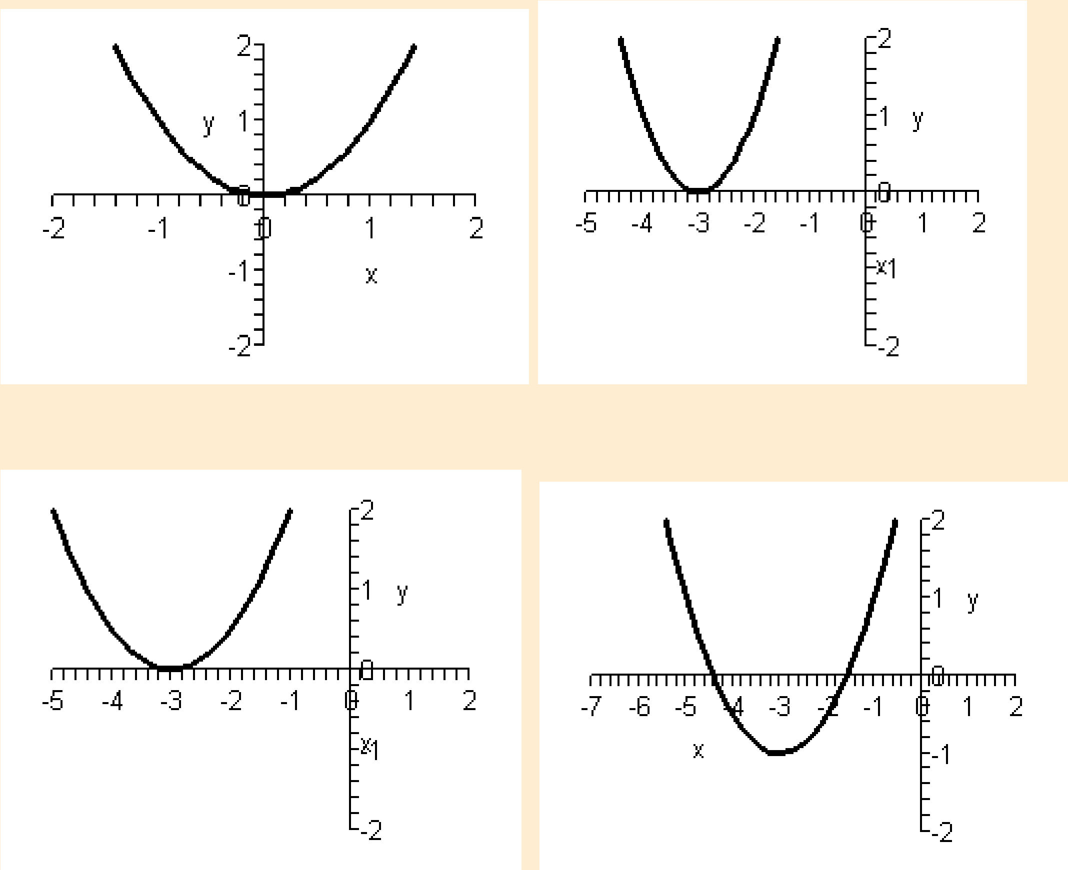
Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**Ечилиши.** Берилган функция графигининг эскизини чизиш учун аввало, графикни чизишда амалга ошириладиган шакл алмаштиришлар кетма – кетлигини тузиб оламиз:

$$x^2 \to (x+3)^2 \to \frac{1}{2}(x+3)^2 \to \frac{1}{2}(x+3)^2 -1 = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{7}{2}$$

Бундан кўринадики, $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{7}{2}$ функция графигининг эскизини чизиш учун аввало: 1) $y_1 = x^2$ функция графиги чизилади (5.16. $a$) -чизма); 2) $y_1 = x^2$ функциянинг чизилган графиги $Ox$ ўқ бўйлаб, чапга $|-3|$ бирлик силжитилади (5.15. $b$)- чизма); 3) $y_2 = (x+3)^2$ функциянинг ҳосил бўлган графиги $Oy$ ўқ бўйлаб 2 бирликга қисилади (5.15. $c$) - чизма); 4) $y_3 = \frac{1}{2}(x+3)^2$ функциянинг ҳосил бўлган графиги $Oy$ ўқ бўйлаб пастга $|-1|$ бирликга силжитилади (5.15. $d$)- чизма). Натижада берилган $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{7}{2}$ функция графигининг эскизини ҳосил қиламиз (5.15. $d$)- чизма).

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



5.16- чизма.

**5.25-мисол**. Ушбу $y=2^{\frac{1}{3}x-2}$ функция графигини эскизини чизинг.

**Ечилиши**. Берилган функция графигини чизишда амалга

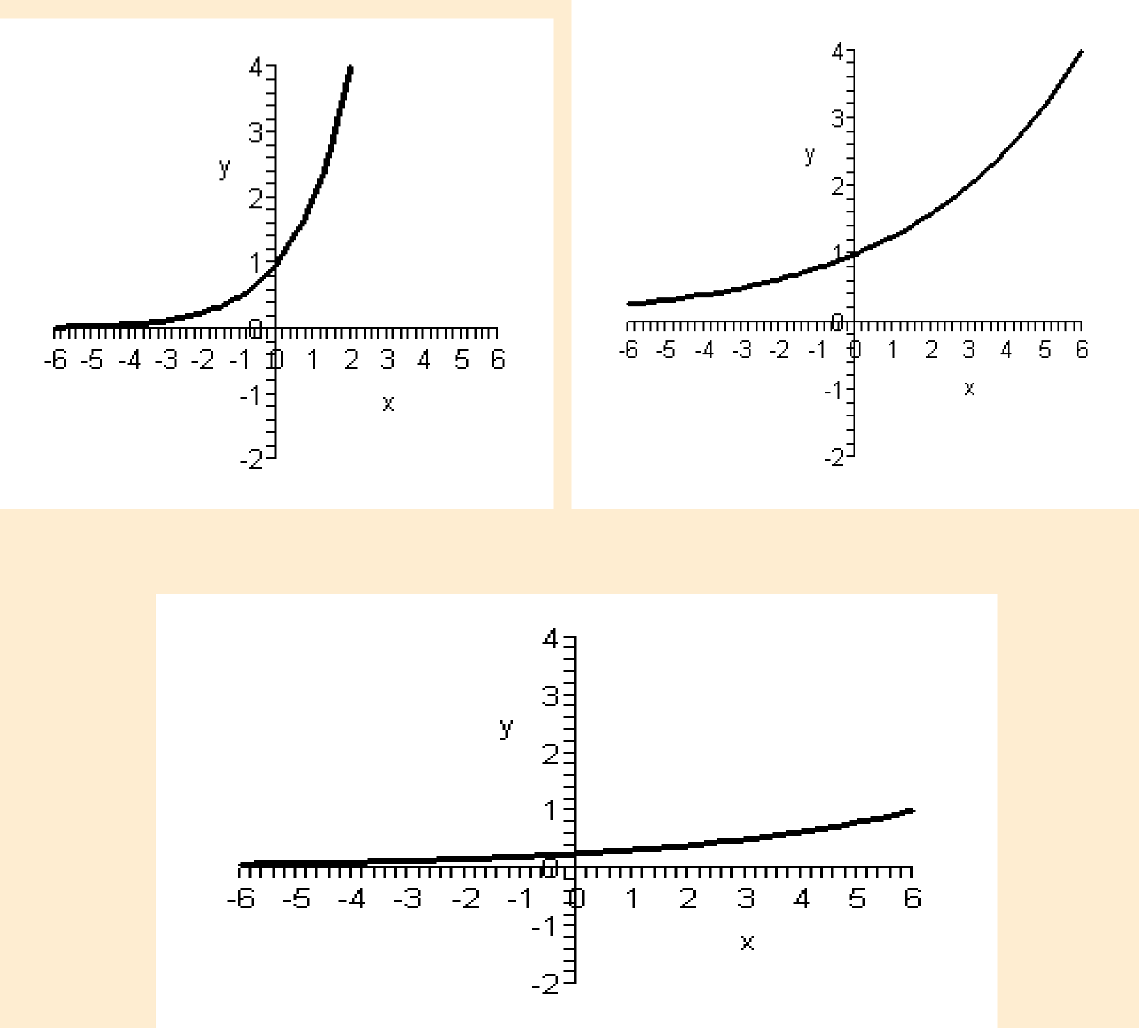
Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

ошириладиган шакл алмаштиришлар кетма – кетлигини тузатамиз:

$$2^x \to 2^{\frac{1}{3}x} \to \frac{1}{4}2^{\frac{1}{3}x} = 2^{\frac{1}{3}x-2}$$

$y = 2^{\frac{1}{3}x-2}$ функция графигининг эскизини чизиш учун аввало: 1) $y_1 = 2^x$ функция графиги (5.17. $a$) - чизма) чизилади; 2) сўнгра, чизилган $y_1 = 2^x$ функция графиги $Ox$ ўқ бўйлаб, $Oy$ ўққа нисбатан 3 бирликга чўзилади (5.17. $b$)-чизма); 3) $y = 2^{\frac{1}{3}x}$ функциянинг ҳосил бўлган графиги $Oy$ ўқ бўйлаб, $Ox$ ўққа нисбатан 4 бирликга қисилади (5.17. $c$) - чизма). Натижада берилган $y = 2^{\frac{1}{3}x-2}$ функция графигининг эскизини (5.17. $c$) - чизма) ҳосил қиламиз.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



5.17-чизма.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

## Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг қайси бири жуфт, қайси бири тоқ ва қайсилари жуфт ҳам, ёки тоқ ҳам эмаслигини аниқланг:

**5.1.** $y=2x^2-3x.$ **5.2.** $y=3x^2+4.$ **5.3.** $y=\sqrt[3]{x}$ **.**

**5.4.** $y=x^2-x^4.$ **5.5.** $y=x|x|$**. 5.6.** $y=x+\operatorname{ctg} x$ **5.7.** $y=x^2|x|+3$

**5.8.** $y=\sqrt[4]{2+x+x^2}-\sqrt[4]{2-x+x^2}$

**5.9.** $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$**.5.10.** $y=x^4-\cos x$ **5.11.** $y=2\sin 4x+3\cos 4x$

**5.12.** $y=\ln\dfrac{2+x}{2-x}$**.5.13.** $y=\sqrt[5]{(x+1)^2}+\sqrt[5]{(x-1)^2}$ **. 5.14.** $y=\dfrac{x^3-x}{x^2+1}$**.**

**5.15.** $y=\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2+1}$ **.5.16.** $y=\dfrac{x+4}{x-4}+\dfrac{x-4}{x+4}$**. 5.17.** $y=\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$ **.**

**5.18.** $y=\dfrac{x^2+4}{3x^6+x^4+7}$**.** **5.19.** $y=ax+b$**,** $a,b\in R$**.5.20.** $y=\log_2(2^x+2^{-x})$**.**

**5.21.** $y=\begin{cases}x, x\geq 0\\ -x, x<0\end{cases}$ **.** **5.22.** $y=x^2\cdot\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$**.** **5.23.** $y=\dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos x}-x^3$**.**

**5.24.** $y=\sin x+\dfrac{x^3+1}{x^3-1}$ **5.25.** $y=x^3+\cos x.$ **5.26.** $y=\sin x\cdot\operatorname{tg} x.$

Титул варақ
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**5.27.** $y=\left(1-x^4\right)\cdot\cos x$. **5.28.** $y=\sin 7x+\cos 5x$. **5.29.** $y=\arccos|x|$.

**5.30.** $y=\arcsin x+\arccos x$. **5.31.** $y=\dfrac{1+\sin x}{\sin x}$.

**5.32.** Қуйидаги функцияларни жуфт ва тоқ функциялар йиғиндиси кўринишида тасвирланг.

1. $f(x)=5x^2-x+8$. 2. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$. 3. $f(x)=\dfrac{x^2+6}{x^3+5}$

4. $f(x)=\dfrac{x^3+5}{x^2+6}$ 5. $f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$

Қуйидаги функцияларни даврийликка текширинг. Агар даврий бўлса, у ҳолда унинг энг кичик мусбат даврини топинг:

**8. 33.** $f(x)=x^2-3x+4$. **5.34.** $f(x)=\sin 2x-2\,\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$.

**5.35.** $f(x)=\sin|x|$. **5.36.** $f(x)=\cos 2x\cdot\cos 6x$.

5.37. $f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ рационал сон бўлганда,}\\ 0, & x \text{ иррационал сон бўлганда.}\end{cases}$

**5.38.** $f(x)=6\sin(0.25\pi x)$. **5.39** $f(x)=\cos\left(\dfrac{3}{2}x-18^0\right)$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**5.40.** $f(x)=\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})+5\,\mathrm{tg}\left(3x-\frac{\pi}{6}\right).$ **5.41.** $f(x)=\mathrm{tg}\frac{x}{3}+\sin 2\pi x.$

**5.42.** $f(x)=13\sin^2 3x.$ **5.43.** $f(x)=\cos x\cdot\cos\sqrt{3}x.$

**5.44.** $y=\sin\frac{x}{3}+\mathrm{tg}\frac{x}{7}$ **5.45.** $y=\mathrm{tg}\frac{x}{3}+\sin 2\pi x$

**5.46.** $y=\sin\frac{\pi x}{5}+\mathrm{tg}\frac{\pi x}{20}$ **5.47.** $y=\sin\pi x+\cos 2x$

**5.48.** $y=\mathrm{tg}\,2x+\mathrm{ctg}\,3x+\cos 5x$. **5.49.** $y=\sin(\frac{4}{5}x-17^0)$.

**5.50.** $y=6\cos\frac{x}{2}-4\sin(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{2})$. **5.51.** $y=15\sin^2 12x+12\sin^2 15x$.

**5.52.** $y=\sin x+\cos\frac{x}{3}+\sin\frac{x}{5}$. **5.53.** $y=\sqrt{1+\cos 4x}$ **5.54.**

$y=\dfrac{2\sin 6x-\cos 4x}{3\sin 6x+\cos 4x}$. **5.55.** $y=\sqrt{\cos 5{,}3x-\cos 11x+4}$.

**5.56.** $y=\cos\sqrt{|x|}$ **5.57.** $y=\cos x+\sin(x\sqrt{2})$

**5.58.** $y=\cos x^3$ **5.59.** $y=\{\frac{x}{3}\}+3\{\frac{x}{5}\}$

**5.60.** $y=\{3x\}+8\{5x\}$ **5.61.** $y=\dfrac{2\{6x\}-\{4x\}}{3\{6x\}+\{4x\}}$ **5.62.**

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$y=\{2x+\frac{1}{2}\}+\{5x+\frac{1}{4}\}$ **5.63.** $y=\sqrt{\{5,3x\}-\{11x+\frac{4}{5}\}+4}$

**5.64.** $y=\{\sqrt{|x|}\}$ **5.65.** $y=\{x\}+\{x\sqrt{2}\}$

**5.66.** $y=\{x^2\}$ **5.67.** $y=x^2-5x+6$

**5.68.** $f(x)=[2x+5]-2x$, бу ерда $[a]$- қаралаётган соннинг бутун қисмини билдиради.

**5.69.** $f(x)$ функция $X$ тўпламда аниқланган бўлиб, шундай $T\neq 0$ сон топилсаки, ҳар қандай $x$ лар учун $x+T\in X, x-T\in X$ бўлиб, қуйидаги шартлардан биттаси бажарилса, унинг даврийлигини исботланг.

1) $f(x+T)=-f(x)$; 2) $f(x+T)=1/f(x)$; 3) $f(x+T)=\frac{f(x)+a}{bf(x)-1}$

4) $f(x+T)=\frac{1}{1-f(x)}$ 5) $f(x+T)=f(x)$

**5.70**. Бутун сонлар ўқидан битта нуқта чиқариб ташланган тўпламда аниқланган функциянинг даврий эмаслигини исботланг.

Қуйидаги функцияларни ўз аниқланиш соҳаларида чегараланганликка текширинг:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**5.71.** $y=\dfrac{1}{x+14},\quad x\in[0;5].$ **5.72.** $y=x^2-6x+9.$

**5.73.** $y=\dfrac{2}{\sin 3x}.$ **5.74.** $y=\lg\left(x^2-6x+8\right).$

**5.75.** $f(x)=\dfrac{x^3}{x^6+1}$ **5.76.** $f(x)=\dfrac{1}{x^2+6}.$

**5.77.** $y=\dfrac{\sin x}{x^4+4}.$ **5.78.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}.$ **5.79.** $y=x\cdot\cos^2 x.$

**5.80.** $y=\dfrac{1+x}{1+x^2}.$ **5.81.** $y=\dfrac{1}{x-x^2}.$ **5.82.** $y=\dfrac{e^x}{e^x-1}.$

**5.83.** $y=\arcsin\dfrac{4x}{4+x^2}.$ **5.84.** $y=\sqrt[3]{2-x-x^2}.$ **5.85.** $y=\sqrt{x^2-4x+5}.$

**5.86.** $y=2^{x^2-2x+2}.$ **5.87.** $y=\dfrac{\sin x}{x}.$ **5.88.** $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{x^4+1},x\in R$

**5.89.** $f(x)=\dfrac{x^2-1}{\left|x^3-1\right|},x\in R,x\neq1$ **5.90.** $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^4+10}}{x^2+1}$ **.5.91.** $f(x)=0{,}5\sin x\cos x$

**5.92**. Ушбу $f(x)=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ функция $x=0$ нуқтанинг атрофида чегараланмаган бўлиши, $x$ нолга интилганда эса чексиз катта бўлмаслигини исботланг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**5.93.** $(0;\varepsilon)(\varepsilon>0)$ да $f(x)=\ln x\sin^2\frac{\pi}{x}$ функцияни чегараланганликка текширинг.

**5.94.** $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$ функциянинг $(-\infty;+\infty)$ да чегараланганлигини кўрсатинг.

**5.95.** $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $X$ тўпламда аниқланган бўлиб, чегараланган бўлса, у ҳолда

$a)$ $f(x)+g(x)$; $b)$ $f(x)- g(x)$; $c)$ $f(x)\,g(x)$; $d)$ $|f(x)|$ функцияларнинг ҳам $X$ тўпламда чегараланганлигини кўрсатинг.

$e)$ Қандай шарт бажарилганда $\frac{f(x)}{g(x)}$ функция ҳам $X$ тўпламда чегараланган бўлади?

**5.96.** $f(x)$ функция $X$ тўпламда аниқланган ва чегараланган бўлса, ушбу функцияларнинг $X$ да чегараланганлигини кўрсатинг.

1) $\sqrt[n]{f(x)}$; 2) $2^{f(x)}$; 3) $\cos f(x)$; 4) $\sin f(x)$;

5) $\arcsin f(x)$; 6) $\arccos f(x)$; 7) $\mathrm{arctg}\, f(x)$;8) $\mathrm{arcctg}\, f(x)$.

**5.97.**Қуйидаги функцияларнинг ўз аниқланиш соҳаларида

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

чегараланмаганлигини кўрсатинг:

3) $f(x)=\sqrt[5]{x^6}$; 4) $f(x)=4^{\sqrt[6]{x}}+3$; 5) $f(x)=x+\frac{1}{x}$;

6) $f(x)=\frac{1}{\sin x}$; 7) $f(x)=|x-3|+|4x-1|$; 8) $f(x)=x\cos x$;

9) $f(x)=\log(x^2+4)$; 10) $f(x)=(\frac{1}{4})^x x$; 11) $f(x)=\frac{1}{\operatorname{arcctg} x}$;

12) $f(x)=|x-3|+2$.

**5.98**. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $X$ тўпламда аниқланган ва чегараланган бўлсин. $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг айирмаси $X$ тўпламда чегараланган бўлиши мумкинми? Мисоллар келтиринг.

**5.99**. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $X$ тўпламда аниқланган бўлиб, $f(x)$ функция $X$ тўпламда чегараланган, $g(x)$ чегараланмаган бўлсин. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар орасида арифметик амаллар бажарилиши натижасида ҳосил бўлган функцияларнинг чегараланганлиги ҳақида нима дейиш мумкин? Мисоллар келтиринг.

**5.100**. Ихтиёрий функциянинг квадрати қуйидан чегараланганлигини исботланг.

Қуйидаги функцияларни ўз аниқланиш соҳаларида монотонликка текширинг:

**5.101.** $y = x + \frac{1}{x}$ .

**5.102.** $y = x^2 - 6x + 10$.

**5.103.** $y = \frac{x^2}{1+x^2}$.

**5.104.** $y = x^3 + x$ .

**5.105.** $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

**5.106.** $y = 4^{\frac{1}{x}}$

**5.107.** $y = 2 \cdot 3^{1-x} - 9^{-x}$.

**5.108.** $y = x - \sqrt{x^2 - 1}$.

**5.109.** $y = 5^{|x-2|+|x+1|}$.

**5.110.** $y = \operatorname{arctg} x - x$

**5.111.** $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{x+1}$

**5.112.** $y = \frac{x-2}{|x|+2}$ .

**5.113.** $y = \frac{1-|x-1|}{1+|x|}$ .

**5.114.** $y = \frac{|x-2|-|x+2|}{|x-2|+|x+2|}$

**5.115.** $y = \sqrt[6]{x^2 - 4}$.

**5.116.** $y = \sqrt[4]{x-3} + \sqrt[4]{x+3}$.

**5.117.** $y = \sqrt[4]{x-5} - \sqrt[4]{x+5}$.

**5.118.** $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 27}}$.

**5.119.** $y = \frac{1}{x^3 - 8}, \quad x \neq 2.$

**5.120.** $y = \lg\left(x^2 - 6x + 10\right)$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**5.121.** $y=\dfrac{2x-5}{x-1}$. **5.122.** $y=5^{x+1}$.

**5.123.** $y=\log_{0.5}\dfrac{x}{x+1}$. **5.124.** $y=|x|+x$.

**5.125.** $y=\dfrac{1}{e^x-1}$. **5.126.** $y=e^{\frac{1}{x-2}}$. **5.127.** $y=\sqrt[5]{(1-x)^2}$.

**5.128.** $y=\begin{cases} 2x, & x\le -2 \text{ бўлганда,} \\ 4, & -2<x<2 \text{ бўлганда,} \\ 2x, & x\ge 2 \text{ бўлганда.} \end{cases}$

**5.129.** $y=\sin^4 x+\cos^4 x,\quad x\in[0;\pi]$. **5.130.** $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}$.

**5.131.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3}-1}$. **5.132.** $y=2\cdot 3^{1-x}-9^{-x}$. **5.133.** $y=7^{-|x|}$.

**5.134.** Ушбу $f(x)=x-\sin x$ функцияни $(0;\dfrac{\pi}{2})$ да ўсиш ва камайишга текширинг.

**5.135.** Ушбу $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ функцияни ўсиш ва камайишга текширинг.

**5.136.** Ушбу $f(x)=\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} x$ функцияни $(0;\dfrac{\pi}{2})$ да ўсиш ва камайишга текширинг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**5.137**. Ушбу $f(x)=(x^2-1)^2$ функция (-1,0) да ўсувчи, (0,1) да камаювчи бўлишини исботланг.

**5.138.**Ушбу $f(x)=5^{(x^2-1)^3+1}$ функцияни ўсиш ва камайишга текширинг.

**5.139**.Ушбу $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$ функцияни $[0;\frac{\pi}{2}]$ да ўсиш ва камайишга текширинг.

**5.140**.Ушбу $f(x)=\frac{2-\sin x}{2+\sin x}$ функцияни $[0;2\pi]$ да ўсиш ва камайишга текширинг.

**5.141**.Ушбу $f(x)=x-\varepsilon\cdot\sin x,(0<\varepsilon\leq 1)$ функцияни қатъий ўсувчилигини исботланг.

**5.142**. Ушбу $f(x)=x^3+x^2$функция: *a)* $(0;\ +\infty)$ да ўсувчи, *b)* [-1;0] да эса, монотон эмаслигини исботланг.

Қуйидаги функциялар учун ўз аниқланиш соҳасида (агар тескари функция мавжуд бўлса) тескари функцияларни топинг:

**5.142.** $y=\frac{6-x}{6+x}$.

**5.143.** $y=\frac{32+x^5}{32-x^5}$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**5.144.** $y=2x-x^2, x\ge 1$ **5.145.** $y=2x-x^2, x\le 1$.

**5.146.** $y=\sqrt{x-6}$. **5.147.** $y=\sqrt[3]{x^3-125}$.

**5.148.** $y=\dfrac{2x}{1-x^2}, x\le -1$.

**5.149.** $y=\dfrac{2x}{1+x^2}, -1\le x\le 1$.

**5.150.** $y=\sin^5 x,\ -\dfrac{\pi}{2}\le x\le \dfrac{\pi}{2}$.

**5.151.** $y=\sin^5 x,\ \dfrac{\pi}{2}\le x\le \dfrac{3\pi}{2}$.

**5.152.** $y=\cos^3 x,\ 0\le x\le \pi$..

**5.153.** $y=\arccos x^2,\ 0\le x\le 1$..

**5.154.** $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+6, & x\le 2, \\ -x+4, & x>2. \end{cases}$

**5.155.** $f(x)=\begin{cases} x, x\in(-\infty;0]; \\ 2x, x\in(0;\infty) \end{cases}$

**5.156.** $y=\cos^2 x$: $a)$ $x\in[0;\dfrac{\pi}{2}]$, $b)$ $x\in[\dfrac{\pi}{2};\pi]$; $c)$ $x\in[\pi;\dfrac{3\pi}{2}]$.

**5.157.** $y=(x+1)^2,\ x\in[-1;+\infty)$. **5.158.** $y=\ln\dfrac{e^x+1}{e^x-1},\ x\in(0;+\infty)$. **5.159.** $y=5x-2$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**5.160.** $y = x^3 + 5, \quad x \in R$. **5.161.** $y = \sqrt{1 - x^3}, \quad x \in [-1;0]$.

**5.162.** $y = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [0;1]$. **5.163.** $y = |x| - x, \quad x \in (-\infty;+\infty)$. **5.164.** $y = \operatorname{arctg} 3x$.

**5.165.** $y = \begin{cases} x, \ x \le 0 & \text{бўлганда,} \\ x^2, \ x > 0 & \text{бўлганда.} \end{cases}$

**5.166.** $y = \begin{cases} 1, \ x \le -1 & \text{бўлганда,} \\ -x, \ -1 \le x \le 1 & \text{бўлганда,} \\ -1, \ x > 1 & \text{бўлганда.} \end{cases}$

**5.167.** $y = \begin{cases} x, \ x < 1 & \text{бўлганда,} \\ x^2, \ 1 \le x \le 4 & \text{бўлганда,} \\ 2^x, \ x > 4 & \text{бўлганда.} \end{cases}$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**5.168.** $y=2^x-1$. **5.169.** $y=\arccos x^3$.

**5.170.** $y=\frac{1-x}{1+x}$, $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$. **5.171.** $y=\lg\frac{x}{2}$ .

**5.172.** $f(x)=x^2$ ва $g(x)=2^x$ функциялар берилган бўлса, у ҳолда $f(f(x))$, $f(g(x))$, $g(f(x))$, $g(g(x))$ мураккаб функциялар топилсин.

**5.173**. Агар $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ бўлса, $f_3(x)=f(f(f(x)))$ функция топилсин.

**5.174.** $f(x)=\frac{5x^2+1}{2-x}$ функция учун, $f(3x)$, $f(x^3)$, $(f(x))^2$ функциялар топилсин.

**5.175**. Агар $f(x+1)=x^3-3x+2$ бўлса, $f(x)$ функция топилсин.

Қуйидаги мураккаб функцияларнинг композицияларини ёзинг:

**5.176.** $f(x)=x^2, g(x)=\sqrt{x}$

**5.177.** $f(x)=x^4, g(x)=\sqrt[4]{x}$

**5.178.** $f(x)=1-x^3, g(x)=x^4$.

**5.179.** $f(f(f(x)))=?$ $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$.

**5.180.** $g(y)=y^2$ **ва** $y=f(x)=\lg x$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**5.181.** $g(y)=\sin y$ **ва** $y=f(x)=1-x^2$.

**5.182.** $g(y)=y^2$ **ва** $y=\sin x$.

**5.183.** $g(y)=\begin{cases} 2y, \quad y\leq 0 \text{ бўлганда}, \\ 0, \quad y>0 \quad \text{бўлганда}, \end{cases}$ ва $y=x^2-1$.

**5.184.** $g(y)=9^y$ ва $y=x$. **5.185.** $g(y)=\sqrt{y}$ $(y\geq 0)$, $y=1+x^2$.

**5.186.** $f(x)=5^x$ ва $f^{-1}(x)=\log_5 x$ функциялар берилганда $f(f^{-1}(x))$, $f^{-1}(f(x))$ ларни топинг.

**5.187.** $z=\arccos y$ ва $y=3+x^4$ функциялар учун мураккаб функция мавжудми?

**5.188.** $z=\sqrt{y}$ ва $y=9-x^2$ функциялар учун мураккаб функция мавжудми?

**5.189**. Агар $u(x)=4x-5$, $v(x)=x^2$ ва $f(x)=\dfrac{1}{x}$ бўлса, қуйидагилар учун ифодаларни ёзинг.

a) $u(v(f(x)))$; b) $u(f(v(x)))$;

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

c) $v(u(f(x)))$; d) $v(f(u(x)))$;

e) $f(u(v(x)))$; f) $f(v(u(x)))$.

**5.190.** Ушбу $f\circ g=F(x)$ композицияда

$g(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$, $F(x)=\dfrac{1+x^4}{1+x^2}$ берилганда $f(x)$ функцияни топинг.

**5.191**. Ушбу $f\circ g=F(x)$ композицияда $g(x)=3x$, $F(x)=2\sin 3x$ берилганда $f(x)$ функцияни топинг.

**5.192**. Ушбу $f\circ g=F(x)$ композицияда $f(x)=x^3$, $F(x)=\left(1-\dfrac{1}{x^4}\right)^2$

берилганда $g(x)$ функцияни топинг.

**5.193**. Қуйидаги $f$, $g$ функциялар берилганда, мос равишда, $f\circ g$, $g\circ f$ композицияларни топинг.

a) $f(x)=1-x^2$; $g(x)=\sin x$. b) $f(x)=x^3+1$; $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$.

**5.194**. Қуйидаги $f$, $g$ функцияларнинг $f\circ g$ композицияни тузинг ва унинг аниқланиш соҳасини топинг.

a) $f(x)=\sqrt{x}$; $g(x)=x^2+5$;

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

b) $f(x) = \frac{1}{x}; \quad g(x) = \frac{x-2}{x};$

c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}; \quad g(x) = \cos 2x;$

**5.195. Қуйидаги функциялар графигининг эскизини чизинг.**

1) $y=1-2x^2$. 2) $y=tg\frac{3\pi x-4\pi}{6}$. 3) $y=\frac{1}{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$. 4) $y = \frac{1}{4}x^2 \frac{1}{2x-1}$.

5) $y = 3^{\frac{1}{2}|x|-1}$. 6) $y = \log_{\frac{1}{2}}|2x-1|$. 7) $y = |\log_4 x|$. 8) $y = |\log_3|x||$.

9) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$. 10) $y=\frac{1}{3}\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)-1$. 11) $y=|arc\sin 2x|$.

## Мустақил ечиш учун берилган мисол ва масалаларнинг жавоблари

**5.1**. Жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас. **5.2.** Жуфт. **5.3**.Тоқ . **5.4.** Жуфт.**5.5**. Тоқ. **5.6**.Тоқ. **5.7**. Жуфт. **5.8**.Тоқ .**5.9**. Жуфт.**5.10**. Жуфт. **5.11.** Жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас.**5.12**. Тоқ. **5.13**.Жуфт.**5.14**.Тоқ .**5.15**.Жуфт. **5.16**. Жуфт.**5.17**.

Жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас.**5.18**. Жуфт. **5.19**. $a \neq 0, b \neq 0$. жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас, $a \neq 0, b = 0$ тоқ, $a = 0, b \neq 0$ жуфт. **5.20**. Жуфт.**5.21**. Жуфт.**5.22**. Тоқ **. 5.23**.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Ток . **5.24**. Жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас. **5.25**. Жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас. **5.26**. Жуфт. **5.27**. Жуфт. **5.28**. Жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас. **5.29**. Жуфт. **5.30**. Жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас. **5.31**. Жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас. **5.33**. Даврий эмас. **5.34**. Даврий, $T_0 = 2\pi$. **5.35**. Даврий эмас. **5.36**. Даврий, $T_0 = \frac{\pi}{2}$. **5.37**. Даврий, энг кичик мусбат даври йўқ. **5.38**. Даврий, $T_0 = 8$. **5.39**. Даврий, $T_0 = \frac{4}{3}\pi$. **5.40**. Даврий, $T_0 = 4\pi$. **5.41**. Даврий эмас. **5.42**. Даврий, $T_0 = \frac{\pi}{3}$. **5.43**. Даврий эмас. **5.44**. Даврий, $T_0 = 42\pi$ .**5.45**. Даври мавжуд эмас. **5.46**. Даврий, $T_0 = 20$. **5.47**. Даври мавжуд эмас. **5.48**. Даврий, $T_0 = 2\pi$ .**5.49**. Даврий,$T_0 = \frac{5\pi}{2}$. **5.50**. Даврий,$T_0 = 12\pi$ .**5.51**. Даврий,$T_0 = \frac{\pi}{3}$. **5.52**. Даврий,$T_0 = 30\pi$ .**5.53**. Даврий,$T_0 = \frac{\pi}{2}$. **5.54**. Даврий,$T_0 = \pi$. **5.55**. Даврий, $T_0 = 20\pi$. **5.56**. Даврий эмас. **5.57**. Даврий эмас. **5.58**. Даврий эмас. **5.59**. Даврий, $T_0$ =15. **5.60**. Даврий, $T_0$=1. **5.61**. Даврий, $T_0$=0,5.**5.62**. Даврий, $T_0$=1. **5.63**. Даврий, $T_0$=10. **5.64**. Даврий эмас. **5.65**. Даврий, эмас. **5.66**. Даврий, эмас.**5.67**.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Даврий эмас .**5.68**. Даврий, $T_0 = 1$. **5.71**. Чегараланган. **5.72**. Қуйидан чегараланган, юқоридан чегараланмаган.**5.73**. Чегараланмаган. **5.74**. Чегараланмаган. **5.75**. Чегараланган. **5.76**. Чегараланган. **5.77**. Чегараланган. **5.78**. Қуйидан чегараланган, юқоридан чегараланмаган. **5.79**. Чегараланмаган. **5.80**. Чегараланган. **5.81**. Чегараланмаган. **5.82**. Чегараланмаган. **5.83**. Чегараланган. **5.84**. Юқоридан чегараланган, қуйидан чегараланмаган. **5.85**. Қуйидан чегараланган, юқоридан чегараланмаган. **5.86**. Қуйидан чегараланган, юқоридан чегараланмаган. **5.87**. Чегараланган.**5.88.** Чегараланган. **5.89.** Чегараланган.**5.90**.Чегараланган. **5.91**.Чегараланган. **5.93.** Қуйидан чегараланмаган, юқоридан чегараланган. **5.98**. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $X$ тўпламда чегараланган ва чегараланмаган бўлиши ҳам, бўлмаслиги ҳам мумкин. Масалан: X=(0;1) тўпламда 1) $f(x) = x + \frac{1}{x}$; $g(x) = \frac{1}{x}$ функцияларнинг айирмаси чегараланган; 2) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$; $g(x) = \frac{2}{x}$ функцияларнинг айирмаси эса, чегараланмаган. **5.99**. Масалан: $X = (0;1)$ тўпламда: 1) $f(x) = x$; $g(x) = \frac{1}{x}$ функцияларнинг йиғиндиси

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

ва айирмаси чегараланмаган; 2) $f(x)=x;\quad g(x)=\frac{1}{x}$ функцияларнинг кўпайтмаси ва нисбати чегараланган; 3) $f(x)=x^2;\quad g(x)=\frac{1}{x^4}$ функцияларнинг кўпайтмаси чегараланмаган.

**5.101**. $(-\infty;-1]\cup[1;\infty)$ да қатъий ўсувчи, $[-1;0)\cup(0;\infty)$ да камаювчи.

**5.102**. $(-\infty;3]$ да қатъий камаювчи, $[3;\infty)$ да қатъий ўсувчи.

**5.103**. $(-\infty;0]$ да қатъий камаювчи, $[0;\infty)$ да қатъий ўсувчи.

**5.104**. $(-\infty;\infty)$ да ўсувчи.

**5.105**. $(-\infty;-1]\cup(0;1)$ да камаювчи, $(-1;0)\cup[1;\infty)$ да ўсувчи .

**5.106**. $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ қатъий камаювчи.

**5.107**. $(-\infty;-1]$ да ўсувчи, $[-1;\infty)$ да камаювчи.

**5.108**. $(-\infty;-1]$ да ўсувчи, $[1;\infty)$ да камаювчи.

**5.109**. $(-\infty;-1]$ да қатъий камаювчи, $[-1;2]$ да ўзгармас, $[2;\infty)$ да қатъий ўсувчи.

**5.110**. $(-\infty;\infty)$ да камаювчи.

**5.111**. $(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$ да камаювчи.

**5.112**. $(-\infty;0]$ да ўзгармас, $[0;\infty)$ да ўсувчи .

**5.113**. $(-\infty;1]$ да қатъий ўсувчи , $[1;+\infty)$ да камаювчи .

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**5.114.** $(-\infty;-1]\cup[1;\infty)$ да қатъий ўсувчи, $[-1;1]$ да қатъий камаювчи.

**5.115.** $(-\infty;-2]$да камаювчи, $[2;+\infty)$ да ўсувчи.

**5.116.** $[3;\infty)$ да ўсувчи.

**5.117.** $[5;\infty)$ да ўсувчи.

**5.118.** $(-\infty;-3\sqrt{3})\cup(-3\sqrt{3};0]$ да ўсувчи, $[0;3\sqrt{3})\cup(3\sqrt{3};\infty)$ да камаювчи.

**5.119.** $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$ да қатъий камаювчи.

**5.120.** $(-\infty;3]$ да қатъий камаювчи, $[3;+\infty)$ қатъий ўсувчи.

**5.121.** $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$ қатъий ўсувчи.

**5.122.** $(-\infty;+\infty)$ да қатъий ўсувчи.

**5.123.** $(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$ қатъий камаювчи.

**5.124.** $(-\infty;+\infty)$ да ўсувчи.

**5.125.** $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ қатъий камаювчи.

**5.126.** $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$ қатъий камаювчи.

**5.127.** $(-\infty;2]$ да камаювчи, $[2;+\infty)$ да ўсувчи.

**5.128.** $(-\infty;+\infty)$ да ўсувчи.

**5.129.** $[0;\frac{\pi}{4}]$ ва $[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}]$ да камаювчи, $[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}]$ ва $[\frac{3\pi}{4};\pi]$ да ўсувчи.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**5.130**. $[5;+\infty)$ да ўсувчи. **5.131**. $(-\infty;-2)$ ва $(-2;-\sqrt{3}]$ да ўсувчи, $[\sqrt{3};2)$ ва $(2;+\infty)$ да камаювчи.

**5.132**. $(-\infty;-1]$ да ўсувчи, $[1;+\infty)$ да камаювчи.

**5.133**. $(-\infty;0]$ қатъий ўсувчи, $[0;+\infty)$ қатъий камаювчи.

**5.134**. $(0;\frac{\pi}{2})$ да ўсувчи.

**5.135**. $(-\infty;-1]\cup[1;\infty)$ да камаювчи, $[-1;1]$ да қатъий ўсувчи.

**5.136**. $(0;\frac{\pi}{4}]$ да камаювчи, $[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2})$ да ўсувчи.

**5.138**. $(-\infty;0]$ қатъий камаювчи, $[0;+\infty)$ да қатъий ўсувчи.

**5.139**. $[0;\frac{\pi}{4}]$ да ўсувчи, $[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}]$ да камаювчи.

**5.140**. $[0;\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{3\pi}{2};2\pi]$ да камаювчи, $[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$ да ўсувчи.

**5.142**. $f^{-1}(x)=\frac{6-6x}{x+1}, x\neq -1$ . **5.143**. $f^{-1}(x)=2\sqrt[5]{\frac{x-1}{x+1}}, x\neq -1$.

**5.144**. $f^{-1}(x)=1+\sqrt{1-x}, x\geq 1$. **5.145**. $f^{-1}(x)=1-\sqrt{1-x}, x\leq 1$.**5.146**.

$f^{-1}(x)=x^2+6, x\geq 6$. **5.147**. $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^3+125}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**5.148.** $f^{-1}(x)=\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x},-1\le x<0.$ **5.149.** $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x},0<|x|\le 1\\ 0, x=0\end{cases}.$

**5.150.** $f^{-1}(x)=\arcsin\sqrt[5]{x},-1\le x\le 1.$

**5.151.** $f^{-1}(x)=\pi-\arcsin\sqrt[5]{x},-1\le x\le 1.$ **5.152.** $f^{-1}(x)=\arccos\sqrt[3]{x},-1\le x\le 1.$

**5.153.** $f^{-1}(x)=\sqrt{\cos x},0\le x\le\frac{\pi}{2}.$ **5.154.** $f(x)=\begin{cases}x^2-4x+6, x\le 2\\ -x+4, x>2\end{cases}.$

**5.155.** $f(x)=\begin{cases}x, x\in(-\infty;0]\\ \frac{x}{2}, x\in(0;\infty)\end{cases}.$

**5.156.** $a)\ \ y=\frac{1}{2}\arccos(2x-1),0\le x\le 1;\ b)\ \ y=\pi-\frac{1}{2}\arccos(2x-1),0\le x\le 1;$

$c)\ \ y=\pi+\frac{1}{2}\arccos(2x-1),0\le x\le 1.$ **5.157.** $g(y)=\sqrt{y}+1.$

**5.158.** $g(y)=\ln\frac{e^y+1}{e^y-1}$.**5.159.** $g(y)=\frac{y+2}{5}$ .**7.160.** $g(y)=\sqrt[3]{y-5}.$

**5.161.** $g(y)=\sqrt[3]{1-y^2},\ \ y\in[0;1].$ **5.162.** $g(y)=\sqrt{1-y^2},\ \ y\in[0;1].$

5.163. Тескари функция мавжуд эмас. **5.164.** $g(y)=\frac{1}{3}\operatorname{tg}y,\ y\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}).$

**Титул варак**
**Мундарижа**
**1-боб**
**2-боб**
**3-боб**
**Адабиётлар**
**Оркага**
**Тулик экран**
**Чикиш**

**5.165.**

$$g(y)=\begin{cases} y, & y\le 0 \text{ бўлганда,} \\ \sqrt{y}, & y>0 \text{ бўлганда.} \end{cases}$$

**5.166.** Тескари функция мавжуд эмас. **5.167.**

$$g(y)=\begin{cases} y, & y<1 \text{ бўлганда,} \\ \sqrt{y}, & 1\le y\le 4 \text{ бўлганда,} \\ \log_2 y, & y>4 \text{ бўлганда.} \end{cases}$$

**5.168.** $g(y)=\log_2(y+1),\quad y\in(-1;+\infty).$ **5.169.** $g(y)=\sqrt[3]{\cos y}$ **.**

**5.170.** $g(y)=\dfrac{1-y}{1+y},\quad y\ne -1.$ **5.171.** $g(y)=2\cdot 10^y,\quad y\in(-\infty;+\infty).$ **5.172.**

$f\,(\,f\,(x))=x^4,\quad f\,(g(x))=4^x,\qquad g(\,f\,(x))=2^{x^2},\quad g(g(x))=2^{2^x}.$ **5.173.** $f_3(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}.$

**5.174.** $f(3x)=\dfrac{45x^2+1}{2-3x},\ f(x^3)=\dfrac{5x^6+1}{2-x^3},\quad (f(x))^2=\dfrac{25x^4+10x^2+1}{4-4x+x^2}.$

**5.175.** $x^2-5x+6.$ **5.176.** $(f\cdot g)=x$**;** $(g\circ f)=|x|$**.** **5.177.** $(f\circ g)(x)=x;\ (g\circ f)(x)=|x|.$**.**

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**5.178.** $(f\circ g)(x)=1-x^{12}$; $(g\circ f)(x)=(1-x^{3})^{4}$.

**5.179.** $f_3(x)=\dfrac{x}{1-3x^2}$. **5.180.** $\lg^2 x$. **5.181.** $\sin(1-x^2)$. **5.182.** $\sin^2 x$.

**5.183.**

$$g(f)=\begin{cases} 2\cdot(x^2-1), & x\in[-1;1]\ \text{бўлганда,}\\ 0, & x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)\ \text{бўлганда.}\end{cases}$$

**5.184.** $9^x$. **5.185.** $\sqrt{1+x^2}$. **5.186.** $f\left(f^{-1}(x)\right)=x,\quad f^{-1}\left(f(x)\right)=x.$ **5.187.** Мураккаб функция мавжуд эмас. **5.188.** Мураккаб функция мавжуд эмас. **5.189.** *a)* $\dfrac{4}{x^2}-5$, **b)** $\dfrac{4}{x^2}-5$, **c)** $\left(\dfrac{4}{x}-5\right)^2$, **d)** $\dfrac{1}{(4x-5)^2}$, **e)** $\dfrac{1}{4x^2-5}$; **f)** $\dfrac{1}{(4x-5)^2}$ **5.190.** $f(x)=\dfrac{1}{x}$ **5.191.** $f(x)=2\sin x$ **5.192.** $g(x)=\left(1-\dfrac{1}{x^4}\right)^{2/3}$ **5.193.**

*a)* $\cos^2 x$; $\sin(1-x^2)$ **b)** $x$; $x$ **5.194.** *a)* $\sqrt{x^2+5}$; $(-\infty;\infty)$. **b)** $\dfrac{x}{x-2}$; $(-\infty;\,0)\cup(0;\,2)\cup(2;\,+\infty)$. c) $|\sin 2x|$, $(-\infty;\infty)$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

# 6- §. СОНЛАР КЕТМА-КЕТЛИГИ ВА УНИНГ ЛИМИТИ

**6.1. Нуқтанинг атрофи.** Бизга $a \in R$, ҳамда ихтиёрий мусбат $\varepsilon>0$ ва $c$ сонлари берилган бўлсин.

**6.1-таъриф**. Қуйидаги

$$U_\varepsilon(a)=\{x:\ x\in R,\ a-\varepsilon<x<a+\varepsilon\}$$

тўплам, $a$ нуқтанинг $\varepsilon$ атрофи дейилади, $\varepsilon$ *- сон эса атрофнинг радиуси* дейилади (6.1-чизма).

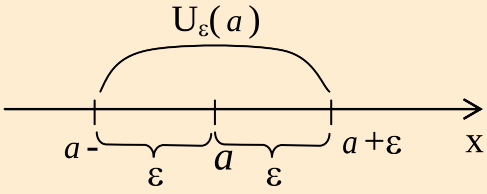
Ушбу

$$U_\varepsilon^+(a)=\{x:\ x\in R,\ a<x<a+\varepsilon\}$$

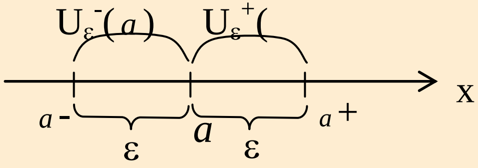
тўплам, $a$ нуқтанинг *ўнг атрофи,*

$U_\varepsilon^-(a)=\{x:\ x\in R,\ a-\varepsilon<x<a\}$,

тўплам эса, $a$ нуқтанинг *чап атрофи* дейилади (6.2-чизма).



6.1-чизма.



6.2-чизма

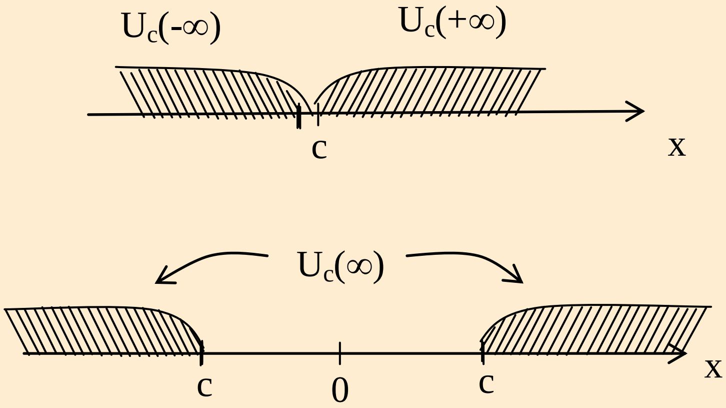
Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Ушбу $0<|x-a|<\varepsilon$ тенгсизлик, $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon,\ x\neq a$, тенгсизликларга тенг- кучли бўлиб, уларнинг ҳар иккаласини $a$ нуқтанинг $\dot{U}_{\varepsilon}(a)$ атрофи шаклида ифодалаш мумкин:

$$\dot{U}_{\varepsilon}(a)=\{x: x\in R,\ a-\varepsilon<x<a+\varepsilon,\ x\neq a\}.$$

Баъзи ҳолларда, $\dot{U}_{\varepsilon}(a)$ атроф, $a$ нуқтанинг *тешик атрофи* деб ҳам юритилади.

Ҳақиқий сонлар тўплами $R$ таркибига $-\infty$ ва $+\infty$ белгиларни $\forall x\in R$ учун $-\infty<x$ ва $x<+\infty$ хусусиятлар билан қўшиб, $\overline{R}$ тўпламни ҳосил қиламиз:



6.3-чизма.

$$\overline{R}=R\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}.$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$\overline{R}$ да $-\infty$ ва $+\infty$ «нуқта» ларнинг атрофи тушунчалари қуйидагича киритилади (6.3-чизма):

$$U_c(+\infty)=\{x: x\in R,\ c\in R,\ c<x<+\infty\},\ U_c(-\infty)=\{x: x\in R,\ c\in R,\ -\infty<x<c\},$$

$$U_c(\infty)=\{x: x\in R, c\in R,\ |x|>c\}.$$

**6.2. Натурал аргументли функция ва унинг лимити.** $N$ ва $R$ тўпламлар берилган бўлиб, $f$ – ҳар бир натурал $n\,(n\in N)$ сонга бирор ҳақиқий $x_n\,(x_n\in R)$ сонни мос қўювчи қоида ёки усул бўлсин: $f: n\to x_n$. Бу ҳолда $N$ тўпламда натурал аргументли функция аниқланган дейилади ва у $x_n=f(n)$ каби белгиланади.

Агар $x_n=f(n)$ функция берилган бўлса, у ҳолда унинг аргументи, ёки $n$ индексини $x_n$ ўзгарувчи мос қийматининг номери деб қараш мумкин. Шундай қилиб, $x_1=f(1)$ – функциянинг биринчи қиймати, $x_2=f(2)$ – иккинчи қиймати, $x_3=f(3)$ – учинчи қиймати ва ҳ.к.. Биз ҳар доим қийматлар тўплами $E(x_n)=\{x_n\}$ ни натурал $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ кетма-кетликка ўхшаш номерларнинг ортиши бўйича тартибланган, яъни

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,x_n,\ldots \qquad (6.1)$$

сонлар кетма-кетлиги шаклида тасаввур қиламиз. (6.1) кетма – кетлик қисқача $\{x_n\}$ каби белгиланади. Кетма-кетликнинг қийматлар тўплами чекли ёки чексиз бўлиши мумкин, лекин шундай бўлса-да кетма – кетликнинг элементлари ҳар доим чексиз кўп бўлади.

Биз бундан кейин, қулайлик учун, натурал аргументли $x_n = f(n)$ функцияни сонли кетма-кетлик деб қараймиз. Масалан, агар $x_n = f(n)$ функция

1) $x_n = 1;$ 2) $x_n = \frac{1}{n};$ 3) $x_n = (-1)^{n+1};$ 4) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2};$

5) $x_n = \sin n\pi\,;$ 6) $x_n = x_{n-2} + x_{n-1},\ \ n \geq 3,\ \ x_1 = 1,\ \ x_2 = 1;$ 7) $x_n$ – ($n$ - номерли туб сонлар тўплами) формулалардан бирортаси билан берилган бўлса, уларга мос кетма-кетликлар қуйидаги шаклда бўлади:

1) $1,\ 1,\ 1,\ \ldots,1,\ldots;$ 2) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n},\ldots;$ 3) $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ldots,(-1)^n,\ldots$

4) $0,\ 1,\ 0,\ 1,\ldots,\frac{1+(-1)^n}{2},\ldots;$ 5) $\sin\pi,\ \sin 2\pi,\ \sin 3\pi,\ldots,\sin n\pi,\ldots;$

6) $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ldots;$ 7) $x_1 = 2,\ \ x_2 = 3,\ \ x_3 = 5,\ \ x_4 = 7$ ва ҳоказо.

Юқоридаги келтирилган мисоллардан кўринадики, баъзи кетма-

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

кетликларнинг умумий ҳадлари аниқ формулалар орқали ифодаланиб, уларнинг ҳамма ҳадлари шу формулалар орқали топилса, баъзи кетма-кетликнинг ҳадларини маълум бир қоидалар ёрдамида топиш мумкин, Баъзи ҳолларда кетма-кетликларнинг берилиши, унинг ҳадларининг номини айтиш билан амалга оширилади.

Масалан, 1)- 5)- мисолларда кетма-кетликнинг умумий ҳади аниқ формула орқали ифодаланган, 6) мисолда кетма-кетликнинг дастлабки $x_1$ ва $x_2$ ҳадлари берилган ҳолда, қолган ҳадларини $x_n = x_{n-2} + x_{n-1}, \quad n \geq 3$ рекуррент формула орқали топилади. 6)- мисолда кетма-кетлик рекуррент формула орқали топилган $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots.$ сонлар Фибоначчи сонлари дейилади. 7) мисолда кетма-кетликнинг умумий ҳади сўзлар орқали ифода қилинган.

$$\{x_n\}: x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots, x_n, \ldots \quad ; \tag{6.2}$$

$$\{y_n\}: y_1,\ y_2,\ y_3, \ldots,\ y_n, \ldots \tag{6.3}$$

кетма-кетликлар берилган бўлсин. (6.2) ва (6.3) кетма-кетликларнинг йиғиндиси (айирмаси), кўпайтмаси, бўлинмаси (нисбати) деб, мос равишда

$$x_1 + y_1,\ \ x_2 + y_2,\ \ x_3 + y_3, \ldots,\ \ x_n + y_n, \ldots \qquad (x_1 - y_1,\ \ x_2 - y_2,\ x_3 - y_3, \ldots,\ x_n - y_n, \ldots);$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$x_1\cdot y_1,\ \ x_2\cdot y_2,\dots,\ x_n\cdot y_n,\dots;\qquad\qquad \frac{x_1}{y_1},\ \frac{x_2}{y_2},\dots,\frac{x_n}{y_n},\dots$$

кетма-кетликларга айтилади ва улар мос равишда,

$$\{x_{n+}y_n\}\ (\{x_n-y_n\}),\qquad \{x_n\cdot y_n\},\ \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$$

каби белгиланади. (6.2) ва (6.3) кетма-кетликлар нисбатининг таърифида $\forall n\in N$ учун $y_n\neq 0$ деб фараз қилинади. Агар $\{y_n\}$ кетма-кетликнинг чекли сондаги элементлари нолга тенг бўлса, у ҳолда $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ кетма-кетликни, $y_n$ нинг нолга тенг бўлмаган ҳадларидан бошлаб аниқлаш керак бўлади.

Энди $\{x_n\}$, $n=1, 2, \dots$ кетма-кетликнинг чегараланганлиги тушунчалари билан танишамиз.

**6.2-таъриф**. Агар шундай ўзгармас $M$ сон мавжуд бўлиб, $\{x_n\}$ кетма – кетликнинг ҳар бир ҳади шу $M$ сондан катта бўлмаса, яъни $\forall n\in N$ учун $x_n\leq M$ тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ *кетма - кетлик юқоридан чегараланган* деб аталади. Масалан, $\{x_n\}=\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$, $\{x_n\}=\{-(2n-1)\}$ кетма – кетликлар юқоридан чегараланган, чунки, биринчи кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади 1

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

дан, иккинчи кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади эса $0$ дан катта эмас, яъни $\forall n \in N$ учун $x_n = \dfrac{n-1}{n} \le 1$, $\forall n \in N$ учун $x_n = -(2n-1) < 0$.

**6.3-таъриф.** Агар шундай ўзгармас $m$ сон мавжуд бўлиб, $\{x_n\}$ кетма – кетликнинг ҳар бир ҳади шу $m$ сондан кичик бўлмаса, яъни $\forall n \in N$ учун $m \le x_n$ тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ *кетма-кетлик қуйидан чегараланган* дейилади.

Масалан, $\{x_n\} = \{n^2+1\}$, $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{2^{n-1}}\right\}$ кетма-кетликлар қуйидан чегараланган, чунки, биринчи кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади $2$ дан, иккинчи кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади эса $0$ дан кичик эмас.

**6.4-таъриф.** Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳам қуйидан, ҳам юқоридан чегараланган бўлса, яъни шундай $M$ ва $m$ ўзгармас сонлар мавжуд бўлиб, $\forall n \in N$ учун $m \le x_n \le M$ тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ *кетма-кетлик чегараланган* дейилади. Масалан, $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$; $\{x_n\} = \{2^{(-1)^n}\}$ кетма-кетликлар чегараланган кетма- кетликлардир.

**6.1-теорема.** $\{x_n\}$ кетма-кетлик чегараланган бўлиши учун, шундай

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$A>0$ сон мавжуд бўлиб, $\forall n \in N$ учун

$$|x_n| \leq A \qquad (6.4)$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Одатда (6.4) шарт кетма-кетликнинг чегараланганлик шарти деб ҳам юритилади.

**6.5- таъриф.** Агар ихтиёрий $A>0$ (исталганча катта) сон олинганда ҳам, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳеч бўлмаганда битта $x_{n_0}$ элементи топилиб,

$$|x_{n_0}| \geq A \qquad (6.5)$$

тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ *кетма-кетлик чегараланмаган кетма-кетлик* дейилади. Масалан, $1, 3, 1, 6, ...,1, 3n,...$ кетма-кетлик чегараланмаган бўлади, чунки ихтиёрий мусбат ҳақиқий $A$ сонни қандай қилиб олмайлик, кетма-кетликнинг жуфт номердаги элементлари ичидан $A$ дан катта бўлгани, яъни (6.5) тенгсизликни қаноатлантирувчиси топилади.

6.1-**мисол.** Ушбу

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n, \quad n \in N$$

шартларни қаноатлантирувчи кетма-кетликнинг умумий ҳадини топинг.

**Ечилиши.** Берилган шартларни қаноатлантирувчи кетма – кетликни

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$\{x_n\}=\{\lambda^n\}$ шаклида излаймиз, $\lambda\neq 0$ $x_n=\lambda^n$ ни $x_{n+2}=x_{n+1}+2x_n$ шартга қўйиш натижасида $\lambda^2-\lambda-2=0$ характеристик тенгламани ҳосил қиламиз. Характеристик тенглама $\lambda_1=2,$ $\lambda_2=-1$ илдизларга эга. $\{2^n\},$ $\{(-1)^n\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бири $x_{n+2}=x_{n+1}+2x_n$ шартни қаноатлантиради. Умумий ҳади $x_n=\alpha 2^n+\beta(-1)^n$ бўлган ($\alpha$ ва $\beta$- ихтиёрий ўзгармас сонлар) кетма-кетлик ҳам берилган шартларни қаноатлантиради:

$$x_1=2\alpha-\beta=a,$$
$$x_2=4\alpha-\beta=b;$$

бу системадан $\alpha=\dfrac{a+b}{6},$ $\beta=\dfrac{b-2a}{3}.$ $\lambda_1,\lambda_2,$ $\alpha$ ва $\beta$ ларнинг қийматларини $x_n=\alpha\lambda_1^n+\beta\lambda_2^n$ формулага қўйиш натижасида, изланаётган кетма-кетликнинг умумий ҳади

$$x_n=\frac{\left((a+b)2^{n-1}+(b-2a)\,(-1)^n\right)}{3}$$

эканлигини топамиз.

**6.2- мисол.** Кетма-кетликнинг дастлабки бир нечта ҳадларини билган ҳолда унинг умумий ҳадининг кўринишини ёзинг:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$a)\quad \frac{2}{3},\ \frac{5}{8},\ \frac{10}{13},\ \frac{17}{18},\ \frac{26}{23};\quad b)\ 1,\ \frac{1}{2},\quad 2,\ \frac{1}{3},\quad 3,\ \frac{1}{4},\quad 4,\ \frac{1}{5}.$

**Ечилиши.** *a*) Кетма-кетликнинг берилган ҳадларининг сурати, кетма-кетлик ҳади номерининг квадратига бирни қўшишдан ҳосил бўлади, яъни $n^2+1$, махражи эса, биринчи ҳади $a_1=3$, айирмаси $d=5$ бўлган $3, 8, 13, 18, \ldots$ арифметик прогрессиядан иборат. Арифметик прогрессия умумий ҳадини топиш формуласига асосан,

$$x_n = a_1 + d(n-1) = 3 + 5(n-1) = 5n-2$$

эканлигини топамиз.

Демак, изланаётган кетма-кетлик умумий ҳадининг кўриниши

$$x_n = \frac{n^2+1}{5n-2}$$

шаклида бўлади.

*b*) Изланаётган кетма-кетликнинг умумий ҳадини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$x_n = \begin{cases} k, & n = 2k-1, \quad k \in N\ , \\ \dfrac{1}{k+1}, & n = 2k, \quad k \in N\ . \end{cases}$$

Бу формулани битта умумий формула орқали ҳам ёзиш мумкин:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$x_n = \frac{n+1}{4}\left[1-(-1)^n\right]+\frac{1}{n+2}[1+(-1)^n]$$

**6.3– мисол.** Қуйидаги кетма-кетликларнинг чегараланганлигини исботланг:

1) $x_n = \frac{20+(-1)^n \cdot n}{\sqrt{n^2+13}}, \quad n \in N$; 2) $x_n = \frac{n}{3^n}, \quad n \in N$.

**Ечилиши.** 1) $\left|20+(-1)^n \cdot n\right| \le 20+\left|(-1)^n \cdot n\right| = 20+n, \qquad \sqrt{n^2+13} > n$ эканлигини эътиборга олган ҳолда

$$|x_n| = \frac{\left|20+(-1)^n \cdot n\right|}{\sqrt{n^2+13}} \le \frac{20+n}{n} = 1+\frac{20}{n} \le 21.$$

Демак, кетма-кетли чегараланган, чунки (6.4) шарт бажарилади $(A=21)$.

2) Равшанки, $\forall n \in N$ учун $\frac{n}{3^n} > 0$. Бернулли тенгсизлигига асосан, $3^n = (1+2)^n \ge 2n$. Бундан $\frac{n}{3^n} \le \frac{1}{2}$. Демак, $\forall n \in N$ учун $0 < \frac{n}{3^n} \le \frac{1}{2}$. Демак, берилган кетма-кетлик чегараланган.

**6.4– мисол.** Ушбу

$a)\quad x_n = \frac{8n^3-5}{3n^3+11}; \qquad b)\quad x_n = (-1)^n \frac{6n^3-1}{2n^3+3}\cos n; \qquad c)\ x_n = \frac{2n^2}{n-1}\cos \pi n, n \ge 2$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

кетма-кетликларнинг қайси бири чегараланган, қайси бири чегараланмаган?

**Ечилиши**. *a*) Равшанки, $0<\frac{8n^3-5}{3n^3+11}<\frac{8n^3}{3n^3}<\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}, \quad \forall n\in N$.

Демак, $x_n=\frac{8n^3-5}{3n^3+11}$ кетма-кетлик чегараланган.

*b*) $x_n=(-1)^n\frac{6n^3-1}{2n^3+3}\cos n$ кетма-кетлик ҳам чегараланган, чунки

$$|x_n|=\left|(-1)^n\frac{6n^3-1}{2n^3+3}\cos n\right|=|(-1)^n|\cdot\frac{6n^3-1}{2n^3+3}\cdot|\cos n|<\frac{6n^3}{2n^3+3}<3.$$

Демак, берилган кетма-кетлик чегараланган.

c) $|x_n|=\left|\frac{2n^2}{n-1}\cdot\cos \pi n\right|=\frac{2n^2}{n-1}\cdot|\cos \pi n|=\frac{2n^2}{n-1}>2n$.

Ихтиёрий $A>0$ сон учун $n>\frac{A}{2}$ деб олсак, $\left(n=\left[\frac{A}{2}\right]+1\right)$ $|x_n|>2n>A$

тенгсизлик бажарилади. Демак, берилган кетма-кетлик чегараланмаган экан.

**6.6-таъриф.** Агар $\forall A>0$ ($A-$ исталганча катта сон бўлганда ҳам) сон учун $\exists n_0(A)$ номер мавжуд бўлиб, $n\geq n_0(A)$ дан бошлаб $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг барча элементлари

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$|x_n| > A \qquad (6.6)$$

тенгсизликни қаноатлантирса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик *чексиз катта кетма-кетлик* дейилади.

Маълумки $\{x_n\}$ кетма-кетлик чексиз катта бўлса, у чегараланмаган кетма-кетлик ҳам бўлади, лекин бунинг акси ҳар доим ўринли бўлмайди, яъни чегараланмаган кетма-кетлик, чексиз катта кетма-кетлик бўлмаслиги ҳам мумкин. Масалан, $1, 3, 1, 6, ...,1, 3n,...$ кетма-кетлик чегараланмаган кетма-кетлик бўлса-да, у чексиз катта кетма-кетлик бўла олмайди, чунки $A > 1$ учун (6.6) тенгсизлик $x_n$ нинг тоқ номердаги элементлари учун бажарилмайди.

**6.7-таъриф.** Агар $\forall \varepsilon > 0$ ($\varepsilon$ - исталганча кичик сон олинганда ҳам) учун $\exists n_0(\varepsilon)$ номер мавжуд бўлиб, $n \geq n_0(\varepsilon)$ дан бошлаб

$$|x_n| < \varepsilon \qquad (6.7)$$

тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик *чексиз кичик кетма-кетлик* дейилади.

**6.6-мисол.** $q,\ q^2, \ldots, q^n, \ldots$ кетма- кетликнинг $|q| > 1$ бўлганда чексиз катта, $|q| < 1$ бўлганда эса, чексиз кичик кетма-кетлик эканлигини исбот қилинг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**Исбот**. 1) $|q|>1$ бўлсин. У ҳолда, $|q|=1+\delta$ $(\delta>0)$ деб тасвирлаш мумкин. Бундан, $|q|^n=(1+\delta)^n$ ни ҳосил қиламиз. Бернулли тенгсизлигидан фойдаланиб,

$$|q|^n=(1+\delta)^n>1+n\delta>n\delta$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. $\forall\ A>0$ (исталганча катта) сон олинганда

$$\delta n>A \tag{6.8}$$

тенгсизлик $n_0=\left[\frac{A}{\delta}\right]+1=\left[\frac{A}{|q|-1}\right]+1$ номердан бошлаб, яъни $\forall n\ge n_0(A)$ учун бажарилади.

Шундай қилиб, $\forall\ A>0$ учун шундай $n_0=\left[\frac{A}{|q|-1}\right]+1$ номер топиладики, $\forall n\ge n_0$ учун

$$|q|^n>A$$

тенгсизлик бажарилади. Бундан эса, $|q|>1$ бўлганда, 6.6- таърифга кўра, берилган кетма-кетликнинг чексиз катта кетма-кетлик эканлиги келиб чиқади.

2) $|q|<1(q\neq 0)$ бўлсин, бундан $\frac{1}{|q|}>1$, буни $\frac{1}{|q|}=1+\delta$ $(\delta>0)$, $\frac{1}{|q|^n}=(1+\delta)^n$, $n\in N$, деб қараш мумкин. Бернулли тенгсизлигидан фойдаланиб, $|q|^n\le\frac{1}{1+n\delta}$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. $\forall\varepsilon>0$ сонни олиб, унга боғлик $n_0(\varepsilon)$ номерни $n_0(\varepsilon)=\left[\frac{\frac{1}{\varepsilon}-1}{\delta}\right]+1$ деб олсак, у ҳолда,

$\forall n\ge n_0(\varepsilon)$ учун

$$|q|^n\le\frac{1}{1+n\delta}<\frac{1}{1+n_0\delta}=\frac{1}{1+\left(\left[\frac{\frac{1}{\varepsilon}-1}{\delta}\right]+1\right)\delta}<\frac{1}{1+\frac{\frac{1}{\varepsilon}-1}{\delta}\delta}=\varepsilon$$

тенгсизлик, яъни $|q|^n<\varepsilon$ бажарилади. Бундан эса, $|q|<1$ бўлганда, берилган кетма-кетликнинг чексиз кичик кетма-кетлик эканлиги келиб чиқади, $\{x_n\}=\{q^n\}$ кетма-кетлик учун $q=0$ бўлса, $\forall n\in N$ учун $x_n=0$ бўлади. Бу эса, $\{x_n\}=\{0\}$ кетма-кетликнинг чексиз кичик кетма-кетлик эканлигини англатади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**6.7-мисол.** Ушбу 1) $x_n = \dfrac{(-1)^n 4}{5\sqrt{n}+1}$; 2) $x_n = \dfrac{1}{n}\sin\left[(2n-1)\dfrac{\pi}{2}\right]$; 3) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$

кетма-кетликларнинг қайси бири $n \to \infty$ да чексиз кичик, қайси бири чексиз катта кетма-кетлик бўлади?

**Ечилиши**. 1) $\forall \varepsilon > 0$ сонни оламиз.

$$|x_n| = \left|\frac{(-1)^n \cdot 4}{5\sqrt{n}+3}\right| < \frac{4}{5\sqrt{n}+3} < \frac{4}{5\sqrt{n}} < \frac{4}{4\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$n > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$ бўлганда $|x_n| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади $\left(n_0(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1\right)$. $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$ деб олинганда, $|x_n| < \dfrac{1}{10}$ бўлиши учун, $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < \dfrac{1}{10}$ ёки $n > 100$ бўлиши керак. Шунинг учун $n_0(\varepsilon) = 100$ деб олиш мумкин. Шундай қилиб, $x_n = \dfrac{(-1)^n \cdot 4}{5\sqrt{n}+3}$ кетма-кетлик чексиз кичик кетма-кетлик экан.

2) $\forall \varepsilon > 0$ оламиз. $|x_n| = \left|\dfrac{1}{n}\sin\left[(2n-1)\dfrac{\pi}{2}\right]\right| < \dfrac{1}{n}$. $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ бўлганда $|x_n| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. $n_0(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, деб олиш мумкин.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Демак, $n \geq n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ дан бошлаб $|x_n| < \varepsilon$ бажарилади. Шундай қилиб, 6.7-таърифга кўра, берилган кетма-кетлик чексиз кичик кетма-кетлик экан.

3) $\forall\ A > 0$ (исталганча катта) сон оламиз ва $2^{\sqrt{n}} > M$ тенгсизликни ечамиз: $\sqrt{n} > \log_2 M,$ $\qquad n > (\log_2 M)^2$.

Агар $n_0(A) = \left\lfloor (\log_2 M)^2 \right\rfloor$ деб олинса, $n > n_0(A)$ дан бошлаб $|x_n| > M$ бўлади.

Демак, берилган кетма-кетлик чексиз катта кетма-кетлик экан.

## 6.3. Чексиз кичик кетма-кетликларнинг асосий хоссалари.

**6.1-хосса.** Иккита $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ чексиз кичик кетма-кетликларнинг йиғиндиси ва айирмаси $\{x_n \pm y_n\}$, яна чексиз кичик кетма-кетлик бўлади. Бу хоссадан ушбу натижа келиб чиқади:

**6.1-натижа.** Чекли сондаги чексиз кичик кетма-кетликларнинг алгебраик йиғиндиси, яна чексиз кичик кетма-кетлик бўлади.

**6.2-хосса.** Чексиз кичик кетма-кетлик билан чегараланган кетма-

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

кетликларнинг кўпайтмаси, чексиз кичик кетма-кетлик бўлади.

**6.3-хосса.** Ҳар қандай чексиз кичик кетма-кетлик чегараланган кетма – кетлик бўлади.

6.2 ва 6.3- хоссалардан қуйидаги натижа келиб чиқади.

**6.2-натижа**. Чекли сондаги чексиз кичик кетма-кетликларнинг кўпайтмаси, чексиз кичик кетма-кетлик бўлади.

**6.4-хосса.** Агар $\{x_n\}$ чексиз катта кетма-кетлик бўлса, у ҳолда бирор $n_0$ номердан бошлаб $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ кетма-кетлик аниқланган бўлади ва у чексиз кичик кетма-кетлик бўлади. Агар $\{y_n\}$ чексиз кичик кетма-кетликнинг ҳамма ҳадлари нолдан фарқли бўлса, у ҳолда $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ кетма – кетлик чексиз катта кетма-кетлик бўлади.

## 6.4. Яқинлашувчи кетма-кетликлар ва уларнинг хоссалари.

$\{x_n\}$ кетма- кетлик берилган бўлсин.

**6.8- таъриф.** Агар шундай ҳақиқий $a$ сон мавжуд бўлиб, $\{x_n - a\}$ кетма – кетлик чексиз кичик кетма-кетлик бўлса, $\{x_n\}$ кетма – кетлик *яқинлашувчи*

Т и т у л в а р а к
М у н д а р и ж а
1 - б о б
2 - б о б
3 - б о б
А д а б и ё т л а р
О р қ а г а
Т у л и к э к р а н
Ч и к и ш

*кетма-кетлик* дейилади. Бунда, $a$ сонига $\{x_n\}$ кетма – кетликнинг лимити дейилади ва у $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ каби ёзилади.

Чексиз кичик кетма-кетликнинг таърифидан фойдаланиб, яқинлашувчи кетма-кетликнинг 6.8-таърифига эквивалент бўлган қуйидаги таърифни бериш мумкин:

**6.9 – таъриф.** Агар шундай ҳақиқий $a$ сон мавжуд бўлиб, $\forall \varepsilon > 0$ учун шундай $n_0(\varepsilon)$ номер топилиб, $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ лар учун

$$|x_n - a| < \varepsilon \tag{6.9}$$

тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик *яқинлашувчи кетма – кетлик* дейилади. Бунда $a$ сонига $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг *лимити* дейилади. Бу таърифни қисқача қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

(6.9) тенгсизлик ушбу $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ ёки $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ тенгсизликка эквивалент бўлади.

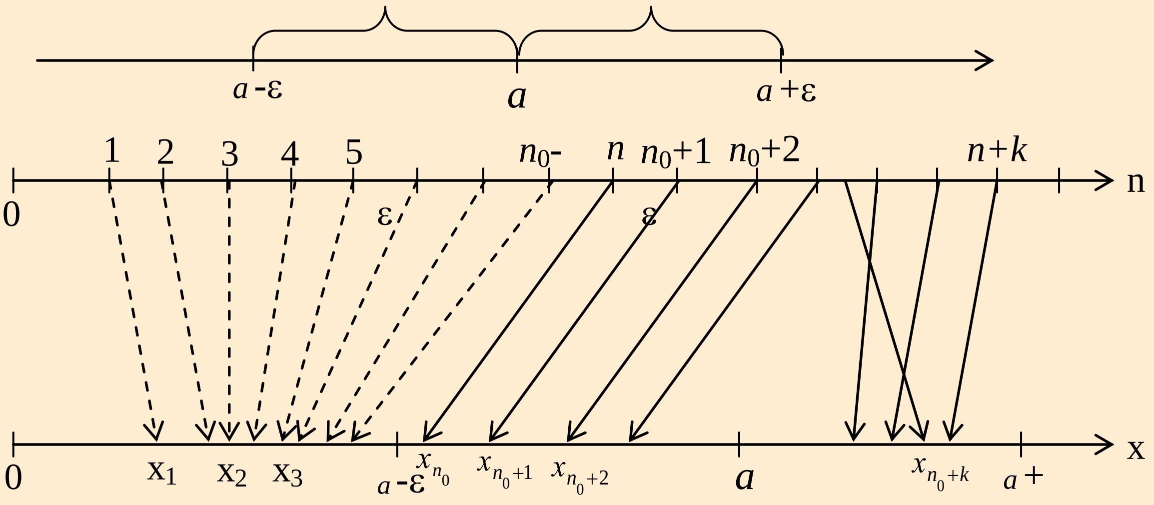
Агар $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ оралиқ $a$ нуқтанинг $\varepsilon$-атрофи, яъни $U_\varepsilon(a)$ тўпламдан иборат эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда $\{x_n\}$ кетма-кетлик лимитининг

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

юқоридаги 6.8 ва 6.9 -таърифларга эквивалент бўлган, қуйидаги геометрик таърифини бериш мумкин.

**6.10- таъриф.** Агар $a$ нуқтанинг ихтиёрий $U_\varepsilon(a)$ атрофи олинганда ҳам, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг бирор ҳадидан кейинги барча ҳадлари шу атрофга жойлашса, $a$ *сон*, $\{x_n\}$ *кетма-кетликнинг лимити* дейилади.

Демак, агар $a$ нукта $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити бўлса, $a$ нуқтанинг ихтиёрий $U_\varepsilon(a)$ атрофининг ташқарисида кетма-кетликнинг бирорта ҳам ҳади



9.4-чизма.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

бўлмаслиги, агар бўлса, чекли сондаги ҳадлари бўлиши мумкин.

Бу таърифни қисқача

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0,\quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N : \forall n \ge n_0 \to |x_n - a| < \varepsilon\right)$$

каби ифодалаш ҳам мумкин.

**6.11- таъриф.** Агар ихтиёрий $a$ сон ва ихтиёрий $n_0$ сон олинганда ҳам шундай $\varepsilon_0$ сон ва шундай $n > n_0$ натурал сон топилиб,

$$|x_n - a| \ge \varepsilon_0$$

бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик *лимитга эга эмас* дейилади.

Бу таърифни қисқача қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\forall n_0 \in N, \exists\varepsilon_0, \exists n \in N : n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| \ge \varepsilon_0$$

**6.12- таъриф.** Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга бўлмаса, у *узоқлашувчи* кетма-кетлик дейилади.

Кетма-кетлик лимитининг таърифидан фойдаланиб, чексиз кичик ва чексиз катта кетма-кетликларнинг таърифларини қуйидагича ифодалаш мумкин.

**6.13- таъриф.** Лимити нолга тенг бўлган $\{x_n\}$ кетма-кетлик $\left(\lim_{n\to\infty} x_n = 0\right)$,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

*чексиз кичик кетма-кетлик* дейилади.

**6.14- таъриф.** Лимити чексиз бўлган $\{x_n\}$ кетма-кетлик $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty\right)$, *чексиз катта кетма-кетлик* деб аталади.

Чексиз кичик кетма-кетлик ўз навбатида яқинлашувчи, чексиз катта кетма-кетлик эса, узоқлашувчи кетма-кетлик бўлади.

**6.2- теорема.** $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг $a$ лимитга эга бўлиши учун унинг $x_n = a + \alpha_n$ шаклда тасвирланиши зарур ва етарли.

Бунда $\{\alpha_n\}$- чексиз кичик кетма- кетлик.

**6.8- мисол.** Ушбу $x_n = \dfrac{2n-1}{3n+1}$ кетма-кетликнинг лимити $\dfrac{2}{3}$ га тенг эканлигини таъриф бўйича исбот қилинг ва қуйидаги жадвални тўлдиринг

| $\varepsilon$ | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 | ....... |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_0(\varepsilon)$ | | | | | ...... |

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**Ечилиши.** Ихтиёрий мусбат $\varepsilon$ сонни оламиз. Бу сонга кўра, шундай $n_0(\varepsilon)$ номернинг мавжудлигини кўрсатиш керакки, $\forall n > n_0(\varepsilon)$ лар учун (6.9) тенгсизлик ўринли бўлсин. Бунинг учун

$$\left|x_n - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{2n-1}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| = \left|-\frac{5}{3(3n+1)}\right| = \frac{5}{3(3n+1)} < \varepsilon$$

тенгсизликни $n$ га нисбатан ечиш керак:

$$\frac{5}{3\varepsilon} < 3n+1, \quad \frac{5}{3\varepsilon} - 1 < 3n, \qquad \frac{5-3\varepsilon}{9\varepsilon} < n$$

$n_0(\varepsilon)$ натурал сон (изланаётган номер) сифатида $\left[\frac{5-3\varepsilon}{9\varepsilon}\right] = n_0(\varepsilon)$ сон олинса, у ҳолда $\forall n > n_0$ учун $\left|\frac{2n-1}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Энди берилган $\varepsilon$ га кўра, $n_0(\varepsilon)$ ни топиб, жадвални тўлдирамиз:

| $\varepsilon$ | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 |
|---|---|---|---|---|
| $n_0$ | 5 | 55 | 555 | 5555 |

**6.9- мисол.** Ушбу

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$x_n = \frac{1}{n!}$$

кетма-кетликнинг лимити $0$ га тенг эканлигини таъриф бўйича исбот қилинг ва қуйидаги жадвални тўлдиринг:

| $\varepsilon$ | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 | $\dots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_0$ | | | | | |

**Ечилиши**. Ихтиёрий мусбат $\varepsilon$ сонни оламиз ва бу сонга кўра, шундай $n_0(\varepsilon) \in N$ номернинг топилишини кўрсатиш керакки, $\forall n > n_0(\varepsilon)$ учун

$$|x_n| = \left|\frac{1}{n!}\right| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилсин. Бунинг учун

$$\left|\frac{1}{n!}\right| = \frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} < \varepsilon$$

тенгсизликни $n$ га нисбатан ечиш керак:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}<\frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdots 2}=\frac{1}{2^{n-1}}<\varepsilon$$

$$\frac{1}{\varepsilon}<2^{n-1},\quad \lg\frac{1}{\varepsilon}<(n-1)\lg 2,\quad n>1+\lg\frac{1}{\varepsilon}\cdot\lg^{-1}2\,.$$

Изланаётган номер, $n_0(\varepsilon)$ натурал сон сифатида $1+\left[\lg\frac{1}{\varepsilon}\cdot\lg^{-1}2\right]=n_0(\varepsilon)$ сон олинса, $\forall n>1+\left[\lg\frac{1}{\varepsilon}\cdot\lg^{-1}2\right]$ учун $\left|\frac{1}{n!}\right|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Энди берилган $\varepsilon$ га кўра, $n_0(\varepsilon)$ ни топиб, жадвални тўлдирамиз:

| $\varepsilon$ | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 |
|---|---|---|---|---|
| $n_0$ | 4 | 7 | 11 | 14 |

**6.10- мисол**. Ушбу

$$x_n==3^{\sqrt[3]{n}}$$

кетма-кетликнинг лимити $n\to\infty$ да $\infty$ га тенг эканлигини (яъни чексиз катта эканлигини) таъриф бўйича исбот қилинг ва қуйидаги жадвални тўлдиринг:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

| $A$ | 10 | 100 | 1000 | 10000 |
|---|---|---|---|---|
| $n_0$ |  |  |  |  |

**Ечилиши.** Ихтиёрий $A>0$ сонни олайлик ва бу сонга кўра, шундай $n_0(A)\in N$ номер топилишини кўрсатиш керакки, $\forall n>n_0$ номердан бошлаб берилган кетма-кетликнинг ҳамма ҳадлари $|x_n| = 3^{\sqrt[3]{n}} > A$ тенгсизликни қаноатлантирсин. Бунинг учун $3^{\sqrt[3]{n}} > A$ тенгсизликни $n$ га нисбатан ечиш керак: изланаётган $n_0(A)$ номер сифатида $[\frac{(\lg A)^3}{(\lg 3)^3}] = n_0(A)$ сон олинса, $\forall n > (\lg A)^3$ дан бошлаб $3^{\sqrt[3]{n}} > A$ тенгсизлик бажарилади. Берилган $A>0$ сонга кўра, $n_0$ ни топиб, жадвални тўлдирамиз:

| A | 10 | 100 | 1000 | 10000 |
|---|---|---|---|---|
| $n_0$ | 9 | 73 | 244 | 572 |

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

*Яқинлашувчи кетма-кетликлар қуйидаги хоссаларга эга:*

**6.5-хосса**. Яқинлашувчи кетма-кетлик ягона лимитга эга бўлади.

**6.6-хосса.** Ҳар қандай яқинлашувчи кетма-кетлик чегараланган кетма – кетлик бўлади, акс ҳолда кетма-кетлик чегараланмаган бўлади.

**6.7-хосса**. $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, улар, мос равишда, $a$ ва $b$ лимитларга эга бўлса, у ҳолда $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ кетма – кетликлар ҳам яқинлашувчи бўлади ва ушбу

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b; \qquad \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b; \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}\,(b \neq 0)$$

муносабатлар ўринли бўлади.

**6.8-хосса.** $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ бўлсин. Агар $\forall n (n \in N)$ учун $x_n \leq y_n$ $(x_n \geq y_n)$ бўлса, у ҳолда $a \leq b$ $(a \geq b)$ бўлади.

**6.9-хосса.** $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ бўлсин. Агар $\forall n (n \in N)$ учун $x_n \leq z_n \leq y_n$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $\{z_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи ва $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**6.1–эслатма.** Агар яқинлашувчи кетма-кетликнинг ҳамма элементлари $x_n > b$ қатъий тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда, бу кетма-кетликнинг лимити $x$ учун ҳар доим ҳам $x > b$ бўлмайди.

Масалан, $x_n = \frac{1}{n}$ бўлсин. Бундан $\forall n (n \in N)$ учун $x_n > 0$ бўлади, лекин $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ бўлиб, у $x > 0$ тенгсизликни қаноатлантирмайди.

**6.10-хосса**. Агар яқинлашувчи $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳамма ҳадлари $[a,\ b]$ сегментнинг ичида жойлашса, у ҳолда унинг лимити $x$ ҳам $[a,\ b]$ сегментнинг ичида жойлашади.

6.2**–эслатма.** Икки $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма – кетликларнинг йиғиндиси, айирмаси, купайтмаси ва нисбатидан иборат бўлган кетма – кетликнинг яқинлашувчи бўлишидан бу $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма – кетликларнинг ҳар бирининг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан; 1) $\{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n-1}\}$ кетма – кетлик яқинлашувчи. Ҳақиқатан ҳам,

$\lim\limits_{n\to\infty} [\sqrt{2n+1} - \sqrt{n-1}] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{3n+1} + \sqrt{n-1}} = 0$, лекин $\{\sqrt{2n+1}\}$, $\{\sqrt{n-1}\}$ кетма-кетликлар узоқлашувчи.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**6.11- мисол**. Ушбу

$$x_n = \sqrt[n]{n}$$

кетма-кетликнинг лимити 1 га тенг эканлигини исбот қилинг.

**Ечилиши.** Берилган кетма-кетликнинг $\sqrt[n]{n} = 1+\alpha_n$ кўринишда тасвирланишини кўрсатамиз. Бунда $\alpha_n$ - чексиз кичик кетма-кетлик, яъни $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$. $\sqrt[n]{n} - 1 = \alpha_n$ деб белгилаймиз, $\alpha_n \geq 0$.

$$\sqrt[n]{n} = 1+\alpha_n, \qquad n = (1+\alpha_n)^n = 1+n\cdot\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\alpha_n^2 + \cdots + \alpha_n^n .$$

Бу тенгликдан $\forall n > 1$ учун

$$n > 1+\frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2, \quad n-1 > \frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2, \quad 1 > \frac{n}{2}\alpha_n^2,$$

$$n \geq 2 \text{ учун } n-1 \geq \frac{n}{2}, \quad n \geq \frac{n^2}{4}\alpha_n^2, \ 0 \leq \alpha_n \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n}} = 0$ бўлгани учун охирги тенгсизликдан, 6.7-хоссасига кўра, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ эканлиги, яъни $\alpha_n$ нинг чексиз кичик кетма -кетлик эканлиги келиб чиқади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Демак, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ экан.

**6.12- мисол.** Ушбу $x_n=\sqrt[n]{a}$ кетма-кетликнинг лимити 1 га тенг эканлигини лимит таърифдан фойдаланиб, кўрсатинг.

**Ечилиши.** $a=1$ бўлганда, берилган кетма-кетлик лимити 1 га тенг эканлиги равшан. Фараз қилайлик $a>1$ бўлсин. У ҳолда $\sqrt[n]{a}>1$, $\sqrt[n]{a}-1>0$, Бернулли тенгсизлигини эътиборга олган ҳолда, $a=[1+(\sqrt[n]{a}-1)]^n>n\cdot(\sqrt[n]{a}-1)$, тенгсизликка эга бўламиз. Бу тенгсизликдан $0<\sqrt[n]{a}-1<\frac{a}{n}$, $n>\left[\frac{a}{\varepsilon}\right]+1\ (\varepsilon>0)$ учун $0<\sqrt[n]{a}-1<\frac{a}{n}<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилади.

Бундан $a>1$ бўлганда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ эканлиги келиб чиқади. Энди $0<a<1$ бўлсин, у ҳолда $\frac{1}{a}>1$ бўлади. Юқорида исбот қилинганга асосан, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}=1$.

Демак, яқинлашувчи кетма-кетликларнинг 6.7-хоссасига биноан,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=1.$$

**6.13- мисол.** $a>1$ бўлганда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$ эканлигини исботланг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**Ечилиши**. Шартга кўра, $a>1$ бўлгани учун $a-1>0$ бўлади.

$$0 \le \frac{n}{a^n} = \frac{n}{(1+a-1)^n} = \frac{n}{1+\frac{n(a-1)}{1!}+\frac{n(n-1)}{2!}(a-1)^2+\cdots+(a-1)^n} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2} \le \frac{4}{n(a-1)^2}$$

чунки, $\forall n \ge 2$ учун $\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2 \ge \frac{n^2}{4}(a-1)^2$ тенгсизлик ўринли. Бундан

$$0 \le \frac{n}{a^n} \le \frac{4}{n(a-1)^2}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n(a-1)^2}=0$$

Демак, яқинлашувчи кетма-кетликларнинг 6.9-хоссасига кўра, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$ бўлади.

**6.14- мисол.** $a>1$ бўлганда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0$ эканлигини исботланг.

**Ечилиши**. $\forall \varepsilon>0$ олайлик $b>1$ бўлганда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{b^n}=0$ бўлади (6.13-мисолга қаранг). У ҳолда исталганча катта $n(n\in N)$ лар учун $\frac{1}{b^n}<\frac{n}{b^n}<1$ тенгсизлик ўринли. $b=a^{\varepsilon}(a>1)$ деб олсак, у ҳолда $\frac{1}{a^{\varepsilon n}}<\frac{n}{a^{\varepsilon n}}<1$ ёки $1<n<a^{\varepsilon n}$. Бу тенгсизликни логарифмлаш натижасида $0<\log_a n<\varepsilon n$ тенгсизликни ҳосил

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

қиламиз. Бундан эса, $0<\frac{\log_a n}{n}<\varepsilon$ бўлади.

$\varepsilon$ нинг исталганча кичиклигини эътиборга олсак, яқинлашувчи кетма-кетликларнинг 6.9$^{\text{o}}$-хоссасига асосан, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0$ бўлади.

Юқоридаги 6.13 ва 6.14-мисолларни солиштирганда учта $\{a^n\}$, $\{n\}$, $\{\log_a^n\}$, $a>1$ кетма- кетликларнинг биринчиси $n\to\infty$ да қолганларига нисбатан тезроқ ўсишини, учинчиси эса қолганларига нисбатан секинроқ ўсишини кўриш қийин эмас.

**6.15- мисол.** Ушбу

$$x_n=\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}$$

кетма-кетликнинг лимити $\frac{2}{3}$ га тенглигини кўрсатинг.

**Ечилиши.** Равшанки, $\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\cdot\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$,

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)}{3\cdot4\cdot5\cdots(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)},$$

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\frac{7\cdot13\cdot21\cdots(n^2+n+1)}{3\cdot7\cdot13\cdots(n^2-n+1)}=\frac{n^2+n+1}{3}.$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Бу муносабатларни эътиборга олсак, у ҳолда

$$x_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n}$$

эканлиги келиб чиқади. Бундан яқинлашувчи кетма-кетликларнинг 6.7-хоссасига биноан, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+n} = \frac{2}{3}$ эканлигини топамиз.

**6.16-мисол.** Қуйидаги $\{x_n\}$ кетма-кетликларнинг лимитларини ҳисобланг:

1) $x_n = \frac{2n^3}{2n^2+3} + \frac{1-5n^2}{5n+1}$; 2) $x_n = \sqrt[n]{10n}$; 3) $x_n = \sqrt{3n+5} - \sqrt{n-1}$;

4) $x_n = n^2(n - \sqrt{n^2+1})$; 5) $x_n = \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n$.

**Ечилиши**. 1) Касрларни қўшиб,

$$x_n = \frac{2n^3 - 13n^2 + 3}{10n^3 + 2n^2 + 15n + 3}$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан, яқинлашувчи кетма-кетликларнинг хоссаларини эътиборга олиб,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(2-\frac{13}{n}+\frac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(10+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

эканлигини топамиз. Агар $y_n = \frac{2n^3}{2n^2+3}$, $z_n = \frac{1-5n^2}{5n+1}$ деб белгиласак, у ҳолда бу кетма-кетликлар йиғиндисининг лимити, яъни $\lim_{n\to\infty}(y_n+z_n) = \frac{1}{5}$, лекин қўшилувчиларнинг ҳарбири узоқлашувчи (чексиз катта) кетма- кетликлар (6.2-эслатмага қаранг).

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> Limit((2*n^3-
13*n^2+3)/(10*n^3+2*n^2+15*n+3),n=infinity)
=limit((2*n^3-
13*n^2+3)/(10*n^3+2*n^2+15*n+3),n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3-13n^2+3}{10n^3+2n^2+15n+3}\right) = \frac{1}{5}.$$

2) юқоридаги 6.10 ва 6.11- мисолларни эътиборга олган ҳолда,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{10n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{10}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1\cdot 1 = 1$$

эканлигини топамиз.

3) $x_n = \sqrt{3n+5} - \sqrt{n-1} = \sqrt{n}\left(\sqrt{3+\frac{5}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right).$

Бунда $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3+\frac{5}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{3+\frac{5}{n}} - \lim_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}} = \sqrt{3}-1$

эканлигини эъхтиборга олсак, у ҳолда, $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{3+\frac{5}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right) = +\infty$

эканлигини топамиз.

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
>Limit(sqrt(3*n+5)-sqrt(n-1),n=infinity)=
limit(sqrt(3*n+5)-sqrt(n-1),n=infinity);
```

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3n+5} - \sqrt{n-1}) = \infty.$

4) $x_n = n^2(n - \sqrt{n^2+1})$, бундан иккинчи кўпайтувчини $n + \sqrt{n^2+1}$ га купайтириб, бўлсак, у ҳолда

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$x_n = -\frac{n^2}{n+\sqrt{n^2+1}} = -\frac{n}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = -n\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}},\qquad \lim_{n\to\infty} x_n = -\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = -\infty$$

эканлигини топамиз.

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
>Limit(n^2*(n-sqrt(n^2+1)),n=infinity)=
limit(n^2*(n-sqrt(n^2+1)),n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty}(n^2(n-\sqrt{n^2+1}) = -\infty.$$

5) $x_n = \sqrt[3]{n^2-n^3}+n = \dfrac{n^2}{(n^2-n^3)^{2/3} - n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2}$ эканлигини кўриш қийин эмас, бундан

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{n}-1\right)^{2/3} - \left(\frac{1}{n}-1\right)^{1/3} + 1} = \frac{1}{3}.$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> Limit(surd(n^2-
n^3,3)+n,n=infinity)=limit(surd(n^2-
n^3,3)+n,n=infinity);
```

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n)=\frac{1}{3}.$$

**6.17- мисол.** Ушбу

$$\{y_n\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right\}$$

кетма-кетликнинг лимитини топинг.

**Ечилиши**. Равшанки, барча $n\in N$ лар учун

$$x_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=z_n$$

тенгсизлик бажарилади ва $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ кетма-кетликлар

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$$

бир хил лимитга эга. У ҳолда 6.9- хоссага асосан $\{y_n\}$ кетма-кетлик ҳам лимитга эга бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty}y_n=1$$

бўлади.

**6.18- мисол.** $\{x_n\}=\{(-1)^n\}$ кетма-кетликни яқинлашишга текширинг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**Ечилиши.** Фараз килайлик, $a$ сон $\{x_n\}=\{(-1)^n\}$ кетма-кетликнинг лимити бўлсин, яъни $\forall\varepsilon>0$ сони олинганда ҳам $\exists\ n_0(\varepsilon)\ (n_0\in N)$, $\forall n\geq n_0(\varepsilon)$ лар учун

$$|x_n-a|<\varepsilon \tag{1}$$

бажарилсин. Агар $\varepsilon=\frac{1}{2}$ деб олсак, (1) тенгсизлик $n$ нинг жуфт қийматларида

$$|1-a|<\frac{1}{2} \tag{2}$$

ўринишга, $n$ нинг тоқ қийматларида эса

$$|-1-a|<\frac{1}{2} \qquad \text{ёки} \qquad |1+a|<\frac{1}{2} \tag{3}$$

кўринишга эга бўлади. (2) ва (3) тенгсизликлардан $2=|(1-a)+(1+a)|\leq|1-a|+|1+a|<1$, яъни $2<1$ бўлиши мумкин эмас. Бу қарама-қаршилик, фаразимизнинг нотўғри эканлигини исботлайди. Демак, $\{(-1)^n\}$ кетма-кетлик узоқлашувчи.

## 6. 5. Монотон кетма-кетликнинг таърифлари.

$\{x_n\}$-кетма-кетлик берилган бўлсин.

**6.15- таъриф.** Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг элементлари $\forall n\in N$ учун

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$x_n \le x_{n+1}$ $(x_n < x_{n+1})$ тенгсизликни қаноатлантирса, $\{x_n\}$ *ўсувчи (қатъий ўсувчи) кетма-кетлик* дейилади.

**6.16- таъриф.** Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг элементлари $\forall n \in N$ учун $x_n \ge x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$ тенгсизликни қаноатлантирса, $\{x_n\}$ *камаювчи (қатъий камаювчи) кетма-кетлик* дейилади.

**6.17- таъриф.** Ўсувчи ва камаювчи кетма-кетликлар умумий ном билан *монотон кетма-кетлик* деб аталади.

Монотон кетма-кетлик бир томонлама (юқоридан ёки қуйидан) чегараланган бўлади. Масалан, ўсувчи кетма-кетлик қуйидан чегараланган (қуйи чегараси сифатида унинг биринчи ҳадини олиш мумкин) бўлади, камаювчи кетма-кетлик эса, юқоридан чегараланган (юқори чегараси сифатида ҳам унинг биринчи ҳадини олиш мумкин) бўлади. Бу мулоҳазалардан кўринадики, юқоридан чегараланган ўсувчи кетма-кетлик чегараланган бўлади, қуйидан чегараланган камаювчи кетма-кетлик ҳам чегараланган бўлади.

**Масалан**: 1) $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n, \ldots$ кетма-кетлик ўсувчи кетма-кетлик бўлиб, у қуйидан 1 билан чегараланган;

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

2) $3, 3^2, 3^3, ..., 3^n, ....$ кетма-кетлик қатъий ўсувчи ва у қуйидан $3$ билан чегараланган;

3) $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ...$ кетма-кетлик камаювчи кетма-кетлик бўлиб, у юқоридан $1$ билан, қуйидан нол билан чегараланган, яъни у чегараланган кетма-кетлик бўлади;

4) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$ кетма-кетлик қатъий камаювчи кетма-кетлик бўлиб, у чегараланган бўлади.

## 6.6. Монотон кетма-кетликнинг яқинлашиши ҳақидаги теоремалар.

**6.2- теорема.** Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи бўлиб, юқоридан чегараланган бўлса, у яқинлашувчи (чекли лимитга эга) бўлади; агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланмаган бўлса, у ҳолда у узоқлашувчи (лимити $+\infty$) бўлади.

**6.3- теорема.** Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик камаювчи бўлиб, қуйидан чегараланган бўлса, у яқинлашувчи (чекли лимитга эга) бўлади; агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик қуйидан чегараланмаган бўлса, у ҳолда у узоқлашувчи (лимити

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$-\infty$) бўлади.

Бу теоремалардан қуйидаги натижалар келиб чиқади.

**6.3- натижа.** Ўсувчи кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиши учун унинг юқоридан чегараланган бўлиши зарур ва етарли.

**6.4- натижа.** Камаювчи кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиши учун унинг қуйидан чегараланган бўлиши зарур ва етарли.

Юқоридаги теоремаларни бирлаштириб, уни қуйидагича ҳам ифода қилиш мумкин.

**6.4- теорема.** Монотон $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи (чекли лимитга эга) бўлиши учун унинг чегараланган бўлиши зарур ва етарли.

**6.3- эслатма.** Ҳар қандай яқинлашувчи кетма-кетлик монотон кетма-кетлик бўлавермайди. Масалан, $\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},-\frac{1}{n},\ldots$ кетма-кетлик монотон эмас.

**6.4- эслатма.** Юқоридаги теоремалардан қуйидаги хулосани чиқариш мумкин. Юқоридан чегараланган ўсувчи $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳамма ҳадлари унинг лимити $\bar{x}$ дан катта $(x_n \le \bar{x})$ бўла олмайди. Худди шундай, қуйидан чегараланган камаювчи $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳамма ҳадлари унинг

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

лимити $\underline{x}$ дан кичик ($\underline{x} \le x_n$) бўла олмайди.

**6.5- теорема.** Иккита $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар берилган бўлсин. Агар: 1) $\{x_n\}$ ўсувчи, $\{y_n\}$ камаювчи кетма-кетлик; 2) $\forall n \in N$ учун $x_n < y_n$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$ бўлса, $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи ва $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ тенглик ўринли бўлади. Бу теоремадан натижа сифатида, қуйидаги муҳим, ичма-ич жойлашган сегментлар ҳақидаги теорема келиб чиқади.

**6.6- теорема.** Агар $[a_1;b_1] \supset [a_2;b_2] \supset [a_3;b_3] \supset \ldots \supset [a_n;b_n] \supset \ldots$ муносабатда бўлган, $[a_1;b_1],[a_2;b_2],[a_3;b_3],\ldots,[a_n;b_n]\ldots$ сегментлар кетма-кетлиги учун $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ шарт ўринли бўлса, у ҳолда $\{a_n\}$ ва $\{b_n\}$ кетма-кетликлар битта лимитга эга бўлади, ҳамда бу лимит барча сегментларга тегишли бўлган ягона нуқта бўлади.

Кўп ҳолларда, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ кўринишдаги кетма-кетликларни яқинлашишга текширишда қуйидаги теорема муҳим рол ўйнайди.

**6.7-теорема (Штольц).** Агар $\{y_n\}$-ўссувчи чексиз катта кетма-кетлик

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

бўлиб,

$$\left\{\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\}$$

кетма-кетлик яқинлашувчи ва унинг лимити $a$ бўлса, у ҳолда

$$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$$

кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи бўлади ва у ҳам $a$ лимитга эга бўлади, яни

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a\,.$$

**6.19- мисол**. Ушбу

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}\right\}$$ $k$ -бутун, мусбат сон,

кетма-кетликнинг лимити $\frac{1}{k+1}$ эканлигини исботланг.

**Ечилиши**. $y_n = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$, $z_n = n^{k+1}$ деб белгилаб, $\left\{\frac{y_n - y_{n-1}}{z_n - z_{n-1}}\right\}$ кетма – кетликнинг яқинлашувчи эканини кўрсатамиз:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{z_n - z_{n-1}} = \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} = \frac{n^k}{(k+1)\,n^k - \frac{(k+1)}{2!}\,n^{k-1} + \cdots + (-1)^{k+1}} =$$

$$= \frac{1}{(k+1) + \frac{1}{n}\cdot\left[-\frac{(k+1)k}{2!} + \frac{(k+1)\,k\,(k-1)}{3!}\cdot\frac{1}{n} - \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{n^{k-1}}\right]}$$

Равшанки, $\lim\limits_{n\to\infty}\left[-\frac{(k+1)k}{2!} + \frac{(k+1)\,k\,(k-1)}{3!}\cdot\frac{1}{n} - \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{n^{k-1}}\right] = -\frac{(k+1)\,k}{2!}$ - чекли.

Шундай қилиб, яқинлашувчи кетма-кетликнинг хоссаларини эътиборга олган ҳолда,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n - y_{n-1}}{z_n - z_{n-1}} = \frac{1}{k+1}$$

эканлигини топамиз.

Демак, Штольц теоремасига асосан,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

**6.20- мисол**. Ушбу

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0 \;\; (a\text{-ихтиёрий ҳақиқий сон}) \qquad (*)$$

тенгликни исботланг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**Ечилиши.** Равшанки, $|a| \le 1$ бўлганда, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ тенглик ўринли.

Фараз қилайлик, $a > 1$ бўлсин. $x_n = \frac{a^n}{n!}$ деб белгилайлик, у ҳолда $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$ Бундан $\forall n > n_0$ ($n_0$-исталганча катта) учун $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ ёки $x_{n+1} < x_n$. Шундай қилиб, $\{x_n\}$ кетма-кетлик $n > n_0$ учун камаювчи ва $0 < x_n$ экан. Демак, 6.3-теоремага кўра, $\{x_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга, яъни $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \ge 0.$ Иккинчи томондан $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \frac{a}{n+1} = A \cdot 0 = 0$. Шундай қилиб, (*) тенглик $a \ge 0$ учун исботланди. $a < 0$ бўлганда ҳам (*) тенглик ўринли бўлади, чунки $\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

**6.21- мисол**. Иккита $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots; y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ $(x_0 > y_0 > 0)$ кетма-кетликлар берилган бўлиб, уларнинг умумий ҳадлари ушбу $x_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}$, $y_n = \sqrt{x_{n-1} \cdot y_{n-1}}$ формулалар орқали топилади. Бу кетма-кетликларнинг лимитининг мавжудлигини ва уларнинг лимитларининг бир-бирига тенглигини исботланг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Орқага
Тулик экран
Чикиш

**Ечилиши.** Аввало $x_n > y_n$ эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$x_n - y_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} - \sqrt{x_{n-1} \cdot y_{n-1}} = (\sqrt{\frac{x_{n-1}}{2}} - \sqrt{\frac{y_{n-1}}{2}})^2 > 0,$$

$$x_n - x_{n-1} = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} - x_{n-1} = \frac{y_{n+1} - x_{n-1}}{2} < 0,$$

бундан $x_n < x_{n-1}$, демак, $\{x_n\}$ кетма-кетлик камаювчи экан.

$$y_n - y_{n-1} = \sqrt{x_{n-1} \cdot y_{n-1}} - y_{n-1} = \sqrt{y_{n-1}}\left(\sqrt{x_{n-1}} - \sqrt{y_{n-1}}\right) > 0,$$

бундан эса, $y_n > y_{n-1}$ эканлиги, яъни $\{y_n\}$- ўсувчи кетма-кетлик эканлиги келиб чиқади. Монотон кетма-кетликларнинг лимити ҳақидаги 6.2-, 6.3-теоремаларга асосан, $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар чекли лимитга эга, яъни $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y.$ $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг аниқланишига кўра, $x_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}$. Бундан, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2} = \frac{x+y}{2}$, $x = y$ эканлиги келиб чиқади.

**6.23- мисол**. Ушбу $x_n = \frac{n!}{n^n}$ кетма-кетликнинг яқинлашувчи эканлигини исботланг ва унинг лимитини топинг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**Ечилиши.** $x_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=\frac{n!}{(n+1)^n}=\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{n^n}{(n+1)^n}x_n<x_n,$

чунки, $\frac{n^n}{(n+1)^n}<1$. Демак, $\{x_n\}$ кетма-кетлик монотон камаювчи, иккинчи томондан, равшанки, $x_n>0$. Бундан $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг қуйидан чегараланганлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, монотон кетма-кетликларнинг лимити ҳақидаги 6.3-теоремага асосан, берилган кетма-кетлик яқинлашувчи, яъни чекли лимитга эга. Унинг лимитини $x$ билан белгилаймиз, яъни $0\le\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. Энди $x$ ни топамиз. Равшанки, $\frac{(n+1)^n}{n^n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ge1+n\frac{1}{n}=2,$ бундан $\frac{n^n}{(1+n)^n}<\frac{1}{2}$, $x_{n+1}<\frac{1}{2}x_n$ эканлиги келиб чиқади. Кейинги тенгсизликларда лимитга ўтсак, $x\le\frac{1}{2}x$. Бу ердан, $x\ge0$ эканлигини эътиборга олсак, $x=0$ деган хулосага келамиз.

**6.24- мисол**. Ушбу $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ $(n=1,2,\ldots)$ кетма-

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

кетликларнинг мос равишда, монотон ўсувчи ва юқоридан чегараланган, монотон камаювчи ва қуйидан чегараланганлигини, ҳамда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}=e$ эканлигини исботланг.

**Ечилиши.** $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ нисбатни қараймиз:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}}=\left(\frac{1+\dfrac{1}{n+1}}{1+\dfrac{1}{n}}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}\right)^{n+1}\frac{(n+1)}{n}=$$

$$=\left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{(n+1)}{n}=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{(n+1)}{n}.$$

Бундан, Бернулли тенгсизлигига асосан,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}>\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}(n+1)\right]\frac{(n+1)}{n}=1,\quad \frac{x_{n+1}}{x_n}>1$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз, яъни $\{x_n\}$ кетма-кетлик монотон ўсувчи эканлиги келиб чиқади. Худди шундай

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n-1})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n^2-1})^n}\frac{n+1}{n} < \frac{1}{1+\frac{n}{n^2-1}}\frac{n+1}{n} =$$

$$= \frac{n^3+n^2-n-1}{n^3+n^2-n} < 1, \quad y_n < y_{n-1}.$$

Демак, $\{y_n\}$ кетма-кетлик монотон камаювчи экан. Равшанки, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг берилишидан $x_n \geq 2.$ Энди унинг юқоридан чегараланганлигини кўрсатамиз:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1+\frac{n}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\ldots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n}) <$$

$$< 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots = 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3,$$

$2 \leq x_n < 3.$ Равшанки, $0 < x_n < y_n.$

Демак, монотон кетма-кетликларнинг лимити ҳақидаги 6.2- ва 6.3-теоремаларга асосан, $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар лимитга эга:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ деб белгилаймиз, бунда $e = 2{,}718281828459045\ldots$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$0<y_n-x_n=(1+\frac{1}{n})^n\frac{1}{n}<\frac{e}{n}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e}{n}=0$ эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$ ёки $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e$ эканлиги келиб чиқади.

**6.25- мисол**. Ушбу $x_1=0,\ x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$, $n\in N$ кўринишда берилган $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг яқинлашувчи эканини исботланг ва унинг лимитини топинг.

**Ечилиши**. $x_1=0$ бўлганда, $x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{6}$. Фараз қилайлик, $\forall n\in N$ учун $x_{n+1}>x_n$ ўринли бўлсин. $\forall n\in N$ учун $x_{n+2}^2=6+x_{n+1}$, $x_{n+1}^2=6+x_n$, бу тенгликларни айириш натижасида

$$x_{n+2}^2-x_{n+1}^2=x_{n+1}-x_n \qquad (*)$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан, $x_{n+2}^2>x_{n+1}^2$, $x_{n+2}>0$ ва $x_{n+1}>0$ бўлгани учун $x_{n+2}>x_{n+1}$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Демак, математик индукция усулига асосан, $\{x_n\}$ кетма-кетлик қатъий ўсувчи. Энди $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ўсувчи юқоридан чегараланган

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

эканлигини кўрсатамиз. Равшанки, $x_n \geq 0$, $x_n^2 < x_{n+1}^2 = 6 + x_n$, бундан $x_n^2 - x_n - 6 < 0$, $x_n < 3$ эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи ва юқоридан чегараланган экан.

Демак, монотон кетма-кетликларнинг лимити ҳақидаги 6.2- теоремага асосан, $\{x_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга, яъни $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Равшанки, $x > 0$.

$$x_{n+1}^2 = 6 + x_n$$

тенгликда лимитга ўтсак, $x^2 = 6 + x$ ни ҳосил қиламиз. Бундан, $x = 3$ эканлигини топамиз.

Демак, $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи, яъни $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$.

**6.26- мисол.** Ушбу

$$x_n = (1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{4})...(1+\frac{1}{2^n})$$

кетма-кетликнинг яқинлашувчи эканлигини исботланг.

**Ечилиши.** $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1$. Демак, $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи. Энди берилган кетма-кетликнинг чегараланганлигини кўрсатамиз:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\ln x_n = \ln(1+\frac{1}{2}) + \ln(1+\frac{1}{4}) + \dots + \ln(1+\frac{1}{2^n}) < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} <$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2} + \dots = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Бу тенгсизликдан $x_n < e$.

Демак, монотон кетма-кетликларнинг лимити ҳақидаги 6.2- теоремага асосан, у яқинлашувчи бўлади.

## 6.7. Ихтиёрий кетма-кетликларнинг қуйи ва юқори лимитлари.

Ихтиёрий $\{x_n\}: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ кетма-кетлик билан бирга ихтиёрий ўсувчи $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ бутун мусбат сонлар кетма-кетлиги берилган бўлсин. $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг элементлари ичидан $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ номердагиларини ажратиб олиб, уларни кўрсатилган номерларнинг ўсиш тартибида жойлаштириб чиқамиз. Натижада, $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}, \dots$ кетма-кетлик ҳосил бўлади. Ҳосил бўлган бу кетма-кетлик берилган $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги деб аталади ва $\{x_{k_n}\}$ каби белгиланади.

Хусусий ҳолда, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ўзини ҳам $k_n = n$ номерли

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

қисмий кетма-кетлик деб қараш мумкин. $\{x_n\}$ кетма-кетликдан умумий ҳолда чексиз кўп усул билан қисмий кетма-кетликлар ажратиш мумкин.

Масалан: 1) Ушбу

$$2,4,6,8,\ldots,2n,\ldots;$$
$$1,3,5,7,\ldots,2n-1,\ldots;$$
$$1,4,9,16,\ldots,n^2,\ldots;$$
$$1,8,27,64,\ldots,n^3,\ldots$$

кетма-кетликлар $\{n\}:1,2,3,\ldots,n,\ldots$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги бўлади.

2) Ушбу

$$1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\ldots,\frac{1}{n^2},\ldots;$$
$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\ldots,\frac{1}{2^n},\ldots;$$
$$\frac{1}{5},\frac{1}{5^3},\frac{1}{5^5},\ldots,\frac{1}{5^{2n-1}},\ldots$$

кетма-кетликлар $\left\{\frac{1}{n}\right\}:1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлигидир.

3) $\{(-1)^n\}:-1,1,-1,\ldots,(-1)^n,\ldots$ кетма-кетликдан

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$1,1,\dots,1,\dots;$$
$$-1,-1,\dots,-1,\dots$$

кетма-кетликларни ажратиш мумкин.

Кетма-кетлик лимити билан унинг қисмий кетма-кетликлари лимити орасидаги муносабат ушбу теорема орқали ифодаланади:

**6.8- теорема.** Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик $a$ лимитга эга бўлса,у ҳолда унинг ҳар қандай қисмий кетма-кетлиги ҳам шу $a$ лимитга эга бўлади.

**6.5-эслатма**. $\{x_n\}$ кетма-кетлик қисмий кетма-кетликларининг лимитга эга бўлишидан, берилган $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимитга эга бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди. Масалан. $\{(-1)^n\}$ кетма-кетликнинг ушбу

$$1,1,\dots,1,\dots;$$
$$-1,-1,\dots,-1,\dots$$

қисмий кетма-кетликлари мос равишда 1 ва -1 лимитларга эга бўлса-да, берилган $\{(-1)^n\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас.

Шундай қилиб, кетма-кетлик лимитга эга бўлмаса ҳам, унинг қисмий кетма-кетликлари лимитга эга бўлиши мумкин экан.

**6.18-таъриф**. $\{x_n\}$ кетма-кетлик қисмий кетма-кетлигининг лимити,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$\{x_n\}$ кетма-кетликнинг *қисмий лимити* дейилади.

**6.9-теорема**. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳамма қисмий кетма-кетликлари яқинлашувчи бўлиб, уларнинг ҳар бири битта $a$ лимитга эга бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, у ҳам шу $a$ лимитга эга бўлади.

**6.19-таъриф.** Агар $x$ $(x \in (-\infty;+\infty))$ нуқтанинг ихтиёрий $\varepsilon$ атрофида $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чексиз кўп элементлари жойлашса, $x$ нуқта $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг *лимит нуқтаси* дейилади.

**6.10- теорема.** Ҳар қандай ҳақиқий сонлар (чегараланган ва чегараланмаган) кетма-кетлигидан чекли сонга, $+\infty$ ёки $-\infty$ га интилувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин.

**6.11-теорема (Больцано-Вейерштрасс)**. Ҳар қандай чегараланган $\{x_n\}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи $\{x_{n_k}\}$ қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин.

**6.20-таъриф.** Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликдан $x$ $(x \in (-\infty;+\infty))$ нуқтага яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин бўлса, $x$ нуқта $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг *лимит нуқтаси* дейилади.

6.19- таъриф билан 6.20-таъриф ўзаро эквивалент бўлишига ишонч

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

ҳосил қилиш қийин эмас.

**6.21- таъриф.** $\{x_n\}$ кетма-кетлик лимит нуқталарининг энг каттасига, бу кетма-кетликнинг *юқори лимити* дейилади ва $\bar{x} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k>n} x_k$ каби белгиланади.

**6.22- таъриф.** $\{x_n\}$ кетма-кетлик лимит нуқталарининг энг кичигига, бу кетма-кетликнинг *қуйи лимити* дейилади ва $\underline{x} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k>n} x_k$ каби белгиланади.

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланмаган бўлса, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = +\infty$ бўлади.

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик қуйидан чегараланмаган бўлса, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty$ бўлади.

Масалан: 1) $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ кетма-кетликнинг юқори лимити, яъни $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 1$, қуйи лимити $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -1$ бўлади. 2) $\{x_n\} = \{n^{(-1)^n}\} = \left\{1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланмаган, шунинг учун $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty$.

Равшанки, берилган $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг қуйи ва юқори лимитлари

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \le \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ муносабатни қаноатлантиради.

**6.12- теорема.** Ҳар қандай $\{x_n\}$ кетма-кетлик юқори (қуйи) (чекли, $+\infty$ ёки $-\infty$) лимитга эга

**1-натижа.** Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик чегараланган бўлса, унинг қуйи ва юқори лимитлари чекли бўлади.

*Кетма-кетликнинг қуйи ва юқори лимитлари қуйидаги хоссаларга эга.*

Ихтиёрий $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ бўлсин. У ҳолда $\forall\varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам:

$1^0$. Шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, $\forall n > n_0$ учун $x_n < \bar{x} + \varepsilon$ бўлади.

$2^0$. $\forall n_1 \in N$ сон учун $\varepsilon$ ва $n_1$ ларга боғлиқ, шундай натурал сон $n' > n_1$ топиладики, $x_{n'} > \bar{x} - \varepsilon$ бўлади.

Агар $\bar{x}$ сон $1^0$ ва $2^0$ шартларни қаноатлантирса, у ҳолда $\bar{x} = \lim_{n\to\infty} \sup_{n>k}\{x_k\} = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ бўлади.

Энди $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун $\underline{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$ бўлсин. У ҳолда $\forall\varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам:

$1^0$. $\exists n_0 \in N$ сон топиладики, $\forall n > n_0$ учун $x_n > \underline{x} - \varepsilon$ бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$2^0$. $\forall n_1 \in N$ сон учун $\varepsilon$ ва $n_1$ ларга боғлиқ натурал сон $n' > n_1$ топиладики, $x_{n'} < \underline{x} + \varepsilon$ бўлади.

Агар $\underline{x}$ сон $1^0$ ва $2^0$ шартларни қаноатлантирса, у ҳолда $\underline{x} = \lim\limits_{k\to\infty} \inf\limits_{k>n} \{x_k\} = \underline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n$ бўлади.

**6.13-теорема.** $\forall\{x_n\}$ кетма-кетлик $a$ лимитга эга бўлиши учун $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n = a$ тенгликнинг ўринли бўлиши зарур ва етарли.

**6.14-теорема (Коши критерийси).** $\forall\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи (чекли лимитга эга) бўлиши учун, $\forall\varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ сон мавжуд бўлиб, $\forall n > n_0$ ва $\forall m > n_0$ лар учун

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \qquad (*)$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Агар (*) шарт бажарилмаса, яъни

$$\exists\varepsilon_0 > 0:\ \forall k \in N,\ \exists n \geq k,\ \exists m \geq k:\ |x_m - x_n| \geq \varepsilon_0$$

бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик узоқлашувчи бўлади.

**6.27-мисол**. Ушбу $x_n = 1 + \dfrac{n}{1+n}\cos\dfrac{\pi n}{2}$ кетма-кетликнинг $\inf\{x_n\}$,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$\sup\{x_n\}$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ топинг.

**Ечилиши**. Равшанки, $x_{4n-2} < x_{2n-1} < x_{4n}$ тенгсизлик ўринли. Бунда осонлик билан кўрсатиш мумкинки, $\{x_{4n-2}\}$ кетма-кетлик камаювчи, $\{x_{4n}\}$ кетма-кетлик ўсувчи. Шунинг учун $\inf\{x_n\} = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{4n-2}{4n-1}\right) = 0,.$

$$\sup\{x_n\} = \varlimsup_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n}{4n+1}\right) = 2.$$

**6.28-мисол.** $\{x_n\} = \left\{1-\dfrac{1}{n}\right\}$ кетма-кетликнинг $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ ларини топинг.

**Ечилиши.** Равшанки, $\{x_n\} = \left\{1-\dfrac{1}{n}\right\}$ кетма-кетлик монотон ўсувчи ва у юқоридан 1 билан чегараланган. Шунинг учун у яқинлашувчи. Берилган $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг энг кичик элементи $x_1 = 0 = \inf\{x_n\}..$ Бу кетма-кетликнинг юқори ва қуйи лимитлари бир-бирига тенг ва у $\sup\{x_n\}$ га тенг.

Шунинг учун $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\} = 1.$

**6.29-мисол.** $x_k = k^{(-1)^k}$, $k \in N$ кетма-кетликнинг қуйи ва юқори

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

лимитларини топинг.

**Ечилиши.**

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} k^{(-1)^k} = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} k^{(-1)^k} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0, \quad k = 2m-1,\ m \in N,$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} k^{(-1)^k} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} k^{(-1)^k} = \lim_{n\to\infty}(+\infty) = +\infty, \quad k = 2m,\ m \in N.$$

**6.30-мисол**. Ушбу $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ кетма-кетликнинг яқинлашувчилигини Коши критерийси орқали кўрсатинг.

**Ечилиши**. $\forall \varepsilon > 0$ сонни олайлик. У ҳолда,

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} \right| < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \ldots + \left( \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) = .$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n(n+p)} = \frac{\frac{p}{n+p}}{n} < \frac{1}{n}.$$

$n_0(\varepsilon) = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ деб олинса, у ҳолда $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ тенгсизлик $\forall p \in N$ учун бажарилади.

Шундай қилиб, берилган кетма-кетлик Коши критерийсига кўра,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

яқинлашувчи бўлади.

**6.31-мисол.** Ушбу

$$x_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n}$$

кетма-кетликнинг узоқлашувчи эканлигини кўрсатинг.

**Ечилиши.** $\forall n \in N$ берилган бўлсин. $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ деб олсак, у ҳолда $\forall n \in N$ учун

$$|x_m - x_n| = \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \ldots + \frac{1}{\ln 2n} > \frac{n}{\ln 2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0$$

тенгсизлик бажарилади. Демак, берилган кетма-кетлик Коши критерийсини қаноатлантирмайди. Шунинг учун кетма-кетлик узоқлашувчи бўлади.

### Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

Қуйидаги кетма-кетликларнинг дастлабки бешта ҳадини ёзинг:

**6.1.** $x_n = 2 + (-1)^n \frac{2}{n+1}$. **6.2.** $x_n = n(3 - 3(-1)^n)$. **6.3.** $x_n = \frac{4n+3}{3n-2}$.

**6.4.** $x_n = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n$. **6.5.** $x_n = \cos\frac{n\pi}{2}$. **6.6.** $x_n = 2^{(-1)^n}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**6.7.** $x_n = sign\left(\sin\frac{n\pi}{3}\right)$. **6.8.** $x_n = [\sqrt{2n}]$. $[a] - a$ сонининг бутун қисми

**6.9.** $x_n = \frac{2^n}{n!}$. **6.10.** $x_n = \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}$.

Қуйидаги кетма-кетликларнинг умумий ҳадини ёзинг.

**6.11.** $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ . **6.12.** $0, 4, 0, 4, \ldots$ .**6.3.** $1, 0, -3, 0, 5, 0, -7, 0, \ldots$ .

**6.14.** $2, \frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \frac{8}{7}, \ldots$ . **6.15.** $-3, \frac{5}{3}, -\frac{7}{5}, \frac{9}{7}, -\frac{11}{9}, \ldots$ .

**6.16.** $0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \ldots$ .

**6.17.** $\frac{2}{3}; \frac{5}{8}; \frac{10}{13}; \frac{17}{18}; \frac{26}{23}; \ldots$ . **6.18.** $1; \frac{1}{2}; 2; \frac{1}{3}; 3; \frac{1}{4}; 2; \frac{1}{5} \ldots$ .

Қуйида берилган $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг $x_4, x_5, x_{n+1}$ ҳадларини ёзинг.

**6.19.** $x_n = \frac{(-2)^n}{2n}$. **6.20.** $x_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$. **6.21.** $x_n = \frac{(-1)^n}{3n-1}$. **6.22.** $x_n = \frac{2n-1}{2n}$.

**6.23.** $x_n = (-10)^n \sin\frac{n\pi}{2}$. **6.24.** $x_n = n^{(-1)^n}$. **6.26.** $x_n = \frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4}$. **6.27.** $x_n = \cos^n n\pi$.

Қуйида $\{x_n\}$ кетма-кетлик рекуррент формула билан берилган. Бу кетма-кетликнинг дастлабки тўртта ҳадини ёзинг:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**6.28.** $x_1 = -2, \qquad x_{n+1} = x_n + 3.$ **6.29.** $x_1 = -3, \qquad x_{n+1} = x_n + 5.$

**6.30.** $x_1 = -3, \qquad x_{n+1} = x_n - 2.$ **6.31.** $x_1 = -1, \qquad x_{n+1} = x_n + 4.$

Қуйидаги $\{x_n\}$ кетма – кетликнинг умумий ҳадини ёзинг.

**6.32.** $x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2 - x_n}, \qquad n \in N.$

**6.33.** $x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_{n+1} = \frac{2}{3 - x_n}, \qquad n \in N.$

**6.34.** $x_1 = 0, \qquad x_{2=1} = 1, \quad x_{n+2} = (3x_{n+1} - x_n)/2 \quad n \in N;$

**6.35.** $x_1 = a, \ x_2 = b, \ x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n, \ n \in N.$

**6.36.** $x_1 = x_2 = 1, \ x_{n+2} = 0{,}5\ (x_{n+1} + x_n) + 1, \ n \in N$

**6.37.** $x_1 = x_2 = 1, \ x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n + 2, \ n \in N$ **.**

Қуйида берилган $\{x_n\}$ кетма-кетликларни чегараланганликка текширинг.

**6.38.** $\left\{\frac{3n+40}{n}\right\}$**.** **6.39.** $\left\{\frac{5n}{6n-7}\right\}$. **6.40.** $\left\{\frac{4n^2-3}{4n^2}\right\}$**.** **6.41.** $\left\{\frac{n^2-5}{2+3n^2}\right\}$**.**

**6.42.** $\{(-1)^n(n^2+1)\}$.**6.43.** $\{(-1)^{n+1}[1+(-1)^n]\cdot n\}$**. 6.44.** $\{5n^2\}$. **6.45.** $\{-(2n-1)^3\}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**6.46.** $\left\{\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}\right\}$.**6.47.** $\{tgn\}$. **6.48.** $\{n\log_{1/3}n\}$. **6.49.** $\{(-1)^n n\}$.

**6.50.** $\{n^{(-1)^n}\}$. **6.51.** $\{\sin an+\cos an\}$, $a\in R$. **6.52.** $\{\sqrt[3]{n-1}-\sqrt[3]{n}\}$ **6.53.** $\{2^n\}$.

Қуйидаги кетма-кетликларнинг чегараланганлигини исботланг.

**6.54.** $\left\{\dfrac{4n^2-3}{3+n^2}\right\}$. **6.55.** $\left\{\dfrac{2n+(-1)^n}{3n+2}\right\}$. **6.56.** $\left\{\dfrac{n^2+5n-6}{(n+2)^2}\right\}$.

**6.57.** $\left\{\dfrac{4n^5+3}{(n^3+1)(n+1)^2}\right\}$. **6.58.** $\left\{\dfrac{2-n}{\sqrt{n^2+3}}\right\}$. **6.59.** $\left\{\dfrac{\sin^2 n}{n^2+3}\right\}$.

**6.60.** $\left\{\dfrac{n^2}{e^n+3}\right\}$. **6.61.** $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k}\right\}$. **6.62.** $\left\{x_n=1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k!}\right\}$.

**6.63.**Агар $a_1=1$, $a_{n+1}=(n+1)\,(a_n+1)$, $n\in N$, бўлса,

$$x_n=\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)$$

кетма-кетликнинг чегараланмаганлигини исботланг.

**6.64.** $\{\sqrt{n^4+2}-n^2\}$. **6.65.** $\{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}\}$.

**6.66.** $\{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2-1}\}$. **6.67.** $\{\sqrt[3]{9n-n^3}+\sqrt[3]{9n+n^3}\}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**6.68.** $\left\{\sqrt{\frac{n^4+n^3}{n^2+1}}-\sqrt{n^2-1}\right\}$. **6.69.** $\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$.

**6.70.** $\left\{\frac{3^n+2}{4^n-3}\right\}$. **6.71.** $\left\{\frac{7^{2n+1}+3^n}{2-49^n}\right\}$.

**6.72.** $\left\{\frac{n+\ln n}{n+2}\right\}$. **6.73.** $\left\{\lg\frac{3n+5}{n+2}\right\}$.

**6.74.** $\left\{n\ln\frac{n+1}{n}\right\}$. **6.75.** $\left\{\ln\frac{n+1}{n}\ln(n^2+n)\right\}$.

**6.76.** $\left\{\frac{n}{5^n}\right\}$. **6.77.** $\left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}$. **6.78.** $\left\{nq^n\right\}$, $|q|<1$.

Қуйида берилган $\{x_n\}$ кетма-кетликларнинг чегараланмаганлигини исботланг.

**6.79.** $\{n+\cos n\pi\}$. **6.80.** $\left\{n^{(-1)^n}\right\}$. **6.81.** $\{n^3-n^2\}$.

**6.82.** $\left\{\frac{n^4}{n^3+3}\right\}$. **6.83.** $\left\{(n+1)^{\cos\frac{n\pi}{2}}\right\}$.

**6.84.** $\left\{\frac{n-n^4}{(n+2)^3}\right\}$. **6.85.** $\left\{\sqrt{n^4+n^2+1}-\sqrt{n^4-n^2+1}\right\}$.

**6.86.** $\left\{6^n-5^n\right\}$. **6.87.** $\left\{\sqrt[n]{(2n)!}\right\}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**6.88.** $\left\{\frac{4^n}{n^2}\right\}$.  **6.89.** $\left\{\frac{n+1}{\lg(n+1)}\right\}$.

**6.90.** $\left\{\frac{7^n-5^n}{3^n+1}\right\}$.  **6.91.** $x_1=x_2=1, \quad x_{n+2}=x_{n+1}+6x_n$.

**6.92.** $x_1=-4, \quad x_2=3, \quad x_{n+2}=x_{n+1}+\frac{3}{4}x_n$.  **6.93.** $x_1=3, \quad x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n^2-1$.

Қуйида берилган $\{x_n\}$ кетма-кетлик юқоридан (қуйидан) чегараланган бўлса, унинг энг катта (энг кичик) элементини топинг.

**6.94.** $x_n=6n-n^2-3$.  **6.95.** $x_n=e^{4n-n^2-3}$.  **6.96.** $x_n=\frac{\sqrt{n}}{9+n}$.

**6.97.** $x_n=n^2-10n+5$.  **6.98.** $x_n=-\frac{n^2}{2^n}$.  **6.99.** $x_n=\frac{2}{n^2-6n+1}$.

Қуйида берилган $\{x_n\}$ кетма-кетликларнинг чексиз кичик кетма-кетлик эканлигини таъриф бўйича кўрсатинг.

**6.100.** $x_n=\frac{3}{n}$.  **6.101.** $x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.  **6.102.** $x_n=\frac{1+(-1)^n}{3^n}$.

**6.103.** $x_n=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$.  **6.104.** $x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$.  **6.105.** $x_n=\frac{2}{\sqrt{2n-1}}$.

**6.106.** $x_n=\frac{1}{\sqrt[5]{8n-11}}$.  **6.107.** $x_n=(-0{,}6)^n$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**6.108.** $x_n = (0{,}99)^n$. **6.109.** $x_n = \frac{sign(tgn)}{n}$. **6.110.** $x_n = \frac{3^n}{n!}$

Қуйида берилган $\{x_n\}$ кетма-кетликларнинг чексиз катта кетма-кетлик эканлигини таъриф бўйича кўрсатинг:

**6.111.** $x_n = n.$ **6.112.** $x_n = 4 - 3 \cdot n$. **6.113.** $x_n = 2^n$.

**6.114.** $x_n = \ln n$. **6.115.** $x_n = n^{1/p}(p \in N)$

**6.116.** $x_n = \log_a n(0 < a < 1)$. **6.117.** $x_n = (-n)^n$.

**6.118.** $x_n = 5\sqrt[3]{n} - n.$ **6.119.** $x_n = \frac{n^2}{n+3}$.

**6.120.** $x_n = \frac{2}{1-\sqrt[n]{n}}$. **6.121.** $x_n = \frac{3^n}{n^2}$. **6.122.** $x_n = \frac{n\sqrt{n}}{n+1}$.

Кетма-кетлик лимити таърифидан фойдаланиб, қуйидаги тенгликларни исботланг.

**6.123.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n-3}{4n+5} = 1.$ **6.124.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n-2}{3n+4} = \frac{5}{3}$.

**6.125.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{n^2+2n+1} = 1.$ **6.126.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^2+4}{8n^2+7} = \frac{5}{8}$.

**6.127.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}}{n} = 1.$ **6.128.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n+1}{7-9n} = \frac{-5}{9}.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ни топинг ва қайси $n_0(\varepsilon)$ номердан бошлаб $\forall n > n_0(\varepsilon)$ учун $|x_n - a| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади?

**6.129.** $x_n = 0,\underbrace{33\ldots3}_{n\ ma}$, $\varepsilon = 0{,}001$. **6.130.** $x_n = \dfrac{2n-5}{n}$, $\varepsilon = 0{,}005$.

**6.131.** $x_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}$, $\varepsilon = 0{,}001$. **6.132.** $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n}$, $\varepsilon = 0{,}005$.

**6.133.** $x_n = \dfrac{1}{n^3}$, $y_n = \dfrac{2}{n^3}$, $z_n = \dfrac{n-1}{n^3}$ чексиз кичик кетма – кетликлар йиғиндисининг яна чексиз кичик кетма-кетлик эканлигини кўрсатинг.

**6.134.** $x_n = \dfrac{1}{n^4}$, $y_n = \dfrac{-9}{n^4}$, $z_n = \dfrac{(2n-1)^2}{n^4}$ чексиз кичик кетма-кетликлар йиғиндисининг яна чексиз кичик кетма-кетлик эканлигини кўрсатинг.

**6.135.** $x_n = \dfrac{1}{n^3}$, $y_n = \dfrac{4}{n^3}$, $z_n = \dfrac{(n-1)^2}{n^3}$ чексиз кичик кетма- кетликлар кўпайтмасининг яна чексиз кичик кетма-кетлик эканлигини кўрсатинг.

**6.136.** $x_n = \dfrac{1}{3^n}$, $y_n = \dfrac{-2}{3^n}$, $z_n = \dfrac{2^{n-1}}{3^n}$ чексиз кичик кетма- кетликлар кўпайтмасининг яна чексиз кичик кетма-кетлик эканлигини кўрсатинг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**6.137**. $x_n=\dfrac{2n}{n^2-1}$, $y_n=\dfrac{2}{n+1}$ чексиз кичик кетма-кетликларнинг айирмасининг яна чексиз кичик кетма-кетлик эканлигини кўрсатинг.

**6.138.** $\{x_n\}$ чексиз кичик кетма-кетлик билан $\{y_n\}$ чегараланган кетма-кетлик кўпайтмаси чексиз кичик кетма-кетлик эканлигини исботланг

1) $x_n=\dfrac{1}{n}$, $y_n=\sin n$; 2) $x_n=\dfrac{1}{n^2}$, $y_n(-1)^n+1$; 3) $x_n=\dfrac{1}{n^3}$, $y_n=\dfrac{2n^2}{n^4+4}$;

4) $x_n=\dfrac{1}{n!}$, $y_n=\cos\dfrac{n\pi}{2}$; 5) $x_n=\dfrac{1}{n}$, $y_n=sign(tg\,n)$; 6) $x_n=\dfrac{1}{n^2}$, $y_n=\dfrac{1}{2+(-1)^n}$

**6.139**. $\{x_n\}$ чексиз кичик кетма-кетлик учун $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ чексиз катта кетма-кетлик эканлигини исботланг.

1) $x_n=0,\underbrace{99\cdots9}_{n\ \text{та}}$; 2) $x_n=\dfrac{\sin^2 n+1}{n^2}$; 3) $x_n=\dfrac{2^n+(-3)^n}{5^n}$; 4) $x_n=\dfrac{\sqrt{n^2+4}}{n^3}$.

**6.140.** $\{y_n\}$ чексиз катта кетма-кетлик бўлса, $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$ кетма-кетлик чексиз кичик кетма-кетлик эканлигини исботланг.

1) $y_n=\dfrac{3^n+2}{2^n}$; 2) $y_n=n\left(\sin^2\dfrac{n\pi}{2}+1\right)$; 3) $y_n=\dfrac{\sqrt{n^4+a^2}}{n}$;

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

4) $y_n = 2^{\sqrt{n}}$;  5) $y_n = (-1)^n n$;  6) $y_n = \ln(\ln n)\ \ n \geq 2$.

**6.141.** Қуйида берилган $\{x_n\}$ кетма-кетликларнинг яқинлашувчи эканлигини исботланг:

1) $x_n = \dfrac{3+(-1)^n}{n}$;  2) $x_n = \dfrac{n+1}{n}$;

3) $x_n = \sqrt[n]{2}\ \ (a > 0)$;  4) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$;

5) $x_n = \dfrac{2n^2+5n+1}{8n^2+3n+2}$;  6) $x_n = \sqrt{\dfrac{8n^2+1}{2n^2+2}}$;

7) $x_n = \dfrac{(n+1)^{10}+(n+2)^9}{(n-1)^{12}+1}$;  8) $x_n = \dfrac{a^n+3b^n}{5a^n+7b^n}\ \ (a>0, b>0)$;

9) $x_n = \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$;  10) $x_n = \dfrac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1)}{n^3}$.

**6.142.** Қуйида берилган $\{x_n\}$ кетма-кетликларнинг узоқлашувчи эканлигини исботланг.

1) $x_n = (-1)^n \cdot 2^n$.  2) $x_n = n^{(-1)^n}$.  3) $x_n = \dfrac{n^2-10}{n}$.

4) $x_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$.  5) $x_n = \sin n^0$.  6) $x_n = \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{2\pi n}{3}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

7) $x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{\left((-1)^n - 1\right)n}$.  8) $x_n = n^2 \sin\frac{\pi n}{2}$.

**6.143.** $a$ сони $\{x_n\}$ кетма-кетликларнинг лимити эмаслигини таъриф ёрдамида кўрсатинг.

1) $x_n = (-1)^n \cdot 2 + 2, \quad a = 0$.  2) $x_n = \frac{n^2 - 1}{n^2} \quad a = 1$.

3) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad a = -1$.  4) $x_n = \cos\frac{\pi n}{3}, \quad a = \frac{1}{2}$.

5) $x_n = 2^{(-1)^n \cdot n}, \quad a = 0$.  6) $x_n = \sin\frac{2\pi n}{3}, \quad a = 0$.

7) $x_n = \sqrt{n^2 + 1} - n, \quad a = 1$.  8) $x_n = \frac{n^2 - 2n}{n = 1}, \quad a = 1$.

9) $x_n = n^{(-1)^n}, \quad a = 0$.  10) $x_n = n \cdot \left[1 + (-1)^n\right], \quad a = 0$.

Лимитларни топинг

**6.144.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + .... + \frac{1}{n^2 + 3n + 2}\right)$.

**6.145.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + .... + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right)$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**6.146.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+....+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}\right)$.

**6.147.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1}{3\cdot5\cdot7}+....+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\right)$.

**6.148.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+....+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$.

**6.149.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot3}+\frac{4}{3\cdot5}+....+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

**6.150.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+....+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)\right)$.

$\{a_n\}$- кетма-кетлик арифметик прогрессия бўлиб, унинг айирмаси $d\neq 0$ ва барча хадлари $a_n\neq 0$ $(n\in N)$ бўлсин. Лимитларни топинг.

**6.151.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1\cdot a_2}+\frac{1}{a_2\cdot a_3}+....+\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}\right)$.

**6.152.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1a_2\,a_3}+\frac{1}{a_2a_3a_4}+....+\frac{1}{a_na_{n+1}a_{n+2}}\right)$.

**6.153.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1a_2\,a_3\,a_4}+\frac{1}{a_2a_3a_4\,a_5}+....+\frac{1}{a_na_{n+1}a_{n+2}\,a_{n+3}}\right)$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**6.154.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots.+\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}\right),$

$(a_n>0,\ n\in N)$.

**6.155.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots.+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$.

**6.156.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{2n+1}$.

**6.157.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)^2-(n^2-1)^2}{(n+1)^4+(n-1)^4}$.

**6.158.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^4}{n^3+1}-\frac{n^5}{n^4+1}\right)$.

**6.159.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^5}{n^4+n^2+1}-\frac{n^3}{n^2+n+1}\right)$.

**6.160.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n^2+3n+4)^3-(n^2+3n-4)^3}{(n^2+5n+6)^3-(n^2+5n-6)^3}$ .**6.161.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\frac{3}{\frac{3}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}\right)$.

**6.162.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(2+n)^{100}-n^{100}-200n^{99}}{n^{99}-10n^2+1}\right)$.

**6.163.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n^2-n+1)}{\ln(n^4+n^2+1)}$.

**6.164.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+\ln n)^2}{\ln^2 n}$.

**6.165.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n+7^{-n}}{5^{-n}-7^n}$.

**6.166.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}\quad(a>1,\ b>1)$.

**6.167.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}\quad(a\neq-1)$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**6.168.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$. **6.169.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3n}-2n\right)$.

**6.170.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2+2}-\sqrt[3]{n^2-2}\right)$. **6.171.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+3n+2}-\sqrt{n^2-n}$ .

**6.172.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n^2+1984}-n\right)$. **6.173.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\sqrt[5]{n^{25}+4n^{20}}-n^5\right)$.

**6.174.** $\lim\limits_{n\to\infty}n^{3/2}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n}\right)$. **6.175.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+a_1)(n+a_2)}-n\right)$.

**6.176.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[5]{(n+a_1)(n+a_2)(n+a_3)(n+a_4)(n+a_5)}-n\right)$ .

**6.177.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[p]{(n+a_1)(n+a_2)....(n+a_p)}-n\right)$, $p\in N$.

**6.178.** $a$ нинг қандай қийматларида $\left\{\sqrt{an^2+bn+2}-n\right\}$ кетма-кетлик лимитга эга. Бу лимит нимага тенг?

**6.179.** $x_n=(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}$, $n\in N$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Ушбу 1) $0<\alpha<1$ учун $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$; 2) $\alpha>1$ учун $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ тенгликларни исботланг.

**6.180.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+2}-2n}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$. **6.181.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+7}-\sqrt{n^2-7}}{\sqrt{n^2+1}-n}$.

**6.182.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}}$. **6.183.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}{n+2+\sqrt{n+1}}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
← →
⇤ ⇥
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**6.184.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n}}{\sqrt{3n+\sqrt{3n+\sqrt{3n}}}}$.

**6.185.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n^3}+n+\sqrt{n}\right)(n-1)}$.

**6.186.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n-2\sqrt{n-1}}+1}{\sqrt{n-1}-1}$, $(n>2)$.

**6.187.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n}{2\sqrt{n^2-1}-n+1}$.

**6.188.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)(n+2)}{\sqrt{(n+1)^3}-\sqrt{(n-1)^3}}$.

**6.189.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n-4\sqrt{n-4}}+2\sqrt{n}}{\sqrt{n+4\sqrt{n-4}}-2\sqrt{n}}$.

**6.190.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+....+n}{n^2+n+2}$.

**6.191.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left[\left(2+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(4+\dfrac{1}{4}\right)^2+....+\left(2^n+\dfrac{1}{2^n}\right)^2-2n\right]}{4^n}$.

**6.192.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot3+3\cdot9+5\cdot27+....+(2n-1)\cdot3^n}{3^n(n+2)}$.

**6.193.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+....+n^2}{n^3}$.

**6.194.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot2+2\cdot3+....+n(n+1)}{n^3}$.

**6.195.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+....+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+1}}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**6.196.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^3\cdot+2^3+\ldots.+n^3}{n^4+n^3+n+1}$.

**6.197.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2^2+\ldots.+n^2}{n^2}-\frac{n}{3}\right)$.

**6.198.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{2\cdot3}\right)\left(1-\frac{2}{3\cdot4}\right)\ldots.\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)$.

**6.199.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

**6.200.** Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ узоқлашувчи кетма-кетликлар бўлса, куйидаги:

1) $\{x_n+y_n\}$; **2)** $\{x_n\cdot y_n\}$; **3)** $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлишига мисоллар тузинг.

**6.201.** $\{x_n\}$ кетма-кетлик якинлашувчи бўлиб, $\{y_n\}$ кетма-кетлик узоклашувчи бўлсин. $b\neq0$ учун $\{ax_n+by_n\}$ кетма-кетлик узоклашувчи эканлигини исботланг.

**6.202.** $\{y_n\}$ кетма-кетлик узоклашувчи бўлиб, $\{x_n\}$ эса, якинлашувчи кетма-кетлик ва $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, $x\neq0$ бўлса, $\{x_n\,y_n\}$ кетма-кетлик якинлашувчи эмаслигини исботланг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**6.203.** $\{x_n\}$ якинлашувчи, $\{y_n\}$ эса узоқлашувчи кетма-кетлик бўлсин. $\{x_n y_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи ва узоқлашувчи бўлишига мисол тузинг.

**6.204.** $\forall n \in N$ учун $x_n \neq 0$ ва $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ бўлса: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ лимит мавжудми?

2) агар бу лимит мавжуд ва $q$ га тенг бўлса, у ҳолда $|q| \le 1$ бўлишини исботланг.

3) $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$ кетма-кетлик чегараланмаган бўлиши мумкинми?

Қуйидаги лимитларни топинг:

**6.205.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{m}\right)^{n\cdot q}$, $p, q \in N$. **6.206.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3^n+1}{3^n}\right)^{3^n}$. **6.207.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{n}$.

**6.208.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2}$. **6.209.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k+n}\right)^{n}$, $k \in N$. **6.210.** $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

**6.211.** Куйида берилган $\{x_n\}$ кетма-кетликларни Коши критерийсидан фойдаланиб, яқинлашувчи эканлигини исботланг.

1) $x_n = \frac{\cos a}{3} + \frac{\cos 2a}{3^2} + \frac{\cos 3a}{3^3} + \ldots + \frac{\cos na}{2^n}$, $a \in R$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

2) $x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + .... + \frac{1}{n!}$ .

3) $x_n = a_1 q + a_2 q^2 + .... + a_n q^n$ , бунда $|q| < 1, \forall n \in N$ учун $|a_n| \le C, \quad C = const.$

4) $x_n = \frac{\operatorname{arctg} a}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2a}{2^2} + .... + \frac{\operatorname{arctg} na}{2^n}, \ a \in R.$

5) $x_n = \frac{\ln(1+1)}{0!} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)}{1!} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)}{2!} + .... + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(n-1)!}$.

6) $x_n = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + .... + \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$.

**6.212.** Қуйида берилган кетма-кетликларни ўсувчи эканлигини исботланг:

1) $x_n = 6n - 11.$ 2) $x_n = n^2 + 2n - 3.$ 3) $x_n = 5 \cdot 2^n - 3.$

4) $x_n = 5^n - 4^n.$ 5) $x_n = \frac{3n+4}{n+2}.$ 6) $x_n = \frac{2n-4}{n}.$

7) $x_n = \frac{2n-1}{n}.$ 8) $x_n = \frac{a^n - 1}{n} \quad (a \ne 1, a > 0).$

9) $x_n = n(1 - a^{1/n}) \quad (a \ne 1, \ a > 0).$ 10) $x_n = (1 + \frac{1}{2n})^n.$

**6.213.** Қуйида берилган кетма-кетликларнинг камаювчи эканлигини

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

исботланг.

1) $x_n = 810 - 30n.$ 2) $x_n = -9n^2 + 10n + 25.$ 3) $x_n = \frac{4^n + 1}{2^{2n}}.$

4) $x_n = \frac{2n+9}{n+3}.$ 5) $x_n = \frac{n}{n^2+2}.$ 6) $x_n = \frac{n+1}{n^2+2n+5}.$ 7) $x_n = \frac{n+2}{n}.$

8) $x_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}.$ 9) $x_n = \lg(\frac{3}{4})^n.$ 10) $x_n = \frac{n^2+2n-3}{n^2+2n+2}.$

**6.214.** Қуйида берилган $\{x_n\}$ кетма-кетликлар қандайдир номердан бошлаб монотон эканлигини исботланг:

1) $x_n = 3n^2 - n.$ 2) $x_n = n^2 - 3n.$ 3) $x_n = n^3 - 6n^2.$

4) $x_n = \frac{n+1}{2n-1}.$ 5) $x_n = \frac{n^3}{n^2-3}.$ 6) $x_n = \frac{n^2}{n^3+32}.$

7) $x_n = \frac{n^2+26}{n+2}.$ 8) $x_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}.$ 9) $x_n = \sqrt[3]{n^3-1} - n.$

10) $x_n = 4^n - 10n.$ 11) $x_n = 5^n - 3^n.$ 12) $x_n = \frac{7^{n+1} - 4^{n+1}}{6^n + 4^n}.$

13) $x_n = \frac{10^n}{n!}.$ 14) $x_n = \ln(n+1) - \ln n.$ 15) $x_n = \ln n - n.$

16) $x_n = \frac{5^n}{n}.$ 17) $x_n = \ln\frac{n+9}{n}.$ 18) $x_n = \frac{n}{6^n}.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

19) $x_n = \sqrt[n]{n}$. 20) $x_n = \dfrac{(3n+1)^2}{3^n}$.

**6.215.** Қуйида берилган $\{x_n\}$ кетма-кетликларни ҳам ўсувчи, ҳам камаювчи эмаслигини исботланг:

1) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n+2}$. 2) $x_n = 3n^2 - 17n + 1$. 3) $x_n = \dfrac{2n-7}{2n-9}$.

4) $x_n = 3 + 12n - \dfrac{1}{9}n^3$. 5) $x_n = (-1)^n \cdot 7 - 5$. 6) $x_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

7) $x_n = \sin n$. 8) $x_n = \dfrac{1}{n}\cos n\pi$. 9) $x_n = 7n - n^2$. 10) $x_n = sign(tgn)$.

**6.216.** Қуйида берилган $\{x_n\}$ кетма-кетликларни, Коши критерийсининг инкоридан фойдаланиб, узоқлашувчилигини исботланг.

1) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$. 2) $x_n = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{2}{3^2} + \ldots + \dfrac{n}{(n+1)^2}$.

3) $x_n = (-1)^n \left(\dfrac{4^n + 1}{4^n}\right)^n$. 4) $x_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$.

5) $x_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{(-1)^n \cdot n}$. 6) $x_n = \dfrac{n\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{2} - 1}{3n}$. 7) $x_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k$.

**6.217**. Қуйида берилган $\{x_n\}$ кетма-кетликларнинг яқинлашувчилигини

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

исботланг ва уларнинг лимитини топинг.

1) $x_1 = 4, \quad x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$. 2) $x_n = 3, \quad x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}$.

3) $x_1 = 2, \quad x_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{x_n}$. 4) $x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \dfrac{6}{x_n - 1}$.

5) $x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1} + x_n}{2}$. 6) $x_1 = \sqrt{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$.

**6.218**. Қуйида берилган $\{x_n\}$ кетма-кетликлар учун $\inf x_n$, $\sup x_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ ва $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ ларни топинг:

1) $x_n = 2 - \dfrac{3}{n}$. 2) $x_n = \dfrac{3}{n - 4{,}5}$.

3) $x_n = (-1)^{n-1}\left(4 + \dfrac{7}{n}\right)$. 4) $x_n = (-1)^n n$. 5) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$.

6) $x_n = -n[4 + (-1)^n]$. 7) $x_n = 3^{(-1)^n} \cdot n$. 8) $x_n = 5^{(-1)^n \cdot n}$.

9) $x_n = 2^{(-1)^n - n} \cdot n$.

10) $x_n = \sqrt[n]{25^{(-1)^n} + 5}$. 11) $x_n = (-n)^{\sin\frac{n\pi}{2}}$. 12) $x_n = \cos n\pi$.

**6.219.** Қуйида берилган $\{x_n\}$ кетма-кетликларнинг қуйи ва юқори

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

лимитларини топинг.

1) $x_n = 1+\cos\frac{n\pi}{2}$. 2) $x_n = 3\left(1-\frac{1}{n}\right)+2\cdot(-1)^n$. 3) $x_n = \left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n$.

4) $x_n = \frac{n^4}{1+n^4}\cos\frac{2n\pi}{3}$. 5) $x_n = \frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{2}$. 6) $x_n = \frac{(1-(-1)^n)\cdot 4^n+1}{4^n+5}$.

7) $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n(-1)^n+\sin\frac{n\pi}{4}$. 8) $x_n = \cos^n\frac{2n\pi}{3}$.

**6.220.** Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик $x_1 = 0,\ x_{2k} = \frac{x_{2k-1}}{2},\ x_{2k+1} = 1+x_{2k},\ k\in N$ рекуррент формула билан берилган бўлса, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ ва $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ ларни топинг.

**6.221.** Қуйидаги тенгсизликларни исботланг:

$a)$ $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \le \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$;

$b)$ $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n \le \overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$;

$c)$ $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \le \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$ $(x_n \ge 0$ ва $y_n \ge 0;\ n = 1,2,3,\ldots)$

$d)$ $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n \le \overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$e$) агар $x_n$ ва $y_n$ кетма-кетликлар: 1) юқоридан чегараланган бўлса, у ҳолда,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n;$$

2) қуйидан чегараланган бўлса , у ҳолда

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\ge\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n+\underline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n.$$

$f$) агар $x_n>0,\ n\in N$ бўлса, у ҳолда

$$1)\ \ \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}\le\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n};\qquad\qquad 2)\ \ \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n}\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

**6.222.** Қуйида берилган $\{x_n\}$ кетма-кетликларнинг қисмий лимитлар тўпламини топинг:

$$1)\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{4}{4},\frac{5}{4},\ldots,\frac{1}{2^n},\ldots,\frac{2^n+1}{2^n},\ldots\right\};$$

$$2)\ \Big\{\ 1,\frac{1}{2},1+\frac{1}{2},\frac{1}{3},1+\frac{1}{3},\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\frac{1}{4},1+\frac{1}{4},\frac{1}{2}+\frac{1}{4},\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots,$$

$$\ldots,\frac{1}{n},1+\frac{1}{n},\frac{1}{2}+\frac{1}{n},\ \ldots\ ,\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\ldots\ \Big\}.$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

3) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \ldots, \frac{9}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{3^n}{2^n}, \ldots\right\}$.

## Мустақил ечиш учун берилган мисол ва масалаларнинг жавоблари

**6.1.** $1, \frac{8}{3}, \frac{3}{2}, \frac{12}{5}, \frac{5}{3}, \ldots$. **6.2.** $6, 0, 18, 0, 30, \ldots$ . **6.3.** $7, \frac{11}{4}, \frac{15}{7}, \frac{19}{10}, \ldots$ .

**6.4.** $\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, \frac{14\pi}{3}, \ldots$. **6.5.** $0;\ -1;\ 0;\ 1;\ 0; \ldots$. **6.6.** $\frac{1}{2};\quad 2, \frac{1}{2},\quad 2, \frac{1}{2}, \ldots$.

**6.7.** $1, 1, 0, -1, -1, \ldots$ . **6.8.** $1, 2, 2, 2, 3, \ldots$. **6.9.** $2;\ 2;\ \frac{4}{3};\ \frac{4}{9}, \ldots\ldots$.

**6.10.** $1;\ 0;\ -\frac{1}{3};\ 0;\ \frac{1}{5}; \ldots$. **6.11.** $x_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$. **6.12.** $x_n = 2(1+(-1)^n)$. **6.13.** $x_n = n\cos\frac{\pi(n-1)}{2}$. **6.14.** $x_n = \frac{2n}{2n-1}$. **6.15.** $x_n = (-1)^n\frac{2n+1}{2n-1}$. **6.16.** $x_n = \sin\frac{(n-1)\pi}{4}$.

**6.17.** $x_n = \frac{n^2+1}{5n-2}$. **6.18.** $x_n = \frac{n+1}{4}\left[1-(-1)^n\right] + \frac{1}{n+2}\left[1+(-1)^n\right]$. **6.19.** $2;\ -\frac{16}{5};\ \frac{(-2)^{n+1}}{2(n+1)}$.**9. 20.** $\frac{1}{9};\ -\frac{1}{11};\ \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$. **6.21.** $\frac{1}{11};\ \frac{-1}{14};\ \frac{(-1)^{n+1}}{3n+2}$. **6.22.** $\frac{7}{8};\ \frac{9}{10};\ \frac{2n+1}{2(n+1)}$. **6.23.** $0;\ -10^5;\ (-10)^{n+1}\cos\frac{\pi n}{2}$. **6.24.** $4;\ \frac{1}{5};\ (n+1)^{(-1)^{n+1}}$. **6.26.** $0;\ \frac{5}{12};\ \frac{n+1}{n+2}\sin^2\frac{(n+1)\pi}{4}$. **6.27.**

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

1; −1; $(-1)^{(n+1)^2}$.**6.28.** $-2;\ 1;\ 4;\ 7;\ 9$. **6.29.** $-3;\ 2;\ 7;\ 12;\ 17$. **6.30.** $-3;\ -5;\ -7;\ -9;\ -11$. **6.31.** $-1;\ 3;\ 7;\ 11;\ 15$.**6.32.** $x_n = \frac{n}{n+1}$. **6.33.** $x_n = \frac{3\cdot 2^{n-1}-2}{3\cdot 2^{n-1}-1}$. **6.34.** $x_n = 2-2^{2-n}$. **6.35.** $x_n = \frac{(a+b)2^{n-1}+(b-2a)(-1)^n}{3}$. **6.36.** $x_n = \frac{6n-1-8(-0{,}5)^n}{9}$. **6.37.** $x_n = \frac{2^{n+1}-2\cdot(-1)^n}{3}-1$. **6.38.** Чегараланган. **6.39.** Чегараланган. **6.40.** Чегараланган. **6.41.** Чегараланган. **6.42.** Чегараланмаган. **6.43.** Юқоридан чегараланган, қуйидан чегараланмаган. **6.44.** Қуйидан чегараланган, юқоридан чегараланмаган. **6.45.** Юқоридан чегараланган қуйидан чегараланмаган. **6.46.** Чегараланган. **6.47.** Чегараланмаган. **6.48.** Чегараланмаган. **6.49.** Чегараланмаган. **6.50.** Чегараланмаган. **6.51.** Чегараланган. **6.52.** Чегараланган. **6.53.** Қуйидан чегараланагн, юқоридан чегараланмаган. **6.94.** Энг каттаси $x_3 = 6$. **6.95.** Энг каттаси $x_2 = e$. **6.96.** Энг каттаси $x_9 = \frac{1}{6}$. **6.97.** Энг кичиги $x_5 = -20$. **6.98.** Энг кичиги $x_3 = -\frac{9}{8}$. **6.99.** Энг каттаси $x_3 = 1$. **6.129.** $a = \frac{1}{3},\ n_0(\varepsilon) = 3$. **6.130.** $a = 2,\ n_0(\varepsilon) = 1000$ **6.131.** $a = 0,\ n_0(\varepsilon) = 999$. **6.132.** $a = 1,\ n_0(\varepsilon) = 10$.**6.144.** $\frac{1}{2}$.**6.145.** $\frac{1}{3}$. **6.146.** $\frac{1}{4}$.**6.147.** $\frac{1}{12}$. **6.148.** $\frac{1}{18}$. **6.149.** $\infty$.**6.150.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **6.151.** $\frac{1}{d\cdot a_1}$.**6.152.**

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$\frac{1}{2d\cdot a_1\cdot a_2}$. **6.153.** $\frac{1}{3d\cdot a_1\cdot a_2\cdot a_3}$. **6.154.** $\frac{1}{\sqrt{d}}$. **6.155.** $\frac{1}{4}$. **6.156.** 2. **6.157.** 0. **6.158.** 0. **6.159.**

1. **6.160.** $\frac{2}{3}$. **6.161.** $-1$. **6.162.** 19800. **6.163.** $\frac{1}{2}$. **6.164.** 1. **6.165.** 0. **6.166.**

$1,\ a>b$ бўлганда, $-1,\ a\le b$ бўлганда . **6.167.** $1,\ |a|>1$ бўлганда, $\frac{1}{2},\ a=1$ бўлганда,

$0,\ |a|<1$ бўлганда. **6.168.** 0. **6.169.** $\frac{3}{4}$. **6.170.** 0. **6.171.** 2. **6.172.** $\frac{1}{3}$. **6.173.** $\frac{1}{5}$. **6.174.**

$-\frac{1}{4}$. **6.175.** $\frac{a_1+a_2}{2}$. **6.176.** $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}$. **6.177.** $\frac{a_1+a_2+....+a_p}{p}$. **6.178.**

$a=1,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{b}{2}$. **6.180.** 0. **6.181.** 14. **6.182.** $-\infty$. **6.183.** 0. **6.184.** $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **6.185.** 0. **6.186.**

1. **6.187.** $-1$. **6.188.** $\frac{1}{3}$. **6.189.** $-3$. **6.190.** $\frac{1}{2}$. **6.191.** $\frac{4}{3}$. **6.192.** 3. **6.193.** $\frac{1}{3}$. **6.194.**

$\frac{1}{3}$. **6.195.** $-1$. **6.196.** $\frac{1}{4}$. **6.197.** $\frac{1}{2}$. **6.198.** $\frac{1}{3}$. **6.199.** 0. **6.200.** Масалан:

1) $x_n=n+\frac{1}{n},\ y_n=-n+\frac{2n}{n+3}$; 2) $x_n=(-1)^n+2,\ y_n=(-1)^n-2$; 3) $x_n=n^2+1,\ y_n=n^2+3$.

**6.203.** Масалан:1) $\{x_n\}=\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$, $\{y_n\}=\{(-1)^n\}$ бўлса, $\{x_n\ y_n\}$ кетма-кетлик

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

яқинлашувчи; 2) $\{x_n\}=\left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\}$, $\{y_n\}=\{n^2\}$бўлса, $\{x_n\,y_n\}$ кетма-кетлик узоқлашувчи. **6.204.** 1) Шарт эмас; 3)бўлиши мумкин. **6.205.** $e^{pq}$.**6.206.** $e$.**6.207.** $e^{-3}$. **6.208.** $e^{-1}$.**6.209.** $e$. **6.210.** 1.**6.217.** **1)** 3; **2)** 4; **3)** 1; **4)** $-2$; **5)** 1; **6)** 2. **6.218.** **1)** $\inf x_n=-1$, $\sup x_n=2$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=2$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=2$;

**2)** $\inf x_n=-6$, $\sup x_n=6$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=0$;

**3)** $\inf x_n=-7{,}5$, $\sup x_n=11$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=-4$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=1$; **4)** $\inf x_n=-\infty$, $\sup x_n=+\infty$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=-\infty$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=+\infty$; **5)** $\inf x_n=-1$, $\sup x_n=1.5$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=1$;

**6)** $\inf x_n=-\infty$, $\sup x_n=-3$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=-\infty$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=-\infty$; **7)** $\inf x_n=\frac{1}{3}$, $\sup x_n=\infty$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=\infty$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=\infty$; **8)** $\inf x_n=0$, $\sup x_n=+\infty$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=\infty$;

**9)** $\inf x_n=0$, $\sup x_n=+\infty$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=+\infty$; **10)** $\inf x_n=1$, $\sup x_n=\sqrt{30}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=1$; **11)** $\inf x_n=-\infty$, $\sup x_n=1$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=-\infty$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=1$;

**12)** $\inf x_n=-1$, $\sup x_n=1$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=-1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=1$. **6.219.** **1)** $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=2$; **2)**

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 5$; **3)** $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$; **4)** $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\frac{1}{2}$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$; **5)** $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$; **6)** $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 2$; **7)** $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -e-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = e+1$; **8)** $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$. **6.220.** $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 2$. **6.222.** 1) $[0;\,1]$; 2) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots; 0$; 3) $[0;+\infty)$ ва $+\infty$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

# 7-§. ФУНКЦИЯНИНГ ЛИМИТИ

**7.1. Ихтиёрий аргументли функциянинг лимити.** $f(x)$ функция $X$ $(\mathrm{X}\subset \mathrm{R}\ )$– бирор ҳаққиқий сонлар тўпламида аниқланган бўлсин. $a$ нуқта бирор сон ёки $-\infty, +\infty, \infty$ символларнинг бири бўлсин.

**7.1-таъриф**. Агар $U_{\varepsilon}(a)\ (\varepsilon > 0)$ атрофда $X$ тўпламнинг $a$ дан фарқли ҳеч бўлмаганда битта нуқтаси жойлашса, $a$ нуқта $X$ тўпламнинг *лимит нуқтаси (қуюқланиш нуқтаси)* деб аталади.

Мисоллар: 1) Ушбу $X=[0;3]=\{x: x\in R,\ 0\le x\le 3\}$ тўпламнинг ҳар бир нуқтаси унинг лимит нуқтаси бўлади.

2) $\mathrm{X} = \mathrm{N} = \{1, 2, 3, \ldots, \mathrm{n}, \ldots\ \}$тўплам лимит нуқтага эга эмас.

3) $\mathrm{X}=(0,2)=\{\mathrm{x}:\ \mathrm{x}\in\mathrm{R},\ \ 0<\mathrm{x}<2\}$ тўпламнинг ҳар бир нуқтаси шу тўпламнинг лимит нуқтаси бўлади ва яна 0 ва 1 нуқталар ҳам $(0; 1)$ тўпламнинг лимит нуқталари бўлади.

Демак, юқоридаги мисоллардан кўринадики, тўпламнинг лимит нуқтаси, тўпламга қарашли бўлиши ҳам, қарашли бўлмаслиги ҳам мумкин экан.

*Лимит нуқта қуйидаги хоссаларга эга:*

$1^{\mathrm{o}}$. Агар $a$ нуқта $X$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, $a$ нуқтанинг

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

ихтиёрий атрофида $X$ тўпламнинг чексиз кўп нуқталари (элементлари) жойлашган бўлади.

$2^{\text{o}}$. Агар $a$ нуқта $X$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, $X$ тўплам нуқталаридан (элементларидан) ҳар доим $a$ га интилувчи $\{x_n\}\,(x_n \in X,\ x_n \neq a;\ n=1,2,\ldots)$ кетма-кетлик тузиш мумкин.

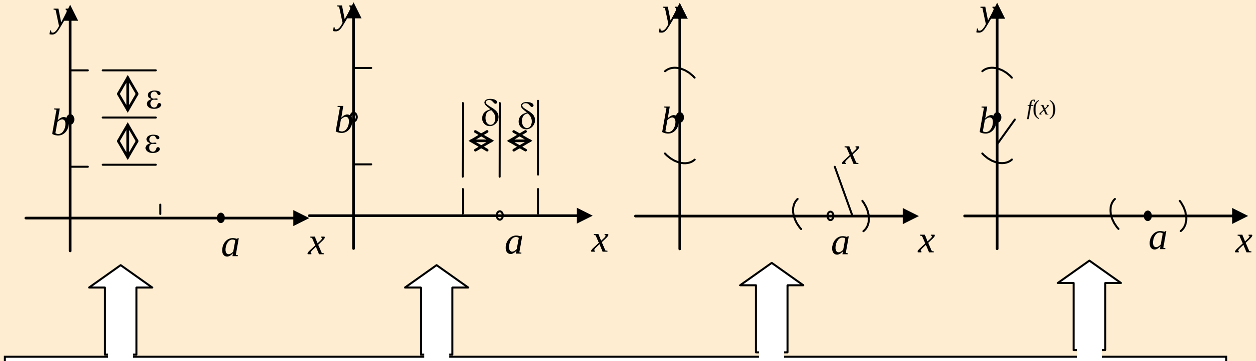
**7.2-таъриф (Гейне таърифи)**. Агар $X$ тўпламнинг элементларидан тузилган ва $a$ га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ $(x_n \in X,\ x_n \neq a;\ n=1,2,\ldots)$ кетма-кетлик олганда ҳам, унга мос келган $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт ягона $b$ (чекли ёки чексиз) лимитга интилса, шу $b$ сонга $f(x)$ функциянинг $a$ *нуқтадаги (ёки* $x \to a$ *даги) лимити* деб аталади ва у $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ ёки $x \to a$ да $f(x) \to b$ каби белгиланади.

**7.3-таъриф (Коши таърифи)**. Агар исталган $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta(\varepsilon) > 0$ сон топилсаки, аргумент $x$ нинг $0 < |\, x - a \,| < \delta,\, x \in X$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, $b$ сон $f(x)$ функциянинг $a$ *нуқтадаги* ($x \to a$ *даги) лимити* деб аталади.

Маълумки, 7.2- ва 7.3- таърифлар ўзаро эквивалент таърифлардир.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$f(x)$ функциянинг $x=a$ нуқтадаги лимити $b$ бўлганда, унинг Коши таърифини қуйидаги чизмадаги каби ёзиш мумкин.



Ҳар қандай $\varepsilon>0$ сон учун

шундай $\delta>0$ сон мавжуд бўладики,

$0<|x-a|<\delta$ бўлганда

$|f(x)-b|<\varepsilon$ ўринли бўлади.

$(+\infty)$ лимит нуқта бўлган ҳолда, бу лимит нуқтанинг атрофи $x>C$ $(C>0)$ нурдан, $(-\infty)$ лимит нуқта бўлган ҳолда эса, бу лимит нуқтанинг атрофи $x<-C$ нурдан иборат бўлади. $(\infty)$ лимит нуқта бўлганда, унинг атрофи: $\{x<-C\}\cup\{x>C\}$ нурлар йиғиндисидан иборат бўлади.

Лимит нуқта $a$ хосмас, яъни $-\infty, +\infty, \infty$ бўлган ҳолларда функция

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

лимитининг Коши таърифлари мос равишда қисқача қуйидагича ифодаланади:

Агар

$$\forall\varepsilon>0\ \exists C=C(\varepsilon)>0:\forall x,\ x>C,\ x\in X,\ |f(x)-b|<\varepsilon;$$
$$\forall x,\ x<-C,\ x\in X,\ |f(x)-b|<\varepsilon;$$
$$\forall x,\ |x|>C,\ x\in X,\ |f(x)-b|<\varepsilon$$

ва мос равишда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b;$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b;$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ каби ёзилади.

**7.4-таъриф ($x\to\infty$ да функция лимитининг Гейне таърифи)**. Агар $X$ тўпламнинг нуқталаридан (элементларидан) тузилган ҳар қандай чексиз катта $\{x_n\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам, унга мос келган $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳамма вакт ягона $b$ сонга интилса, шу $b$ сонга $f(x)$ функциянинг $x\to\infty$ *даги лимити* дейилади ва у $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ каби белгиланади.

**7.5-таъриф** ($x\to+\infty$ ($x\to-\infty$) да функция лимитининг Гейне таърифи). Агар $X$ тўпламнинг мусбат (манфий) элементларидан тузилган ҳар қандай чексиз катта $\{x_n\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам, унга мос келган $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳамма вакт ягона $b$ га интилса, шу $b$ га $f(x)$ функциянинг

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Орқага
Тулик экран
Чикиш

$x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ *даги лимити* дейилади ва у $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ $(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b)$ каби белгиланади.

**7.6-таъриф (функциянинг чекли нуқтадаги чексиз лимитлари)**. Агар исталган $\forall E>0$ сон учун шундай $\exists\delta=\delta(E)>0$ мавжуд бўлиб, $\forall x\in\dot{U}_{\delta}(a)\cap X$ учун $|f(x)|>E$ тенгсизлик ўринли, яъни $f(x)\in U_E(\infty)=\{x: x\in R, |x|>E\}$ бўлса, $f(x)$ функция $x\to a$ $(x=a)$ *да* $\infty$ *лимитга эга* дейилади ва $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ каби ёзилади.

**7.7-таъриф**. Агар $\forall E>0$ сон учун шундай $\exists\delta=\delta(E)>0:\forall x\in\dot{U}_{\delta}(a)\cap X$ учун $f(x)>E$ $(f(x)<-E)$ тенгсизлик ўринли, яъни $f(x)\in U_E(+\infty)=(E,+\infty)$ $(f(x)\in U_E(-\infty)=(-\infty;-E))$ бўлса, $f(x)$ функция $x\to a$ $(x=a)$ да $+\infty$ $(-\infty)$ *лимитга эга* дейилади ва $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ $(\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty)$ каби ёзилади.

$X$ $(X\subset R)$ тўплам берилган бўлиб, $a$ нукта унинг ўнг (чап) лимит нуқтаси бўлсин. Шу тўпламда $f(x)$ функция аниқланган.

**7.8-таъриф (Гейне таърифи)**. Агар $X$ тўпламнинг нуқталаридан

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

(элементларидан) тузилган ва ҳар бири ҳади $a$ дан катта (кичик) бўлиб, $a$ га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам, унга мос келган $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт ягона $b$ сонга интилса, шу $b$ сонга $f(x)$ функциянинг $a$ *нуқтадаги ўнг (чап)* лимити деб аталади.

**7.9-таъриф** *(Коши таърифи*). Агар исталган $\forall\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ сон топилсаки, аргумент $x$ нинг $U_\delta^+(a)$ $(U_\delta^-(a))$ атрофдаги барча қийматларида $|f(x)-b|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, $b$ сон $f(x)$ функциянинг $a$ нуқтадаги *ўнг (чап) лимити* деб аталади ва у, мос равишда, қуйидагича ёзилади:

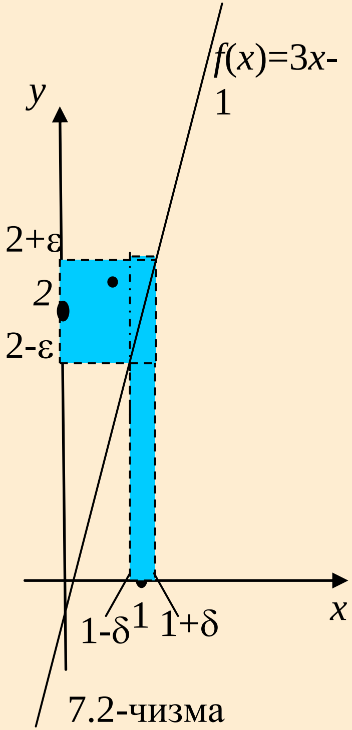
$$\lim_{x\to a+0} f(x)=b \text{ ёки } f(a+0)=b \qquad \Big(\lim_{x\to a-0} f(x)=b \text{ ёки } f(a-0)=b\Big).$$

Маълумки, 7.8- ва 7.9- таърифлар ўзаро эквивалент таърифлардир.

**7.1-Эслатма.** Функциянинг бирор нуқтада бир томонли лимитлари мавжуд бўлишидан унинг шу нуқтада лимитга эга бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди.

**7.1- теорема.** $f(x)$ функциянинг $a$ нуқтада $b$ лимитга эга бўлиши учун унинг шу нуқтада ўнг ва чап лимитлари мавжуд бўлиб,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



7.2-чизма

$f(a+0)=f(a-0)=b$ тенгликларнинг ўринли бўлиши зарур ва етарли.

**7.1-мисол.** $\lim\limits_{x\to1}(3x-1)=2$

бўлишини Коши таърифи бўйича кўрсатинг (7.2-чизма) ва $\varepsilon=0{,}03$ учун $\delta$ ни топинг.

**Ечилиши**. $\forall\varepsilon>0$ берилган бўлсин. Биз аввало $a)$ берилган $\varepsilon$ га

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

кўра $\delta$ ни топиш билан шуғулланамиз. Биз шундай $\delta$ ни излашимиз керакки, $x$ нинг $0<|x-1|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча қийматларида

$$|(3x-1)-2|<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлсин. Бунинг учун аввало, $|(3x-1)-2|$ ва $|x-1|$ ифодалар орасидаги боғланишни ўрнатиш зарур, бу боғланишни топиш учун эса, бу ифодалардан биринчисининг шаклини ўзгартирамиз:

$$|(3x-1)-2|=|3x-3|=3|x-1|. \qquad (7.1)$$

Энди $|(3x-1)-2|$ ни берилган $\varepsilon$ дан кичик қилиш учун, биз, $3|x-1|<\varepsilon$ тенгсизликка эга бўлишимиз лозим. Бу тенгсизликни $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{3}$ кўринишда ёзамиз. Бундан, $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$ деб олишимиз зарурлиги келиб чиқади.

b) Топилган $\delta$ нинг «ишлаш»ини кўрсатиш. Агар $0<|x-1|<\dfrac{1}{3}\varepsilon$ бўлса, у ҳолда $3|x-1|<\varepsilon$ муносабатга эга бўламиз ва (7.1) дан,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$|(3x-1)-2|<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлишига ишонч ҳосил қиламиз. Энди $\varepsilon=0{,}03$ десак, $\delta=\dfrac{0{,}03}{3}=0{,}01.$ $0<|x-1|<0{,}01$ бўлганда, $|(3x-1)-2|<0{,}03$ тенгсизлик бажарилади.

**7.2-мисол.** $\lim\limits_{x\to-2} x^2=4$ бўлишини Коши таърифи бўйича кўрсатинг.

**Ечилиши.** *а)* $\delta$ *ни топиш*. Фараз қилайлик ихтиёрий $\varepsilon>0$ берилган бўлсин. Биз шундай $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ сонни излаймизки, $x$ нинг $0<|x-(-2)|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида $|x^2-4|<\varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлсин. Бунинг учун аввало, $|x^2-4|$ ва $|x-(-2)|$ ифодалар орасидаги боғланишни топиш зарур. Бу боғланишни топиш учун эса, уларнинг иккаласини ҳам соддалаштирамиз:

$$|x^2-4|=|x-2||x+2| \text{ ва } |x-(-2)|=|x+2|.$$

$|x-2|$ кўпайтувчи сонлар ўқида чегараланмаган. Шунинг учун кўпайтувчини содда ҳолда баҳолаш учун $-2$ нуқтани ўз ичида сақлайдиган бирор оралиқни ажратамиз. Масалан, $a=-2$ нуқтанинг $\delta=1$ атрофи $(-3;\,-1)$ ни қарайлик.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$\forall x \in (-3;-1)$ учун $|x-2|<5$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Шундай қилиб,

$$|x^2-4|<5|x+2| \qquad (7.2)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. $a=-2$ нуқтанинг $\delta$ атрофи бўлган $(-2-\delta;\ -2+\delta)$ оралиқ $(-3;\ -1)$ атрофдан чиқиб кетмаслиги керак, бунинг учун $\delta=\min\left(1;\ \frac{\varepsilon}{5}\right)$ деб олиш етарли.

$b$) Топилган *$\delta$ нинг «ишлаш»ини* кўрсатамиз.

Агар $0<|x-(-2)|<\frac{\varepsilon}{5}$ бўлса, бундан $5|x-(-2)|<\varepsilon$ бўлиши ва (7.2) га мувофиқ, $|x^2-4|<\varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқади.

Шундай қилиб,

$$\lim_{x\to -2} x^2 = 4.$$

**7.3- мисол.** $\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{x}=3$ бўлишини Коши таърифи бўйича кўрсатинг.

**Ечилиши.** *а) $\delta$ ни топиш.* $\varepsilon>0$ сон берилган бўлсин. Биз шундай $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ сонни излаймизки, $x$ нинг $0<|x-9|<\delta$ тенгсизликни

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

қаноатлантирувчи барча қийматларида $|\sqrt{x}-3|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилсин.

Дастлаб, биз $\sqrt{x}$ ифода маънога эга бўлиши учун $x\geq 0$ муносабатнинг бажарилишини талаб қиламиз. Буни таминлаш учун биз $\delta\leq 9$ деб олишга мажбурмиз, акс ҳолда $\begin{cases} x\geq 0, \\ -\delta+9<x \end{cases}$ тенгсизлик ечимга эга бўлмасдан қолади.

Биз, $|\sqrt{x}-3|$, $|x-9|$ ифодалар орасидаги боғланишни топиш учун уларнинг иккинчисининг шаклини ўзгартирамиз:

$$\begin{gathered} x-9=\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right), \\ |x-9|=|\sqrt{x}+3|\ |\sqrt{x}-3|. \end{gathered} \tag{7.3}$$

Равшанки, $|\sqrt{x}+3|>1$. У ҳолда (7.3) дан

$$|\sqrt{x}-3|\ <\ |x-9|<\delta \tag{7.4}$$

тенгсизлик келиб чиқади. Охирги (7.4) тенгсизликда $\delta=\varepsilon$ деб олиш етарли, лекин, биз юқоридаги $\delta\leq 9$ шартни эътиборга олсак, у ҳолда $\delta=\min\{9:\varepsilon\}$ деб олишимиз етарли.

b) $\delta$ *нинг «ишлаш»ини* кўрсатиш.

Агар $0<|x-9|<\varepsilon$ бўлса, (7.4) тенгсизликка кўра, $|\sqrt{x}-9|<\varepsilon$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

тенгсизликнинг бажарилиши келиб чиқади. Демак, функция лимитининг Коши таърифига кўра, $\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{x}=3$ бўлади.

**7.4- мисол.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\cos x}{x^3-300x^2+500}=0$ эканлигини кўрсатинг.

**Ечилиши.** $a$) $C$ ни топиш. $\forall\varepsilon>0$ сон берилган бўлсин. $C$ ни шундай излаймизки, $x$ нинг $x>C$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида $\left|\frac{x^2\cos x}{x^3-300x^2+500}\right|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилиши керак. Бунинг учун аввало, $\left|\frac{x^2\cos x}{x^3-300x^2+500}\right|$, $x>C$ ифодалар ўртасидаги боғланишни топишимиз лозим. Биринчи ифоданинг шаклини қуйидагича ўзгартирамиз: $+\infty$ нуқтанинг бирор атрофини ($x>C$ нурни) ажратамиз, масалан, $x>600$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x$лар учун

$$x^3-300x^2+500>x^3-300x^2=x^2(x-300)>\frac{x^3}{2}$$

тенгсизлик ўринли.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Демак, $\left|\frac{x^2\cos x}{x^3-300x^2+500}\right| < \frac{x^2}{\frac{x^3}{2}} = \frac{2}{x}$.

Шундай қилиб, $C=\max\{600;\frac{2}{\varepsilon}\}$ деб олинса, $x>C$ учун $\left|\frac{x^2\cos x}{x^3-300x^2+500}\right|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилади.

$b$) $C$ *нинг «ишлаш»ини* кўрсатиш.

1) $600<\frac{\varepsilon}{2}$, 2) $600>\frac{\varepsilon}{2}$ ҳолларни қараймиз.

2) $600>\frac{\varepsilon}{2}$ бўлсин. У ҳолда, $C=600$ деб олсак, $x>600$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $x$ ларни қараймиз. Бу тенгсизликдан $x>600>\frac{2}{\varepsilon}$, $\varepsilon>\frac{2}{x}$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. $\cos x\le 1$ эканлигини, ҳамда $x\neq 0$лигини эътиборга олган ҳолда кийинги тенгсизликдан

$$\varepsilon>\frac{2}{x}>\frac{2\cos x\cdot x^2}{x\cdot x^2}=\frac{x^2\cos x}{\frac{x^3}{2}}$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

эга бўламиз. $x>600$ ни қаноатлантирувчи барча $x$ лар учун $\frac{x^3}{2}<x^3-300x^2+500$ тенгсизлик ўринли эканлигини ҳисобга олган ҳолда, кейинги тенгсизликдан

$$\left|\frac{x^2\cos x}{x^3-300x^2+500}\right|<\varepsilon$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Демак, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\cos x}{x^3-300x^2+500}=0$ бўлар экан. 1) ҳол ҳам худди шундай кўрсатилади.

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> limit(x^2*cos(x)/(x^3-300*x^2+500),x=infinity);
0
```

**7.5-мисол.** Ушбу

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}\quad(x\neq0)$$

функциянинг $x\to0$ да лимитга эга эмаслигини кўрсатинг.

**Ечилиши.** Нол нуқтанинг атрофидан нолга интилувчи ва нолдан фарқли

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

иккита ҳархил

$$\{x'_n\}=\left\{\frac{1}{n\pi}\right\},\quad \{x''_n\}=\left\{\frac{2}{(4n+1)\pi}\right\}$$

кетма-кетликларни олайлик. У ҳолда, уларга мос кетма-кетликлар:

$$f\left(x'_n\right)=\sin\frac{1}{x'_n}=\sin n\pi=0,$$

$$f\left(x''_n\right)=\sin\frac{1}{x''_n}=\sin\frac{(4n+1)\pi}{2}=\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

бўлиб, $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x'_n\right)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x''_n\right)=1$ бўлади. Бу эса, $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ функциянинг $x=0$ нуқтада лимити мавжуд эмаслигини исботлайди.

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> limit(sin(((1)/x)),x=0);
```

```
-1 ..1
```

**7.6- мисол.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)=0$ эканлигини исботланг.

**Ечилиши.** *а)* $C>0$ ни топиш. $\forall\varepsilon>0$ сон берилган бўлсин. Шундай $C=C(\varepsilon)$ сонни излаймизки, $x>C$ тенгсизликни каноатлантирувчи $x$ нинг

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

барча қийматларида

$$|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\,|<\varepsilon \qquad (7.5)$$

тенгсизлик ўринли бўлсин. Бунинг учун дастлаб

$$|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\,|,\quad x>C$$

ифодалар орасидаги боғланишни топамиз. Юқоридаги ифодаларнинг биринчисининг шаклини алмаштирамиз

$$\left|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right|=\left|2\cdot\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\le$$

$$\le 2\cdot\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|=2\left|\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right|<\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Бунда, $C(\varepsilon)=\dfrac{1}{4\varepsilon^2}$ деб олинса, (7.5) тенгсизлик $\forall x>C$ учун бажарилади.

$C(\varepsilon)=\dfrac{1}{4\varepsilon^2}$ ни танлаймиз.

b) *C нинг «ишлаш»ини* кўрсатамиз. $x>\dfrac{1}{4\varepsilon^2}$ бўлсин. Бундан $\varepsilon>\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Кўрсатилган $x$ нинг барча қийматларида

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$2\sqrt{x} < \sqrt{x+1}+\sqrt{x}, \quad \left|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right| < \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}, \quad \left|\cos\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right| < 1$$

тенгсизликларни эътиборга олган ҳолда, кейинги тенгсизликдан

$$\varepsilon > \frac{1}{2\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 2\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2} > 2\cdot\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2} =$$
$$= \sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}$$

топамиз, яъни $\left|\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right| < \varepsilon$.

Шундай қилиб, талаб қилинган лимитнинг 0 га тенглиги исбот бўлди.

**7.7-мисол.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{(a-x)^2} = +\infty$ эканлигини Коши таърифи бўйича кўрсатинг ва ушбу

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| E | 10 | 100 | 1000 | 10000 | …. |
| $\delta$ | | | | | ….. |

жадвални тўлдиринг.

**Ечилиши.** *а) $\delta$ ни топиш.* $\forall E > 0$ сон берлиган бўлсин. Биз шундай

$\delta=\delta(E)>0$ сонни излашимиз керакки, $x$ нинг $0<|a-x|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида $\frac{1}{(a-x)^2}>E$ тенгсизлик бажарилсин.

Аввало, $\frac{1}{(a-x)^2}$, $|a-x|$ ифодалар орасидаги боғланишни топиш керак. Бунинг учун $\frac{1}{(a-x)^2}>E$ нинг шаклини ўзгартирамиз: $\frac{1}{E}>(a-x)^2$, бундан $|a-x|<\frac{1}{\sqrt{E}}$, бунда $\delta=\frac{1}{\sqrt{E}}$ деб олиш етарли.

b) *$\delta$ нинг «ишлаш»ини* кўрсатиш. $\delta=\frac{1}{\sqrt{E}}$ бўлсин. Агар $0<|a-x|<\frac{1}{\sqrt{E}}$ бўлса, бундан $\sqrt{E}<\frac{1}{|a-x|}$ ёки $E<\frac{1}{(a-x)^2}$ тенгсизилк келиб чиқади. 7.7-таърифга кўра, бу тенгсизликдан $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{(a-x)^2}=+\infty$ эканлиги келиб чиқади.

Энди топилган $\delta$ га кўра жадвални тўлдирамиз.

| E | 10 | 100 | 1000 | 10000 | …. |
|---|---|---|---|---|---|
| $\delta$ | $1/\sqrt{10}$ | 1/10 | $1/10\sqrt{10}$ | 1/100 | ….. |

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**7.8-мисол**. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0 \\ x^3, & x>0 \end{cases}$$

функциянинг $x\to 0$ да лимитга эга эмаслигини кўрсатинг.

**Ечилиши.** Берилган функциянинг ўнг ва чап лимитларини топамиз:

1. *a*) $\delta$ *ни топиш*. $\forall\varepsilon>0$ сон берилган бўлсин. $\delta$ ни шундай излаймизки, $\forall x\in U_{\delta}^{+}(0)=(0,\delta)$ учун $x^3<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилсин. Бундан $x<\sqrt[3]{\varepsilon}$, бунда $\delta=\sqrt[3]{\varepsilon}$ деб олиш етарли.

*b*) $\delta$ *нинг «ишлаш»ини* кўрсатиш. Агар $x\in U_{\sqrt[3]{\varepsilon}}^{+}(0)=\left(0,\sqrt[3]{\varepsilon}\right)$ бўлса, $x\in U_{\sqrt[3]{\varepsilon}}^{+}(0)$ учун $x<\sqrt[3]{\varepsilon}$ тенгсизлик ўринли, бундан эса, $x^3<\varepsilon$ бўлиши келиб чиқади. Бу тенгсизликдан 7.9-таърифга кўра, $\lim\limits_{x\to 0+0}x^3=0$ эканлиги келиб чиқади.

2. *а*) $\delta$ *ни топиш*. $\forall\varepsilon>0$ сон берилган бўлсин. Бу ҳолда $\delta$ ни шундай излаймизки, $\forall x\in U_{\delta}^{-}(0)=(-\delta,0)$ учун $|\,f(x)-f(1-0)|=|(x+1)-1|<\varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлсин. Бунда $\delta=\varepsilon$ деб олиш етарли.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

б) $\delta$ *нинг «ишлаш»ини* кўрсатиш. Агар $\forall x \in U_{\delta}^{-}(0)$ учун $|x|<\delta=\varepsilon$ бўлса, бундан $|(x+1)-1|<\varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқади. 7.9-таърифга кўра,

$$\lim_{x\to 0-0}(x+1)=1.$$

Демак, берилган функциянинг $x=0$ даги ўнг ва чап лимитлари бир-бирига тенг бўлмаганлиги учун функция $x\to 0$ да лимитга эга эмас.

**7.9-мисол.** Ушбу

$$f(x)=\begin{cases}1+x^3, & x<1\\ 3, & x=1\\ 4-2x, & x>1\end{cases}$$

функциянинг $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} f(x)=2$ эканлигини кўрсатинг.

**Ечилиши.** Берилган функциянинг ўнг ва чап лимитларини топамиз:

1. *Ўнг лимит*: *а*) $\delta$ *ни топиш*. $\forall\varepsilon>0$ берилган бўлсин. $\delta$ ни шундай излаймизки, $\forall x\in U_{\delta}^{+}(1)=(1;1+\delta)$ учун $|(4-2x)-2|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилсин.

Бунинг учун $|(4-2x)-2|, |x-1|=x-1$ ифодалар орасидаги боғланишни

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

топамиз. Бу ифодаларнинг биринчисининг шаклини ўзгартирамиз.

$$|(4-2x)-2|=|2-2x|=2|x-1|,$$

бундан $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ деб олиш етарли.

б) $\delta$ *нинг «ишлаш»ини* кўрсатиш. $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ бўлсин. Агар $|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$ бўлса, бундан $|2x-2|=|(4-2x)-2|<\varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқади. Бу тенгсизликдан

$$\lim_{x\to1+0}(4-2x)=2.$$

2. *Чап лимит. а) $\delta$ ни топиш.* $\forall\varepsilon>0$ сон берилган бўлсин. $\delta$ ни шундай излаймизки, $\forall x\in U_{\delta}^{-}(1)=(1-\delta;1)$ учун $|(1+x^3)-2|<\varepsilon$ бўлиши лозим.

Дастлаб, биз $|1-x|$ ва $|(1+x^3)-2|$ орасидаги муносабат (боғлиқлик)ни топишимиз зарур. Барча муносабатларда $x<1$ шартнинг бажарилишини талаб қиламиз. Юқоридаги муносабатларнинг иккинчисида шакл алмаштирамиз:

$$|(1+x^3)-2|=|x^3-1|=|1-x|\cdot|x^2+x+1| \qquad (*)$$

$|x^2+x+1|$ ифода сонлар ўқида чегараланмаганлиги учун, кейинги тенгликнинг ўнг томонини қулай ҳолда баҳолаш учун $U_{\delta}^{-}(1)$ атрофни ўз ичида сақлайдиган бирор атрофни оламиз, масалан, $U_{1}^{-}(1)$ атрофни қараймиз

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$U_\delta^-(1)\subset U_1^-(1)$ $\forall x\in U_1^-(1)$ учун $|x^2+x+1|<3$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Шундай қилиб, (*) дан $|\left(1+x^3\right)-2|<3\cdot|1-x|$ тенгсизликка эга бўламиз. Бундан $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$ деб олиш етарли. 1 нуқтанинг $(1-\delta;1)$ атрофи $U_1^-(1)=(0;1)$ атрофдан чиқиб кетсмаслиги учун эса, $\delta=\min\{1;\varepsilon/3\}$ деб олиш зарур.

b) $\delta$ *нинг «ишлаш»ини* кўрсатиш. $\delta=\min\{1;\varepsilon/3\}$ ни танлаймиз ва $|x-1|<\delta\leq\frac{\varepsilon}{3}$ бўлсин деб фараз қиламиз. $\forall x\in U_1^-(1)=(0;1)$ учун $x^2+x+1<3$ бўлганлиги учун

$$\frac{\varepsilon}{3}>\frac{|1-x|\left(x^2+x+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)}>\frac{|1-x|\left(x^2+x+1\right)}{3}=\frac{|x^3-1|}{3}=\frac{|\left(1+x^3-2\right)|}{3}.$$

Бундан, $|\left(1+x^3-2\right)|<\varepsilon$ бажарилади. Чап лимитнинг таърифига асосан, $\lim\limits_{x\to1-0}\left(1+x^3\right)=2$ бўлар экан.

Шундай қилиб, $\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=2,$ $\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=2,$ бўлгани учун $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2,$ лекин $f(1)\neq2$.

**7.2. Функция лимитга эга бўлишининг зарурий ва етарли шарти**

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**(Коши критерийси).** $f(x)$ функция $X(X \subset R)$ тўпламда аниқланган, $a$ (чекли ёки чексиз) нуқта $X$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

**7.10-таъриф.** Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сон топилиб, аргумент $x$ нинг

$$0 < |x' - a| < \delta, \ 0 < |x'' - a| < \delta \qquad (7.6)$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий $x'$ ва $x''$ $(x' \in X; \ x'' \in X)$ қийматларида

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция учун $a$ нуқтада *Коши шарти бажарилади* дейилади.

$f(x)$ функция учун $a$ нуқтада Коши шартининг бажарилмаслиги қуйидагича таърифланади: $\forall \delta > 0$ сон олганимизда ҳам, шундай $\varepsilon > 0$ ва $0 < |x' - a| < \delta, \ 0 < |x'' - a| < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи $\exists \, x', x'' \ (x' \in X, \ x'' \in X)$ қийматлар топиладики,

$$|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**7.2- теорема (Коши).** $f(x)$ функциянинг $a$ нуқтада чекли лимитга эга бўлиши учун, унинг учун $a$ нуқтада Коши шартининг бажарилиши зарур ва етарли.

**7.3- теорема (Монотон функциянинг лимити).** Агар $f(x)$ функция $X$ тўпламда ўсувчи (камаювчи) бўлиб, юқоридан (қуйидан) чегараланган бўлса, $f(x)$ функция $a$ нуқтада чекли лимитга эга бўлади ва агар $f(x)$ функция юқоридан (қуйидан) чегараланмаган бўлса, унинг лимити $+\infty\ (-\infty)$ бўлади.

$a$ нуқтада ўнг (чап) лимитлар учун, ҳамда $x\to\infty$ даги; $x\to+\infty\ (x\to-\infty)$ даги лимитлар учун Коши шартининг таърифи, юқоридаги 7.10-таъриф сингари ифодаланади, фақат (7.6) шарт, мос равишда, ушбу

$$a < x' < a+\delta,\ a < x'' < a+\delta\ \ (a-\delta < x' < a,\ \ a-\delta < x'' < a);$$

$$|x'| > \delta,\ |x''| > \delta,\ \ x' > \delta,\ x'' > \delta\ \ (x' < -\delta,\ x'' < -\delta)$$

шартларга алмаштирилади.

**7.10-мисол.** Ушбу

$$f(x) = x^3 \sin\frac{1}{x^2}$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

функциянинг $a=0$ нуқтада Коши шартини қаноатлантиришини кўрсатинг.

**Ечилиши.** *а) $\delta$ ни топиш.* $\forall\varepsilon>0$ сон берилган бўлсин. Биз шундай $\delta$ ни излаймизки, $x$ нинг $0<|x'|<\delta,\ 0<|x''|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида

$$\left|x''^3\sin\frac{1}{x''^2}-x'^3\sin\frac{1}{x'^2}\right|<\varepsilon \qquad (7.7)$$

тенгсизлик бажарилиши керак. Бунинг учун биз дастлаб $\left|x''^3\sin\frac{1}{x''^2}-x'^3\sin\frac{1}{x'^2}\right|$ ва $0<|x'|<\delta,\ 0<|x''|<\delta$ ифодалар орасидаги боғланишни топишимиз керак. Бу боғланишни топиш мақсадида, юқоридаги биринчи ифоданинг шаклини алмаштирамиз:

$$\left|x''^3\sin\frac{1}{x''^2}-x'^3\sin\frac{1}{x'^2}\right|\le\left|x''^3\sin\frac{1}{x''^2}\right|+\left|x'^3\sin\frac{1}{x'^2}\right|\le\left|x''^3\right|+\left|x'^3\right|.$$

Бунда (7.7) тенгсизлик бажарилиши учун $\delta=\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{2}}$ деб олиш етарли.

*b) $\delta$ нинг «ишлаш»ини* кўрсатиш. $0<|x'|<\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{2}},\ 0<|x''|<\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{2}}$ бўлсин.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Унда бу тенгсизликлардан: $1 \geq \left|\sin\frac{1}{x'^2}\right|$, $1 \geq \left|\sin\frac{1}{x''^2}\right|$ ларни эътиборга олган ҳолда,

$$\frac{\varepsilon}{2} > |x'|^3 \cdot \left|\sin\frac{1}{x'^2}\right|, \qquad \frac{\varepsilon}{2} > |x''|^3 \cdot \left|\sin\frac{1}{x''^2}\right|$$

тенгсизликларга эга бўламиз. Бу тенгсизликларни ҳадма-ҳад қўшиш натижасида,

$$\varepsilon > |x'|^3 \cdot \left|\sin\frac{1}{x'^2}\right| + |x''|^3 \cdot \left|\sin\frac{1}{x''^2}\right| > \left|x'^3 \sin\frac{1}{x'^2} - x''^3 \sin\frac{1}{x''^2}\right|$$

ушбу тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, берилган функция $a = 0$ нуқтада Коши шартини қаноатлантирар экан.

**7.11-мисол.** $\lim\limits_{x \to 0-0} a^{\frac{1}{x}} = 0,\ a > 1$ эканлигини исботланг.

**Ечилиши.** *а) $\delta$ ни топиш.* $\forall \varepsilon > 0$ берилган бўлсин. Берилган $\varepsilon$ сонга кўра $\delta$ ни шундай излаймизки, $x$ нинг $x < 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$a^{\frac{1}{x}} < \varepsilon \tag{7.8}$$

тенгсизлик бажарилсин.

Агар $\varepsilon \geq 1$ бўлса, (7.8) тенгсизлик барча $x < 0$ учун бажарилади. Шунинг учун ҳар бир $\varepsilon \geq 1$ учун $\delta$ сифатида ихтиёрий мусбат сонни олиш мумкин, масалан, $\delta = 1$.

Агар $\varepsilon < 1$ бўлса, (7.8) тенгсизликнинг иккала томонини логарифмлаш натижасида $\frac{1}{x}\ln a < \ln\varepsilon$ тенгсизликка эга бўламиз. Бундан, $x > \frac{\ln a}{\ln\varepsilon}$. Бу ҳолда $-\delta < x < 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий $x$ ларда (7.8) тенгсизликнинг бажарилиши учун $\delta = -\frac{\ln a}{\ln\varepsilon}$ деб олиш етарли.

b) $\delta$ *нинг «ишлаш»ини* кўрсатиш. $\frac{\ln a}{\ln\varepsilon} < x < 0$ бўлсин. Бундан, $\frac{\ln a}{x} < \ln\varepsilon$, $\ln a^{\frac{1}{x}} < \ln\varepsilon$, $a^{\frac{1}{x}} < \varepsilon$ келиб чиқади. Демак, $\lim\limits_{x\to -0} a^{\frac{1}{x}} = 0$ бўлади.

**7.12-мисол.** $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ эканлигини исботланг.

**Ечилиши.** *а) $\delta$ ни топиш.* $\forall\varepsilon > 0$ берилган бўлсин. $\delta$ ни шундай

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

излаймизки, барча $x>0$ лар учун

$$\left|\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon \qquad (7.9)$$

тенгсизлик бажарилсин. Бунинг учун $\left|\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}\right|$, $x>0$ ифодалар ўртасидаги боғланишни топамиз.

Агар $\varepsilon \geq \frac{\pi}{2}$ бўлса, (7.9) тенгсизлик барча $x>0$ учун бажарилади. Шунинг учун $\delta$ сифатида ихтиёрий мусбат сонни олиш мумкин, масалан $\delta=1$.

Агар $\varepsilon<\frac{\pi}{2}$ бўлса, у ҳолда (7.9) дан

$$-\varepsilon<\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}<\varepsilon,\ \ \frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}<\varepsilon,\ \ \operatorname{arctg}\frac{1}{x}>\frac{\pi}{2}-\varepsilon,$$

$$\frac{1}{x}>\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\varepsilon),\ \ x<\operatorname{tg}\varepsilon.$$

Шундай қилиб, $\varepsilon<\frac{\pi}{2}$ бўлганда $x>0$ учун (7.9) тенгсизлик бажарилиши учун $\delta=tg\varepsilon$ деб олиш етарли. Демак, $\forall\varepsilon>0$ учун $0<x<\delta$ ни

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

қаноатлантирувчи $\exists\delta(\varepsilon)$, $\left|\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon$ бажарилади, бу эса $\lim\limits_{x\to 0+0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$ эканлигини англатади.

*b)* *$\delta$ нинг ишлашини* кўрсатиш. $0<x<tg\varepsilon$ бўлсин. Бундан $\frac{1}{x}>\frac{1}{tg\varepsilon}$ ёки $\frac{1}{x}>tg\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$, $\varepsilon<\frac{\pi}{2}$ бўлса, $arctg\frac{1}{x}>arctg(tg(\frac{\pi}{2}-\varepsilon))$ тенгсизлик ўринли. Бундан $arctg\frac{1}{x}>\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ ёки $\frac{\pi}{2}-arctg\frac{1}{x}<\varepsilon$. Бу тенгсизликдан

$$-\varepsilon<arctg\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}<\varepsilon\,\text{ёки}\quad \left|\frac{\pi}{2}-arctg\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$$

келиб чиқади.

**7.13-мисол.** $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}-x$ функциянинг $x\to\infty$ да чекли лимитга эга эканлигини исботланг.

**Ечилиши.** Берилган функция учун $x\to\infty$ да Коши шартининг бажарилишини кўрсатамиз:

*а) С ни топиш.* $\forall\varepsilon>0$ сон берилган бўлсин. Бу берилган сонга кўра,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$C=C(\varepsilon)$ ни шундай излаймизки, аргумент $x$ нинг $|x'|>C,\ |x''|>C$ шартларни қаноатлантирувчи $\forall x', x''\ (x'\in R,\ x''\in R)$ қийматларида

$$\left|\frac{x'^3}{x'^2+1}-x'-\left(\frac{x''^3}{x''^2+1}-x''\right)\right|<\varepsilon \qquad (7.10)$$

тенгсизлик бажарилсин. Бунинг учун аввало

$$\left|\frac{x'^3}{x'^2+1}-x'-\left(\frac{x''^3}{x''^2+1}-x''\right)\right|,\quad |x'|>C,\ |x''|>C$$

муносабатлар орасидаги боғланишни топамиз. Бунинг учун эса, юқоридаги муносабатлардан биринчисининг шаклини алмаштирамиз:

$$\left|\frac{x'^3}{x'^2+1}-x'-\left(\frac{x''^3}{x''^2+1}-x''\right)\right|=\left|\frac{x'}{x'^2+1}+\frac{x''}{x''^2+1}\right|\le\left|\frac{x'}{x'^2+1}\right|+\left|\frac{x''}{x''^2+1}\right|\le$$

$$\le\left|\frac{x'}{x'^2}\right|+\left|\frac{x''}{x''^2}\right|=\frac{1}{|x'|}+\frac{1}{|x''|}.$$

Бундан, (7.10) тенгсизлик бажарилиши учун $C=\dfrac{2}{\varepsilon}$ деб олиш етарли

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

бўлади.

*b*) *C нинг «ишлаш»ини* кўрсатамиз. $|x'|>\frac{2}{\varepsilon}$, $|x''|>\frac{2}{\varepsilon}$ бўлсин. Бундан,

$$\frac{\varepsilon}{2}>\frac{1}{|x'|},\quad \frac{\varepsilon}{2}>\frac{1}{|x''|}.$$

Бу тенгсизликларни ҳадма-ҳад қўшамиз:

$$\varepsilon>\frac{1}{|x'|}+\frac{1}{|x''|}=\frac{|x'|}{x'^2}+\frac{|x''|}{x''^2}>\frac{|x'|}{x'^2+1}+\frac{|x''|}{x''^2+1}>\left|-\frac{x'}{x'^2+1}+\frac{x''}{x''^2+1}\right|=$$

$$=\left|\frac{x'^3-x'-x'^3}{x'^2+1}+\frac{x''-x''^3+x''^3}{x''^2+1}\right|=\left|\frac{x'^3}{x'^2+1}-x'-\left(\frac{x''^3}{x''^2+1}-x''\right)\right|.$$

Демак, $|x'|>\frac{2}{\varepsilon}$, $|x''|>\frac{2}{\varepsilon}$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи $\forall x', x''$ $(x'\in R, x''\in R)$ лар учун

$$\left|\frac{x'^3}{x'^2+1}-x'-\left(\frac{x''^3}{x''^2+1}-x''\right)\right|<\varepsilon$$

тенгсизлик, яъни берилган функция учун $x\to\infty$ да Коши шарти бажарилар экан. Бундан эса, берилган функциянинг $x\to\infty$ да чекли лимитга эга эканлиги келиб чиқади.

**7.14-мисол.** Ушбу $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ функция учун $x\to\pm\infty$ да Коши шартининг бажарилишини исботланг.

**Ечилиши.** Биз, $x\to+\infty$ да берилган функция учун Коши шартини бажарилишини кўрсатамиз. Худди шундай $x\to-\infty$ да ҳам Коши шартининг бажарилиши кўрсатилади.

*а)* $C$ ни топиш. $\forall\varepsilon>0$ сон берилган бўлсин. Берилган $\varepsilon$ га кўра $C$ сонни шундай излаймизки, $x'>C,$ $x''>C$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи $\forall x',\ x''\ (x'\in R,\ x''\in R)$ лар учун

$$\left|\sqrt{x'^2+1}-x'-(\sqrt{x''^2+1}-x'')\right|<\varepsilon \qquad (7.11)$$

тенгсизлик ўринли бўлиши лозим. Бунинг учун биз аввало

$$\left|\sqrt{x'^2+1}-x'-(\sqrt{x''^2+1}-x'')\right|,\ \ x'>C,\ x''>C$$

муносабатлар орасидаги боғланишни топамиз. Қаралаётган муносабатнинг биринчисининг шаклини ўзгартириб, ушбу

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x'^2+1}+x'}-\frac{1}{\sqrt{x''^2+1}+x''}\right| \le \left|\frac{1}{\sqrt{x'^2+1}+x'}\right|+\left|\frac{1}{\sqrt{x''^2+1}+x''}\right| =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x'^2+1}+x'}+\frac{1}{\sqrt{x''^2+1}+x''} < \frac{1}{2x'}+\frac{1}{2x''} < \frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}$$

тенгсизликка эга бўламиз. $x'>C,\ x''>C$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall x',\, x''\ (x'\in R,\, x''\in R)$ ларда (7.11) тенгсизликнинг бажарилиши учун $C=\frac{2}{\varepsilon}$ деб олиш лозим бўлади.

$b)$ *$C$ нинг «ишлаш»ини* кўрсатамиз. $x'>\frac{2}{\varepsilon},\ \ x''>\frac{2}{\varepsilon}$ тенгсизликлар ўринли бўлсин. Бундан, $\frac{\varepsilon}{2}>\frac{1}{x'},\ \frac{\varepsilon}{2}>\frac{1}{x''}$ тенгсизликларни ҳосил қиламиз. Бу тенгсизликларни қўшиш натижасида

$$\varepsilon>\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}>\frac{1}{2x'}+\frac{1}{2x''} \qquad (7.12)$$

бўлишини топамиз. Равшанки, $\sqrt{x'^2+1}+x'>2x',\ \sqrt{x''^2+1}+x''>2x''$ тенгсизликлар ўринли. Кейинги тенгсизликларни эътиборга олган ҳолда,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

(7.12) дан

$$\varepsilon > \frac{1}{\sqrt{x'^2+1}+x'} + \frac{1}{\sqrt{x''^2+1}+x''} > \left| \frac{1}{\sqrt{x'^2+1}+x'} - \frac{1}{\sqrt{x''^2+1}+x''} \right| =$$

$$= \left| \sqrt{x'^2+1} - x' - (\sqrt{x''^2+1} - x'') \right|$$

эканлигини оламиз.

Шундай қилиб, $x' > \frac{2}{\varepsilon}$, $x'' > \frac{2}{\varepsilon}$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи $\forall x', x''$ $(x' \in R,\ x'' \in R)$ учун $\left| \sqrt{x'^2+1} - x' - (\sqrt{x''^2+1} - x'') \right| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилар экан. Бу тенгсизлик, берилган функциянинг $x \to +\infty$ да Коши шартини қаноатлантиришини ифодалайди.

**7.15-мисол.** Ушбу

$$f(x) = \sin\frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

функция учун $x = 0$ нуқтада Коши шартининг бажарилмаслигини кўрсатинг.

**Исботи.** $\forall \delta > 0$ сон берилган бўлсин. Бу сон бўйича $\exists\ \varepsilon_0 > 0$ ва

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$|x'| < \delta,\ |x''| < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи

$$\exists x',\, x''\ \ (x' \in R\setminus\{0\},\ \ x'' \in R\setminus\{0\})$$

нуқталарни топиш керакки,

$$\left|\sin\frac{1}{x'} - \sin\frac{1}{x''}\right| \ge \varepsilon_0$$

тенгсизлик бажарилсин. $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ ва $x' = \frac{1}{2k\pi}$, $x'' = \frac{2}{(4k+1)\pi}$ $(k \ne 0)$ нуқталар учун $k > \left[\frac{1}{2\delta\pi}\right]$ деб олсак, у ҳолда $|x'| < \delta,\ |x''| < \delta$ тенгсизликлар бажарилади.

$$\left|\sin\frac{1}{x'} - \sin\frac{1}{x''}\right| = \left|\sin 2k\pi - \sin(4k+1)\frac{\pi}{2}\right| = 1 > \varepsilon_0 = \frac{1}{2}.$$

Демак, берилган функция учун $x = 0$ нуқтада Коши шарти бажарилмас экан.

**7.3. Чекли лимитга эга бўлган функциялар устида арифметик амаллар.** $X\ (X \subset R)$ тўплам берилган бўлиб, $a$ унинг лимит нуқтаси бўлсин. $f(x)$, $h(x)$ ва $g(x)$ лар $X$ тўпламда аниқланган функциялар.

**7.4- теорема.** Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $a$ нуқтада лимитга эга ва

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

уларнинг лимитлари мос равишда $b$ ва $c$ бўлса, у ҳолда $f(x)\pm g(x),\ f(x)\cdot g(x), kf(x), \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(c\neq 0)$ функциялар ҳам шу $a$ нуқтада чекли лимитга эга бўлади ва ушбу

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=b\pm c, \tag{I}$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)=b\cdot c, \tag{II}$$

$$\lim_{x\to a}(kf(x))=k\lim_{x\to a} f(x)=kb,\quad (k\text{ - ўзгармас}) \tag{III}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{b}{c}. \tag{IV}$$

муносабатлар ўринли бўлади.

**7.2-эслатма.** Юқоридаги (I) ва (II) муносабат қўшилувчилар ва кўпайтувчилар сони ихтиёрий чекли бўлганда ҳам ўринли.

**7.3-эслатма.** (I), (II) ва (IV) ларда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг йиғиндиси, кўпайтмаси ва нисбатидан иборат бўлган функцияларнинг лимитга эга бўлишидан, бу функциялар ҳар бирининг лимитга эга бўлиши, ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди. Масалан, $f(x)=x,\ g(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ функциялар

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

кўпайтмаси $f(x)\cdot g(x)=x\sin\frac{1}{x}$ бўлиб, $x\to 0$ да $f(x)\cdot g(x)\xrightarrow[x\to 0]{}0$. Аммо $x\to 0$ да $g(x)=\sin\frac{1}{x}$ функция лимитга эга эмас.

**7.5- теорема.** Агар $a$ нуқтанинг бирор $\dot{U}_{\delta}(a)$ атрофидан олинган $x$ нинг барча қийматларида $g(x)\le f(x)\le h(x)$ тенгсизлик ўринли бўлиб, $x\to a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар лимитга эга бўлиб, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=b$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция ҳам $a$ нуқтада лимитга эга ва $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ бўлади.

**7.4. Аниқмас ифодалар.** Юқоридаги 7.4- теоремада $f(x)$ ва $g(x)$ функциялардан қуйидаги икки шартни талаб қилган эдик: 1) $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $a$ нуқтада чекли лимитга эга; 2) $\frac{f(x)}{g(x)}$ нинг лимитига доир мулоҳазаларда эса, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c\neq 0$ бўлсин деб фараз қилинган эди. Агар $x\to a$ да бу шартларнинг бирортаси бажарилмаса, яъни $x\to a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар бирининг лимити чексиз ёки $\frac{f(x)}{g(x)}$ нинг лимити қаралганда, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ бўлиб қолса. у ҳолда 6- § да батафсил ўрганилган аниқмасликлар каби турли хил аниқмас ифодаларга келамиз. Жумладан:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ бўлса, уларнинг $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ нисбати $\dfrac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалайди; 2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ бўлса, уларнинг $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ нисбати $\dfrac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалайди; 3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ бўлса, уларнинг $f(x)\cdot g(x)$ кўпайтмаси $0\cdot\infty$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалайди. 4) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty\ (-\infty)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty\ (+\infty)$ бўлса, у ҳолда $f(x)+g(x)$ ифода $\infty-\infty$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалайди. Бу ҳолларда $x\to a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ўз лимитларига қандай интилиш хусусиятларига қараб $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $f(x)\cdot g(x)$, $f(x)+g(x)$ ифодаларнинг характерини аниқлаш аниқмасликни очиш деб юритилади.

**7.16- мисол.** Ушбу

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$a)\ \lim_{x\to1}\left(\frac{x^2+x+5}{x^2-3}+3\sin^2\frac{\pi x}{2}+2\cos^3\frac{\pi x}{2}\right);\quad b)\ \lim_{x\to0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1};$$

$$c)\ \lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1};\quad d)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$$

лимитларни ҳисобланг.

**Ечилиши**. $a)\ \lim_{x\to1}\left(\frac{x^2+x+5}{x^2-3}+3\sin^2\frac{\pi x}{2}+2\cos^3\frac{\pi x}{2}\right)$. Қўшилувчиларнинг ҳар бирининг $x\to1$ даги лимитини ҳисоблаймиз. Биринчи қўшилувчи каср функция бўлиб, унинг сурат ва махражи ҳам $x\to1$ чекли лимитга эга бўлгани учун, унинг лимитини I-IV қоидалар бўйича ҳисоблаймиз, яъни

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+5}{x^2-3}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x^2+x+5)}{\lim\limits_{x\to1}(x^2-3)}=\frac{\lim\limits_{x\to1}x\cdot\lim\limits_{x\to1}x+\lim\limits_{x\to1}x+\lim\limits_{x\to1}5}{\lim\limits_{x\to1}x\lim\limits_{x\to1}x-\lim\limits_{x\to1}3}=-\frac{7}{2}.$$

Иккинчи ва учинчи қўшилувчиларнинг $x\to1$ даги лимитлари мавжуд бўлгани учун, уларнинг лимитларини II ва III қоидалар бўйича ҳисоблаймиз.

$$\lim_{x\to1}(3\sin^2\frac{\pi}{2}x)=3\lim_{x\to1}\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\lim_{x\to1}\sin\frac{\pi}{2}x=3;$$

$$\lim_{x\to1}(2\cos^3\frac{\pi}{2}x)=2\lim_{x\to1}\cos\frac{\pi}{2}x\cdot\lim_{x\to1}\cos\frac{\pi}{2}x\cdot\lim_{x\to1}\cos\frac{\pi}{2}x=0.$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Шундай қилиб, 7.4- теорема ва 7.2-эслатмага кўра,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x+5}{x^2-3}+3\sin^2\frac{\pi}{2}x+2\cos^3\frac{\pi}{2}x\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+5}{x^2-3}+$$

$$+\lim_{x\to 1}3\sin^2\frac{\pi}{2}x+\lim_{x\to 1}2\cos^3\frac{\pi}{2}x=-\frac{7}{2}+3+0=-\frac{1}{2}.$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> limit(((x^2+x+5)/(x^2-
3))+3*(sin(x*Pi/2))^2+2*(cos(x*Pi/2))^3,x=1);
```

$$\frac{-1}{2}.$$

*b*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$. Бунда, $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-1)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0}(2x^2-x-1)=-1\neq 0$

бўлгани учун IV қоидани қўллаш мумкин:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-1\right)}{\lim\limits_{x\to 0}\left(2x^2-x-1\right)}=\frac{-1}{-1}=1.$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> limit(((x^2-1)/(2*x^2-x-1)),x=0);
```

$$1.$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$c)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$. Бу лимитни ҳисоблашда 7.4- теоремани қўллаш мумкин эмас, чунки $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0$, $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-x-1)=0$, яъни 7.4- теоремадаги $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c\neq 0$ шарт бажарилмаяпти. Берилган ифоданинг $x\to 0$ даги лимити $\dfrac{0}{0}$ аниқмасликни ифодалайди. Бу аниқмасликни очиш учун $\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ ифоданинг шаклини ўзгартирамиз: $\dfrac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)(x+\frac{1}{2})}$. У ҳолда,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+\frac{1}{2})}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+\frac{1}{2}}=\frac{2}{2\cdot\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}.$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> limit(((x^2-1)/(2*x^2-x-1)),x=1);
```

$$\frac{2}{3}.$$

$d)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$. Бу лимитни ҳисоблашда ҳам 7.4- теоремани қўллаб

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

бўлмайди, чунки берилган каср ифоданинг сурати ва махражи чекли лимитга эга эмас, яъни $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-1)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2-x-1)=\infty$. Шундай қилиб, $\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ ифода $x\to\infty$ да $\dfrac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалайди. Бу лимитни ҳисоблаш, яъни аниқмасликни очиш учун каср ифоданинг сурат ва махражини $x^2$ га бўламиз.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}.$$

Энди шакл ўзгартириш натижасида хосил бўлган каср ифоданинг лимитини ҳисоблашда 7.4-теоремани қўллаш мумкин. Шундай қилиб,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1-0}{2-0-0}=\frac{1}{2}.$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> limit(((x^2-1)/(2*x^2-x-1)),x=infinity);
```

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$\frac{1}{2}$.

**7.17- мисол.** Ушбу

$$a)\quad f(x)=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}};\ b)\quad f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$$

функцияларнинг мос равишда $x\to\infty$ да ва $x\to 0$ даги лимитларини ҳисобланг.

**Ечилиши.** Барча $x\neq 0$ лар учун $0<\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}<1+\frac{1}{x^2}$ тенгсизлик бажарилади. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^2})=1,$ чунки, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0.$

Демак, 7.5- теоремага кўра, $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$ бўлади.

$b)$. Барча $x\neq 0$ бўлган $x$ лар учун $-x^2<x^2\sin\frac{1}{x}\le x^2$ тенгсизлик ўринли ва $\lim\limits_{x\to 0}(-x^2)=0,$ $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ бўлганлиги учун 7.5- теоремага асосан, $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$ бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**7.18-мисол**. Ушбу

$A)\ \lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a;\quad B)\ \lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a;\ C)\ \lim\limits_{x\to a}\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} a$

$\left(a\neq\frac{2n-1}{2}\pi;\ \ n=0,\pm1,\pm2,\ldots\right);\ \ D)\ \ \lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}\ \ (a>0);$

$E)\ \ \lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0$

тасдиқларни исботланг.

**Ечилиши**. $A$). $a$) *$\delta$ ни топиш*. $\forall\varepsilon>0$ сон берилган бўлсин. $\delta=\delta(\varepsilon)$ ни шундай излашимиз керакки, $0<|x-a|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x$ лар учун

$$|\sin x-\sin a|<\varepsilon \tag{7.13}$$

тенгсизлик бажарилиши лозим. Аввало,

$$|\sin x-\sin a|,\ \ |x-a|$$

муносабатлар орасидаги муносабатни (боғланишни) топамиз. Бунинг учун юқоридаги муносабатларнинг биринчисида шакл алмаштирамиз:

$$0\le|\sin x-\sin a|=\left|2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right|\le2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\le2\frac{|x-a|}{2}=|x-a|.$$

Бунда $\delta=\varepsilon$ деб олинса, $0<|x-a|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

барча $x$ лар учун (7.13) тенгсизлик бажарилади, яъни $\left|\sin x-\sin a\right|<\varepsilon$ бўлади.

b) $\delta$ *нинг «ишлаш»ини* кўрсатиш. $\left|x-a\right|<\varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $x$ ларни қараймиз. Кейинги тенгсизликдан, $1\geq\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|$, $\frac{\left|x-a\right|}{2}\geq\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|$ тенгсизликларни эътиборга олсак,

$$\varepsilon>\left|x-a\right|=2\frac{\left|x-a\right|}{2}\geq 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\geq 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|=$$

$$=2\left|\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right|=\left|\sin x-\sin a\right|$$

тенгсизлик ўринли эканлигини кўрамиз.

Демак, лимитнинг Коши таърифига кўра, $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$.

Худди шундай *B)* $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$ эканлиги кўрсатилади.

*C)* (IV) формулани эътиборга олсак,

$$\lim_{x\to a}tgx=\lim_{x\to a}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\sin x}{\lim\limits_{x\to a}\cos x}=\frac{\sin a}{\cos a}=tga,$$

$(\cos a\neq 0$ яъни $a\neq\frac{2n-1}{n}\pi,\ \ n=0;\ \pm1,\pm2,\ldots).$

*D)* $a>1$ бўлган ҳолни қараш етарли. $\forall\varepsilon>0$ сон берилган бўлсин. $|a^x-a^{x_0}|$, $|x-x_0|$ ифодалар орасидаги боғланишни топиш учун $|a^x-a^{x_0}|$ ифоданинг шаклини алмаштирамиз.

$$|a^x-a^{x_0}|=a^{x_0}|a^{x-x_0}-1|.$$

Маълумки, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}}=1$. Бундан берилган $\varepsilon>0$ бўйича шундай $n_0$ топиладики, $1-\frac{\varepsilon}{a^{x_0}}<a^{-\frac{1}{n_0}}<a^{\frac{1}{n_0}}<1+\frac{\varepsilon}{a^{x_0}}$ тенгсизлик ўринли бўлади. $|x-x_0|<\frac{1}{n_0}$ деб олинса, тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x$ лар учун $1-\frac{\varepsilon}{a^{x_0}}<a^{-\frac{1}{n_0}}<a^{x-x_0}<a^{\frac{1}{n_0}}<1+\frac{\varepsilon}{a^{x_0}}$ ёки $|a^x-a^{x_0}|=a^{x_0}|a^{x-x_0}-1|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Бундан эса, $\lim\limits_{x\to x_0} a^x=a^{x_0}$ бўлади.

*E)* Равшанки, $n>1$ бўлганда

$$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n},\quad -\frac{1}{n-1}<\ln(1-\frac{1}{n})<\frac{1}{n}.$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$\forall\varepsilon > 0$ берилган бўлиб, $\varepsilon \le \frac{1}{2}$ бўлсин. У ҳолда шундай $n_0$ мавжуд бўлиб,

$$-\varepsilon < \ln(1-\frac{1}{n_0}) < \ln(1+\frac{1}{n_0}) < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади.

Агар $-\frac{1}{n_0} < \frac{x-x_0}{x_0} < \frac{1}{n_0}$ деб олинса, у ҳолда $\ln x - \ln x_0 = \ln(1+\frac{x-x_0}{x_0})$ айирма учун қуйидаги баҳо ўринли бўлади:

$$-\varepsilon < \ln(1-\frac{1}{n_0}) < \ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right) < \ln(1+\frac{1}{n_0}) < \varepsilon$$

ёки

$$\left|\ln x - \ln x_0\right| < \ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right) < \ln(1+\frac{1}{n_0}) < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Бундан эса, $\lim\limits_{x\to x_0}\left|\ln x - \ln x_0\right| = 0,\ \lim\limits_{x\to x_0} \ln x = \ln x_0$ эканлиги келиб чиқади.

**7.5. Мураккаб функциянинг лимити.** Лимитларни хисоблашда кўпинча қуйидаги мураккаб функциянинг лимити хакидаги теорема қўлланилади.

$t=\varphi(x)$ функция $X$ тўпламда аниқланган бўлиб, бу функциянинг қийматларидан тузилган $T$ тўпламда эса, $y=f(t)$ функция аниқланган, улар ёрдамида мураккаб $y=f(\varphi(x))$ функция хосил қилинган бўлсин. Бу мураккаб функция $X$ тўпламда аниқланган, $a$ нукта $X$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

**7.6- теорема.** Агар: 1) $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=c$ лимит ўринли бўлиб, $a$ нуқтанинг шундай $\dot{U}_\delta(a)$ атрофи мавжуд бўлсинки, барча $x\in\dot{U}_\delta(a)$ лар учун $\varphi(x)\neq c$ бўлса; 2) $c$ нуқта $T$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлиб, $\lim\limits_{t\to c} f(t)=b$ лимит мавжуд бўлса, у ҳолда $x\to a$ да $y=f(\varphi(x))$ мураккаб функция ҳам лимитга эга ва

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x))=\lim_{t\to c} f(t) \qquad (7.14)$$

бўлади.

$f(t)$ функция $c$ нуқтада узлуксиз бўлган ҳолда, (7.14) тенгликни

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x))=f\left(\lim_{x\to a}\varphi(x)\right) \qquad (7.15)$$

тенглик кўринишида ёзиш мумкин.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**7.4-эслатма.** Теоремадаги $a$ нуктанинг $\dot{U}_{\delta}(a)$ атрофида $\varphi(x)\neq c$ бўлсин деган шартни $f(t)$ функция $t=c$ нуктада аникланган ва $\lim\limits_{t\to c} f(t)=f(c)=b$ тенгликлар ўринли бўлсин деган шарт билан алмаштириш мумкин.

**7.5-эслатма**. Юқоридаги $a, c$ ва $b$ ларнинг бири чекли, иккинчиси $\infty$ ёки барчаси чексиз бўлганда ҳам 7.6- теорема ўринли бўлади.

**7.19-** мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to 2\pi}\ln\left(3+\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}\right)$$

лимитни ҳисобланг.

**Ечилиши**. Бунда қуйидаги кетма-кет алмаштиришлар оламиз:

$$y_1=\frac{x}{2},\;\; y_2=\mathrm{tg}\,y_1,\;\; y_3=y_2^2,\;\; y_4=1+y_3,\;\; y_5=\sqrt{y_4},\;\; y_6=3+y_5,\;\; y_7=\ln y_6$$

Юқоридаги ифодаларга кетма-кет 7.6-теоремани ва 7.4-эслатмани қўллаш натижасида

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\lim_{x\to 2\pi} y_1(x) = \lim_{x\to 2\pi}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi;\qquad \lim_{y_1\to\pi} y_2(y_1) = \lim_{y_1\to\pi} tgy_1 = 0,$$

$$\lim_{y_2\to 0} y_3(y_2) = \lim_{y_2\to 0} y_2^2 = \lim_{y_2\to 0} y_2\cdot\lim_{y_2\to 0} y_4 = 0;\qquad \lim_{y_3\to 0} y_4(y_3) = \lim_{y_3\to 0}(1+y_3) = 1,$$

$$\lim_{y_4\to 1} y_5(y_4) = \lim_{y_4\to 1}\sqrt{y_4} = 1;\qquad \lim_{y5\to 1} y_6(y_5) = \lim_{y_5\to 1}(3+y_5) = 4,$$

$$\lim_{x\to 2\pi}\ln\left(3+\sqrt{1+tg^2\frac{x}{2}}\right) = \lim_{y_6\to 4} y_7(y_6) = \lim_{y_6\to 4}\ln y_6 = 2\ln 2.$$

эканлигини оламиз.

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> limit(ln(3+sqrt(1+(tan(x/2)^2))),x=2*Pi);
```

```
2 ln(2)
```

**7.20- мисол**. Ушбу

$$\lim_{x\to 2}\left(\sqrt[3]{\frac{2x^2-8}{x-2}}+3\right)$$

лимитни ҳисобланг.

**Ечилиши.** Қуйидаги белгилашларни киритамиз: $t=\varphi(x)=\dfrac{2x^2-8}{x-2}$,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
← →
⇤ ⇥
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$y=f(t)=\sqrt[3]{t}+3.$ $y=f(\varphi(x))=\sqrt[3]{\dfrac{2x^2-8}{x-2}}+3$ функция $(-\infty;\,2)\cup(2;\,+\infty)$ тўпламда аниқланган. 7.6- теорема шартларини текширамиз:

$$x\in \dot{U}_{\delta}(2)\Rightarrow\varphi(x)\neq 8,\quad \lim_{x\to 2}\varphi(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-8}{x-2}=8=c,\quad \lim_{t\to c}f(t)=\lim_{t\to 8}(\sqrt[3]{t}+3)=5$$

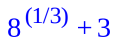
Демак, 7.6- теоремага асосан,

$$\lim_{x\to 2}(\sqrt[3]{\frac{2x^2-8}{x-2}}+3)=5$$

эканлиги келиб чиқади.

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
>limit(surd((2*x^2-8)/(x-2),3)+3,x=2);
```



$8^{(1/3)}+3$

**Эслатма.** Мураккаб функциянинг лимити мавжудлиги ҳақи даги 7.6- теорема етарли шарт бўлиб, зарурий шарт эмас. $y=f(\varphi(x))$ мураккаб функциянинг лимити мавжуд бўлиб, лекин $t=\varphi(x)$, $y=f(t)$ функцияларни ҳар бирининг лимити мавжуд бўлмаслиги ҳам мумкин. Масалсн,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q,\\ 0, & x\in I\end{cases}$$

бўлса, $D(D(x))=1$ бўлади. $\lim\limits_{x\to 0} D(x)$ мавжуд эмас, лекин $\lim\limits_{x\to 0} D(D(x))=1$ мавжуд.

**7.6. Ажойиб лимитлар.** Функциянинг лимитини ҳисоблашда қуйидаги ажойиб лимитлар муҳим рол ўйнайди:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1; \qquad \text{(V)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}=e \quad (e\approx 2{,}71828\ldots) \qquad \text{(VI)}$$

**7.6-эслатма**. Агар бирор $\dot{U}_\delta(x_0)$ атрофда $\alpha(x)\neq 0$ ва $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x\to x_0}(1+\alpha(x))^{1/\alpha(x)}=e \qquad (VI')$$

бўлади.

7.7-**эслатма**. Агар бирор $\dot{U}_\delta(x_0)$ атрофда $\alpha(x)\neq 0,\ \ \beta(x)\neq 0,$

$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$ ва $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lambda$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x\to x_0}(1+\alpha(x))^{1/\beta(x)}=e^{\lambda} \qquad (VI'')$$

бўлади.

Хусусий ҳолда,

$$\lim_{x\to x_0}(1+\mu\alpha(x))^{1/\alpha(x)}=e^{\mu}, \quad \mu=const. \qquad (VI''')$$

(VI) формуладан натижа сифатида келиб чиқадиган ушбу

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e, \qquad (VII)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}, \quad a>0,\ a\neq 1,$$

(VIII)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu, \qquad (IX)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a, \quad a>0, \qquad (X)$$

(хусусий ҳолда $a=e$ бўлганда)

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln(1+x)}{x}=1, \qquad \text{(XI)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1 \qquad \text{(XII)}$$

формулалар функция лимитини ҳисоблашда кўп қўлланилади.

**7.21- мисол**. Ушбу

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x},\quad (\beta\neq 0),\qquad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^{3}x},$$

$$3)\ \lim_{x\to\infty}x\sin\frac{\pi}{x},\qquad 4)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{\cos x}-2x\operatorname{tg}x\right)$$

лимитларни ҳисобланг.

**Ечилиши**. 1) Берилган $\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$ каср функциянинг шаклини алмаштирамиз:

$$\alpha\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\frac{1}{\beta\frac{\sin\beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}\frac{\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\frac{\sin\beta x}{\beta x}}.$$

У ҳолда( III), (IV) ва (V) формулаларга асосан,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\frac{\sin\beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}\frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> limit(sin(alpha*x)/sin(beta*x),x=0);
```

$$\frac{\alpha}{\beta}.$$

2) $$\frac{\mathrm{tg}\,x-\sin x}{\sin^3 x}=\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\sin^3 x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x\sin^2 x}=\frac{1}{2}\frac{\frac{\sin\frac{x}{2}}{x/2}\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{x/2}}{\cos x\frac{\sin x}{x}\,\frac{\sin x}{x}}$$

$\frac{x}{2}=y$ деб олиб, (II)-(V) формулаларни, ҳамда 7.18-мисолнинг В) бандини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\lim_{x\to0}\frac{tgx-\sin x}{\sin^3 x}=\frac{1}{2}.$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

```
> limit((tan(x)-sin(x))/(sin(x))^3,x=0);
```

$\frac{1}{2}$.

3) Бунда $\frac{1}{x}=y$ алмаштиришни бажарамиз. $x\to\infty$ да $y\to 0$.

$x\sin\frac{\pi}{x}=\pi\frac{\sin \pi y}{\pi y}$ ва (II), (V) формулаларни эътиборга олсак,

$$\lim_{x\leftarrow\infty} x\sin\frac{\pi}{x}=\lim_{y\leftarrow 0}\pi\frac{\sin \pi y}{\pi y}=\pi$$

эканлигини топамиз.

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> limit(x*sin(Pi/x),x=infinity);
```

$\pi$.

4) $\frac{\pi}{2}-x=y$ алмаштиришни бажарамиз:

$$\frac{\pi}{\cos x}-2xtgx=\frac{\pi-2x\sin x}{\cos x}=\frac{\pi-2(\frac{\pi}{2}-y)\cos y}{\cos(\frac{\pi}{2}-y)}=\frac{2y\cos y}{\sin y}=\frac{2\cos y}{\frac{\sin y}{y}}.$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

*В)* тасдиқни, ҳамда (IV), (V) формулани эътиборга олган ҳолда,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{\cos x}-2x\,\mathrm{tg}\,x\right)=\lim_{y\to0}\frac{2\cos y}{\frac{\sin y}{y}}=2.$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> limit(Pi/cos(x)-2*x*tan(x),x=Pi/2);
```

```
2.
```

**7.22- мисол**. Ушбу

$$1)\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)^{x^2},\qquad 2)\quad \lim_{x\to0}(\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}$$

лимитларни ҳисобланг.

**Ечилиши**. 1) $\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)^{x^2}=\dfrac{(1+\frac{4}{x^2})^{x^2}}{(1-\frac{4}{x^2})^{x^2}}$. Бу касрнинг сурат ва махражига

(VI$^{///}$) формулани қўлласак, натижада, (IV) формулага асосан,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{4}{x^2})^{x^2}}{(1-\frac{4}{x^2})^{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{4}{x^2})^{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{4}{x^2})^{x^2}} = \frac{e^4}{e^{-4}} = e^8$$

эканлигини топамиз.

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> limit(((x^2+4)/(x^2-4))^(x^2),x=infinity);
```

$$e^{8}$$

.

2) $\cos x = 1-2\sin^2\frac{x}{2}$ эканлигини эътиборга олиб, $(VI'')$ формулага асосан,

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{x^2}} = e^{\lambda},$$

бунда $\lambda = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{-x^2} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{2}.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Шундай қилиб, изланаётган лимит $e^{\frac{1}{2}}$ га тенг бўлар экан, яъни

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{-\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> limit((cos(x))^(-1/(x^2)),x=0);
```

$$\sqrt{e}.$$

**7.23- мисол**. Ушбу

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}\quad (a>0).$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x].$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}x}{x}.$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}x-1}{x^2}.$

5) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}\quad (a>0).$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos^{\mu}x)}{x^2}$ ($\mu$-ҳақиқий сон)

лимитларни ҳисобланг.

**Ечилиши**. 1) Берилган функциянинг шаклини қуйидагича ўзгартирамиз:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=\frac{\ln\frac{x}{a}}{x-a}=\frac{\ln[1+\frac{(x-a)}{a}]}{x-a}=\ln[1+(\frac{x-a}{a})]^{\frac{1}{x-a}}.$$

*Е)* тасдиқни эътиборга олган ҳолда, (VII) формулага асосан,

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=\lim_{x\to a}\ln[1+\frac{(x-a)}{a}]^{\frac{1}{x-a}}=\ln e^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}.$$

бўлиши келиб чиқади.

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> limit((ln(x)-ln(a))/(x-a),x=a);
```

$$\frac{1}{a}.$$

2) $$\sin\ln(1+x)-\sin\ln x=2\sin\frac{\ln(1+x)-\ln x}{2}\cos\frac{\ln(1+x)+\ln x}{2}=$$

$$=\frac{2}{x}\sin\frac{\ln(1+\frac{1}{x})^{x}}{2}\cos\frac{\ln x(x+1)}{2}\le\frac{2}{x}\sin\frac{\ln(1+\frac{1}{x})^{x}}{2}$$

тенгсизлик ўринли, чунки $\cos\frac{\ln x(x+1)}{2}\le 1.$

*А)* тасдиқни, (VI) формулани эътиборга олсак,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\ln(1+\frac{1}{x})^x}{2}=\sin\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$$

бўлгани учун изланаётган лимит 0 га тенг бўлади, яъни

$$\lim_{x\to\infty}[\sin\ln(1+x)-\sin\ln x]=0.$$

3) $\mathrm{sh}\,x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ формулани эътиборга олган ҳолда, берилган функциянинг шаклини ўзгартирамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sh}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2xe^x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x}\frac{e^{2x}-1}{2x}\right).$$

Равшанки, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e^x}=1.$ (XII) формулага асосан,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1.$$

Демак, (II) формулага асосан,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sh}\,x}{x}=1$$

эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

4) , 3) га асосан,

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{ch}x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

5) Берилган функциянинг шаклини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}=\frac{a^x(a^h-1+\frac{1}{a^h}-1)}{h^2}=\frac{a^x}{a^h}\frac{(a^h-1)}{h}\frac{(a^h-1)}{h}.$$

Бундан, $\lim\limits_{h\to0}\frac{a^x}{a^h}=a^x$ эканлигини, ҳамда (X) формулани эътиборга олган ҳолда, $\lim\limits_{h\to0}\frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}=a^x\ln^2 a$ эканлигини топамиз.

6) Лимити изланаётган функциянинг шаклини қуйидагича ўзгартирамиз:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\frac{1-\cos^{\mu} x}{x^2} = -\frac{(-1+\cos^{\mu} x)}{x^2} = -\frac{[1+(\cos x-1)]^{\mu}-1}{x^2} =$$

$$= \frac{[1+(\cos x-1)]^{\mu}-1}{\cos x-1}. \quad \frac{1-\cos x}{x^2} =$$

$$= \frac{[1+(\cos x-1)]^{\mu}-1}{\cos x-1} \cdot \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}.$$

Бунда, $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-1)=0$ эканлигини, ҳамда (V) ва (IX) формулаларни ҳисобга олган ҳолда, (II) формулага биноан,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos^{\mu} x)}{x^2} = \frac{\mu}{2}$$

эканлигини топамиз.

Иккита $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $X$ $(X\subset R)$ тўпламда берилган бўлиб, $f(x)>0$, $x\in X$, ҳамда $a$ нуқта $X$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу ҳолда даража - кўрсаткичли функциянинг лимити, *D)* ва *E)* тасдиқларни ҳисобга олган ҳолда,

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[g(x)\ln f(x)]} \qquad \text{(XIII)}$$

формула орқали топилади, яъни даража кўрсаткичли функциянинг лимитини

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

топиш масаласи $\lim\limits_{x\to a}[g(x)\ln f(x)]$ лимитни топишга олиб келинар экан. Бу лимитни ҳисоблашда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин.

I. Агар $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x) = B$ бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = e^B$ ва

$$e^{\lim\limits_{x\to a}[g(x)\ln f(x)]} = e^{AB} = (e^B)^A = [\lim_{x\to a} f(x)]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

формула ўринли бўлади.

II. Агар $\lim\limits_{x\to a}[g(x)\ln f(x)] = +\infty$ бўлса, у ҳолда $e^{\lim\limits_{x\to a}[g(x)\ln f(x)]} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a}[g(x)\ln f(x)] = -\infty$ бўлганда эса, $e^{\lim\limits_{x\to a}[g(x)\ln f(x)]} = 0$ бўлади.

Агар $\lim\limits_{x\to a}[g(x)\ln f(x)] = \infty$ ва бирор $\dot{U}_\delta(a)$ атрофда $g(x)\ln f(x)$ кўпайтма функциянинг ишораси сақланмаса, у ҳолда $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$ функция $x \to a$ да лимитга эга бўлмайди.

III. $g(x)\ln f(x)$ кўпайтманинг $x \to a$ да бирининг лимити нул, иккинчисининг лимити эса чексиз бўлса, бу ҳолда, қуйидаги уч ҳол бўлиши мумкин:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$a)\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty \quad (\infty^0),$

$b)\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to a} f(x)=0 \quad (0^0),$

$c)\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty,\quad \lim\limits_{x\to a} f(x)=1 \quad (1^\infty).$

Бу ҳолларда даража-кўрсаткичли функциянинг лимитини топишда бирданига 7.4- теоремани қўллаб бўлмайди.

Бу ҳолларда $\infty^0$, $0^0$, $1^\infty$ кўринишдаги аниқмасликлар пайдо бўлади.

**7.24-мисол.** Ушбу

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{\operatorname{ctg}\pi x}$$

лимитни топинг.

**Ечилиши.** $\lim\limits_{x\to 1}\ln\dfrac{x^2}{x^2+1}=\ln\dfrac{1}{2},\quad \lim\limits_{x\to 1}\operatorname{ctg}\pi x=\infty$ бўлгани учун

$$\lim_{x\to 1}\left[\ln\frac{x^2}{x^2+1}\operatorname{ctg}\pi x\right]=\infty.$$

$0<x<1$ бўлганда $\ln\dfrac{x^2}{x^2+1}\operatorname{ctg}\pi x>0$, $1<x<2$ бўлганда эса,

$$\ln\frac{x^2}{x^2+1}\operatorname{ctg}\pi x<0.$$

Демак, $\ln\frac{x^2}{x^2+1}\operatorname{ctg}\pi x$ функция $\dot{U}_\delta(1)$ атрофда ҳар хил ишорали қийматларни қабул қилади.

Шунинг учун $\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{\operatorname{ctg}\pi x}=e^{\operatorname{ctg}\pi x\ln\frac{x^2}{x^2+1}}$ функция $x\to1$ да лимитга эга эмас, лекин $\lim\limits_{x\to1+0}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{ctg\pi x}=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to1-0}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{ctg\pi x}=0.$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> limit(((x^2)/(x^2+1))^(1/(tan(Pi*x))),x=1,right);
```

```
0
```

```
> limit(((x^2)/(x^2+1))^(1/(tan(Pi*x))),x=1,left);
```

$\infty$ .

**7.25- мисол**. Ушбу

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$$

лимитни топинг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**Ечилиши.** *D), E)* тасдиқлар ҳамда, (I) формулага асосан,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}e^{x^2\ln\frac{x+2}{2x+1}},$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x+2}{2x+1}=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2,\quad \lim_{x\to\infty}x^2=+\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\left[x^2\ln\frac{x+2}{2x+1}\right]=-\infty$$

бўлгани учун, II ҳолни эътиборга олган ҳолда

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}=0$$

бўлади.

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> limit(((x+2)/(2*x+1))^(x^2),x=infinity);
```

```
0
```

**7.8-эслатма.** Агар $\lim_{x\to a}f(x)=1,\ \lim_{x\to a}g(x)=\infty$ бўлса, у ҳолда $1^{\infty}$ кўринишдаги аниқмаслик, (I) формулани эътиборга олган ҳолда,

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\lim_{x\to a}\left\{[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{(f(x)-1)g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)g(x)}$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

(XIV)

формула ёрдамида очилади.

**7.26-мисол.** Ушбу

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4+4}{x^4-5}\right)^{x^4}$$

лимитни топинг.

**Ечилиши**. Бу ҳолда,

$$f(x)=\frac{x^4+4}{x^4-5},\quad g(x)=x^4,\quad [f(x)-1]g(x)=\left[\frac{x^4+4}{x^4-5}-1\right]x^4=\frac{9x^4}{x^4-5}.$$

Шундай қилиб, (XIV) формулага биноан,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4+4}{x^4-5}\right)^{x^4}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^4}{x^4-5}}=e^9.$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> limit((((x^4)+4)/(x^4-5))^(x^4),x=infinity);
```

$e^{9}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**7.27-мисол.** Ушбу $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}$ лимитни топинг.

**Ечилиши.** Худди 7.26- мисолдагидек,

$$f(x)=\cos x,\quad g(x)=-\frac{1}{x^2},$$

$$-[f(x)-1]\frac{1}{x^2}=\frac{(1-\cos x)}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

(XIV) формулага асосан,

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x/2}\right)^2}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

**7.28- мисол**. Ушбу

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}2\mathrm{x}}{\mathrm{x}}$$

лимитни ҳисобланг.

**Ечилиши.** Бунда, $y=\mathrm{arctg}\,2x$ алмаштиришни бажарамиз, бундан

$$2x=\operatorname{tg}y,\quad x=\frac{\operatorname{tg}y}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}2x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{2y}{\operatorname{tg}y}=\lim_{y\to 0}\frac{2\cos y}{\dfrac{\sin y}{y}}$$

эга бўламиз. 7.6- теорема билан 7.4-эслатмани, ҳамда $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$ эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда 7.4- теоремага асосан

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}2x}{x}=2\frac{\lim\limits_{y\to 0}\cos y}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}}=2$$

эканлиги келиб чиқади.

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> limit(arctan(2*x)/x,x=0);
```

```
2.
```

**7.7. Чексиз катта ва чексиз кичик функциялар.** $X$ тўплам берилган бўлиб, $a$ унинг лимит нуқтаси бўлсин. $X$ тўпламда $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ функциялар берилган бўлсин.

**7.11-таъриф.** Агар $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ бўлса, $\alpha(x)$ функция $x\to a$ да *чексиз кичик функция* дейилади.

Масалан, $\alpha(x)=(a-x)^m$ ($m$- ихтиёрий бутун мусбат сон) функция $x\to a$ да чексиз кичик бўлади, чунки $\lim\limits_{x\to a}(a-x)^m=0.$

Агар $X$ тўпламда аниқланган $f(x)$ функция $x\to a$ да $b$ лимитга эга бўлса, у ҳолда $\alpha(x)=f(x)-b$ функция $x\to a$ да чексиз кичик функция бўлади, чунки $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to a}(f(x)-b)=\lim\limits_{x\to a} f(x)-b=0.$

Демак, $b$ лимитга эга бўлган ҳар қандай $f(x)$ функцияни

$$f(x)=b+\alpha(x) \qquad (1)$$

кўринишда тасвирлаш мумкин, бу ерда $\alpha(x)$ чексиз кичик функция.

**7.12- таъриф.** Агар $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=\infty$ бўлса, $\beta(x)$ функция $x\to a$ да *чексиз катта функция* дейилади.

Масалан, $\beta(x)=\dfrac{1}{(1-x)^4}$ функция $x\to 1$ да чексиз катта функция бўлади.

Чексиз кичик ва чексиз катта функциялар қуйидаги хоссаларга эга:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$1^0$. Чексиз кичик функцияларнинг йиғиндиси (айирмаси) чексиз кичик функция бўлади.

$2^0$. Чексиз кичик функция билан чегараланган функцияларнинг кўпайтмаси чексиз кичик бўлади.

$3^0$. Агар $\alpha(x)$ $(\alpha(x) \neq 0)$ чексиз кичик функция бўлса, $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ чексиз катта функция бўлади.

$4^0$. Агар $\beta(x)$ чексиз катта функция бўлса, $\dfrac{1}{\beta(x)}$ чексиз кичик функция бўлади.

$5^0$. Агар $x \to a$ да $f(x)$ чексиз катта функция бўлса, $g(x)$ эса бирор $U_\delta(a)$ да $|g(x)| > c$ $(x \neq a,\ c$ - бирор мусбат сон) бўлса, у ҳолда $f(x)g(x)$ чексиз катта функция бўлади.

**Эслатма.** Чексиз катта функцияларнинг йиғиндиси (айирмаси) ва нисбати чексиз катта функция бўлмаслиги ҳам мумкин. Масалан. $x \to 0$ да $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ва $g(x) = -\dfrac{1}{x}$ функцияларнинг ҳар бири чексиз катта функциялар бўлса ҳам, уларнинг йиғиндиси, $x \to 0$ да чексиз катта функция бўлмайди,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

чунки $\lim\limits_{x\to0}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)=0.$ $x\to0$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар чексиз катта функциялар бўлса, $\lim\limits_{x\to0}(f(x)\pm g(x))$ ни ҳисоблашда I қоидани қўллаб бўлмайди. Бу ҳолда, бу лимит $\infty-\infty$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалайди. Худди шундай, $x\to a$ да $\frac{f(x)}{g(x)}$ ифоданинг лимити ҳам $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалайди.

Агар $x\to a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар чексиз кичик функциялар бўлса, уларнинг нисбати $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалайди.

**7.29-мисол**. Қуйидаги функцияларнинг қайси бири чексиз кичик функция бўлади:

1) $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}, \quad x\to1;$ 2) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x, \quad x\to+\infty;$

3) $f(x)=\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^4+x^2+1)}, \quad x\to\infty;$

4) $f(x)=\frac{1}{1+2^x}; \quad a)\ x\to+\infty, \quad b)\ x\to-\infty.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**Ечилиши.** 1) $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\frac{(x-1)^2}{x(x^2-1)}=\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}=\frac{(x-1)}{x}\frac{1}{x+1}$.

Демак, берилган $f(x)$ функция, иккита $\frac{x-1}{x}$ ва $\frac{1}{x+1}$ функцияларнинг кўпайтмаси шаклида тасвирланди. Булардан бири $\frac{1}{x+1}$ функция $U_\delta(1)$ атрофда чегараланган. Масалан, $U_{\frac{1}{2}}(1)$ атрофда $\frac{1}{x+1}<1$. Иккинчиси $\frac{x-1}{x}$, $x\to1$ да, чексиз кичик функция бўлади.

Шундай қилиб, берилган функция $2^0$- хоссага асосан, $x\to1$ да чексиз кичик функция бўлар экан.

2) Берилган функциянинг шаклини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\sqrt{x^2+1}-x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}.$$

Бундан, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=0.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Демак, 7.11-таърифга кўра, берилган функция $x \to \infty$ да чексиз кичик функция бўлади.

3) Ушбу $f(x) = \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^4 + x^2 + 1)}$ берилган функциянинг шаклини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^4 + x^2 + 1)} = \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^2 - x + 1) + \ln(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{1 + \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{\ln(x^2 - x + 1)}}.$$

Бунда, $D$) ва $E$) тасдиқларни инобатга олган ҳолда,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{\ln(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x^2 + x + 1)^{\frac{1}{x^2}}}{\ln(x^2 - x + 1)^{\frac{1}{x^2}}} = 1$$

бўлади.

Шундай қилиб, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{\ln(x^2 - x + 1)}} = \frac{1}{2.}$

Демак, берилган функция $x \to \infty$ да чексиз кичик функция бўлмас экан.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

4). *a)* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+2^x}=0,$ чунки $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x=+\infty.$

Демак, бу ҳолда берилган функция $x\to+\infty$ да чексиз кичик функция бўлади.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+2^x}=1,$ чунки $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x=0.$

Бу ҳолда берилган функция $x\to-\infty$ да чексиз кичик функция эмас.

**7.30-мисол**. Ушбу

$$f(x)=\frac{x^3-8}{x^2-5x+6}$$

функциянинг $x\to3$ да чексиз катта функция эканлигини кўрсатинг.

**Ечилиши.** Берилган функцияни $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ ва $g(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$ кўринишда тасвирлаймиз. Бунда $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ функция $x\to3$ да чексиз катта функция, $g(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$ функция эса, $x=2$ нуқтанинг бирор атрофида, масалан, $\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{7}{2}\right)$ атрофда

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$|g(x)| = \left|\frac{x^3-8}{x-2}\right| = \left|x^2+2x+4\right| > \frac{61}{4}$$

шартни қаноатлантиради.

Шундай қилиб, $5^0$- хоссага кўра, берилган функция $x \to 3$ да чексиз катта функция бўлар экан.

**7.31- мисол**. Ушбу функцияларнинг қайси бирлари чексиз катта функция бўлади:

$$1)\ \ f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6} - \frac{1}{x^2+x-12},\ \ x \to 3;$$

$$2)\ \ f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}},\ \ x \to \frac{\pi}{2};$$

$$3)\ \ f(x) = (1-x)^{1/x^2},\ \ a)\ \ x \to +0,\ \ b)\ \ x \to -0.$$

**Ечилиши.** 1) Берилган функциянинг шаклини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$x^2-5x+6 = (x-3)(x-2),\ \ \ x^2+x-12 = (x-3)(x+4)$$

эканлигини эътиборга олган ҳолда, берилган функция учун

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$f(x)=\frac{1}{(x-3)}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+4}\right]=\frac{1}{(x-3)}\frac{6}{(x-2)(x+4)}$$

ифодага эга бўламиз. Бундан,

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)}\cdot\lim_{x\to 3}\frac{6}{(x-2)(x+4)}=\infty.$$

Демак, берилган функция $x\to 3$ да чексиз катта функция бўлади.

2) Берилган функцияни ушбу

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}=\frac{\sqrt{1-\sin x}\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}=\frac{\sqrt{1+\sin x}}{(1-\sin x)^{1/6}}$$

кўринишда тасвирлаймиз ва унинг $x\to\frac{\pi}{2}$ даги лимитини ҳисоблаймиз:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1+\sin x}}{(1-\sin x)^{1/6}}=\infty.$$

Демак, берилган функция $x\to\frac{\pi}{2}$ да чексиз катта функция бўлади.

3) (XIV) формулага асосан, *a)* ва b*)* ҳолларда берилган функциянинг лимитини топамиз:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

a) $$\lim_{x\to 0+0}(1-x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0}(-x\frac{1}{x^2})} = 0,$$

b) $$\lim_{x\to 0-0}(1-x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0-0}(-x\frac{1}{x^2})} = e^{\infty} = \infty.$$

Демак, *а)* ҳолда, берилган функция чексиз катта эмас, b*)* ҳолда эса, чексиз катта функция бўлади.

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

*a*)

```
>Limit((1-x)^(1/x^2),x=0,right)=limit((1-
x)^(1/x^2),x=0,right);
```

$$\lim_{x\to +0}(1-x)^{\frac{1}{x^2}} = 0.$$

*b*)

```
> Limit((1-x)^(1/x^2),x=0,left)=limit((1-
x)^(1/x^2),x=0,left);
```

$$\lim_{x\to -0}(1-x)^{\frac{1}{x^2}} = \infty.$$

### 7.8. Функцияларни солиштириш. $O(f)$ ва $o(f)$ белгилар.

$X$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

тўпламда $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар аниқланган бўлсин. Бирор $a$ нуқтанинг $U_\delta(a)$ атрофида $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларни солиштирамиз.

**7.13- таъриф.** Агар шундай $\delta>0$ ва $C>0$ ўзгармас сонлар мавжуд бўлиб, $\forall x\in U_\delta(a)$ учун

$$|f(x)|\le C|g(x)| \qquad (1)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $x\to a$ да $f(x)$ функция $g(x)$ функцияга нисбатан чегараланган дейилади ва $f(x)=\mathrm{O}(g(x))$ каби ёзилади.

Худди шундай $x\to a+0,\ x\to a-0,\ x\to\infty,\ x\to-\infty$ да ҳам $f(x)=\mathrm{O}(g(x))$ каби ёзув сақланади.

Хусусий ҳолда, $f(x)$ функция $\dot{U}_\delta(a)$ атрофда чегараланган бўлса, у $x\to a$ да $f(x)=\mathrm{O}(1)$ каби ёзилади.

**7.14-таъриф.** Агар $x\to a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун $f(x)=\mathrm{O}(g(x))$ ва $g(x)=\mathrm{O}(f(x))$ муносабатлар ўринли бўлса, у ҳолда $x\to a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар бир хил тартибли функциялар деб аталади ва $f(x)\asymp g(x),\ x\to a$ каби белгиланади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**7.7-теорема.** Агар $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=k$ мавжуд бўлиб, $k\neq 0$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $x\to a$ да бир хил тартибли функциялар бўлади.

**7.32-мисол**. Қуйидаги функциялар жуфтининг қайси бирлари $x\to 0$ да бир хил тартибли функциялар бўлади:

1) $f(x)=2\cos x,\ \ g(x)=x^2+4;$ 2) $f(x)=\frac{2}{x},\ \ g(x)=\frac{1}{2^x-1};$

3) $f(x)=x^2(3+\cos\frac{1}{x}),\ \ g(x)=x^2;$ 4) $f(x)=3^{\sin x}-1,\ \ g(x)=\sin x.$

**Ечилиши.** 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos x}{x^2+4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\neq 0$ бўлгани учун 7.4- теоремага асосан, $x\to 0$ да $2\cos x\asymp x^2+4.$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{2^x-1}}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}=2\ln 2\neq 0$ бўлгани учун 7.4- теоремага асосан, $x\to 0$ да $\frac{2}{x}\asymp\frac{1}{2^x-1}.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(3+\cos\frac{1}{x})}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}(3+\cos\dfrac{1}{x})$. Бу ҳолда лимит мавжуд эмас, лекин берилган функциялар бир хил тартибли бўлади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=3+\cos\frac{1}{x}\le 4,\quad x\ne 0.$$

Бундан, $|f(x)|\le 4|g(x)|$.

Демак, (1) шарт $C=4$ бўлганда бажарилади. Шундай қилиб, $f(x)=x^2(3+\cos\dfrac{1}{x})$ функция $g(x)=x^2$ функцияга нисбатан $x\to 0$ да чегараланган бўлади.

Иккинчи томондан, $\left|\dfrac{g(x)}{f(x)}\right|=\dfrac{1}{3+\cos\frac{1}{x}}\le 1,\ \ x\ne 0.$

Бундан, $|g(x)|\le|f(x)|$. Бу ҳолда (1) шарт $C=1$ бўлганда бажарилади.

Демак,7.14- таърифга кўра, $x\to 0$ да $x^2(3+\cos\dfrac{1}{x})\asymp x^2$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Бу мисолдан кўринадики, 7.7- теорема берилган функцияларнинг $x\to a$ да бир хил тартибли бўлиши учун етарли шарт бўлиб, зарурий шарт бўла олмас экан.

4) (X) формулага асосан, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{\sin x}-1}{\sin x}=\ln 3\neq 0.$

Демак, 7.7- теоремага биноан, $x\to 0$ да $3^{\sin x}-1\asymp\sin x$ бўлади.

**7.15-таъриф.** Агар бирор $\dot{U}_\delta(a)$ атрофда аниқланган $f(x)$ ва $g(x)$ чексиз кичик функциялар учун

$$f(x)=\varphi(x)g(x)$$

тенглик ўринли бўлиб, бунда $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ бўлса, у ҳолда $x\to a$ да $f(x)$ функция $g(x)$функцияга нисбатан юқори тартибли чексиз кичик функция дейилади ва у

$$f(x)=o(g(x))$$

каби белгиланади.

Хусусий ҳолда, $g(x)=1$ бўлса, $x\to a$ да $f(x)=o(1)$ ифода $f(x)$ функциянинг чексиз кичик функция эканлигини англатади ( $x\to a$ да

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$f(x)\to 0$).

Худди юқоридагидек, $f(x)=o(g(x))$ символик ифоданинг мазмуни $x\to a-0,\ \ x\to a+0,\ \ x\to\infty,\ \ x\to+\infty,\ \ x\to-\infty$ да ҳам сақланади.

**7.8-теорема.** $x\to a$ да $f(x)$ функция $g(x)$ чексиз кичик функцияга нисбатан юқори тартибли чексиз кичик функция бўлиши учун, $\forall x\in\dot{U}_{\delta}(a)$ учун $g(x)\neq 0$ бўлиб,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

тенглик ўринли бўлиши зарур ва етарли.

**7.33-мисол**. Қуйидаги тасдиқларнинг қайси бирлари тўғри, қайси бирлари нотўғри эканлигини исботланг:

1) $1-\cos x=o(x),\ \ x\to 0;$ 2) $1+x^2=o(\frac{1}{x^2}),\ \ x\to 0;$

3) $x=o(\sin^2 x),\ \ x\to 0;$ 4) $x^2D(x)=o(xD(x)),\ \ x\to 0.$ ($D(x)$ - Дирихле функцияси)

**Ечилиши.** 1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}\cdot\frac{x}{2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=0$ бўлгани учун 7.8-теоремага асосан, $1-\cos x=o(x)$ тасдиқ ўринли бўлади.

2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x^2)}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}x^2(1+x^2)=0.$ Демак, тасдиқ тўғри.

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin^2 x}\neq0.$ Бу ҳолда, тасдиқ нотўғри.

4) Бу ҳолда, $g(x)=xD(x)$ функция $x\to0$ да нулга тенг. Шундай $\varphi(x)=x$ функция мавжудки, $f(x)=\varphi(x)g(x)$ тенглик ўринли бўлиб, $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=0$ бўлади.

Демак, 7.15- таърифга асосан, 4) тасдиқ тўғри.

**7.16- таъриф.** Агар бирор $\dot{U}_\delta(a)$ атрофда аниқланган $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун

$$f(x)=\varphi(x)g(x)$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

тенглик ўринли бўлиб, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=1$ бўлса, $x\to a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар *ўзаро эквивалент функциялар* деб аталади ва $x\to a$ да $f(x)\sim g(x)$ деб белгиланади.

**7.6- теорема.** $x\to a$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $\dot{U}_{\delta}(a)$ да $(g(x)\neq 0,\ f(x)\neq 0)$ ўзаро эквивалент бўлиши учун

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=1$$

бўлиши зарур ва етарли.

Одатда, эквивалентлик тушунчаси $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар чексиз кичик ва чексиз катта бўлган ҳолларда ишлатилади.

Функцияларнинг эквивалентлиги тушунчаси қуйидаги содда хоссаларга эга:

$1^0$). $x\to a$ да $f(x)\sim f(x)$.

$2^0$).Агар $f(x)\sim g(x)$ бўлса, $g(x)\sim f(x)$ ҳам бўлади.

$3^0$). $x\to a$ да $f(x)\sim g(x)$,ва $g(x)\sim h(x)$ бўлса, у ҳолда $f(x)\sim h(x)$ бўлади.

$4^0$). Агар $f(x)\sim g(x)$ бўлса, у ҳолда $f(x)=O(g(x))$ бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$5^0$). Агар $f(x)\sim g(x)$ ва $h(x)\sim S(x)$ бўлса, $f(x)h(x)\sim g(x)S(x)$ бўлади.

$6^0$). Агар $\lim\limits_{x\to a} f(x)=k\neq 0$ бўлса, $f(x)\sim k$ бўлади.

Бу хоссалардан қуйидаги муносабат келиб чиқади: агар $f(x)\sim g(x)$ бўлса, у ҳолда

$$f(x)-g(x)=o(g(x)) \text{ ёки } \qquad f(x)=g(x)+o(g(x)) \qquad\qquad (*)$$

ўринли бўлади. Агар $f(x)$ функция (*) кўринишда тасвирланган бўлса, у ҳолда $g(x)$, $x\to a$ да $f(x)$ нинг бош қисми деб аталади.

Функцияларнинг лимитини ҳисоблашда қуйидаги $x\to 0$ да эквивалент функциялар кўпроқ ишлатилади.

$$x\sim \sin x\sim tgx\sim \arcsin x\sim \text{arctg}\, x\sim \ln(1+x)\sim e^x-1. \qquad\qquad \text{(XVII)}$$

**7.34- мисол**. Қуйидаги $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар жуфтининг қайси бирлари эквивалент:

1) $f(x)=\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$; $a)$ $g(x)=x^{\frac{1}{8}}$, $x\to +0$, $b)$ $g(x)=\sqrt{2}x$, $x\to +\infty$;

2) $f(x)=1-\cos(1-\cos\frac{1}{x})$, $g(x)=\frac{1}{8}x^{-4}$, $x\to\infty$;

3) $f(x)=x^3-x^2-x+1$, $g(x)=x^3-x$, $a)$ $x\to 1$, $b)$ $x\to +\infty$;

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

4) $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+2},\quad g(x)=\frac{3}{x};\ a)\ \ x\to 1,\ b)\ \ x\to\infty.$

**Ечилиши.** 1) $a)$ $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x^{1/8}}=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{x^{1/8}\sqrt{2x^{\frac{3}{4}}+\sqrt{\sqrt{x}+1}}}{x^{1/8}}=1.$

Демак, $x\to 0+0$ да $\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim x^{1/8}.$

$$b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}}{\sqrt{2}}=1.$$

7.9- теоремага асосан, $x\to+\infty$ да $\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{2}\sqrt{x}.$

2) $A)$ тасдиқни ҳамда

$$1-\cos\frac{1}{x}=2\sin^2\frac{1}{2x},\quad 1-\cos(2\sin^2\frac{1}{2x})=2\sin^2(\sin^2\frac{1}{2x})$$

формулаларни эътиборга олганда,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos(1-\cos\frac{1}{x})}{\frac{1}{8}x^{-4}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin(\sin^2\frac{1}{2x})}{\sin^2\frac{1}{2x}}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}}\right)^4=1$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

эга бўламиз.

Демак, берилган функциялар $x \to +\infty$ да эквивалент бўлар экан.

$$3)\ a)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-x}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-1)}{x(x^2-1)}=0.$$

Демак, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-x}=0\neq 1$ бўлгани учун берилган функциялар ўзаро эквивалент эмас, яъни эквивалентлик шартини қаноатлантирмайди.

$$b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x}=1.$$

Бу ҳолда берилган функциялар $x \to \infty$ да эквивалент бўлар экан.

$$4)\ a)\ \lim_{x\to 1}\frac{(2x+1)x}{3(x^2+2)}=\frac{1}{3}\neq 1.$$

Шундай қилиб, $x \to 1$ да $\dfrac{2x+1}{x^2+2}$ ва $\dfrac{3}{x}$ функциялар эквивалент эмас. $x \to 1$ да бир хил тартибли функциялар бўлади.

$$b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)x}{3(x^2+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{3+\frac{6}{x^2}}=\frac{2}{3}\neq 1.$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Бу ҳолда ҳам берилган функциялар эквивалент эмас. 7.7-теоремага кўра, улар $x \to \infty$ да бир хил тартибли функциялар бўлади.

Иккита функция нисбатининг лимитини топишда қуйидаги теорема муҳим рол ўйнайди.

**7.10 -теорема.** Агар $x \to a$ да $f(x) \sim f_1(x)$ ва $g(x) \sim g_1(x)$ бўлиб, қуйидаги

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

лимит мавжуд бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ лимит ҳам мавжуд бўлади ва

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

тенглик ўринли бўлади.

**7.34-мисол**. Ушбу лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 2x + \arcsin^2 x + 2\,\mathrm{arctg}\, x^2}{7x^2}$$

**Ечилиши.** $x \to 0$ да $\sin 2x \sim 2x$, $\arcsin x \sim \mathrm{x}$, $\mathrm{arctg} x^2 \sim x^2$ бўлгани учун (*) формулани эътиборга олсак, у ҳолда,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\sin 2x = 2x + o(2x),\ \arcsin x = x + o(x),\ \ \mathrm{arctg}\, x^2 = x^2 + o(x^2).$$

Шундай қилиб,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x + \arcsin^2 x + 2\,\mathrm{arctg}\, x^2}{7x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4x^2 + o(4x^2) + x^2 + o(x^2) + 2x^2 + o(x^2)}{7x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{7 + \dfrac{o(4x^2)}{x^2} + \dfrac{o(x^2)}{x^2} + \dfrac{o(x^2)}{x^2}}{7} = 1.$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> limit(((sin(2*x))^2+
  (arcsin(x))^2+2*arctan(x^2))/(7*x^2),x=0);
```

```
1
.
```

**7.9. Функциянинг юқори ва қуйи лимити.** $f(x)$ функция $X$ $(X \subset R)$ тўпламда аниқланган бўлиб, $a$ нуқта $X$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

**7.17- таъриф.** Агар $X$ тўпламнинг элементларидан тузилган ва $x_n \to a$ шундай $\{x_n\}$ $(x_n \neq a,\ n = 1,2,\ldots)$ кетма-кетлик мавжуд бўлиб, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$ бўлса, $b$ сон $f(x)$ функциянинг $x \to a$ даги *қисмий лимити* деб аталади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Чексиз ва бир томонли қисмий лимитлар ҳам, худди шундай таърифланади.

Функциянинг қисмий лимитлари ичида ҳар доим энг каттаси ва энг кичиги топилади. Улар мос равишда функциянинг юқори ва қуйи лимити деб аталади ва $\overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)$, $\underline{\lim\limits_{x\to a}}\, f(x)$ каби белгиланади.

$\overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x) = \underline{\lim\limits_{x\to a}}\, f(x)$ тенгликнинг бажарилиши функциянинг лимитга эга бўлиши учун зарурий ва етарли шарт бўлиб ҳисобланади.

**7.35- мисол**. Ушбу

$$f(x) = \sin^2\frac{1}{x} + \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

функциянинг $x \to 0$ да юқори ва қуйи лимитини топинг.

**Ечилиши.** $x = x_n = -\dfrac{1}{n\pi}$ $(n = 1,2,\ldots)$ қийматда

$$\inf\left\{\sin^2\frac{1}{x}\right\} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x_n} = \inf\{\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\} = -1$$

бўлгани учун

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\varliminf_{x\to 0} f(x) = \varliminf_{x\to 0}\left[\sin^2\frac{1}{x} + \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sin^2 n\pi + \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(-n\pi)\right] = -1.$$

Худди шундай, $x = x_n = -\dfrac{2}{\pi(1+2n)}$ $(n = 1,2,\ldots)$ бўлганда

$$\sup\{\sin^2\frac{1}{x}\} = 1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x_n} = \sup\{\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\} = 1$$

бўлгани учун

$$\varlimsup_{x\to a} f(x) = \varlimsup_{x\to a}\left[\sin^2\frac{1}{x} + \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sin^2\frac{\pi(1+2n)}{2} + \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi(1+2n)}{n}\right] = 1+1 = 2.$$

## Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

$\delta$ нинг қандай қийматларида $0 < |x - x_0| < \delta$ эканлигидан $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенгсизликнинг ўринлилиги келиб чиқади?

**7.1.** $f(x) = 3x - 2;\quad x_0 = 1;\ b = 1;\ \varepsilon = 0{,}001.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**7.2.** $f(x)=x^2;\ \ x_0=2;\ b=4;\ \varepsilon=0{,}001.$

**7.3.** $f(x)=\sqrt{x};\ \ x_0=a;\ b=\sqrt{a};\ \varepsilon=0{,}01.$

**7.4.** $f(x)=3x^2-2;\ \ x_0=2;\ b=10;\ \varepsilon=0{,}01.$

**7.5.** $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3};\ \ x_0=3;\ b=\dfrac{1}{2};\ \varepsilon=0{,}01.$

**7.6.** $f(x)=signx;\ \ x_0=0;\ b=1;\ \varepsilon=1{,}5.$

**7.7.** $f(x)=\sin x;\ \ x_0=\dfrac{\pi}{2};\ b=1;\ \varepsilon=0{,}01.$

**7.8.** $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1};\ \ x_0=2;\ b=\dfrac{3}{5};\ \varepsilon=0{,}1.$

**7.9.** $f(x)=\dfrac{x-1}{2(x+1)};\ \ x_0=3;\ b=\dfrac{1}{4};\ \varepsilon=0{,}01.$

**7.10.** $f(x)=|1-3x|;\ \ x_0=2;\ b=5;\ \varepsilon=0{,}01.$

$x\to x_0$ да $f(x)$ функциянинг чексиз катта эканлиги маълум. $|f(x)|>E$ тенгсизлик ўринли бўлиши учун $x$ қандай бўлиши лозим.

**7.11.** $f(x)=\dfrac{2+3x}{x};\ \ x_0=0;\ E=10^3.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**7.12.** $f(x)=\dfrac{x+2}{x-4};\quad x_0=4;\ E=1000.$

**7.13.** $f(x)=\dfrac{1}{e^x-1};\quad x_0=0;\ E=1000.$

**7.14.** $f(x)=\dfrac{1}{x-2};\quad x_0=2;\ E=100.$

**7.15.** $f(x)=\lg x;\quad x_0=+\infty;\ E=100.$

Функция лимитининг Гейне таърифидан фойдаланиб, қуйидаги лимитларни топинг.

**7.16.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{5x+3}.$ **7.17.** $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x}.$

**7.18.** $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x}.$ **7.19.** $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{arcctg}\dfrac{1}{x}.$

Функция лимитининг Гейне таърифидан фойдаланиб, қуйидаги лимитларнинг мавжуд эмаслигини исботланг:

**7.20.** $\lim\limits_{x\to 2}\sin\dfrac{1}{x-2}.$ **7.21.** $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x.$ **7.22.** $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}.$

**7.23.** $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x.$ **7.24.** $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{arcctg}\dfrac{1}{x}.$ **7.25.** $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{sign}(\sin\dfrac{1}{x}).$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Қуйидаги муносабатларни таъриф ёрдамида ёзинг ва тегишли мисоллар келтиринг.

**7.26.** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b.$

**7.27.** $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b.$

**7.28.** $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b.$

**7.29.** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b.$

**7.30.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b.$

**7.31.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b.$

**7.32.** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty.$

**7.33.** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty.$

**7.34.** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty.$

**7.35.** $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=-\infty.$

**7.36.** $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty.$

**7.37.** $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty.$

**7.38.** $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty.$

**7.39.** $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty.$

**7.40.** $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty.$

**7.41.** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty.$

**7.42.** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty.$

**7.43.** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty.$

**7.44.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty.$

**7.45.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.$

**7.46.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty.$

**7.47.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**7.48.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$ **7.49.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$

**7.50.** Ушбу $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 3,\ \lim\limits_{x\to c} g(x) = -2,\ \lim\limits_{x\to c} h(x) = 0$ лимитлар берилганда, қуйидаги мавжуд лимитларни ҳисобланг, агар лимит мавжуд бўлмаса, нима учун мавжуд эмаслигини изоҳланг.

1) $\lim\limits_{x\to c}[f(x) - g(x)].$ 2) $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^2.$ 3) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}.$

4) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{h(x)}{g(x)}.$ 5) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{h(x)}.$ 6) $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\cdot h(x)].$

7) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x) - h(x)}.$ 8) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{1}{f(x) - g(x)}.$

**7.51.** Ушбу $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 5,\ \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to c} h(x) = -5$ лимитлар берилганда, қуйидаги лимитларни ҳисобланг, агар лимит мавжуд бўлмаса, нима учун мавжуд эмаслигини изоҳланг.

1) $\lim\limits_{x\to c}[2f(x) - 3h(x)].$ 2) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{x - c}.$ 3) $\lim\limits_{x\to c}[h(x)]^2.$

4) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{3}{f(x) + h(x)}.$ 5) $\lim\limits_{x\to c}[3 + g(x)]^3.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Қуйидаги лимитларни ҳисобланг.

**7.52.** $\lim\limits_{x\to c} 2.$ **7.53.** $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+2x-5).$ **7.54.** $\lim\limits_{x\to -3} 5|x-2|.$

**7.55.** $\lim\limits_{x\to 0}(2x-\frac{5}{x}).$ **7.56.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3-x^3}{5x}.$ **7.57** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2+5}.$

**7.58.** $\lim\limits_{t\to 0} t(2-\frac{3}{t}).$ **7.59.** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}.$ **7.60.** $\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x^2-x-6)^2}{x+2}.$

**7.61.** $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}.$ **7.62.** $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-1/t^2}{1-\frac{1}{t}}.$ **7.63.** $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t}}.$

**7.64.** $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t+\frac{a}{t}}{t+\frac{b}{t}}.$ **7.65.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^7-1}{x^5-1}.$

**7.66.** $\lim\limits_{h\to 0} h^2\left(1+\frac{1}{h^3}\right).$ **7.67.** $\lim\limits_{x\to -3}\left(\frac{3x}{x+3}+\frac{9}{x+3}\right).$

**7.68.** $\lim\limits_{x\to 4}\left[\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{x-4}\right].$ **7.69.** $\lim\limits_{x\to 2}\left[\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x-2}\right)^2\right].$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**7.70.** $f(x)=x^2-3x$ функция берилганда, қуйидаги лимитларни ҳисобланг:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$.  2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

**7.71.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x);\quad f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0, \\ 1+x, & x>0. \end{cases}$

**7.72.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x);\quad f(x)=\begin{cases} 3, & x-\text{рационал бўлганда}, \\ -3, & x-\text{иррационал бўлганда}. \end{cases}$

**7.73.** $\lim\limits_{x\to 2} f(x);\quad f(x)=\begin{cases} 3x, & x<1, \\ x+2, & x\geq 1. \end{cases}$  **7.74.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$.

Мисолларда $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ нисбатни тузинг ва $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ лимит мавжуд ёки мавжуд эмаслигини аниқлаб, агар мавжуд бўлса, $(c, f(c))$ нуқтада $f(x)$ функция графигига ўтказилган уринма тенгламасини тузинг.

**7.75.** $f(x)=x^2,\ c=2.$ **7.76.** $f(x)=1-2x+x^2,\ c=-1.$

**7.77.** $f(x)=\sqrt{x},\ c=1.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Қуйида берилган функцияларнинг бир томонли лимитларини топинг.

**7.78.** $f(x)=2^{\frac{1}{x-1}}, \quad x\to 1\pm 0.$ **7.79.** $f(x)=\frac{4}{(x-2)^3}, \quad x\to 2\pm 0.$

**7.80.** $f(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|}, \quad x\to 1\pm 0.$ **7.81.** $f(x)=\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}, \quad x\to 0\pm 0.$

**7.82.** $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}, \quad x\to 1\pm 0.$ **7.83.** $f(x)=\cos\frac{\pi}{x}, \quad x\to 0\pm 0.$

**7.84.** $f(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, \quad x\to 0\pm 0.$

**7.85.** $f(x)=\frac{\ln(1+e^x)}{x}, \quad x\to \pm\infty.$

**7.86.** $f(x)=\begin{cases}3x+1, & x\le 1,\\ -2x+3, & x>1;\end{cases} \quad x\to 1\pm 0.$

**7.87.** $f(x)=\begin{cases}9x+2\\ 4x^2-3\end{cases}, x\to 0\pm 0$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**7.88.** $f(x)=\begin{cases} x+1, & 0\le x<1, \\ 3x+2, & 1<x<3; \end{cases} \quad x\to 1\pm 0.$

**7.89.** $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}, \quad x\to 0\pm 0.$ **7.90.** $f(x)=\mathrm{sign}(\cos x), \quad x\to\dfrac{\pi}{2}\pm 0.$

**7.91.** $f(x)=\dfrac{1}{x-[x]}, \quad a)\ x\to -1+0, \quad b)\ x\to -1-0.$

**7.92.** $f(x)=\dfrac{x-|x|}{2x}, \quad a)\ x\to 0+0, \quad b)\ x\to 0-0.$

**7.93.** $f(x)=x+[x^2], \quad a)\ x\to 10+0, \quad b)\ x\to 10-0.$

**7.94.** $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}, \quad a)\ x\to 1+0, \quad b)\ x\to 1-0.$

**7.95.** $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^n-3}{x^n-1}, \quad a)\ x\to 1+0, \quad b)\ x\to 1-0.$

**7.96.** $f(x)=3x-\sqrt{9x^2-6x+8}, \quad a)\ x\to +\infty, \quad b)\ x\to -\infty.$

**7.97.** $f(x)=\sqrt{x^2+6x+3}-\sqrt{x^2+3x+3} \quad a)\ x\to +\infty, \quad b)\ x\to -\infty.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**7.98.** $f(x)=x-\sqrt{\dfrac{x^5+2x^4}{x^3+1}}, \quad x\to-\infty.$

**7.99.** $f(x)=ctgx, \quad a)\ x\to 0+0, \quad b)\ x\to 0-0.$

**7.100.** $f(x)=\dfrac{x}{x+4^{\frac{1}{2-x}}}, \quad a)\ x\to 2+0, \quad b)\ x\to 2-0.$

Қуйидаги лимитларни ҳисобланг.

**7.101.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}.$

**7.102.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1}.$

**7.103.** $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-2x-35}{2x^2+11x+5}.$

**7.104.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x}{4x^2-5x+1}.$

**7.105.** $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{2x^2+15x-8}{3x^2+25x+8}.$

**7.106.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{4x-3x^2-1}.$

**7.107.** $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{3x^2-17x-28}{x^2-9x+14}.$

**7.108.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{3x^2-5x-10}.$

**7.109.** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-17x+35}{x^2-x-20}.$

**7.110.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+x-2}{3x^2+4x+1}.$

**7.111.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3-4x^2+3}{4x^3+2x^2+x}.$

**7.112.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^5-2x^2+4x}{2x^5+9}.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**7.113.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+3x+1}{3x^2+x+5}$.

**7.114.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-4x^2-3x^4}{x^4+6x^2+3}$.

**7.115.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x^2-7}{3x^4+3x+5}$.

**7.116.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{18x^2+7x}{14-3x-9x^2}$.

**7.117.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$.

**7.118.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7+5x^6+x^8}{6x+4x^4-2x^8}$.

**7.119.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+3x^2+3}{15+2x-2x^4}$.

**7.120.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^2+7}{3-7x^2}$.

**7.121.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x^2+5x+9}{12+4x-x^3}$.

**7.122.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4+2x+4}{8x^3-5x+3}$.

**7.123.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^2+7x-10}{2x^4-3x+7}$.

**7.124.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^4-2x^3+3}{2x^2+5x-7}$.

**7.125.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{3x^2-4x+1}$.

**7.126.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$.

**7.127.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3-\sqrt{x^2+9}}{5x^2}$.

**7.128.** $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**7.129.** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$.

**7.130.** $\lim\limits_{x\to10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{\sqrt{x+6}-4}$.

**7.131.** $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$.

**7.132.** $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-3x-10}{\sqrt{x-1}-\sqrt{9-x}}$.

**7.133.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

**7.134.** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3+8}$.

**7.135.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

**7.136.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-2}{\sqrt{8+x}-3}$.

**7.137.** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2x+3}-3}$.

**7.138.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{3x}$.

**7.139.** $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{\sqrt{5x+5}-5}$.

**7.140.** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{4x+1}-3}$.

**7.141.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos5x}{4x^2}$.

**7.142.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{3x^2}$.

**7.143.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin7x+\sin3x}{x\cos2x}$.

**7.144.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x-\sin2x}{3x}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**7.145.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{x^2}.$

**7.146.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}.$

**7.147.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-x}{\operatorname{tg} x}.$

**7.148.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 2x}.$

**7.149.** $\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x\operatorname{ctg} 2x.$

**7.150.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 3x}{2x\sin 5x}.$

**7.151.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x}{\sin 5x}.$

**7.152.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x-\sin 2x}{x^2}.$

**7.153.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{\cos x-\cos^3 x}.$

**7.154.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\operatorname{arctg}^2 5x}.$

**7.155.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+10}\right)^{-4x}$

**7.156.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{5x}$

**7.157.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x}{3+4x}\right)^{-3x}.$

**7.158.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{5x}.$

**7.159.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{2-x}\right)^{3x}.$

**7.160.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+8}\right)^{-2x}.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**7.161.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-1}{4x+1}\right)^{3x-1}$.   **7.162.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+3}{4x-5}\right)^{2x}$.

**7.163.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x-1}{2x+5}\right)^{3x}$.   **7.164.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x+7}{x+4}\right)^{4x}$.

**7.165.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{2-10x}\right)^{5x}$.   **7.166.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5x-7}{x+6}\right)^{2x}$.

**7.167.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{6x+1}{12x+9}\right)^{3x}$.   **7.168.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x-2}{3x+1}\right)^{5x}$.

**7.169.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+1}$.

Биринчи ажойиб лимитга доир мисолларни ечинг.

**7.170.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 20x}{x}$.   **7.171.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 9x}{\sin 6x}$. **7.172.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x^2}$.

**7.173.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$. **7.174.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg 8x}{3x}$. **7.175.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

**7.176.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x-a}$.   **7.177.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\cdot\sin 4x}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**7.178.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{x^{2}}$. **7.179.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+\sin x}-\sqrt{4-\sin x}}{3x}$.

**7.180.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\sin x}-\sqrt[3]{1-\sin x}}{x}$. **7.181.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+\cos x}-\sqrt{5}}{2x^{2}}$.

**7.182.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin x+\sin 7x}$. **7.183.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\pi}{2}-x}{tgx}$.

**7.184.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^{x}-1}{5^{x}-1}$. **7.185.** $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(5^{1/x}-1\right)$.

**7.186.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 5x}-e^{\sin x}}{\ln(1-2x)}$. **7.187.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{6x}-5^{3x}}{\sin x}$.

**7.188.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^{2}}-\cos x}{\sin^{2} x}$. **7.189.** $\lim\limits_{x\to\infty} x^{2}\left(4^{\frac{1}{x}}-4^{\frac{1}{x+1}}\right)$.

**7.190.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+5x^{4}\right)^{\frac{1}{\sin^{2} x}}$. **7.191.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tg^{2}x}$.

**7.192.** $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(e+x))^{\operatorname{ctg} x}$. **7.193.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{xe^{x}+1}{x\pi^{x}+1}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**7.194.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ch2x-1}{\cos x-1}$ .

**7.195.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{sh3x}-4^{\operatorname{sh}x}}{thx}$ .

**7.196.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-\ln\operatorname{ch}x^2\right).$

**7.197.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}\ (a>0).$

**7.198.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}\ (a>0, b>0).$

**7.199.** $\lim\limits_{x\to \alpha}\left(1-\dfrac{2}{x^4}\right)^{x^2}$ .

**7.200**. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x^3}}$ .

**7.201.** $\lim\limits_{x\to \alpha}\left(\dfrac{x^2+4x+9}{x^2+3x+5}\right)^{3x}$ .

**7.202.** $\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{1}{1+\ln x}}$ .

**7.203.** $\lim\limits_{x\to \alpha}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{3}{\ln x}}$ .

**7.204.** $\lim\limits_{x\to +0} x^x$ .

**7.205.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{tg2x}$ .

**7.206.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg}x)^{\cos x}$ .

**7.207** $\lim\limits_{x\frac{\pi}{2}-0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln tgx}}$ .

**7.208.** $\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{1}{3\ln x+1}}$ .

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**7.209.** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$ .

**7.210.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{\alpha}{n}\right)^{n^2}$ .

**7.211.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ .

**7.212.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]^{ctgx}$ .

**7.213.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x^2-x+1\right)}{\ln\left(x^{10}+x+1\right)}$.

**7.214.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$ .

**7.215.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$ .

**7.216.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$ .

**7.217.** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}(a>0)$ .

**7.218.** $\lim\limits_{h\to\alpha} n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right)(x>0)$ .

**7.219.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

**7.220.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}\quad(a>0,\ b>0)$.

**7.221.** $a)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(1+3^x\right)}{\ln\left(1+2^x\right)}.$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+3^x\right)}{\ln\left(1+2^x\right)}.$

**7.222.** $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\log_x 2\,.$ $\qquad$ **7.223.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(x^2+e^x\right)}{\ln\left(x^4+e^{2x}\right)}\,.$

**7.224.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^2+e^x\right)}{\ln\left(x^4+e^{2x}\right)}.$

**7.225.** Исботланг:

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{a^x}=0\ \ (a>1,\ n>0).$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^{\varepsilon}}=0\ \ (a>1,\ \varepsilon>0).$

**7.226.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-2x+1}{x^8-2x+1}\ .$ $\qquad$ **7.227** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{101}-101x+100}{x^2-2x+1}.$

**7.228.** $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}+\dfrac{1}{x-1}\right).$ $\qquad$ **7.229.** $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)\ (m,n\in N)\ .$

**7.230.** $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^2-4x+6}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3x^2-9x+6}\right).$ $\qquad$ **7.231.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}(n,m\in N).$

Қуйидаги функцияларнинг қайси бири чексиз кичик бўлади:

**7.232.** $f(x)=\dfrac{x^2-6x+9}{x^3-27},\quad x\to3.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**7.233.** $f(x)=\dfrac{1}{1+4^x}$; $a)\ x\to+\infty$; $b)\ x\to-\infty$.

**7.234.** $f(x)=\sqrt{x^4+4}-x^2$; $a)\ x\to+\infty$, $b)\ x\to-\infty$.

**7.235.** $f(x)=\sin\ln(x^2+1)-\sin\ln(x^2-1)$, $x\to\infty$.

**7.236.** $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$, $x\to+0$. **7.237.** $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$, $x\to 0$.

Қуйидаги функциялардан қайси бири чексиз катта бўлади?

**7.238.** $f(x)=\dfrac{4x^3-8x+4}{x^3-3x^2+3x-1}$, $x\to 1$.

**7.239.** $f(x)=\dfrac{1}{x^3-6x^2+9x}-\dfrac{1}{x^2-2x-3}$, $x\to 3$.

**7.240.** $f(x)=x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, $a)\ x\to+\infty$, $b)\ x\to-\infty$.

**7.241.** $f(x)=\left(\dfrac{2x+1}{3x-1}\right)^x$, $a)\ x\to+\infty$, $b)\ x\to-\infty$.

**7.242.** $f(x)=(1-x)^{1/x^2}$, $a)\ x\to+0$, $b)\ x\to-0$.

Қуйидаги тасдиқлардан қайсилари $x\to+\infty$ да тўғри эканлигини кўрсатинг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**7.243.** $20x^2 + x\sin x = O(x^2)$

**10. 244.** $x^2 = O(20x^2 + x\sin x)$

**7.245.** $e^x + x^2 = O(e^x)$

**7.246.** $e^x = O(e^x + x^2)$

**7.247.** $\sqrt{x^2 + 3x + 1} - |x| = O(\frac{1}{x})$

**7.248.** $\frac{1}{x} = O(\sqrt{x^2 + 3x + 1} - |x|)$

**7.249.** $\frac{arctgx}{1+x^2} = \mathrm{O}(\frac{1}{x^2})$

**7.250.** $\frac{x+1}{x^2+1} = \mathrm{O}(\frac{1}{x})$

**7.251.** $x^p \cdot e^{-x} = o(\frac{1}{x^2})$

**7.252.** $\ln x = o(x^{\varepsilon}), \ \varepsilon > 0.$

**7.253.** $(x+1)^2 = o(x^2), \ \ x \to +\infty.$

**7.254.** $\frac{1}{x^2} = o(\frac{1}{x}), \ \ x \to +\infty.$

**7.255.** $shx = \mathrm{O}(e^x), \ \ x \to +\infty.$

**7.256.** $x^2 = \mathrm{O}(e^x), \ \ x \to +\infty.$

**7.257.** $\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^{1/2} = \mathrm{O}(x), \ \ x \to +\infty.$

**7.258.** $x + o(x) = \mathrm{O}(x)$ эканлигини исботланг.

**7.259.** $\{\mathrm{O}(x)\}^2 = \mathrm{O}(x^2) = o(x^3)$ эканлигини исботланг.

**7.260** $\mathrm{O}(\varphi)\mathrm{O}(\psi) = \mathrm{O}(\varphi\psi)$

**7.261.** $\mathrm{O}(\varphi)o(\psi) = o(\varphi\psi)$

**7.262.** $\mathrm{O}(\varphi + \psi) = \mathrm{O}(|\varphi| + |\psi|).$

**7.263.** $\cos\{O(x^{-1})\} = \mathrm{O}(1).$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**7.264.** $O(o(f)) = o(f).$ **7.265.** $O(O(f)) = O(f).$

**7.266.** $o(O(f)) = o(f).$

$x \to 0+0$ да қуйидаги тенгликларни исботланг.

**7.267.** $4x^2 - x^3 = O(x^2).$ **7.268.** $x \sin \sqrt[5]{x} = O(x^{\frac{6}{5}}).$

**7.269.** $x \sin \frac{1}{x} = O(|x|).$ **7.270.** $\ln x = o(\frac{1}{x^{\varepsilon}}), \ \varepsilon > 0.$

**7.271.** $\cos x \operatorname{sh}^2 x = o(x).$ **7.272.** $tg^3 x \sin \frac{1}{x} = o(x).$

**7.273.** $\frac{1}{\sqrt{x\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}}} = O(\frac{1}{\sqrt{x}}).$

$l = \underline{\lim}_{x \to 0} f(x)$ ва $L = \overline{\lim}_{x \to 0} f(x)$ ни топинг.

**7.274.** $f(x) = e^{\cos \frac{1}{x^2}}.$ **7.275.** $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x} + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$

**7.276.** $f(x) = (3 - x^4) \cos \frac{1}{x}.$ **7.277.** $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}.$

**7.278.** $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x}}.$

$l = \varliminf\limits_{x\to\infty} f(x)$ ва $L = \varlimsup\limits_{x\to\infty} f(x)$ ни топинг.

**7.279.** $f(x) = \cos x.$ **7.280.** $f(x) = (x^2 + 2)\cos^4 x.$

**7.281.** $f(x) = \dfrac{\pi}{2}\cos^2 x + \operatorname{arctg} x;$

**7.282.** $f(x) = (\sqrt{4x^2 + x + 1} - \sqrt{4x^2 - x + 1})(1 + \cos 2x);$

**7.283.** $f(x) = (1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$

Қуйидаги функцияларнинг қайси бири чексиз кичик?

**7.284.** $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - 2x^2 + x} \quad x \to 1.$

**7.285.** $f(x) = \sqrt{4x^2 + 7} - 2x \quad a)\ x \to +\infty \quad b) x \to -\infty$

**7.286.** $f(x) = \dfrac{2^x}{2^x + 3^x} \quad a)\ x \to +\infty \quad b) x \to -\infty$

**7.287.** $f(x) = \sin\ln(x^2 + 1) - \sin\ln(x^2 - 1) \quad x \to \infty$

**7.288.** $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^4 + x + 1)} \quad x \to +\infty$

Қуйидаги функцияларнинг қайси бирлари чексиз катта?

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**7.289.** $f(x)=\frac{1}{x^3-6x+9x}-\frac{1}{x^2-4x+3}\quad x\to 3$

**7.290.** $f(x)=x\left(\sqrt{4x^2+7}-2x\right)\quad a)\ x\to+\infty\ \ b)x\to-\infty$

**7.291.** $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt[3]{1-\cos 2x}}\quad x\to 0.$

**7.292.** $f(x)=sh2x-ch2x\quad a)\ x\to+\infty\ \ b)x\to-\infty$

**7.293.** $f(x)=\left(\frac{x+2}{3x+5}\right)^x\quad a)\ x\to+\infty\ \ b)x\to-\infty$ .

**7.294.** $f(x)=(1-x)^{1/x^2}\quad a)\ x\to+0\ \ b)x\to-0.$

**7.295.** $f(x)=4^{\frac{x+3}{x-2}}\quad a)\ x\to 2+0\ \ b)x\to 2-0$

**7.296.** $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}\quad a)\ x\to+0\ \ b)x\to-0$

$\alpha$ ва $\beta$ ларнинг қандай қийматларида $f(x)$ функция чексиз кичик бўлади?

**7.297.** $f(x)=\frac{x^2(x-1)}{(x^2+1)^2}-\alpha x-\beta,\quad x\to+\infty.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**7.298.** $f(x)=\sqrt{4x^2+x+1}-\alpha x-\beta,\ \ a)\ \ x\to+\infty;\ \ b)\ \ x\to-\infty.$

**7.299.** $f(x)=x^2\operatorname{arctg}x^2-\alpha x^2-\beta,\ \ a)\ \ x\to+\infty;\ \ b)\ \ x\to-\infty.$

## Мустақил ечиш учун берилган мисол ва масалаларнинг жавоблари

**7.1.** $\delta\le\frac{0,001}{3}=\frac{1}{3000}$. **7.2** $\delta\le\sqrt{4,001}-2\approx0,00025$ . **7.3.** $\delta=\min(a;0,01\sqrt{a})$ **7.4.** $\delta=\frac{1}{1500}$ .**7.5.** $\delta\le\frac{4}{51}$ . **7.6.** Мавжуд эмас .**7.7.** $\delta\le\frac{\pi}{2}-\arcsin 0,92\approx0,14$.

**7.8.** $\delta<2-\sqrt{3}$. **7.9.** $\delta\le\frac{2}{13}$.7.10. $\delta\le\frac{1}{300}$. **7.11.** $\left(-\frac{2}{1003};0\right)\cup\left(0;\frac{2}{9997}\right)$

**7.12.** $\left(\frac{3996}{1001};\,4\right)\cup\left(4;\,\frac{4003}{999}\right).$

**7.13.** $\left(\ln\frac{999}{1000};\,0\right)\cup\left(0;\,\ln\frac{1001}{1000}\right).$ **7.14.** $\left(\frac{199}{100};\,2\right)\cup\left(2;\,\frac{201}{100}\right).$

**7.15.** $\left(0;10^{-100}\right)\cup\left(10^{100};+\infty\right)$ **7.16.** $\frac{3}{8}$. **7.17.** 0. **7.18.** 0. **7.19.** 0.

**7.50.** 1) 5. 2) 9. 3) $-\frac{3}{2}$. 4) 0. 5) Мавжуд эмас, чунки махражнинг лимити нолга

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

тенг. 6) 0. 7) $-\frac{2}{3}$. 8) $\frac{1}{5}$. **7.51.** 1) 25. 2) Мавжуд эмас, чунки махраж нолга айланади. 3) 25. 4) Мавжуд эмас, махражнинг лимити нолга айланади. 5) 27. **7.52.** 2. **7.53.** $-5$. **7.54.** 25. **7.55.** Мавжуд эмас. **7.56.** $-\frac{1}{2}$. **7.57.** 0. **7.58.** $-3$. **7.59.** 27. **7.60.** 0. **7.61.** $\frac{1}{4}$. **7.62.** Мавжуд эмас. **7.63.** $-1$.**7.64.** $\frac{a}{b}$. **7.65.** $\frac{7}{5}$. **7.66.** Мавжуд эмас. **7.67.**3. **7.68.** $-\frac{1}{16}$. **7.69.** Мавжуд эмас. **7.70.**1) 3. 2) Мавжуд эмас. **7.71.** Мавжуд эмас. **7.72.** Мавжуд эмас. **7.73.** 4. **7.74.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **7.75.** 4; $y=4x-4$. **7.76.** $-4;\ y=-4x$. **7.77.** $\frac{1}{2};\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. **7.78.** $f(1-0)=0,\ f(1+0)=+\infty$. **7.79.** $f(0-0)=-\infty,\ f(0+0)=+\infty$. **7.80.** $f(1-0)=-2,\ f(1+0)=2$. **7.81.** $f(0-0)=-\sqrt{2},\ f(0+0)=\sqrt{2}$. **7.82.** $f(1-0)=\frac{\pi}{2},\ f(1+0)=-\frac{\pi}{2}$. **7.83.**Мавжуд эмас. **7.84.** $f(0-0)=1,\ f(0+0)=0$.

**7.85.** $f(-\infty)=0,\ f(+\infty)=1$. **7.86.** $f(1-0)=4,\ f(1+0)=1$.

**7.87.** $f(0-0)=2,\ f(0+0)=-3$ **7.88.** $f(1-0)=2,\ f(1+0)=5$. **7.89.**

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$f(0-0)=-1$ $f(0+0)=1$. **7.90.** $f(\frac{\pi}{2}-0)=1$, $f(\frac{\pi}{2}+0)=-1$. **7.91.** $a)$ $\infty$, $b)$ 1. **7.92.**
$a)$ 0, $b)$ 1. **7.93.** $a)$ 110, $b)$ 109. **7.94.** $a)$ 1, $b)$ 0. **7.95.** $a)$ 2, $b)$ 3. **7.96.** $a)$ 1, $b)$ $\infty$.
**7.97.** $a)$ $\frac{3}{2}$, $b)$ $-\frac{3}{2}$. **7.98.** $-1$. **7.99.** $a)$ $+\infty$, $b)$ $-\infty$. **7.100.** $a)$ 1, $b)$ 0. **7.101.** $\frac{8}{9}$.
**7.102.** 10. **7.103.** $\frac{4}{3}$. **7.104.** 0. **7.105.** $\frac{17}{23}$. **7.106.** $-0.5$. **7.107.** 5. **7.108.** $\frac{8}{13}$. **7.109.**
$\frac{1}{3}$. **7.110.** 2,5. **7.111.** 1,25. **7.112.** 3,5. **7.113.** $-\frac{1}{3}$. **7.114.** $-3$. **7.115.** 1. **7.116.** $-2$.
**7.117.** 2. **7.118.** $-0{,}5$. **7.119.** $-2{,}5$. **7.120.** $-2$. **7.121.** 0. **7.122.** $-\infty$. **7.123.** 0. **7.124.**
$\infty$. **7.125.** $-\infty$. **7.126.** $\frac{1}{6}$. **7.127.** $\frac{1}{30}$. **7.128.** $-\frac{6}{5}$. **7.129.** $-\frac{3}{2}$. **7.130.** $\frac{4}{3}$. **7.131.**
$-\frac{1}{12\sqrt{2}}$. **7.132.** 14. **7.133.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **7.134.** $\frac{1}{18}$. **7.135.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **7.136.** 24. **7.137.** $\frac{2}{2\sqrt{2}}$.
**7.138.** $\frac{\sqrt{7}}{21}$. **7.139.** 2. **7.140.** 18. **7.141.** 3.125. **7.142.** $\frac{1}{3}$. **7.143.** 10. **7.144.** $-\frac{2}{3}$.
**7.145.** 3. **7.146.** $\frac{1}{2}$. **7.147.** 0. **7.148.** 16. **7.149.** $\frac{3}{2}$. **7.150.** 0.9. **7.151.** $\frac{8}{3}$. **7.152.** 0.
**7.153.** 3. **7.154.** $\frac{9}{25}$. **7.155.** $e^{20}$. **7.156.** $e^{7,5}$. **7.157.** $e^{\frac{9}{4}}$. **7.158.** $e^{-10}$. **7.159.** $e^{3}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**7.160.** $e^{1,5}$. **7.161.** $+\infty$. **7.162.** $+\infty$. **7.163.** 0. **7.164.** 0. **7.165.** 0. **7.166.** 0. **7.167.** $+\infty$. **7.168.** $+\infty$. **7.169.** $e^{-\frac{1}{3}}$. **7.170.** 20. **7.171.** $\frac{9}{8}$. **7.172.** 4. **7.173.** $\frac{a}{b}$. **7.174.** $\frac{8}{3}$. **7.175.** $\cos a$. **7.176.** $\cos a \sin a = \sin 2a$. **7.177.** $\frac{3}{8}$. **7.178.** $-6$. **7.179.** $\frac{1}{6}$. **7.180.** $\frac{2}{3}$. **7.181.** $-\frac{\sqrt{5}}{40}$. **7.182.** $\frac{5}{8}$. **7.183.** 0. **7.184.** $\frac{\ln 8}{\ln 5}$. **7.185.** $\ln 5$. **7.186.** 2. **7.187.** $\ln 125$. **7.188.** $\frac{3}{2}$. **7.189.** $\ln 4$. **7.190.** $e^5$. **7.191.** $\frac{1}{\sqrt{e}}$. **7.192.** $e^{\frac{1}{e}}$. **7.193.** $\frac{e}{\pi}$. **7.194.** $-4$. **7.195.** $\ln 16$. **7.196.** $\ln 2$. **7.197.** $a^{a^a} \ln a$. **7.198.** $\sqrt{ab}$. **7.199.** 1. **7.200.** 0. **7.201.** $e^3$. **7.202.** $e$. **7.203.** $e^3$. **7.204.** 1. **7.205.** $e^{-1}$. **7.206.** 1. **7.207.** $e^{-1}$. **7.208.** $e^{\frac{1}{3}}$. **7.209.** $e^{-2}$. **7.210.** $e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$. **7.211.** 1. **7.212.** $e^{-2}$. **7.213.** $\left(\frac{a}{b}\right)^2$. **7.214.** $\frac{3}{2}$. **7.215.** $e^2$. **7.216.** $a^a \ln(e \cdot a)$. **7.217.** $a^x \ln^2 a$. **7.218.** $\ln x$. **7.219.** $\sqrt[3]{ab \cdot c}$. **7.220.** $\frac{1}{\sqrt{ab}}$. **7.221.** $a)$ 0. $b)$ $\frac{\ln 3}{\ln 2}$. **7.222.** $-\ln 2$. **7.223.** $\frac{1}{2}$. **7.224.** $\frac{1}{2}$. **7.226.** $\frac{1}{3}$. **7.227.** 5050. **7.228.** 1. **7.229.** $\frac{m-n}{2}$. **7.230.** 1. **7.231.** $\frac{m}{n}$. **7.232.** Ҳа. **7.233.** $a)$ Ҳа. $b)$ Йўқ. **7.234.** $a)$ Ҳа. $b)$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Ҳа. **7.235.** Ҳа. **7.236.** Ҳа. **7.237.** Йўқ.. **7.238.** Ҳа. **7.239.** Ҳа. **7.240.** $b)$ Чексиз катта. . **7.241.** $b)$ Чексиз катта. **7.242.** $b)$ Чексиз катта. **7.274.** $l=\frac{1}{e};\ \ L=e.$

**7.275.** $l=-1;\ \ L=2.$ **7.276.** $l=-3;\ \ L=3.$ **7.277.** $l=0;\ \ L=+\infty.$ **7.278.** $l=\frac{1}{2};\ \ L=+\infty.$

**7.279.** $l=-1;\ \ L=1.$ **7.280.** $l=0;\ \ L=+\infty.$ **7.281.** $l=-\frac{\pi}{2};\ \ L=\pi.$ **7.282.** $l=-1;\ \ L=1.$

**7.283.** $l=2;\ \ L=e.$ **7.284.** Чексиз кичик. **7.285.** $a)$ Чексиз кичик . $b)$ Чексиз кичик эмас. **7.286.** $a)$ Чексиз кичик . $b)$ Чексиз кичик эмас. **7.287.** Чексиз кичик эмас. **7.288.** Чексиз кичик эмас. **7.289.** Чексиз ката. **7.290.** $a)$ Чексиз катта эмас. $b)$ Чексиз катта. **7.291.** Чексиз катта эмас. **7.292.** $a)$ Чексиз катта эмас. $b)$ Чексиз катта. **7.293.** $a)$ Чексиз катта эмас. $b)$ Чексиз катта. **7.294.** $a)$ Чексиз катта эмас. $b)$ Чексиз катта. **7.295.** $a)$ Чексиз катта. $b)$ Чексиз ката эмас. **7.296.** $a)$ Чексиз катта. $b)$ Чексиз катта эмас. **7.297.** $\alpha=1,\ \ \beta=-3.$

**7.298.** $a)\ \ \alpha=2,\ \ \beta=\frac{1}{4}\ \ \ b)\ \ \alpha=-2,\ \ \beta=-\frac{1}{4}.$

**7.299.** $a)\ \ \alpha=\frac{\pi}{2},\ \ \beta=-1\ \ \ b)\ \ \alpha=\frac{\pi}{2},\ \ \beta=-1.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

# 8-§. ФУНКЦИЯНИНГ УЗЛУКСИЗЛИГИ

**8.1. Узлуксиз функциянинг таърифлари.** $f(x)$ функция $X$ $(X \subset R)$ тўпламда аниқланган бўлиб, $a$ $X$ тўпламнинг лимит нуқтаси ва $a \in X$. бўлсин

**8.1-таъриф.** Агар $x \to a$ да $f(x)$ функциянинг лимити мавжуд ва у $f(a)$ га тенг, яъни

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \tag{8.1}$$

бўлса, $f(x)$ функция $a$ *нуқтада узлуксиз* дейилади.

$a = \lim_{x\to a} x$ эканлигини эътиборга олган ҳолда, (8.1) тенгликни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин: $\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x)$.

Демак, функция $a$ нуқтада узлуксиз бўлса, "lim" белгиси билан функциянинг характеристикаси "$f$" нинг ўрнини алмаштириш мумкин.

**8.2-таъриф (Гейне).** Агар $X$ тўпламнинг элементларидан тузилган ва $a$ га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам функциянинг унга мос қийматларидан тузилган $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт $f(a)$ га интилса, $f(x)$ функция $a$ *нуқтада узлуксиз* дейилади.

**8.3-таъриф (Коши).** Агар исталган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta=\delta(\varepsilon, a)>0$ сон топилсаки, функция аргументи $x$ нинг $|x-a|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция $a$ *нуқтада узлуксиз* дейилади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**8.4-таъриф.** Агар исталган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta>0$ сон топилсаки, функция аргументи $x$ нинг барча $x \in U_\delta(a)$ қийматларида $f(x)$ функциянинг мос қийматлари $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$ бўлса, $f(x)$ функция $a$ *нуқтада узлуксиз* дейилади (8.1-чизма).

Математик белгилардан фойдаланиб, 8.2-, 8.3-, 8.4-таърифларни, мос равишда, қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\forall\{x_n\}: \lim_{n\to\infty} x_n = a \to \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a),$$

$$\forall\varepsilon>0\exists\ \delta>0: \ \ \forall x: |x-a|<\delta \to |f(x)-f(a)|<\varepsilon,$$

$$\forall\varepsilon>0\exists\ \delta>0: \ \ \forall x \in U_\delta(a) \to f(x) \in U_\varepsilon(f(a)) \ .$$

Бунда, $x - a$ айирмага *аргумент орттирмаси*, $f(x)-f(a)$ айирмага эса, *функциянинг* $a$ *нуқтадаги орттирмаси* дейилади. Улар, мос равишда $\Delta x$ ва $\Delta y$ ёки $\Delta f(a)$ каби белгиланади:

$$\Delta x = x - a, \quad \Delta y = \Delta f(a) = f(x) - f(a).$$

Аргумент ва функция орттирмасини қуйидаги кўринишда ҳам ёзиш мумкин:

$$x = a + \Delta x, \quad \Delta f(a) = f(a+\Delta x) - f(a) \qquad (8.2)$$

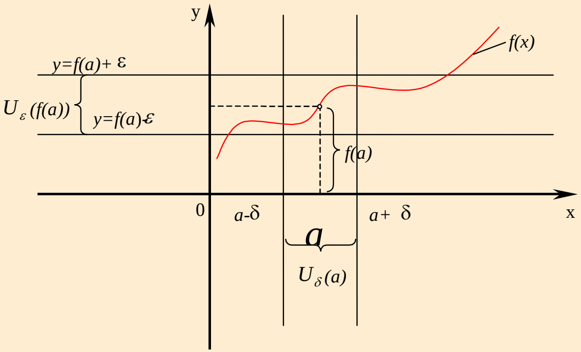
Агар $f(x)$ функция $a$ нуқтада узлуксиз бўлса, (8.1) ва (8.2) муносабатлардан $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0$ келиб чиқади. Бу эса функция узлуксизлигини қуйидагича таърифлаш ҳам мумкинлигини кўрсатади.

**8.5-таъриф.** Агар аргументнинг $a$ нуқтадаги орттирмаси $\Delta x$ нолга интилганда $f(x)$ функциянинг унга мос орттирмаси $\Delta f$ ҳам нолга интилса,

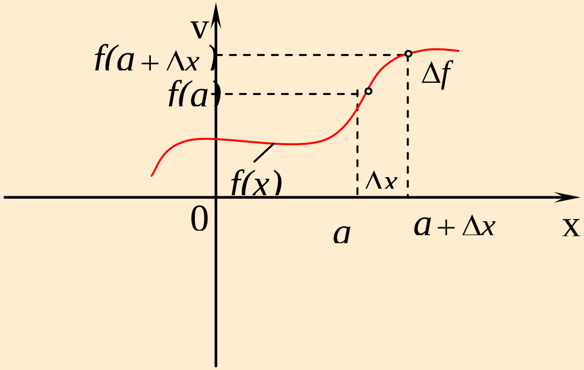
Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

яъни $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f = 0$ бўлса, $f(x)$ функция $a$ *нуқтада узлуксиз* дейилади (8.2-чизма).

**8.1- эслатма**. $X$ тўпламда $f(x)$ функция аниқланган булиб, $a$ $X$ тўпламнинг лимит нуктаси бўлмаса, яъни $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ маънога эга бўлмаса, $f(x)$ функциянинг $a$ нуктада узлуксизлиги ҳақида гапиришнинг маъноси йўқ.



8.1-чизма.



8.2-чизма.

$X \subset R$ тўпламда $f(x)$ функция аникланган булиб, $a \in X$ эса, $X$ тўпламнинг ўнг (чап) лимит нуктаси бўлсин.

**8.6-таъриф.** Агар $x \to a+0$ $(x \to a-0)$ да $f(x)$ функциянинг ўнг (чап) лимити мавжуд ва у $f(a)$ га тенг, яъни

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0), \qquad f(a+0) = f(a)$$

$$(\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0), \qquad f(a-0) = f(a))$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

бўлса, $f(x)$ функция $a$ *нуқтада ўнгдан (чапдан) узлуксиз* дейилади.

**8.7-таъриф (Гейне).** Агар $X$ тўпламнинг элементлари (нуқталари) дан тузилган ва ҳар бир ҳади $x_n > a$ $(x_n < a)$ $(n = 1,2,...)$ бўлиб, $a$ га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ олинганда ҳам, унга мос келагн $\{f(x_n)\}$кетма-кетлик ҳамма вақт $f(a)$ қийматга интилса, $f(x)$ функция $a$ *нуқтада ўнг (чап) дан узлуксиз* дейилади.

**8.8-таъриф(Коши).** Агар $\forall\varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилиб, аргумент $x$ нинг $a < x < a + \delta$ $(a - \delta < x < a)$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи қийматларида $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция $a$ *нуқтада ўнг (чап) дан узлуксиз* дейилади.

Маълумки, функция лимитининг Гейне ва Коши таърифлари ўзаро эквивалент бўлгани сингари функциянинг нуқтадаги узлуксизлигининг Гейне ва Коши таърифлари ҳам ўзаро эквивалент бўлади.

**8.9-таъриф.** Агар $f(x)$ функция $X\ (X \subset R)$ тўпламнинг хар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, $f(x)$ функция $X$ *тўпламда узлуксиз* дейилади.

**8.10-таъриф.** Агар $f(x)$ функция $(a, b)$ оралиқда узлуксиз бўлиб, $x = a$ нуқтада ўнгдан, $x = b$ нуқтада эса чапдан узлуксиз бўлса, $f(x)$ функция $[a, b]$ *кесмада узлуксиз* дейилади.

**8.1-теорема.** $f(x)$ функциянинг $a$ нуқтада узлуксиз бўлиши учун $f(a+0) = f(a-0) = f(a)$ тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

**8.1-мисол**. Ушбу функциянинг берилган $a$ нуқтада узлуксиз

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Орқага
Тулик экран
Чикиш

эканлигини исботланг:

$$1)\, f(x)=(x^2-5)^3,\ a=2; \qquad 2)\, f(x)=\frac{1}{x^3},\ x=a,\ a\neq 0;$$

$$3)\, f(x)=\sqrt{x},\ x=a,\ a>0; \qquad 4)\, f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0,\ \ x=0, \end{cases} a=0$$

$$5)\ \ f(x)=x^4,\ \ x=a.$$

**Ечилиши**. 1) Биринчидан, $x\to 2$ да $f(x)=(x^2-5)^3$ функциянинг лимити, чекли лимитга эга бўлган функциялар устидаги арифметик амалларга асосан (I-II формулаларга қ.), мавжуд, яъни

$$\lim_{x\to 2}(x^2-5)^3=-1,$$

иккинчидан, бу функциянинг $x=2$ нуқтадаги қиймати ҳам $-1$ га тенг.

Демак, берилган $f(x)=(x^2-5)^3$ функция, 8.1-таърифга асосан, $a=2$ нуқтада узлуксиздир,

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(x^2-5)^5=f(2)=-1.$$

2) $x\to a$ $(a\neq 0)$ да (III) формуладан фойдаланиб,

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x}=\frac{1}{a},\quad \lim_{x\to a}\frac{1}{x^3}=\frac{1}{a^3}$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

эканлигини топамиз, яъни $\exists \lim\limits_{x\to a}\frac{1}{x^3}=\frac{1}{a^3}$. $f(x)=\frac{1}{x^3}$ функциянинг $x=a$ даги қиймати ҳам, $f(a)=\frac{1}{a^3}$ бўлгани учун, 8.1-таърифга асосан, $f(x)=\frac{1}{x^3}$ функция $x=a$ да узлуксиз.

3) $f(x)=\sqrt{x}$ функциянинг $x=a>0$ нуқтада узлуксизлигини Коши таърифи, яъни 8.3-таъриф бўйича кўрсатамиз: $\forall\varepsilon>0$ сон берилган бўлсин.

$a)$ Берилган $\varepsilon>0$ сон бўйича $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ ни топамиз. Бунинг учун аввало $\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|$, $|x-a|$ ифодалар орасидаги боғланишни топиш керак. Биринчи ифода шаклини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}.$$

$x>0$ лар учун $\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|<\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot|x-a|$ тенгсизликлар ўринли бўлади.

Демак, $\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|$ ифода берилган $\varepsilon$ дан кичик бўлиши учун $\delta=\varepsilon\sqrt{a}$ деб олиш етарли.

b) *Энди топилган* $\delta$ *нинг «ишлашини» кўрсатамиз.* $|x-a|<\varepsilon\sqrt{a}$ бўлсин. Бундан $\varepsilon>\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$, $x>0$ бўлганда $\frac{1}{\sqrt{a}}>\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$ эканлигини эътиборга олсак,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\varepsilon > \frac{|x-a|}{\sqrt{a}} > \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{|x-a|\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|}{|x-a|} = \left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|$$

га эга бўламиз.

Демак, $|x-a| < \delta = \sqrt{a}\cdot\varepsilon$ тенгсизликни каноатлантирувчи барча $x$ лар учун $\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлар экан.

Шундай қилиб, 8.3- таърифга асосан, $f(x)=\sqrt{x}$ фунция $x=a>0$ нуқтада узлуксиз экан.

Энди, $\sqrt{x}$ функциянинг $a=0$ нуктада ўнгдан узлуксизлигини кўрсатамиз.

$\left|\sqrt{x}-\sqrt{0}\right| < \varepsilon$ тенгсизлик $0 \le x < \varepsilon^2$ тенгсизликка тенг кучли. Бунда, $\delta = \varepsilon^2$ деб олсак, $0 \le x < \delta$ ни каноатлантирувчи барча $x$ нинг кийматларида $\sqrt{x} < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Шундай қилиб, $\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt{x}=0$ булгани учун $\sqrt{x}$ функция $a=0$ нуктада ўнгдан узлуксиз экан.

4) $f(x)$ функция $\forall x \in R$ учун аниқланган. $\forall \varepsilon > 0$ сон берилган бўлсин.

$a$) Берилган $\varepsilon > 0$ сон бўйича $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сонни шундай излашимиз керакки, натижада $|x| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x$ лар учун

$$|f(x)-f(0)| = \left|x\cos\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \qquad (8.3)$$

тенгсизлик бажарилиши керак. Бунинг учун биз, аввало,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\left|x\cos\frac{1}{x}\right|,\quad |x|$$

ифодалар орасидаги боғланишни топамиз: $\left|x\cos\frac{1}{x}\right|\le|x|$, чунки $x\ne 0$, $\forall x\in R$ учун $\left|\cos\frac{1}{x}\right|\le 1.$

Демак, $|x|<\delta$ ни қаноатлантирувчи барча $x$ лар учун (8.3) тенгсизликнинг бажарилиши учун $\delta=\varepsilon$ деб олиш етарли бўлади.

$b)$ Энди, танланган $\delta$ нинг «ишлаш»ини кўрсатамиз. $|x|<\varepsilon$ бўлсин. Бундан $\forall x\in R(x\ne 0)$ учун $1\ge\left|\cos\frac{1}{x}\right|$, $f|0|=0$ эканлигини эътиборга олган холда, $\varepsilon>|x|\cdot 1\ge|x|\cdot\left|\cos\frac{1}{x}\right|$, $\left|x\cos\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$ тенгсизлик ўринли эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, $f(x)=x\cos\frac{1}{x}$ функция $x=0$ да узлуксиз.

5) $f(x)=x^4$ функциянинг $\forall a\in R$да узлуксизлигини 8.5-таърифдан фойдаланиб исботлаймиз. $\forall a\in R$ва $\forall\Delta x$ лар учун

$$\Delta f=(a+\Delta x)^4-a^4=4a^3\Delta x+6a^2(\Delta x)^2+4a(\Delta x)^3+(\Delta x)^4.$$

(I-III)формулаларни эътиборга олган ҳолда,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=\lim_{\Delta x\to 0}(4a^3\Delta x+6a^2(\Delta x)^2+4a(\Delta x)^3+(\Delta x)^4)=0$$

эканлигини топамиз. Демак, 8.5-таърифга асосан, $f(x)=x^4$ функция хар бир

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$a \in R$ нуқтада узлуксиз.

**8.2-мисол**. Ушбу $f(x)=x^2 \cdot D(x)$ функциянинг $x=0$ нуқтада узлуксиз эканлигини кўрсатинг. Бу ерда $D(x)$ – Дирихле функцияси.

**Ечилиши**. Ихтиёрий нолга интилувчи $\{x_n\}$ кетма-кетлик оламиз. У ҳолда унга мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик $f(x_n)=x_n^2 D(x_n)$ кўринишга эга бўлади.

Маълумки, Дирихле функцияси чегараланган. $\{x_n\}$ кетма-кетлик эса чексиз кичик бўлгани учун $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳам чексиз кичик бўлади. Демак, $n \to \infty$ да $f(x_n)=x_n^2 D(x_n) \to 0$ бўлади. Бу эса, қаралаётган функциянинг, **8.2**-таърифга асосан, $a=0$ нуқтада узлуксиз эканлигини билдиради.

**8.3-мисол**. Ушбу $f(x)=\sqrt{x+6}$ функциянинг $a=3$ нуқтада узлуксиз эканлигини кўрсатинг.

**Ечилиши**. Берилган функция $a=3$ нуқтада аниқланган. **1)** $\forall\varepsilon>0$ сон олиб, бу ε сонга кўра, δ>0 сонни δ=3ε бўлсин деб каралса, у ҳолда $|x-3|<\delta$ бўлганда

$$|f(x)-f(3)|=\left|\sqrt{x+6}-3\right|=\frac{|x-3|}{\sqrt{x+6}+3}<\frac{|x-3|}{3}<\frac{\delta}{3}=\varepsilon$$

бўлади.

$b)$ Энди топилган $\delta$ нинг «ишлашини» кўрсатамиз. $|x-3|<\delta=3\varepsilon$ бўлсин. Бундан $\varepsilon>\frac{|x-3|}{3}=\frac{\left|\sqrt{x+6}-3\right|\left|\sqrt{x+6}+3\right|}{3}>\left|\sqrt{x+6}-3\right|$, демак,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$|x-3|<\delta=3\varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $x$ нинг қийматларида $\left|\sqrt{x+6}-3\right|<3$ тенгсизлик бажарилади.

Бу эса, 8.3-таърифга асосан, қаралаётган функциянинг $a$ =3 нуқтада узлуксиз эканлигини билдиради.

**8.4-мисол**. 1) $f(x)=\sin x$; 2) $f(x)=a^x$ $(a>1)$ функцияларнинг $\forall\, a\in R$ нуқтада узлуксиз бўлишини кўрсатинг.

**Ечилиши**. 1) $\forall\, a\in R$ нуқтани олиб, унга $\Delta x=x-a$ орттирма берамиз. Натижада $f(x)=\sin x$ функция ҳам ушбу $\Delta y=\sin(a+\Delta x)-\sin a$ орттирмага эга бўлади. $|\cos t|\le 1$, $\sin t\le t$ ва $0<\Delta x<\pi$ тенгсизликларни эътиборга олган ҳолда,

$$|\Delta y|=|f(a+\Delta x)-f(a)|=\left|2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{a+\Delta x+a}{2}\right|\le 2\frac{\Delta x}{2}=\Delta x$$

муносабатга эга бўламиз. Бундан эса, $\Delta x\to 0$ да $\Delta y\to 0$ бўлиши келиб чиқади. Демак, $f(x)=\sin x$ функция, 8.4-таърифга асосан, $\forall\, a\in R$ нуқтада узлуксиздир.

2) Маълумки, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, умумий ҳолда $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$. Демак, $f(x)=a^x$ функция $x=0$ да узлуксиз, чунки $f(0)=a^0=1$. Энди $f(x)=a^x$ функциянинг $\forall x_0\in R$ нуқтада узлуксиз эканлигини кўрсатамиз. $x_0$ нуқтага ихтиёрий $\Delta x\neq 0$ орттирма берамиз, $x_0+\Delta x\in R$.

$$\Delta f=a^{x_0+\Delta x}-a^{x_0}=a^{x_0}(a^{\Delta x}-1)=a^{x_0}\left(\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right)\cdot\Delta x.$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

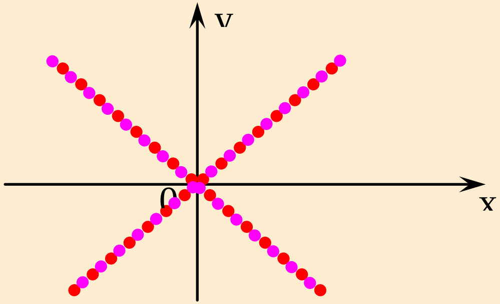
$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\ln a$ эканлигини эътиборга олган ҳолда, кейинги тенгликдан $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f=0$ бўлиши келиб чиқади. Демак, $f(x)=a^x$ функция $R$ да узлуксиз.

**8.5-мисол**. Ушбу

$x$, $x$ – рационал сон бўлганда,
$f(x)=-x$, $x$ – иррационал сон бўлганда,

функцияни ихтиёрий $x=a$ нуқтада узлуксизликка текширинг.

**Ечилиши**. Маълумки, $f(x)$ функция $a$ нуқтанинг атрофида ҳам мусбат, ҳам манфий кийматлар кабул қилади. Агар $x\in U_\delta(0)$ бўлса, $f(x)\in U_\varepsilon(0)$ бўлади, яъни $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$. Демак, 8.4-таърифга асосан, $f(x)$ функция $x=0$ нуқтада узлуксиз бўлади.



8.3-чизма.

Агар $a\neq0$ бўлса, $f(a)\neq0$. $x$-рационал сон бўлганда $\lim\limits_{x\to a} f(x)=a$, $x$-

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

ирриационал сон бўлганда эса, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-a$ бўлади. Бу ердан $f(x)$ функциянинг $x=a$ нуқтада узлуксиз бўлмаслиги келиб чиқади (8.3-чизма).

**8.6-мисол**. Ушбу

$\dfrac{1}{1+8^{\frac{1}{x}}}$, $x\neq 0$ бўлганда;

$f(x)=0$, $x=0$ бўлганда,

функциянинг $x=0$ нуқтада ўнгдан ва чапдан узлуксизликка текширинг.

**Ечилиши**. Берилган функциянинг $x\to 0$ да ўнг ва чап лимитларини топамиз:

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{1+8^{\frac{1}{x}}}=0=f(0+0)=f(0),$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{1+8^{\frac{1}{x}}}=1=f(0-0)\neq f(0).$$

Демак, 8.6-таърифга кўра, берилган функция $x=0$ нуқтада ўнгдан узлуксиз бўлиб, чапдан узлуксиз эмас.

**8.7-мисол.** Ушбу

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$1)\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}\qquad 2)\quad f(x)=\cos\frac{\pi}{x};$$

$$3)\quad f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}\qquad 4)\quad f(x)=\begin{cases}3\cdot 2^x, & x<0,\\ 2a+x, & x\geq 0;\end{cases}$$

$$5)\quad f(x)=(x^3+1)/(x+1)$$

функцияларни узлуксизликка текширинг.

**Ечилиши. 1)** $\forall a\in R\ (a\neq 0)$ олайлик. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ функциянинг $a$ нуқтада узлуксизлигини 8.1-таърифга кўра кўрсатамиз. 8.4-мисолни ҳисобга олган ҳолда, (IV) формулага асосан,

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\sin x}{\lim\limits_{x\to a}x}=\frac{\sin a}{a}.$$

Демак, берилган функция $\forall a\in R\ (a\neq 0)$ да узлуксиз экан. Энди $a=0$ бўлсин. Функциянинг берилишига кўра, $f(0)=1;\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$ Шундай қилиб, $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ функция $a=0$ нуқтада ҳам узлуксиз бўлар экан.

2) $f(x)=\cos\dfrac{\pi}{x}$ функция $R$ нинг $x=0$ дан ташқари барча нуқталарида

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

аниқланган ва узлуксиз. $x=0$ нуқтада узлуксизликка текшириш учун

$$x_n=\frac{1}{2n},\quad x'_n=\frac{1}{2n+1}\quad (n=1,2,\ldots)$$

кетма-кетликларни оламиз. Равшанки,

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} x'_n=0,\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\cos 2\pi n=1;$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n)=\lim_{n\to\infty}\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}=0.$$

Демак, $f(x)=\cos\frac{\pi}{x}$ функция ўнгдан $x=0$ нуқтада ўнг лимитга эга эмас, $f(x)$ функциянинг жуфтлигини эътиборга олганда, у $x=0$ нуқтада чап лимитга ҳам эга бўлмайди. Шунинг учун, берилган функция $x=0$ нуқтада узлуксиз бўлмайди.

3) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$, чунки $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|$ Шартга кўра, $x=0$ да $f(0)=0$ бўлгани учун 8.1-таърифга асосан, $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ функция $R$ да узлуксиз.

4) $\lim\limits_{x\to 0-0} 3\cdot 2^x=3$, $f(0-0)=3$; $\lim\limits_{x\to 0+0}(2a+x)=2a$, $f(0+0)=2a$.

Агар $a=\frac{3}{2}$ бўлса, берилган функция $x=0$ нуқтада узлуксиз бўлади.

5) $f(x)=\frac{x^3+1}{x+1}$ функциянинг $x=-1$ нуқтадаги чап ва ўнг лимитларини

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

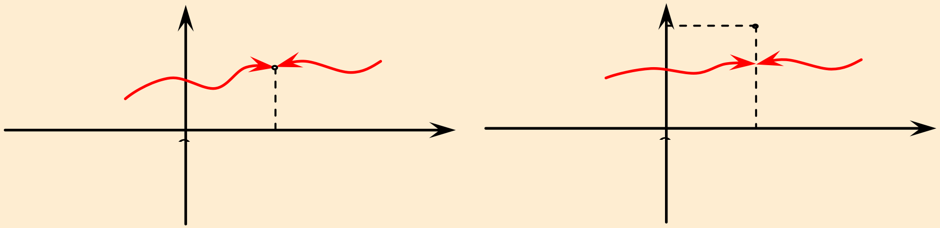
топамиз:

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} \frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x\to -1-0}(x^2-x+1) = 3, \quad \lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0}(x^2-x+1) = 3.$$

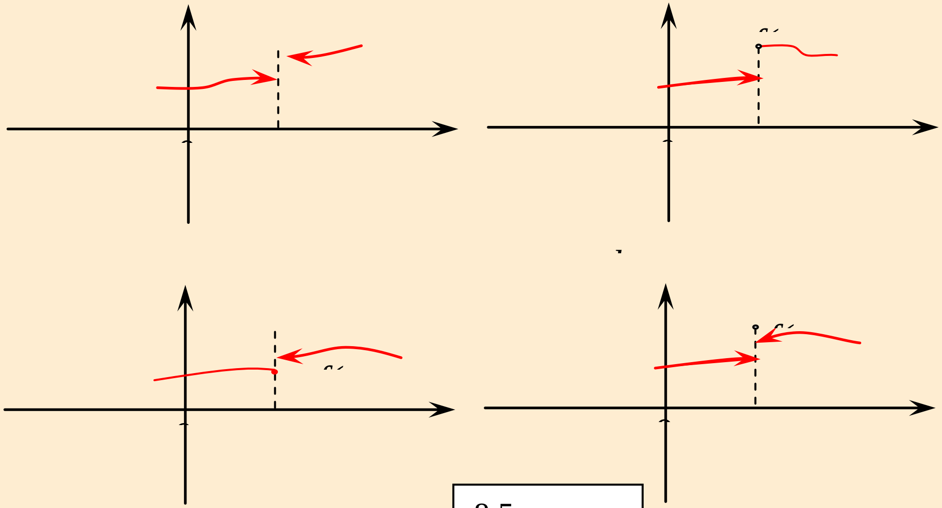
Демак, берилган функциянинг $x=-1$ нуқтадаги чап ва ўнг лимитлари мавжуд ва улар бир-бирига тенг, лекин функция $x=-1$ нуқтада аниқланмаган, шунинг учун у бу нуқтада узлуксиз бўлмайди.

**8.2.Функция узилиш нуқталарининг турлари.** $f(x)$ функция $X\ (X\subset R)$ тўпламда аниқланган бўлиб, $a$ нуқта $X$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин, $a\in X$ .

**8.9-таъриф.** Агар $x\to a$ да $f(x)$ функциянинг:



8.4-чизма.



8.5-чизма

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**1)** лимити мавжуд ва чекли бўлиб, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\neq f(a)$;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$);

3) лимити мавжуд бўлмаса, $f(x)$ функция $a$ *нуқтада узилишга* эга дейилади.

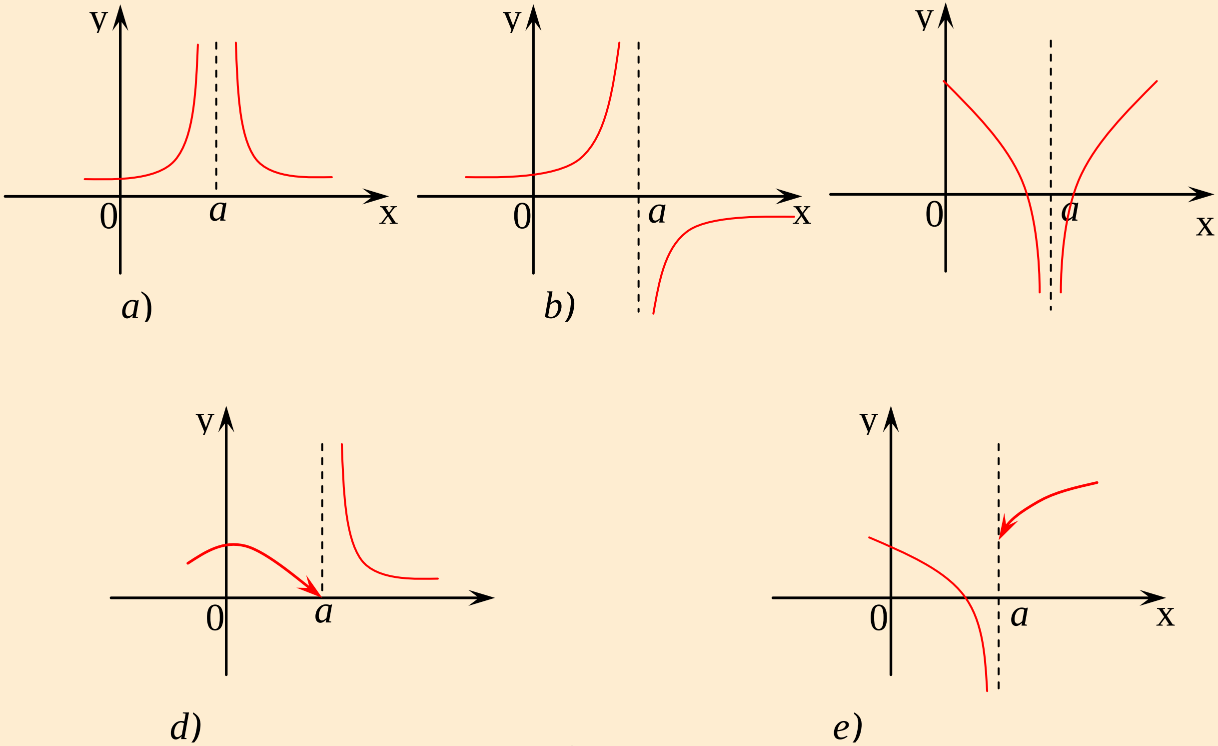
Функциянинг берилган нуқтада узилишга эга бўлиш ҳолларини алоҳида қараб ўтамиз:

***1-ҳол***. Агар $f(x)$ функциянинг $a$ нуқтадаги ўнг $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ ва чап $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ лимитлари мавжуд бўлиб, $f(a+0)=f(a-0)\neq f(a)$ муносабат уринли бўлса, $f(x)$ функция $a$ *нуқтада йўқотилиши мумкин бўлган узилишга* эга дейилади (8.4-$a$), $b$) чизмалар).

***2-ҳол.*** Агар $x\to a$ да $f(x)$ функциянинг ўнг ва чап лимитлари мавжуд ва чекли булиб, улар бир-бирига тенг бўлмаса ($f(a-0)\neq f(a+0)$), $f(x)$ функция $a$ *нуқтада биринчи тур узилишга* эга дейилади (8.5-$a$), $b$), c), $d$) - чизмалар).

Ушбу $|f(a+0)-f(a-0)|=h$ айирмага $f(x)$ функциянинг $a$ нуқтадаги *сакраши* дейилади ва уни $\Delta f(a)$ каби белгилаймиз.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



*a*)
*b*)
*d*)
*e*)

8.6-чизма.

***3-ҳол***. Агар $x \to a$ да $f(x)$ функциянинг:

1) лимити чексиз (функциянинг ўнг ва чап лимитлари чексиз) бўлса;

2) ўнг ва чап лимитларидан ҳеч бўлмаганда биттаси мавжуд бўлмаса;

3) ўнг ва чап лимитларидан бири чексиз ёки ўнг ва чап лимитлари турли ишорали чексиздан иборат бўлса, $f(x)$ функция *$a$ нуқтада иккинчи тур узилишга* эга дейилади (8.6-$a$), $b$), *c*), *d*), *e*) чизмалар).

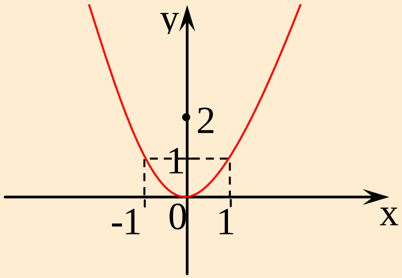
Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Агар чап $f(a\text{-}0)$ ёки ўнг $f(a+0)$ лимитлардан ҳеч бўлмаганда бири ∞ га тенг бўлса, $x=a$ нуқта *чексиз узилиш нуқтаси* дейилади (8.6-$a$), $b$), $c$), $d$), $e$) чизмалар).

**8.8-мисол**. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases} x^4, & x\neq0 \text{ бўлганда}, \\ 2, & x=0 \text{ бўлганда}, \end{cases}$$

функцияни узлуксизликка текширинг.

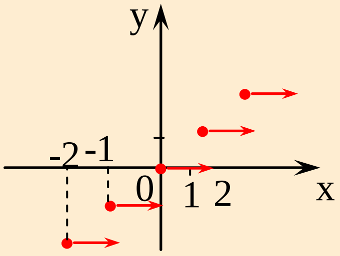


8.7-чизма.

**Ечилиши**. Равшанки, берилган функциянинг $x=0$ нуқтадаги чап лимити $\lim\limits_{x\to0-0} x^4=0=f(0\text{-}0)$ ва ўнг лимити $\lim\limits_{x\to0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to0+0} x^4=0=f(0+0)$ мавжуд бўлиб, лекин $f(0\text{-}0)=f(0+0)\neq2=f(0)$ тенг эмас. Демак, бу функция $x=0$ нуқтада йўқотилиши мумкин бўлган узилишга эга (8.7-чизма).

**8.9-мисол**. $f(x)=[x]$ функцияни узлуксизликка текширинг.

**Ечилиши**. $x=n$ $(n\in Z)$ нуқтада берилган функциянинг хос қийматини ва ўнг ҳамда чап лимитларини топамиз:



8.8-чизма.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$f(n)=[n]=n, \quad \lim_{x\to n+0} f(x)=n=f(n+0), \quad \lim_{x\to n-0} f(x)=n-1=f(n-0).$$

Демак, берилган функция $x=n$ нуқтада биринчи тур узилишга эга бўлади (8.8-чизма).

**8.10-мисол**. Ушбу

$$f(x)= \begin{matrix} \frac{1}{7}(2x^2+5), \ -\infty< x\leq 1 \text{ бўлганда;} \\ 5-4x, \ 1<x<3 \text{ бўлганда;} \\ x \ -5, \ 3\leq x<\infty \text{ бўлганда,} \end{matrix}$$

функцияни узлуксизликка текширинг.

**Ечилиши**. Берилган функция $(-\infty;\infty)$ да аниқланган ва $(-\infty;1)$, $(1;3)$, $(3;\infty)$ ларда узлуксиз бўлиб, у фақат $x=1$ ва $x=3$ нуқталарда узилишга эга бўлиши мумкин. Берилган функциянинг $x=1$ нуқтадаги бир томонли лимитларини ҳисоблаймиз:

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{7}(2x^2+5)=1, \qquad f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}(5-4x)=1.$$

Маълумки, $x=1$ нуқтада берилган функциянинг киймати биринчи аналитик ифода билан аниқланади:

$$f(1)=\frac{1}{7}(2\cdot 1^2+5)=1.$$

Демак, $f(1-0)=f(1+0)=f(1)=1$ булгани учун, 8.1-теоремага асосан, берилган функция $x=1$ нуктада узлуксиз бўлади.

Энди $f(x)$ функциянинг $x=3$ нуқтада чап ва ўнг лимитларини ҳисоблаймиз:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
← →
⇤ ⇥
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$f(3\text{-}0)=\lim_{x\to 3-0}(5\text{-}4x)=\text{-}7, \qquad f(3+0)=\lim_{x\to 3+0}(x\text{-}5)=\text{-}2.$$

Бу ердан $f(3\text{-}0)\neq f(3+0)=f(3)$.

Демак, $f(x)$ функция $x=3$ нуқтада 1-тур узилишга эга бўлиб, унинг $x=3$ нуқтадаги сакраш катталиги

$$\omega=\left|f(3+0)-f(3-0)\right|=\left|-2+7\right|=5$$

бўлади.

**8.11-мисол**. Ушбу $f(x)=arctg(tgx)$ $(x\in(\text{-}\frac{\pi}{2}+\text{k}\pi;\ \frac{\pi}{2}+\pi\text{k}),\ \text{k}\in Z)$ функцияни $x=\frac{\pi}{2}$ нуқтада узлуксизликка текширинг.

**Ечилиши**. $f(x)$ функциянинг $x=\frac{\pi}{2}$ нуқтада чап ва ўнг лимитларини ҳисоблаймиз:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} arctg(tgx)=arctg(+\infty)=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \text{arctg}(\text{tg}\,x)=\text{arctg}(\text{-}\infty)=\text{-}\frac{\pi}{2},$$

бу ердан $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x)$, демак $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$ мавжуд эмас.

Шундай килиб, $x=\frac{\pi}{2}$ нукта берилган функция учун биринчи тур узилиш нуқтаси бўлар экан.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**8.12-мисол**. Ушбу $f(x)=4^{\frac{1}{x-3}}+2$

функцияни $x_1=3$ ва $x_2=4$ нуқталарда узлуксизликка текширинг.

**Ечилиши**. $f(x)$ функциянинг $x_1=3$ нуқтада чап ва ўнг лимитларини ҳисоблаймиз:

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3-0}(4^{\frac{1}{x-3}}+2)=2,$$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3+0}(4^{\frac{1}{x-3}}+2)=\infty.$$

Демак, функциянинг нуқтада узилишга эга бўлишининг 3-ҳолига асосан, берилган функция $x_1=3$ нуқтада 2-тур узилишга эга бўлади. Энди $f(x)$ функциянинг $x_2=4$ нуқтада чап ва ўнг лимитларини ҳисоблаймиз:

$$\lim_{x\to 4-0} f(x)=\lim_{x\to 4-0}(4^{\frac{1}{x-3}}+2)=6,$$

$$\lim_{x\to 4+0} f(x)=\lim_{x\to 4+0}(4^{\frac{1}{x-3}}+2)=6, \qquad f(4)=4^{\frac{1}{4-3}}+2=4+2=6.$$

Демак, 8.1-теоремага асосан, $f$ (4-0)= $f$ (4+0)= $f$ (4), яъни берилган $f(x)$ функция $x_2=4$ нуқтада узлуксиз бўлади.

**8.13-мисол**. $f(x)=\cos^2\frac{1}{x}$ функцияни узлуксизликка текширинг.

**Ечилиши**. Берилган $f(x)$ функция $x=0$ нуқтада аниқланмаган, шунинг учун $x=0$ нуқтанинг атрофидан нолга интилувчи ихтиёрий иккита кетма-кетлик оламиз:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\left\{ \quad x'_n=\frac{1}{n\pi}\ \ (n\in N), \qquad x''_n=\frac{2}{\pi(1+2n)}\ \ (n\in \mathrm{N}). \right.$$

Бу кетма-кетликларнинг хар бири $n\to\infty$ да $x'_n\to 0$, $x''_n\to 0$. Функциянинг бу кетма-кетликларга мос келган кийматлари кетма-кетликлари $n\to\infty$ да ҳар хил лимитларга интилади, яъни

$$\lim_{n\to\infty}\cos^2\frac{1}{x'_n}=1, \quad \lim_{n\to\infty}\cos^2\frac{1}{x''_n}=0 \ .$$

Демак, 8.2-таърифга асосан, $f(x)=\cos^2\frac{1}{x}$ функциянинг $x\to 0$ да лимити мавжуд эмас. Шунинг учун, берилган функция $x=0$ нуқтада 2-тур узилишга эга бўлади.

8.14-**мисол**. *а* нинг кандай қийматларида

$\cos x$, $x\le 0$ бўлганда,

$f(x)=$

$a(x\text{-}1)^2$, $x>0$ бўлганда,

функция $x_0=0$ нуқтада узлуксиз бўлади?

**Ечилиши**. Берилган функция $x_0=0$ нуқтада узлуксиз бўлиши учун, қуйидаги $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=f(0)$ тенглик бажарилиши керак. Буни текшириш учун функциянинг чап ва ўнг лимитларни ҳисоблаймиз:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0} \cos x=1,$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0} a(x\text{-}1)^2=a, \ \ f(0)=1.$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Демак, $a$=1 бўлганда берилган функция $x_0$=0 нуқтада узлуксиз бўлар экан, $a\neq 1$ қийматларда функция узилишга эга.

**8.15- мисол.** $a$ **ва** $b$ нинг қандай қийматларида берилган функция узлуксиз бўлишини *Maple тизимидан фойдаланиб* кўрсатинг:

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x\le 0\\ ax+b, & -x<0 \;\; va \;\; x<1\\ \sqrt{x}, & 1\le x\end{cases}$$

**Ечилиши.**

```
> f:=x->piecewise(x<=0,(x-1)^2,x>0 and x<1, a*x+b,x>=1,sqrt(x));
```

$$f := x-> piecewise(x\le 0, (x-1)^2, 0<x \;\; and \;\; x<1, \; ax+b, \; 1\le x, \sqrt{x})$$

```
> s1:=limit(f(x),x=0,left)=limit(f(x),x=0,right);
```

$$s1 := 1 = b$$

```
> s2:=limit(f(x),x=1,left)=limit(f(x),x=1,right);
```

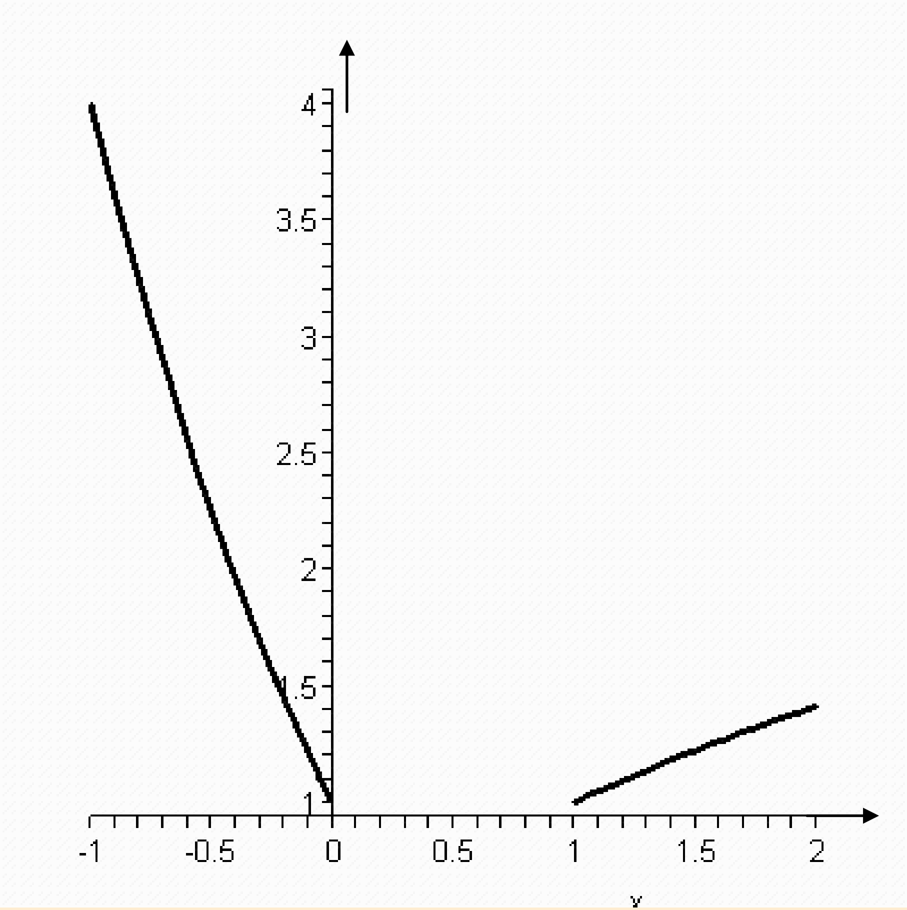
$$s2 := a + b = 1$$

```
> solve({s1,s2},{a,b});
```

$$\{b = 1, a = 0\}$$

```
> plot(f(x),x=-1..2,thickness=2, color=black);
```

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



8.9-мисол.

**8.16-мисол.** $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ функциянинг $x_0=1$ нуктадаги кийматини

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

шундай танлаш керакки, натижада берилган функция узлуксиз бўлсин.

**Ечилиши**. Берилган функциянинг $x\to 1\pm 0$ да лимитларини ҳисоблаймиз:

$$\lim_{x\to 1\pm 0} f(x)=\lim_{x\to 1\pm 0}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1\pm 0}(x+1)=2.$$

Агар $f(1)=2$ деб олсак, $x=1$ да функция узлуксиз бўлади, яъни

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1 \text{ бўлганда,}\\ 2, & x=1 \text{ бўлганда.}\end{cases}$$

**8.17-мисол.** Ушбу

$$1)\ \ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x<0,\\ (x+1)^2, & 0\le x\le 2,\\ 1-x, & 2<x,\end{cases} \qquad 2)\ \ f(x)=\frac{|x+3|}{x+3};$$

$$3)\ \ f(x)=\frac{1}{x^2-4}; \qquad 4)\ \ f(x)=\frac{|x-1|}{x^2-x^3};$$

$$5)\ \ f(x)=\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{x^2-x}$$

функцияларнинг узилиш нуқталари ва уларнинг турларини аниқланг, функциянинг биринчи тур узилиш нуқталаридаги сакрашини топинг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**Ечилиши**. **1)** Берилган функциянинг $x=0$, $x=2$ нуқталардаги чап ва ўнг лимитларини топамиз:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x-1}=-1,\quad \lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}(x+1)^2=1;$$

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}(x+1)^2=9,\quad \lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}(1-x)=-1.$$

Демак, берилган функциянинг узилиш нуқталари $x=0$ ва $x=2$ бўлиб, улар биринчи тур узулиш нуқталари бўлиб ҳисобланади, узилиш нуқталаридаги сакрашлари

$$\Delta f(0)=\left|\ 1+1\ \right|=2,\ \ \Delta f(2)=\left|\ -1-9\ \right|=\left|-10\right|=10.$$

**Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:**

> y:=piecewise(x<0,1/(x-1),0<= x and x<= 2,(x+1)^2,x>2,1-x);

$$y:=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x<0\\ (x+1)^2, & 0\le x \ \ and \ \ x\le 2\\ 1-x, & 2<x\end{cases}$$

> Limit(y,x=0,left)=limit(y,x=0,left);Limit(y,x=0,right)=
limit(y,x=0,right);

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\lim_{x\to 0-}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{x-1},\quad x<0\\ (x+1)^2,\ \ 0\le x\ \ and\ \ \ x\le 2\\ 1-x,\ \ 2<x\end{array}\right\}=-1$$

$$\lim_{x\to 0+}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{x-1},\quad x<0\\ (x+1)^2,\ \ 0\le x\ \ and\ \ \ x\le 2\\ 1-x,\ \ 2<x\end{array}\right\}=1$$

```
> Limit(y,x=2,left)=limit(y,x=2,left);Limit(y,x=2,right)=
limit(y,x=2,right);
```

$$\lim_{x\to 2-}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{x-1},\quad x<0\\ (x+1)^2,\ \ 0\le x\ \ and\ \ \ x\le 2\\ 1-x,\ \ 2<x\end{array}\right\}=9\ \lim_{x\to 2+}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{x-1},\quad x<0\\ (x+1)^2,\ \ 0\le x\ \ and\ \ \ x\le 2\\ 1-x,\ \ 2<x\end{array}\right\}=-1$$

**2)** Маълумки,

$$|x+3|=\begin{cases}x+3, & x+3>0,\\ -(x+3), & x+3<0.\end{cases}$$

$x=-3$ нуқта, берилган функция учун узилиш нуқтаси бўлади. $f(x)=\dfrac{|x+3|}{x+3}$

функциянинг $x=-3$ нуқтадаги ўнг ва чап лимитларини топамиз:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\lim_{x\to -3+0} f(x) = \lim_{x\to -3+0} \frac{(x+3)}{x+3} = 1, \quad \lim_{x\to -3-0} f(x) = \lim_{x\to -3-0} \frac{-(x+3)}{x+3} = -1.$$

Демак, $x = -3$ нуқта берилган функция учун биринчи тур узилиш нуқта бўлиб, функциянинг бу нуқтадаги сакраши $\Delta f(-3) = 2$.

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> readlib(singular):singular(abs(x+3)/(x+3),x);
```

$$\{x = -3\}$$

```
> Limit(abs(x+3)/(x+3),x=-3,left)=limit(abs(x+3)/(x+3),x=-3,left);
```

$$\lim_{x\to -3-}\left(\frac{|x+3|}{x+3}\right) = -1$$

```
> Limit(abs(x+3)/(x+3),x=-3,right)=limit(abs(x+3)/(x+3),x=-3,right);
```

$$\lim_{x\to -3+}\left(\frac{|x+3|}{x+3}\right) = 1$$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{1}{(x-2)(x+2)}$ ункция учун $x = 2,\ x = -2$ нуқталар иккинчи тур узилиш нуқталари бўлади, чунки

$$\lim_{x\to 2\pm 0} f(x) = \lim_{x\to 2\pm 0} \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \pm\infty,$$

$$\lim_{x\to -2\pm 0} f(x) = \lim_{x\to -2\pm 0} \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \mp\infty.$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> readlib(singular):singular(1/(x^2-4),x);
```

**Титул варак**

**Мундарижа**

**1-боб**

**2-боб**

**3-боб**

**Адабиётлар**

**Оркага**

**Тулик экран**

**Чикиш**

$\{x = -2\}, \{x = 2\}$

```
> Limit(1/(x^2-4),x=-2,left)=limit(1/(x^2-4),x=-2,left);
```

$$\lim_{x\to -2-}\left(\frac{1}{x^2-4}\right) = -\infty$$

```
> Limit(1/(x^2-4),x=-2,right)=limit(1/(x^2-4),x=-2,right);
```

$$\lim_{x\to -2+}\left(\frac{1}{x^2-4}\right) = \infty$$

```
> Limit(1/(x^2-4),x=2,left)=limit(1/(x^2-4),x=-2,left);
```

$$\lim_{x\to 2-}\left(\frac{1}{x^2-4}\right) = -\infty$$

```
> Limit(1/(x^2-4),x=2,right)=limit(1/(x^2-4),x=2,right);
```

$$\lim_{x\to 2+}\left(\frac{1}{x^2-4}\right) = \infty .$$

4) Маълумки,

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x-1>0\,, \\ -(x-1), & x-1<0. \end{cases}$$

$f(x) = \dfrac{|x-1|}{x^2 - x^3}$ функция учун $x=0$ ва $x=1$ нуқталар узилиш нуқталари бўлади. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x-1|}{x^2(1-x)} = \infty$. Демак, $x=0$ нуқта иккинчи тур узилиш нуқтаси бўлади. Энди $x=1$ нуқтада функциянинг ўнг ва чап лимитларини

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

ҳисоблаймиз:

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{|x-1|}{x^2-x^3} = \lim_{x\to 1+0} \frac{x-1}{x^2(1-x)} = -1,$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{|x-1|}{x^2-x^3} = \lim_{x\to 1-0} \frac{-(x-1)}{x^2(1-x)} = 1.$$

Шундай қилиб, $x=1$ нуқта берилган функция учун биринчи тур узилиш нуқтаси бўлиб, функциянинг бу нуқтадаги сакраши $\Delta f(1) = 2$.

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> readlib(singular):singular(abs(x-1)/(x^2-x^3),x);
```

$$\{x=1\},\ \{x=0\}$$

```
> Limit(abs(x-1)/(x^2-x^3),x=0,left)=limit(abs(x-1)/(x^2-x^3),x=0,left);
```

$$\lim_{x\to 0-}\left(\frac{|x-1|}{x^2-x^3}\right) = \infty,$$

```
> Limit(abs(x-1)/(x^2-x^3),x=0,right)=limit(abs(x-1)/(x^2-x^3),x=0,right);
```

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{|x-1|}{x^2-x^3}\right) = \infty$$

```
> Limit(abs(x-1)/(x^2-x^3),x=1,left)=limit(abs(x-1)/(x^2-x^3),x=1,left);
```

$$\lim_{x\to 1-}\left(\frac{|x-1|}{x^2-x^3}\right) = 1$$

```
> Limit(abs(x-1)/(x^2-x^3),x=1,right)=limit(abs(x-1)/(x^2-x^3),x=1,right);
```

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\lim_{x\to 1+}\left(\frac{|x-1|}{x^2-x^3}\right)=-1.$$

5) $f(x)=\dfrac{(x+1)^2-(x-1)^2}{x^2-x}$ функция учун $x=0$ ва $x=1$ узилиш нуқталари бўлиб, бунда, равшанки, $x=1$ нуқта иккинчи тур, $x=0$ нуқта эса, йуқотилиши мумкин бўлган узилиш нуқтаси бўлади, чунки

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{x(x-1)}=\infty,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^2-1+1-(x-1)^2}{x(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-1}\left[\frac{(1+x)^2-1}{x}+\frac{(x-1)^2-1}{-x}\right]=-4$$

эканлигини ҳисобга олсак, $x=0$ нуқта ҳақиқатан ҳам йўқотилиши мумкин бўлган узилиш нуқтаси бўлиб, ундаги функциянинг сакраши $\Delta f(0)=0$ бўлади.

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> readlib(singular):singular(((x+1)^2-(x-1)^2)/(x^2-x),x);
```

$\{x=1\}$

```
> Limit(((x+1)^2-(x-1)^2)/(x^2-x),x=1,left)=limit(((x+1)^2-(x-1)^2)/(x^2-
x),x=1,left);
```

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
← →
⇤ ⇥
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\lim_{x\to 1-}\left(\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{x^2-x}\right)=-\infty.$$

> Limit(((x+1)^2-(x-1)^2)/(x^2-x),x=1,right)=limit(((x+1)^2-(x-1)^2)/(x^2-x),x=1,right);

$$\lim_{x\to 1+}\left(\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{x^2-x}\right)=\infty.$$

> Limit(((x+1)^2-(x-1)^2)/(x^2-x),x=0,left)=limit(((x+1)^2-(x-1)^2)/(x^2-x),x=0,left);

$$\lim_{x\to 0-}\left(\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{x^2-x}\right)=-4.$$

> Limit(((x+1)^2-(x-1)^2)/(x^2-x),x=0,right)=limit(((x+1)^2-(x-1)^2)/(x^2-x),x=0,right);

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{x^2-x}\right)=-4.$$

### 8.3. Узлуксиз функцияларнинг хоссалари.

1) **Нуқтада узлуксиз бўлган функциянинг локал хоссалари.** $f(x)$ функция $X$ тўпламда аниқланган бўлсин. $X$ тўпламдан бирор $a\in X$ нуқта олиб, бу нуқтанинг шу $X$ тўпламга тегишли бўлган етарли кичик $U_\delta(a)$ атрофини қарайлик.

$1^0$. Агар $f(x)$ функция $a$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $a$ нуқтанинг етарли кичик атрофида функция чегараланган бўлади, яъни

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\exists\delta>0\ \exists C>0:\ \forall x\in U_\delta(a)\to |f(x)|\leq C.$$

$2^0$. Агар $f(x)$ функция $a$ нуқтада узлуксиз ва $f(a)\neq 0$ бўлса, $f(a)$ сон билан $a$ нуқтанинг етарли кичик атрофида $f(x)$ функциянинг ишораси бир хил бўлади, яъни

$$\exists\delta>0:\ \forall x\in U_\delta(a)\to \operatorname{sign} f(x)=\operatorname{sign} f(a).$$

**Натижа.** Агар $f(x)$ функция $a$ нуқтада узлуксиз бўлиб, бу нуқтанинг етарли кичик атрофидан олинган $x$ нуқталарда ҳам мусбат, ҳам манфий ишорали кийматларни кабул килаверса, функциянинг $a$ нуқтадаги киймати нолга тенг бўлади.

$3^0$. Агар $f(x)$ функция $a$ нуқтада узлуксиз бўлса, $a$ нуқтанинг етарли кичик атрофидан олинган $x'$ ва $x''$ нуқталар учун $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади, бунда $\forall\varepsilon>0$ сон.

Функциянинг нукта атрофидаги хусусиятларига унинг локал хусусиятлари дейилади.

**8.4. Узлуксиз функциялар устида амаллар**. Узлуксиз функциялар учун қуйидаги тасдиқлар ўринли:

**8.2-теорема**. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $X\subset R$ тўпламда аниқланган бўлиб, уларнинг ҳар бири $a\in X$ нуқтада узлуксиз, яъни

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a),\quad \lim_{x\to a} g(x)=g(a)$$

бўлса, $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ($\forall x\in X$ лар учун $g(x)\neq 0$) функциялар ҳам

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

шу нуқтада узлуксиз ва

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = f(a)\pm g(a),$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = f(a)\cdot g(a),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} \quad (g(a)\neq 0)$$

тенгликлар ўринли бўлади.

**8.2- эслатма**. Иккита функция йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва нисбати узлуксиз бўлишидан, бу функциялардан ҳар бирининг узлуксиз бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди.

Масалан: **1)** $f(x)=x\cos\frac{1}{x}$ функция $x=0$ нуқтада узлуксиз, лекин бу функцияни ҳосил қилувчи

$$f_1(x)=x, \quad f_2(x)=\cos\frac{1}{x}$$

функциялардан биринчиси $x=0$ нуқтада узлуксиз, иккинчиси эса бу нуқтада узилишга эга.

**2)** $f(x)=[x]+\{x\}=x$. Берилган функция $R$ да узлуксиз, лекин бу функцияни ҳосил қилувчи $f_1(x)=[x]$, $f_2(x)=\{x\}$ ($[x]$ – $x$ нинг бутун қисми, $\{x\}$ – $x$ нинг каср қисми) функцияларнинг ҳар бири $x=n$ $(n\in Z)$ нуқтада узилишга эга.

**8.18-мисол**. Ушбу $f(x)=5x^2-\sin^3 x+3^x$ функциянинг $\forall a\in R$ нуқтада узлуксизлигини кўрсатинг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**Ечилиши**. $\varphi(x)=x,\ g(x)=\sin x,\ h(x)=3^x$ функциялар $R$ да узлуксиз. $f(x)$ функцияни $f(x)=5x\cdot x+\sin x\cdot\sin x\cdot\sin x+3^x$ кўринишда ёзамиз. У ҳолда, узлуксиз функциялар устидаги арифметик амалларга кўра, $f(x)$ функциянинг $R$ да узлуксизлиги келиб чиқади, яъни $\lim\limits_{x\to a}(5x^2-\sin^3 x+3^x)=5a^2-\sin^3 a+3^a$.

**8.19-мисол**. Ушбу $f(x)=\dfrac{x}{4+x^2}$ функциянинг $\forall a\in R$ да узлуксизлигини кўрсатинг.

**Ечилиши**. $\forall\, x\in R$ лар учун $4+x^2\neq 0$. 8.2-теоремага асосан, берилган функция $\forall\, x\in R$ да узлуксиздир, чунки $\lim\limits_{x\to a}x=a,\ \lim\limits_{x\to a}(4+x^2)=4+a^2$, яъни нисбат ҳосил қилувчи функцияларнинг ҳар бири ҳам узлуксиздир.

Демак, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{4+x^2}=\dfrac{a}{4+a^2}=f(a)$.

**8.20-мисол.** Ушбу

1) $f(x)=\dfrac{3x^5-10x+17}{x^4+4x^3+10x^2+12x+9}$; 2) $f(x)=\dfrac{5\cos^2 x+2\sin^3 x+3}{6\sin x-3}$

функцияларни узлуксизликка текширинг.

**Ечилиши 1)** Берилган функция, иккита узлуксиз функцияларнинг нисбати шаклида тасвирланган бўлиб, у, фақат махраж нолга айланадиган нуқталаридагина узулишга эга бўлиши мумкин, лекин бу ҳолда махраж

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$x^4+4x^3+10x^2+12x+9=\left(x^2+2x+3\right)^2$$

$\forall x$ учун $x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0$. Демак, махраж ҳеч қандай нуқтада нолга айланмайди.

Шундай қилиб, берилган $f(x)$ функция икkита узлуксиз функция нисбати сифатида $R$ да узлуксиз.

**2)** $f(x)$ функция махраж нолга тенг бўлган, яъни $6\sin x-3=0$ ёки $\sin x=\frac{1}{2}$, $x=x_n=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n \quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots)$ нуқталарда узилишга эга.

Демак, берилган $f(x)$ функция $x_n=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n\ (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ нуқталардан ташқари $R$ да узлуксиз.

**8.21-мисол.** Қуйидаги функцияларнинг узлуксизликка текширинг ва графигини чизинг:

$$1)\ y=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n},\ x\geq 0;\ \ 2)\ y=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(2^n+x^n\right)}{n},\ x\geq 0.$$

**Ечилиши. 1)** Агар $x=0$ бўлса, $y=1$ бўлади, $0<x<1$ бўлганда эса, $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$ Демак, $y=1$ . Агар $x>1$ бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=+\infty$. Бу ҳолда $y=0$ бўлади. Агар $x=1$ бўлса, $y=\frac{1}{2}$ бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Шундай қилиб, берилган функциянинг аналитик кўриниши қуйидагича бўлади

$$y=\begin{cases}1, & 0\le x<1,\\ \frac{1}{2}, & x=1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Бундан, $x=1$ нуқта берилган функция учун биринчи тур узилиш нуқтаси эканлигини кўриш қийин эмас. Бу функциянинг графиги 8.10- чизмада тасвирланган.

**2)** Агар $x=0$ ва $x=1$ бўлганда, $y=\ln 2$ бўлади.

Агар $0<x<1$ бўлганда, $y=\ln 2$, $1<x<2$ бўлганда эса,

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(2^n+x^n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln 2+\ln\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)}{n}=\ln 2.$$

Агар $x=2$ да, $y=\ln 2$ бўлади, агар $x>2$ бўлганда эса, $y=\ln x$ бўлади.

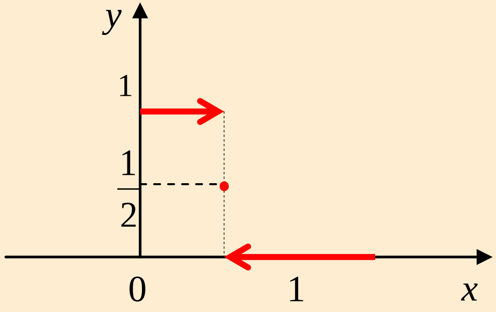
Шундай қилиб, берилган функциянинг аналитик кўриниши

$$y=\begin{cases}\ln 2, & 0\le x\le 2\ ,\\ \ln x, & x>2\ .\end{cases}$$

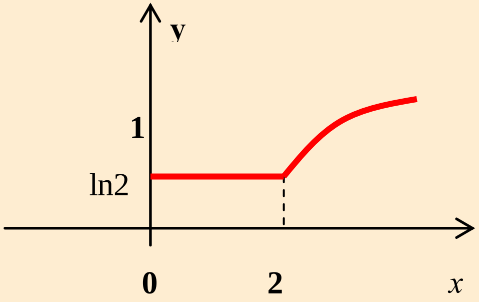
шаклда бўлади. $x=2$ нуқтада функциянинг ўнг ва чап лимитларини ҳисоблаймиз: $\lim\limits_{x\to 2+0} y=\ln 2$, $\lim\limits_{x\to 2-0} y=\ln 2$. Демак, $y(2-0)=y(2+0)=y(2)=\ln 2$ тенглик ўринли бўлганлиги учун, берилган функция қаралаётган соҳада

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

узлуксиз бўлади. Бу функциянинг графиги 8.11- чизмада тасвирланган.



**8.10-чизма.**



**8.11-чизма.**

### 8.5. Мураккаб функциянинг узлуксизлиги.

$y=f(x)$ функция $X$ тўпламда, $z=\varphi(y)$ функция эса, $Y$ тўпламда аниқланган ва $E(\varphi)\subseteq X$ бўлсин, у ҳолда улар ёрдамида $z=\varphi(f(x))$ мураккаб функция тузиш мумкин бўлади.

**8.3-теорема**. $y=f(x)$ функция $a\in X$ нуқтада, $z=\varphi(y)$ функция эса $a$ нуқтага мос келган $y_a=f(a)$ нуқтада узлуксиз бўлса, $z=\varphi(f(x))$ мураккаб функция $a$ нуқтада узлуксиз бўлади.

**8.22-мисол.** Ушбу

1) $y=\sin x^n \quad (n\in N)$; 2) $y=\sin(\log 4x)$; 3) $y=\sqrt{\frac{1}{2}-\sin^2 x}$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

функцияларни узлуксизликка текширинг.

**Ечилиши. 1)** $u=x^n$ деб, $y=\sin u$ функцияга эга бўламиз. Маълумки, $y=\sin u$ функция, $\forall u$ учун узлуксиз. $u=x^n$ функция эса, даражали функция сифатида $\forall x\in R$ да узлуксиз. Демак, $y=\sin x^n$ мураккаб функция 3-теоремага асосан $R$ да узлуксиз бўлади.

**2)** Маълумки, $u=\log_3 4x$ функция $(0;\infty)$ да узлуксиз, $y=\sin u$ функция эса, $R$ да узлуксиз. Демак, мураккаб функцияларнинг узлуксизлиги ҳақидаги 3-теоремага кўра, $y=\sin(\log_3 4x)$ мураккаб функция $(0;\infty)$ оралиқда узлуксиздир.

**3)** $u=\sin x$ деб, $y=\sqrt{\frac{1}{2}-u^2}$ функцияни ҳосил қиламиз. Бу функция $\frac{1}{2}-u^2\geq 0$, $u^2\leq\frac{1}{2}$ ёки $|u|\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq u\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$ да аниқланган ва узлуксиз. $u=\sin x$ функция эса, $R$ да узлуксиз.

Шундай қилиб, $y=\sqrt{\frac{1}{2}-u^2}$ мураккаб функция $x$ нинг $|\sin x|\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$ тенгсизликни қаноатлантирадиган, яъни $\left\{\pi n-\frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad n\in Z\right\}$ қийматларида узлуксиздир.

**8.23-мисол.** Ушбу

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

1) $y=\dfrac{1}{u^2-3u+2}$, $u=\dfrac{1}{x-2}$; 2) $y=u^2$, $u=\begin{cases} x-1, \ x\geq 0\,, \\ x+1, \ \ x<0\,; \end{cases}$

3) $y=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$, $u=tgx$

мураккаб функцияларнинг узилиш нуқталарини топинг ва узилиш турларини аниқланг.

**Ечилиши.** **1)** $u=\dfrac{1}{x-2}$ функция $x=2$ нуқтада узилишга эга $y=\dfrac{1}{u^2-3u+2}$ функция эса, $u^2-3u+2=0$ тенгликни қаноатлантирадиган $u$ нинг қийматларида, яъни $u=1$ ва $u=2$ нуқталарда узилишга эга. $u$ нинг бу қийматларига мос келган $x$ нинг қийматларини $1=\dfrac{1}{x-2}$, $2=\dfrac{1}{x-2}$ тенгламаларни ечиш натижасида топамиз. Булардан $x=3$; $x=\dfrac{5}{2}$.

Шундай қилиб, берилган мураккаб функция $x=2$, $x=\dfrac{5}{2}$, $x=3$ нуқталарда узилишга эга. Энди узилиш нуқталарининг турини аниқлаймиз.

$$\lim_{x\to 2} y=\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u^2-3u+2}=0$$

бўлгани учун $x=2$ йўқотилиши мумкин бўлган узилиш нуқтаси бўлар экан.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\lim_{x\to\frac{5}{2}} y=\lim_{u\to 2}\frac{1}{u^2-3u+2}=\infty;\quad \lim_{x\to 3} y=\lim_{u\to 1}\frac{1}{u^2-3u+2}=\infty$$

бўлгани учун $x=\frac{5}{2}$ ва $x=\frac{3}{2}$ нуқталар 2-тур узилиш нуқтлари бўлади.

**2)** $y=u^2$ функция $u$ нинг ҳар қандай қийматида узлуксиз.

$u=\begin{cases} x-1, & x\geq 0, \\ x+1, & x<0 \end{cases}$ функция учун $x=0$ нукта узилиш нуқтаси бўлиши мумкин.

$u(0+0)=-1,\ u(0-0)=1,\ u(0)=-1$ бўлгани учун $x=0$ нуқтада $u(x)$ функция ўнгдан узликсиз, чапдан узилишга эга. $x=0$ нуқта атрофида

$$\lim_{x\to 0-0} y=\lim_{u\to 1} u^2=1,\quad \lim_{x\to 0+0} y=\lim_{u\to -1} u^2=1,\quad y(0)=y(-1)=1.$$

Демак, берилган мураккаб функция ҳамма жойда, яъни $\forall x\in R$ учун узликсиздир.

**3)** $u=tgx$ функция $x=\frac{\pi}{2}+\pi n\ \ (n=0,\pm 1,\pm 2,...)$ нуқталарда узилишга эга.

$y=\frac{1-u^2}{1+u^2}$ функция ҳар қандай $u$ ларда узлуксиз:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} u=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} tgx=\pm\infty,\quad \lim_{u\to\pm\infty} y=\lim_{u\to\pm\infty}\frac{1-u^2}{1+u^2}=-1.$$

Бу ерда $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}=-1.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

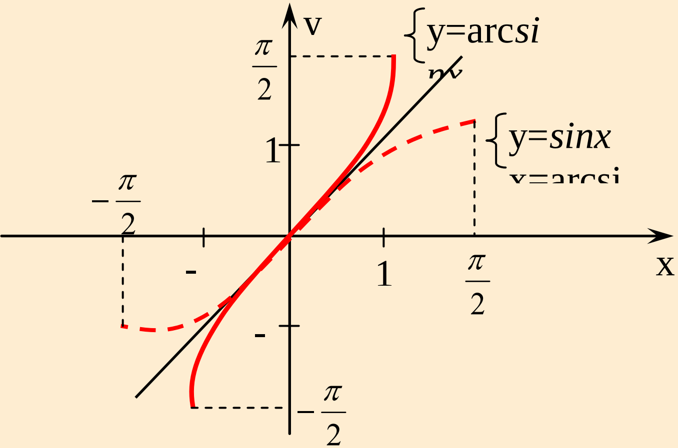
Демак, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n \quad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ нуқталар берилган мураккаб функция учун йўқотилиши мумкин бўлган узилиш нуқталари бўлади.

## 8.6. Монотон ва тескари функцияларнинг узлуксизлиги.

**8.4-теорема**. Агар $f(x)$ функция $X$ ораликда ўсувчи (камаювчи) бўлиб узилишга эга бўлса, унинг узилиши фақат биринчи тур узилиш бўлади.

Агар $f(x)$ функция $X$ ораликда ўсувчи (камаювчи) бўлиб, унинг қийматлари $Y$ ораликни туташ тўлдирса (яъни функция ҳар бир $y\in Y$

қийматни ҳеч бўлмаганда бир марта қабул қилса) бу функция $X$ да узлуксиз бўлади.



8.12-чизма.

**8.5-теорема**. Узлуксиз y= $f(x)$ функция $(a,b)$ да тескари $x=g(y)$ функцияга эга бўлиши учун унинг қатъий монотон бўлиши зарур ва етарлидир.

**8.24-мисол**. Ушбу $y=\sin x$ функция учун $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ кесмада тескари функция мавжудми?

**Ечилиши**. Берилган функция $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ кесмада узлуксиз ва қатъий

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

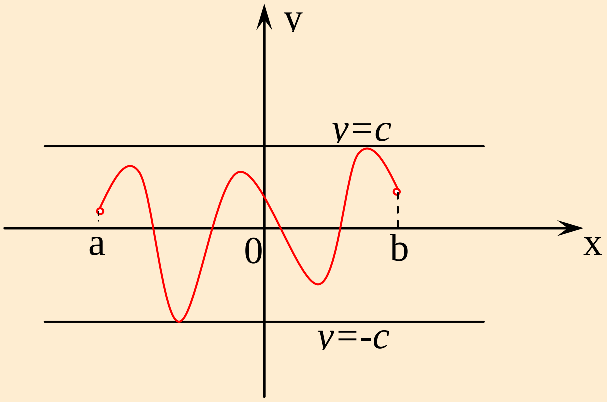
ўсувчи. $y=\sin x$ функциянинг қийматлари тўплами $E(\sin x)=[-1;1]$ кесмадан иборат. 5-теоремага асосан, [-1;1] кесмада узлуксиз ва ўсувчи тескари функция мавжуд. Унинг қийматлари тўплами $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ кесмадан иборат. Берилган функцияга тескари функция $x=\arcsin y$ кўринишда белгиланади. $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ ва [-1;1] кесмаларда мос равишда тўғри ва тескари функцияларнинг графиклари (8.12-чизма) да берилган.

**8.7. Кесмада узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссалари (глобал хоссалар).** $[a;b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз бўлган функцияларни қараймиз, бунда $a$ ва $b$ нуқталардаги узлуксизликлар мос равишда, ўнгдан ва чапдан узлуксизлик деб қаралади.

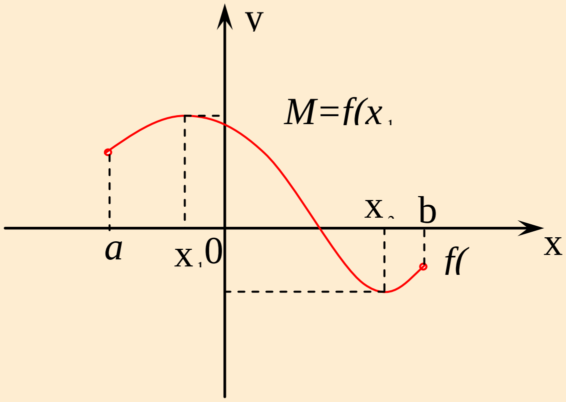
**$1^0$. Вейерштрасснинг биринчи теоремаси.** Агар $f(x)$ функция $[a;b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз бўлса, $f(x)$ функция шу кесмада чегараланган бўлади, яъни $\exists C>0 : \forall x \in [a;b] \rightarrow |f(x)| \leq C$ (8.13-чизма).

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**$2^0$. Вейерштрасснинг иккинчи теоремаси.** Агар $f(x)$ функция $[a;b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз бўлса, $f(x)$ функция шу кесмада ўзининг



8.13-чизма.



8.14-чизма.

аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегараларига эришади, яъни $[a;b]$ кесмада шундай $x_1$ ва $x_2$ нуқталар топиладики,

$$f(x_1)=\sup_{x\in[a,b]}\{\ f(x)\},\qquad f(x_2)=\inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$$

тенглик ўринли бўлади (8.14-чизма).

**$3^0$. Больцано-Кошининг биринчи теоремаси.** Агар $f(x)$ функция $[a;b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз бўлиб, кесманинг четки нуқталарида ҳар хил ишорали қийматларга эга бўлса, шундай $x_0$ $(a<x_0<b)$ нуқта топиладики, унда $f(x)$ функция нолга айланади: $f(x_0)=0$ (8.15-чизма).

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**$4^0$. Больцано-Кошининг иккинчи теоремаси.** Агар $f(x)$ функция $[a;b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз бўлиб, кесманинг четки нуқталарида $f(a)=A$, $f(b)=B$ қийматлар қабул қилса, ҳамда $A\neq B$ бўлса, $A$ ва $B$ сонлар орасида ҳар қандай $C$ сон олинганда ҳам $a$ билан $b$ орасида шундай $c$ нуқта топиладики, $f(c)=C$ бўлади (8.16-чизма).

**8.25-мисол**. Ушбу $f(x)=\cos x+2^x-x^4$ функцияни $[1;\,5]$ кесмада чегараланганликка текширинг.

**Ечилиши**. Берилган функция $[1;\,5]$ кесмада учта $f_1(x)=\cos x$, $f_2(x)=2^x$, $f_3(x)=-x^4$ функциянинг йиғиндиси шаклида берилган. Равшанки, уларнинг ҳар бири $[1;\,5]$ кесмада узлуксиздир. 8.2-теоремага асосан, берилган функция ҳам $[1;\,5]$ кесмада узлуксиз. У ҳолда, Вейерштрасснинг биринчи теоремасига кўра, берилган функция $[1;\,5]$ кесмада чегараланган.

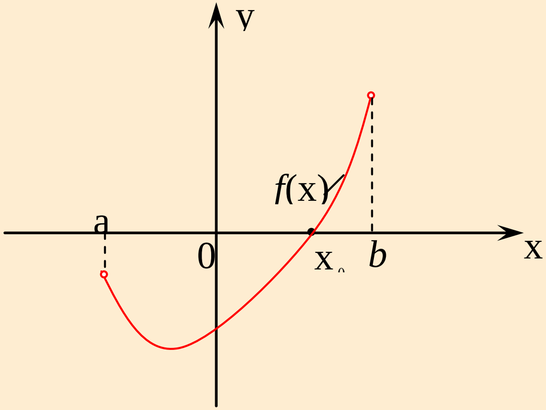
**8.3-эслатма**. Вейерштрасснинг биринчи теоремаси $(a,\ b)$ оралиқ учун ҳар доим ҳам ўринли эмас. Масалан, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ функция $x\in(0;1)$ да узлуксиз, лекин бу оралиқда чегараланмаган. Бу функция $(0;1)$ оралиқнинг ички ҳар бир нуқтасининг кичик атрофида чегараланган, лекин оралиққа тегишли бўлмаган нол нуқтанинг атрофида чегараланмаган.

**8.4-эслатма**. Узилишга эга бўлган функция $[a;b]$ кесманинг ҳар бир нуқтасида аниқланган, лекин бу кесмада чегараланмаган. Масалан,

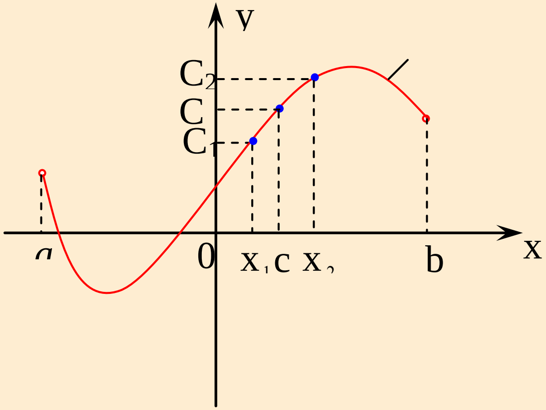
Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<x\le 1 \text{ бўлганда,}\\ 0, & x=0 \text{ бўлганда.}\end{cases}$$

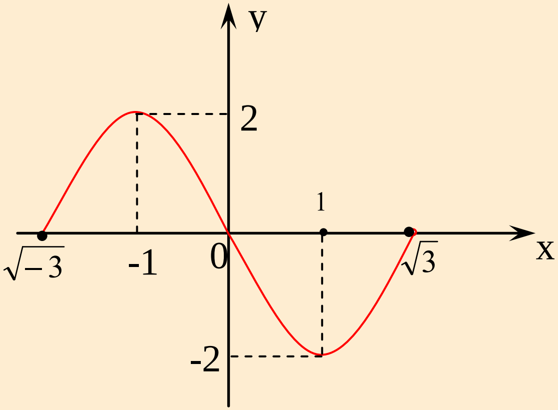
Шундай қилиб, теоремадаги $f(x)$ функцияга қўйилган шартларнинг ҳар иккаласи ҳам муҳимдир.



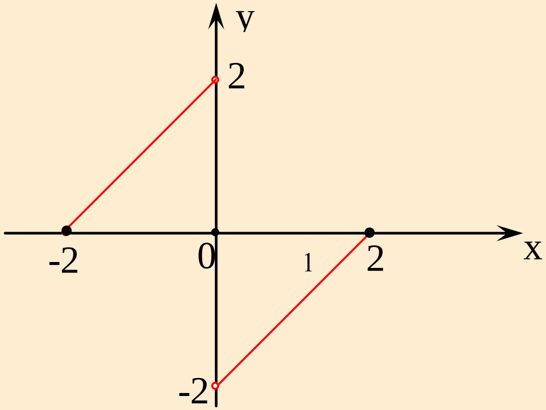
8.15-чизма.



8.16-чизма.



8.17-чизма.



8.18-чизма.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**8.26- мисол**. Ушбу $f(x)=x^3-3x$ функциянинг $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ кесмада энг катта ва энг кичик қийматлари мавжудми? (8.17-чизма).

**Ечилиши**. Равшанки, $x^3$ ва $3x$ функцияларнинг ҳар бири $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ кесмада узлуксиз. 8.2-теоремага асосан, берилган $f(x)$ функция ҳам $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ кесмада узлуксиз. У ҳолда Вейерштрасснинг иккинчи теоремасига кўра, берилган функция $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ кесмада аниқ юқори ва аниқ қуйи чегараларига эришади: $\sup\limits_{x\in[-\sqrt{3};\sqrt{3}]}\{f(x)\}=f(-1)=2$, $\inf\limits_{x\in[-\sqrt{3};\sqrt{3}]}\{f(x)\}=f(1)=-2$.

**8.5-эслатма**. $[a;b]$ кесмада узлуксиз бўлмаган функция учун Вейерштрасснинг иккинчи теоремаси ўринли эмас. Масалан,

$$f(x)=\begin{cases} x+2,\ -2\le x<0 \ \text{бўлганда,} \\ 0,\ x=0 \ \text{бўлганда,} \\ x-2,\ 0<x\le 2 \ \text{бўлганда (8.18-чизма),} \end{cases}$$

кўринишда берилиб, узилишга эга бўлган $f(x)$ функциянинг $[-2;2]$ кесмада энг катта қиймати 2 бўлади, лекин $x$ нинг ҳеч қандай қийматида $f(x)=2$ бўлмайди. Шунга ўхшаш, $f(x)$ функциянинг $[-2;2]$ кесмадаги энг кичик қиймати –2 бўлади, лекин $f(x)\neq-2$.

**8.6- эслатма**. $(a,b)$ оралиқда узлуксиз бўлган $f(x)$ функция учун Вейерштрасснинг иккинчи теоремаси ўринли бўлмаслиги ҳам мумкин. Масалан, $f(x)=x$ функция $(0,1)$ да энг катта ва энг кичик қийматига эришмайди. $(0,1)$ оралиқда $f(x)=x$ функциянинг энг кичик ва энг катта қиймати мос равишда 0 ва 1 бўлади, лекин $x\in(0,1)$ нинг ҳар қандай

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

қийматида $f(x)\neq 0$ ва $f(x)\neq 1$ бўлмайди (8.19-чизма).

**8.7- эслатма**. Хусусий ҳолларда, $f(x)$ функция $(a,b)$ ораликда узлуксиз (узилишга эга) бўлса, $f(x)$ функция шу ораликда энг кичик ва энг катта қийматига эришиши мумкин. Масалан, **1)** (0, 2π) ораликда берилган $f(x)=\sin x$ функция учун $\sup\limits_{x\in(0;2\pi]}\{f(x)\}=f(\frac{\pi}{2})=1$, $\inf\limits_{x\in(0;2\pi]}\{f(x)\}=f(\frac{3\pi}{2})=-1$

бўлади.

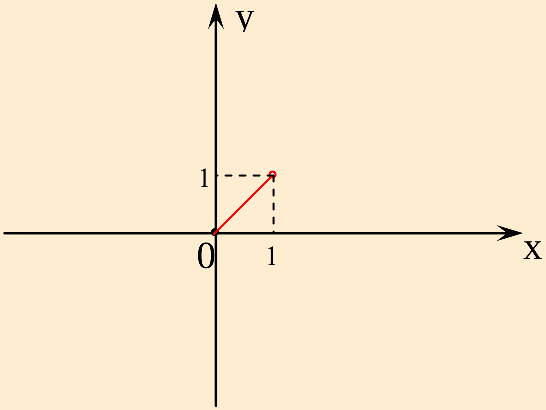
**2)** [-1; 1] кесмада берилган

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & -1\le \mathrm{x} \le 0 \text{ бўлганда,} \\ -\mathrm{x}, & 0<\mathrm{x}\le 1 \text{бўлганда} \end{cases}$$

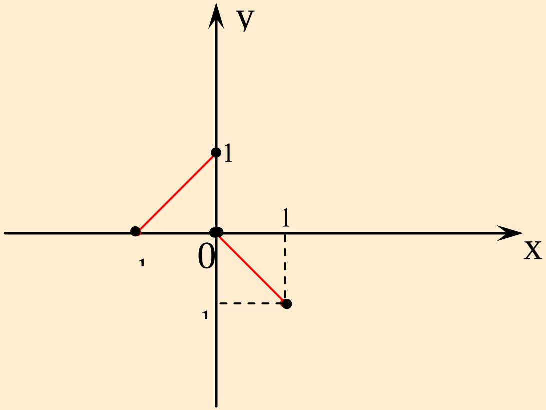
$x=0$ узилишга эга. Бу функция $x=0$ ва $x=1$ нуқталарда мос равишда энг катта ва кичик қийматига эришади:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\sup_{x\in[-1;1]}\{f(x)\}=f(0)=1,\ \inf_{x\in[-1;1]}\{f(x)\}=f(1)=-1 \quad (8.18\text{-чизма}).$$



8.19-чизма.



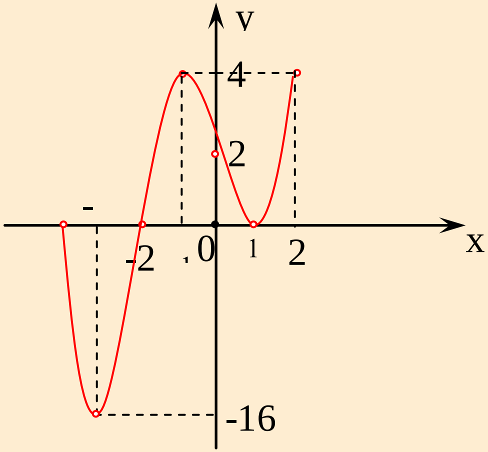
8.20-чизма.

**8.27-мисол.** $[-3;\,2]$ кесмада $f(x)=x^3-3x+2$ функциянинг ноллари мавжудми?

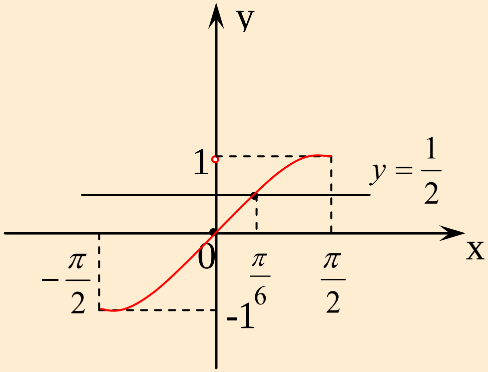
Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**Ечилиши.** Берилган функциянинг $x=-3$ ва $x=2$ нуқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз: $f(-3)=-16<0$, $f(2)=4>0$. $f(x)$ функция $[-3;\,2]$ кесмада узлуксиз ва кесманинг четларида ҳар хил қийматлар қабул қилади. У ҳолда, Больцано-Кошининг биринчи теоремасига кўра, $[-3;\,2]$ да ҳеч бўлмаганда битта нукта топиладики, бу нуктада $f$ функциянинг қиймати нолга тенг бўлади:

$$f(x_0)=0,\quad (x-1)^2(x+2)=0 \Rightarrow\ x_0=1,\ x_0=-2,\ \in[-3;\,2].$$



8.21-чизма.



8.22-чизма.

Демак, берилган $f(x)=x^3-3x+2$ функциянинг $[-3;\,2]$ да $x_1=1$, $x_2=-2$ ноллари мавжуд (8.21-чизма).

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**8.28-мисол.** Ушбу $f(x)=sin\,x$ функция $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ кесмадаги бирор нуқтада, $\frac{1}{2}$ қийматни қабул қиладими?

**Ечилиши.** Берилган функция $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ кесмада узлуксиз ва кесманинг четларида ҳар хил ишорали қийматлар қабул қилади: $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ ва $-1\neq1$. Шартга кўра, $-1<\frac{1}{2}<1$. У ҳолда, Больцано-Кошининг иккинчи теоремасининг шартлари бажарилаяпти. Демак, шундай $x_0$ нуқта топиладики, $f(x_0)=\frac{1}{2}$ бўлади, бунда $x_0=\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ (8.22-чизма).

**8.29-мисол.** Ушбу

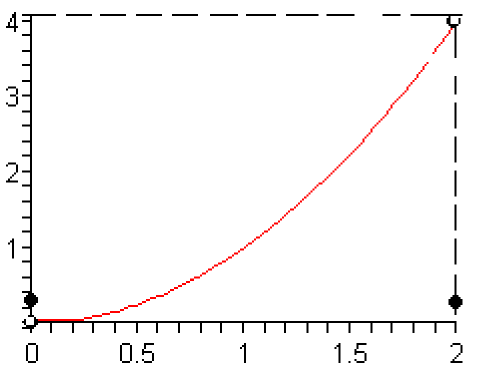
$$f(x)=\begin{cases} x^2, & 0<x<2 \ \textit{бўлганда}, \\ \frac{1}{3}, & x=0, \ x=2 \ \textit{бўлганда} \end{cases}$$

функция [0,2] сегментда ўзининг аниқ юқори ва аниқ қуйи чегарасига эришадими?

**Ечилиши.** Равшанки, берилган $f(x)$ функция [0,2] сегментда чегараланган. Бу оралиқда функциянинг аниқ юқори чегараси $M=4$, аниқ қуйи чегараси $m=0$. Лекин, функция [0,2] да ўзининг аниқ юқори ва аниқ қуйи чегарасига эришмайди, чунки [0,2] сегментда функциянинг қиймати 4 га

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

ёки 0 га тенг бўладиган нуқта мавжуд эмас (8.23-чизма).



8.23-чизма.

**8.30-мисол.** [–2,2] сегментда, ушбу

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2, & -2\le x<0 \ \ \textit{бўлганда}, \\ -(x^2+2), & 0\le x\le 2 \ \ \textit{бўлганда} \end{cases}$$

функцияни нолга айлантирадиган нуқта мавжудми?

**Ечилиши.** [–2,2] сегментнинг четки нуқталаридаги функциянинг қийматини ҳисоблаймиз:

$$f(-2)=6, \quad f(2)=-6.$$

Берилган функция сегментнинг четки нуқталарида ҳар ишорали қийматларни қабул қилади, [–2,2] сегментнинг ҳеч бир нуқтасида нолга айланмайди.

Ҳақиқатан ҳам, $\forall x\in[-2,2]$ учун $(x^2+2)>0$ ва $-(x^2+2)<0$ бўлади. Чунки, берилган функция [–2,2] да узлуксиз эмас, $x=0$ нуқтада узилишга эга.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

## Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

**8.1.** Ушбу 1) $f(x)=3x-2$, 2) $f(x)=x^3$ функциялар учун узлуксизликнинг "$\varepsilon-\delta$" таърифига кўра, $a=1$ нуқта учун қуйидаги жадвални тўлдиринг.

1)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon$ | 2 | 0,5 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 |
| $\delta$ | | | | | |

2)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon$ | 2 | 0,5 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 |
| $\delta$ | | | | | |

Коши таърифдан фойдаланиб қуйидаги функцияларнинг узлуксизлигини кўрсатинг.

**8.2.** $f(x)=x^2$. **8.3.** $f(x)=\sqrt{x}$. **8.4.** $f(x)=|x|$.

**8.5.** $f(x)=arctgx$. **8.6.** $f(x)=\begin{cases} x^2, & x-рационал\ сон\ бўлганда, \\ -x^2, & x-иррационал\ сон\ бўлганда. \end{cases}$

**8.7.** $f(x)=\sqrt[3]{x}$. **8.8.** $f(x)=2x-1$. **8.9.** $f(x)=\dfrac{1}{x}, x\neq 0$.

**8.10.** $f(x)=x^2+2\sin x$. **8.11.** $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+2}$. **8.11.** $f(x)=\cos x$.

**8.13.** $f(x)=4x^2-3x+5$.

**8.14.** Агар $f(x)$ функция $x_0$ нуқтада узлуксиз бўлса, $|f(x)|$ функциянинг

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

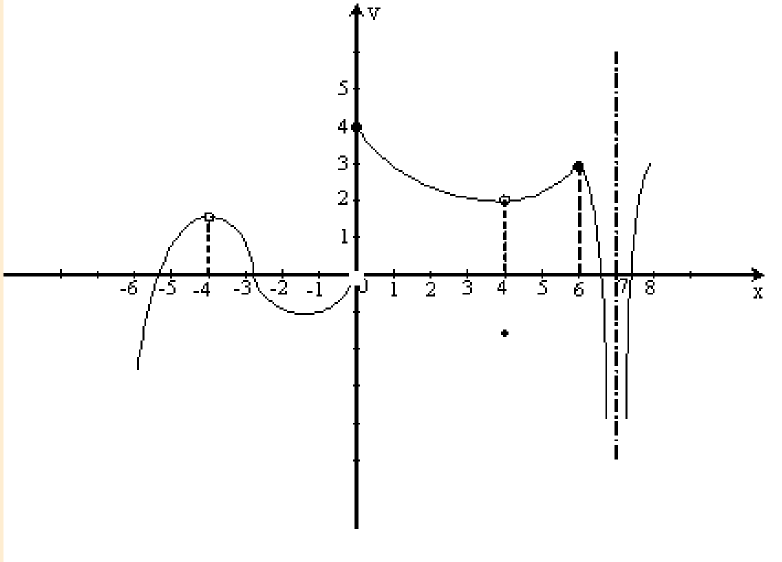
шу нуқтада узлуксиз бўлишини исботланг.

**8.15**. $f(x)$ функция $x_0$ нуқтада узлуксизлигининг геометрик талқинини ифодаланг.

**8.16.** Агар $f(x)$ функция $a$ нуқтада узлуксиз бўлса, $\varphi(x)=f(bx+c)$ $(b\neq 0)$ функция $\frac{a-c}{b}$ нуқтада узликсиз бўлишини исботланг.

**8.17**. 8.24- чизмада $f$ функциянинг графиги берилган. 1) Қайси нуқталарда $f$ функция узилишга эга? 2) Ҳар бир узилиш нуқтасида $f$ функция чапдан узлуксизми, ўнгданми ёки ҳар икала томондан узулишга эгами, шуни аниқланг. 3) Агар узлуксизга эга бўлса, $f$ функция қайси қуқталарда йўқотиш мумкин бўлган узлуксизга эга, қайси нуқталарда биринчи тур узилишига.

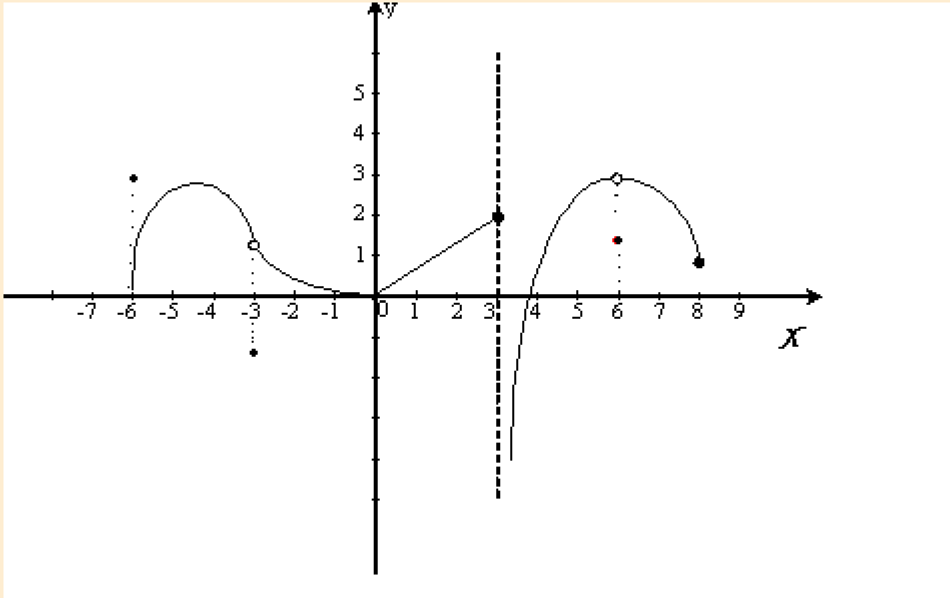
Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



8.24-чизма

**8.18.** 8.25- чизмада *f* функциянингграфиги берилган. Функциянинг узлуксизлик интегвалларини топинг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



8.25-чизма.

Берилган функция кўрсатилган нуқтада узлуксизми, йўқми, шуни аниқланг. Агар узлуксиз бўлмаса, узулишининг турини аниқланг.

**8.19.** $f(x)=x^2-3x+1, \qquad x_0=3.$

**8.20.** $f(x)=\sqrt{x^2+4}, \quad x_0=2.$

**8.21.** $f(x)=\begin{cases} x^2+4, & x<2, \\ x^3, & x\geq 2, \end{cases} \qquad x_0=2.$

**8.22.** $f(x)=\begin{cases} x^2+9, & x<2, \\ 7, & x=2, \\ x^3, & x>3, \end{cases} \qquad x_0=3.$

**8.23.** $f(x)=\begin{cases} -1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & x>0, \end{cases} \qquad x_0=1.$

**8.24.** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1}, & x\neq -1, \\ -2, & x=-1, \end{cases} \qquad x_0=-1.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**8.25.** $f(x)=\begin{cases} -x^2, & x<0, \\ 1-\sqrt{x}, & x\geq 0, \end{cases}$ $\quad x_0=0.$

**8.26.** $f(x)=x^2 signx$ функциянинг графигини чизинг. Агар функция графиги узилишга эга бўлса, узилиш нуқталарда узилишнинг турини аниқланг.

**8.27.** $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}.$ **8.28.** $f(x)=|x-1|.$

**8.29.** $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<1, \\ 0, & x=1, \\ x^2, & x>1. \end{cases}$ **11.** 30. $f(x)=\begin{cases} -1, & x<-1, \\ x^3, & -1\leq x\leq 1, \\ 1, & x>1. \end{cases}$

**11.** 31. $f(x)=\begin{cases} 1, & x\leq 0, \\ x^2, & 0<x<1, \\ 1, & 1\leq x<2, \\ x, & x\geq 2. \end{cases}$ **11.** 32. $f(x)=\begin{cases} 2x+9, & x<-2, \\ x^2+1, & -2<x\leq 1, \\ 3x-1, & 1<x<3, \\ x+6, & x>3. \end{cases}$

**8.33.** Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $f(x)$ функция графигини чизинг: 1) $D(f)=[-3;3]$; 2) $f(-3)=f(-1)=1,$ $f(2)=f(3)=2;$ 3) $f(x)$ функция $x=-1$ нуқтада чексиз узилишга ва $x=2$ нуқтада эса сакраш узулишига эга, 4) $f(x)$ функция $x=-1$ нуқтада ўнгдан, $x=2$ нуқтадан чапдан узлуксиздир.

**8.34-8.35** мисолларда $f(x)$ функция $x=1$ нуқтадан ташқари R нинг барча нуқталарида аниқланган ва узлуксиз. Агар мумкин бўлса, $f(1)$ қийматни шундай танланки,натижада $f(x)$ функция бутун R да узлуксиз бўлсин.

**Титул варак**
**Мундарижа**
**1-боб**
**2-боб**
**3-боб**
**Адабиётлар**
**Оркага**
**Тулик экран**
**Чикиш**

**8.34.** $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$. **8.35.** $f(x)=\frac{x-1}{|x-1|}$.

**8.36.** Агар $f(x)=\begin{cases} x^2, x<1 \\ Ax-3, \ x\geq 1 \end{cases}$ функция $x=1$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $A$ ни топинг.

**8.37.** $f(x)=\begin{cases} Ax-B, & x\leq 1 \\ 3x, & 1<x<2 \\ Bx^2-A, & 2\leq x \end{cases}$ учун $A$ ва $B$ ларни шундай топингки, натижада $f(x)$ функция $x=1$ нуқтада узлуксиз, $x=2$ нуқтада эса узулишга эга бўлсин.

**8.38-8.39** мисолларда $f(x)$ функциянинг x=5 нуқтадаги қийматини шундай аниқлангки, натижада функция узлуксиз бўлсин.

**8.38.** $f(x)=\frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$. **8.39.** $f(x)=\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$.

**8.40-8.41** мисолларда, берилган функциянинг қандай нуқталарда узлуксиз эканини аниқланг.

**8.40.** $f(x)=\begin{cases} 1, \ x \quad ratsional \ \ bo'\lg anda, \\ 0, \ x \ \ irratsional \ \ bo'\lg anda. \end{cases}$

**8.41.** $f(x)=\begin{cases} 2x, \quad x \ \ butun \ \ bo'\lg anda, \\ x^2, \quad x \ \ qo\lg an \ hollarda. \end{cases}$

**8.42.** $\lim\limits_{n\to 0} f(n+c)=f(c)$ шарт $f(x)$ функциянинг c нуқтада узлуксиз

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

бўлиши учун зарурий зарурий ва етарли шарт эканлигини исботланг.

**8.43**. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар с нуқтада узлуксиз бўлсин. Агар a) $f(c)>0$ бўлса, у ҳолда $\exists\delta>0$ мавжуд бўлиб, $\forall x\in(c-\delta,c+\delta)$ учун $f(x)>0$ бўлишни b) $f(x)<g(c)$ бўлса, у ҳолда $\exists\delta>0$ мавжуд бўлиб, $\forall x\in(c-\delta,\ c+\delta)$ учун $f(x)<g(c)$ бўлишини исботланг.

**8.44**. Агар: a)$|f(x)|$узлуксиз бўлса, $f(x)$ нинг узлуксиз бўлмаслигининг ҳам мумкинлигини исботланг; b) $f(x)$ ҳеч қаерда узлуксиз эмас, аммо $f(x)$ функцияга мисол қуринг.

**8.45**. Фараз қилайлик, $\exists\delta>0$ мавжуд бўлиб, $f(x)$ учун

$$|f(x)-f(c)|\le B|x-c|, \quad (\forall x\in(c-\delta,c+\delta),\delta>0)$$

шарт бажарилсин. У ҳолда $f(x)$ фукнциянинг $x=c$ да узлуксиз эканлигини исботланг.

**8.46**. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция учун

$$|f(x)-f(t)|\le|x-t| \qquad (\forall x_1 t\in(a.b))$$

шарт бажарилсин. У ҳолда $f(x)$ функциянинг $(a,\ b)$ интервалда узлуксиз бўлишини исботланг.

**8.47.** Агар $\lim\limits_{n\to0}\dfrac{f(c+n)-f(c)}{n}=4$ мавжуд бўлса, у ҳолда $f(x)$ функциянинг $x=c$ нуқтада узлуксиз бўлишини исботланг.

**8.48.** Агар $f(x)$ функция $-\infty;+\infty$ да узлуксиз бўлса, у ҳолда уни қуйидаги кўринишда тасвирлаш мумкинлигини исботланг:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Орқага
Тулик экран
Чиқиш

$f(x)= f(x)+ f(x)$, бунда $f-(-\infty,+\infty)$ да $f-(-\infty,+\infty)$ да тоқ функция.

**8.49**. Ҳеч бир нуқтада узликсиз бўлмаган фукцияга мисол келтиринг.

**8.50**. Фақат: *а*) битта $x_0 \in R$; *б*) иккита $x_0, x_1 \in R$; *в*) $n$ та $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ нуқталарда узлуксиз бўлиб, қолган нуқталарда узлуксиз бўлмаган функцияларга мисоллар келтиринг.

**8.51**. Узилишга эга бўлган функциянинг квадрати ҳам узилишга эга бўладими?

**8.52**. Ушбу $f(x)=\begin{cases} x, & x-\textit{рационал сон бўлганда,} \\ 0, & x-\textit{иррационал сон бўлганда.} \end{cases}$

функциянинг $x=0$ нуқтада узлуксиз, қолган нуқталарда узлуксиз эмаслигини исботланг.

**8.53**. Ихтиёрий кўпҳаднинг ҳар бир нуқтада узлуксиз эканлигини исботланг.

**8.54**. Ушбу $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (бу ерда $P(x), Q(x)$- нол бўлмаган кўпҳадлар бўлиб, $Q(x_0)\neq 0$) функциянинг ҳар бир $x_0 \in R$ нуқтада узлуксизлигини исботланг.

**8.55**. Агар: *a*) $f(x)$ функция бирор $x_0$ нуқтада узлуксиз, $g(x)$ функция эса $x_0$ нуқтада узилишга; *b*) $f(x)$ ва $g(x)$ лар $x_0$ нуқтада узилишга эга бўлса, у ҳолда $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ функцияларнинг $x_0$ нуқтада узлуксизлиги ҳақида нима дейиш мумкин.

**8.56**. $[0; 1]$ кесманинг ҳар бир нуқтасида узилишга эга бўлган

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

функциянинг квадрати шу кесмада узлуксиз бўладиган функцияга мисол келтиринг.

**8.57**. Бирор $x_0$ нуқтада $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар узлуксиз бўлиб, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ нисбати эса, $x_0$ нуқтада узилишга эга бўлган функцияларга мисол келтиринг.

Қуйидаги функцияларнинг узилиш нуқталарини топинг, турларини аниқланг, 1-тур узилиш нуқталарида функциянинг сакрашини ҳисобланг ҳамда графигини чизинг.

**8.58**. $f(x)=\begin{cases} x^2+5, & x<2, \\ x^3, & x\ge 2\,. \end{cases}$

**8.59**. $f(x)=\begin{cases} x^2+5, & x<2\,, \\ 10, & x=2\,, \\ x^3+1, & x<2. \end{cases}$

**8.60**. $f(x)=(signx)^2$.

**8.61**. $f(x)=E(x)$ (*бутун функция*).

**8.62**. $f(x)=\dfrac{|x|-x}{x^2}$.

**8.63**. $f(x)=\begin{cases} -x^2, & x<0, \\ 1-\sqrt{x}, & x\ge 0. \end{cases}$

**8.64**. $f(x)=\begin{cases} 2x+9, & x<-2, \\ x^2+1, & -2<x\le 1, \\ 3x-1, & 1<x<3, \\ x+6, & x\ge 3. \end{cases}$

**8.65**. $f(x)=\begin{cases} x+7, & x<-3, \\ |x-2|, & -3<x<-1, \\ x^2-2x, & -1<x<3, \\ 2x-3, & 3\le x. \end{cases}$

Қуйидаги функцияларнинг узилиш нуқталарини топинг, уларнинг турларини аниқланг ва графикларини чизинг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**8.66.** $f(x)=\frac{|x+3|}{x+3}$.  **8.67.** $f(x)=\frac{1+x}{1+x^3}$.

**8.68.** $f(x)=\frac{|x-1|}{x^2-x^3}$.  **8.69.** $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$.

**8.70.** $f(x)=x-[x]$ **8.71.** $f(x)=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$.

**8.72.** $f(x)=\begin{cases} x^2+2, & x\le 0, \\ x-1, & x>0. \end{cases}$  **8.73.** $f(x)=\frac{1}{\ln x}$.

**8.74.** $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{x}, & x<0, \\ 5x-x^2, & x\ge 0. \end{cases}$  **8.75.** $f(x)=e^{x+\frac{1}{x}}$.

**8.76.** $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.  **8.77.** $f(x)=\frac{1}{x^2-9}$.

**8.78.** $f(x)=\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$.  **8.79.** $f(x)=sign(\cos x)$.  **8.80.** $f(x)=\frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-1}}}$.

**8.81.** $f(x)=\begin{cases} x^2, & -\infty<x\le 0, \\ (x-1)^2, & 0<x\le 2, \\ 5-x, & 2<x<+\infty. \end{cases}$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**8.8**2. $f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1, \\ x^2+2, & -1\le x<1, \\ 2x, & x\ge 1. \end{cases}$

**8.8**3. $f(x)=\begin{cases} -1, & x<0, \\ \cos x, & 0\le x\le \pi, \\ 1-x, & x>\pi. \end{cases}$

Кўрсатилган нуқталарда берилган функцияларни узлуксизликка текширинг:

**8.8**4. $f(x)=2^{\frac{1}{x-5}}+1;\ x_1=5,\ x_2=6.$

**8.8**5. $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{|x-1|},\quad x_1=1,\ \ x_2=2.$

**8.8**6. $f(x)=6^{\frac{1}{x-1}}-3;\ x_1=1,\ x_2=2.$

**8.8**7. $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-9},\quad x_1=3,\ \ x_2=-3.$

**8.8**8. $f(x)=\dfrac{x+4}{x-3};\ x_1=3,\ x_2=4.$

**8.8**9. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2},\quad x_1=2,\ \ x_2=-2.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**8.90.** $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}; \mathrm{x}_1=-1, \mathrm{x}_2=2$.

**8.91.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}, \quad x_1=5, \quad x_2=-3.$

**8.92.** $f(x)=\dfrac{x+3}{x+5}, \mathrm{x}_1=-5, \mathrm{x}_2=-4$.

**8.93.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-5}}, \quad x_1=5, \quad x_2=12.$

**8.94.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-7x+16}-\sqrt{6}}{(x-5)\sqrt{x+1}}, \quad x_1=5, \quad x_2=-1.$

Қуйидаги функцияларнинг узлуксизликка текширинг ва графигини чизинг:

**8.95.** $y=\lim\limits_{n\to\infty}(1-x)^{2n}, \quad |x|\le 1.$ **8.96.** $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}, \quad \mathrm{x}\ne 0.$

**8.97.** $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}.$ **8.98.** $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}, \quad \mathrm{x}\ge 0.$

**8.99.** $y=\lim\limits_{n\to\infty}[(x-1)arctgx^n].$ **8.100.** $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+e^{n(x=1)})}.$

**8.101.** $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+x^{2n}}}, \quad \mathrm{x}\ge 0.$ **8.102.** $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n}x.$

**8.103.** $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}.$ **8.104.** $y=\lim\limits_{\lambda\to\infty}(1+x)th\lambda x.$

Қуйидаги функциялар $a$ ва $b$ нинг қандай қийматларида узлуксиз бўлади?

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**8.105.** $f(x)=\begin{cases}(x-2)^3, & \text{x} \le 0\ ,\\ ax^2+b, & 0<\text{x}<1,\\ 4\sqrt{x}, & x\ge 1.\end{cases}$ **8.106.** $f(x)=\begin{cases}ax^2+1, & \text{x}>0\,,\\ -x, & \text{x}\le 0\,.\end{cases}$

**8.107.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}, & |\text{x}|\ne 1,\\ a, & \text{x = -1},\\ b, & x=1.\end{cases}$ **8.108.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^x-1}{x}, & x\ne 0\ ,\\ a, & x=0.\end{cases}$

**8.109.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}, & x\ne 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$ **8.110.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{9x}{\ln(1+3x)}, & x\ne 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$

**11. 111.** $f(x)=\begin{cases}chx, & x\le 0\ ,\\ a\,(1-x)^4, & x>0\end{cases}$ **8.111.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3+x}{27+x^2}, & x\ne -3\ ,\\ a, & x=-3\ .\end{cases}$

**8.113.** $f(x)=\begin{cases}4x, & |x|\le 1\ ,\\ x^2+ax+b, & |x|>1\ .\end{cases}$

Қуйидаги $f[\varphi(x)]$ ва $\varphi[f(x)]$ функцияларни узлуксизликка текширинг:

**8.114.** $f(x)=signx,\ \varphi(x)=4+x^2.$ **8.115.** $f(x)=sign(x-1),\ \varphi(x)=sign(x+1).$

**8.116.** $f(x)=signx,\ \varphi(x)=x^3-x.$ **8.117.** $f(x)=x(1-x^2),\ \varphi(x)=signx.$

Қуйидаги функцияларнинг $x_0$ даги қийматини шундай танлаш керакки, функция шу нуқтада узлуксиз бўлсин.

**8.118.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x},\ x_0=0.$ **8.119.** $f(x)=(x-\pi)ctgx,\ x_0=\pi.$

Титул варақ
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Орқага
Тулик экран
Чикиш

**8.110.** $f(x)=\dfrac{x^2}{1-\cos x}$, $x_0=0$. **8.111.** $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos x}$, $x_0=0$.

**8.112.** $f(x)=\dfrac{arctgx}{\sin x}$, $x_0=0$. **8.113.** $f(x)=\dfrac{\cos 3x}{\sin 2x}$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

**8.114.** $f(x)=ctg\,\dfrac{\pi}{1-x}$, $x_0=0$ **8.115.** $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, $x_0=0.$

**8.116.** $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$, $x_0=-1$. **8.117.** $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$, $x_0=0.$

**8.118.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, $x_0=0.$ **8.119.** $f(x)=\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{2-x}$, $x_0=0.$

**8.130.** $f(x)=\dfrac{4x^2-x}{3x}$, $x_0=0.$ **8.131.** $f(x)=\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}$, $x_0=0.$

**8.132.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{\sin x}$, $x_0=0.$

Қуйидаги функцияларнинг берилган кесмада чегараланганлигини кўрсатинг:

**8.133.** $f(x)=\sin x\cos^2 x-\sqrt{x+6}$, $x\in[0;\,10]$.

**8.134.** $f(x)=arctg\dfrac{x^2+1}{2x}+2^{\sin x}-x^2$, $x\in[1;\,4]$.

**8.135.** $f(x)=x(x-2)^2\ln(4-x)$, $x\in[0;3]$. **8.136.** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+4}$, $x\in[-4;\,4]$.

Қуйидаги функцияларнинг берилган кесмада энг катта ва энг кичик қийматлари мавжуд бўладими?

**8.137.** $f(x)=\sin x+3^x$, $x\in[-1;2]$. **8.138.** $f(x)=x^2-2$, $x\in[-1;2]$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**8.139.** $f(x)=3,\ x\in[-4;\ 4].$

**8.140.** $f(x)=\begin{cases} -x^2+1, & -1\le x<0 \text{ бўлганда,} \\ 0, & x=0 \text{ бўлганда,} \\ x^2-1, & 0<x<1 \text{ бўлганда,} \end{cases}$

функция берилган соҳада энг катта ва энг кичик қийматларни қабул қиладими?

Қуйидаги тенгламаларнинг кўрсатилган кесмада ечимга эга эканлигини кўрсатинг:

**8.141.** $x^3+2x+1=0,\ x\in[-1;\ 0]$. **8.142.** $x^3-x^5-x+2=0,\ \ x\in[0{,}5;\ 2].$

**8.143.** $\sin^3 x-5\sin x+1=0,\ \ x\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right].$ **8.144.** $\sin x-x+1=0,\ \ x\in[0;\ \pi].$

**8.145.** $2^x=1,\ x\in[-0{,}2\ 3].$ **8.146.** $2^x=4x,\ x\in[2;\ 5].$

Қуйидаги функцияларга тескари бўлган функциялар мавжудми?

**8.147.** $y=3x-6,\ x\in R.$ **8.148.** $y=3^{x-1},\ x\in R.$ **8.149.** $y=(x-2)^2,\ \ x\in(-\infty;2]$.

**8.150.** $y=\cos 2x,\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$. **8.151.** $y=tgx,\ x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

**8.152.** $y=\sin x,\ \ x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$. **8.153.** $y=\ln(x-2),\ x\in(2;+\infty).$

## Мустақил ечиш учун берилган мисол ва масалаларнинг жавоблари

**8.1.** 1)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon$ | 2 | 0,5 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 |

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\delta$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{300}$ | $\frac{1}{3000}$ | $\frac{1}{30000}$ |

2)

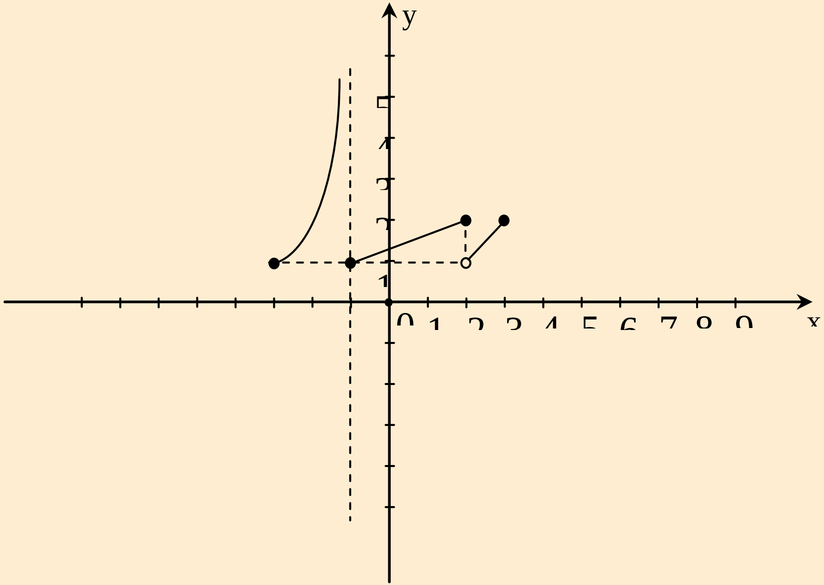
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon$ | 2 | 0,5 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 |
| $\delta$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{1}{14}$ | $\frac{1}{700}$ | $\frac{1}{7000}$ | $\frac{1}{70000}$ |

**8.17.** 1) $x=-4$, $x=0$, $x=4$ $x=7$ узилиш; 2) $x=-4$ икки томнлама узилиш, $x=0$ да ўнгдан узлуксиз, $x=4$ да ҳар икки томондан узилиш, $x=7$ ҳар икки томондан узилиш; 3) $x=4$ йўқотилиши мумкин бўлган узилиш, $x=0$ биринчи тур тузилиш. **8.18.** $(-6;-3), (-3;3], (3;6), (6;8]$ .

**8.19.** Узлуксиз. **8.20.** Узлуксиз. **8.21.** Узлуксиз. **8.22.** Йўқотилиши мумкин бўлган узулиш. **8.23**.Биринчи тур узулиш. **8.24**. Узлуксиз. **8.25**. Биринчи тур узулиш. **8.26**. Узлуксиз. **8.27**. $x=3$ да йўқотилиши мумкин бўлган узилиш. **8.28**. Узлуксиз. **8.29**. Биринчи тур узулиш. **8.30**. Узлуксиз. **8.31**. $x=0$ ва $x=2$ да биринчи тур узулиш. **8.32**. $x=-2$ йўқотилиши мумкин бўлган узилиш, $x=3$ да биринчи тур узилиш.

**8.33.** 8.26-чизмада тасвирланган.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



8.26-чизма.

**8.34**. $f(1)=2$. **8.35**. Мумкин эмас. **8.36**. $A=4$ . **8.37**. $A-B=3,$ $B\neq 3$.**8.38**. $f(5)=\frac{1}{6}$. **8.39.** $f(5)=\frac{1}{3}$. **8.40**. Ҳамма жойда узилшга эга . **8.41**. $x=0,$ $x=2$ ва бутун бўлмаган ҳамма нуқталарда.

**8.44**. $f(x)=\begin{cases} 1, & x \text{ ratsional bo'ganlda,} \\ -1, & x \text{ irratsional bo'lganda.} \end{cases}$ .**8.49**. $D(x)$-Дирихли функцияси.

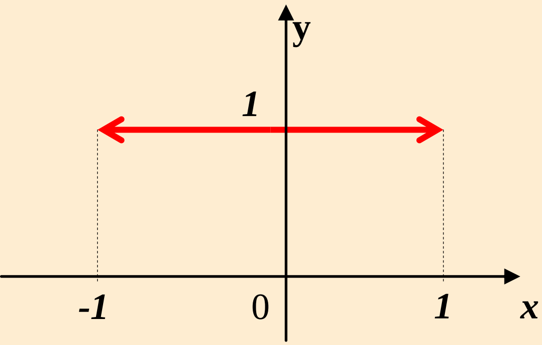
**8.50**. Масалан: $a)$ $f(x)=xD(x);$ $b)$ $f(x)=x(x-4)D(x);$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

c) $f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-n)D(x)$. **8.51.** Йўқ. Масалан:
$$f(x)=\begin{cases}1, & x\ ratsional\ \ bo'ganlda,\\ -1, & x\ \ irratsional\ \ bo'\lg anda.\end{cases}$$
. **8.55.** a) $f(x)\pm g(x)$ функциялар узилишга эга бўлади. Масалан: 1) $f(x)=x^2,\ g(x)=signx$; 2) $f(x)=1+x,\ g(x)=signx$ b) $f(x)\cdot g(x)$ функция узлуксиз ҳам, узилишга эга бўлиши ҳам мумкин. Масалан: 1) $f(x)=signx,\ g(x)=-signx$; 2) $f(x)=signx,\ g(x)=2signx$. **8.56.** $D(x)$- Дирихли функцияси. 8.57.Масалан: $f(x)=x+x_0$, $g(x)=x^2-x_0^2$. **8.58.** $x=2$ биринчи тур узилиш, $\Delta f(2)=-1$. **8.59.** $x=2$ биринчи тур узилиш, $\Delta f(2)=1$. **8.60.** $x=0$ йўқотилиши мумкин бўлган нуқта. **8.61.** $x=n$ биринчи тур узилиш, $\Delta f(n)=1$. **8.62.** $x=0$ иккинчи тур узилиш. **8.63.** $x=0$ биринчи тур узилиш, $\Delta f(0)=1$. **8.64.** $x=3$ биринчи тур узилиш, $\Delta f(3)=1$ **8.65.** $x=-3$ биринчи тур узилиш, $\Delta f(-3)=1$.**8.66.** $x=-3$ биринчи тур узилиш нуқтаси. **8.67.** $x=-1$ да йўқотилиши мумкин бўлган узилиш. **8.68.** $x=0$ иккинчи тур узилиш, $x=1$ биринчи тур узилиш. **8.69.** $x=2$ да йўқотилиши мумкин бўлган узилиш, $x=3$ иккинчи тур узилиш. **8.70.** $x=0,\ \pm1,\ \pm2,\ .\ .\ .\ ,$ биринчи тур узилиш нуқталари. **8.71.** $x=0$ , $x=1$ йўқотилиши мумкин бўлган узилиш, $x=-1$ иккинчи тур узилиш. **8.72.** $x=0$ биринчи тур узилиш. **8.73.** $x=0$ да йўқотилиши мумкин бўлган нуқта, $x=1$ иккинчи тур узилиш. **8.74.** $x=0$ иккинчи тур узилиш. **8.75.** $x=0$ иккинчи тур узилиш. **8.76.** $x=0$ биринчи тур узилиш. **8.7**7. $x=3,\ x=-3$ иккинчи тур узилиш. **8.7**8. $x=0,\ x=1$ иккинчи тур

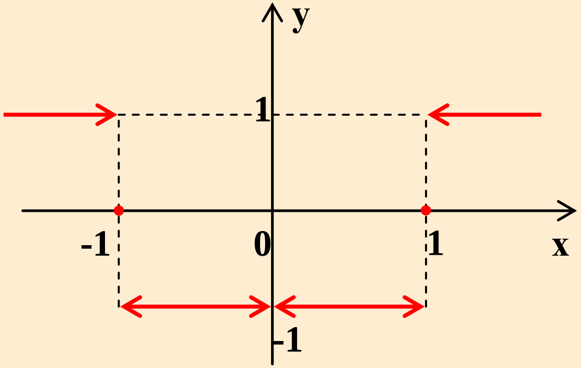
Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

узилиш. **8.79.** $x_n=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z$, биринчи тур узилиш нуқталари. **8.80.** $x=1$ биринчи тур узилиш. **8.8**1. $x=0, x=2$ биринчи тур узилиш. **8.8**2. $x=1$ биринчи тур узилиш. **8.83.** $x=0, x=\pi$ биринчи тур узилиш. **8.84.** $x_1=5$ иккинчи тур узилиш , $x_2=6$ нуқтада узлуксиз. **8.85.** $x_1=1$ йўқотилиши мумкин бўлган нукта, $x_2=2$ нуқтада узлуксиз. **8.86.** $x_1=1$ иккинчи тур узилиш , $x_2=2$ нуқтада узлуксиз. **8.87.** $x_1=3$ йўқотилиши мумкин бўлган нукта, $x_2=-3$ иккинчи тур узилиш. **8.88.** $x_1=3$ иккинчи тур узилиш , $x_2=4$ нуқтада узлуксиз. **8.89.** $x_1=2$ йўқотилиши мумкин бўлган нукта, $x_2=-2$ нуқтада узлуксиз. 90. $x_1=-1$ иккинчи тур узилиш , $x_2=2$ нуқтада узлуксиз. **8.91.** $x_1=5$ йўқотилиши мумкин бўлган нукта, $x_2=-3$ нуқтада узлуксиз. **8.92.** $x_1=-5$ иккинчи тур узилиш , $x_2=-4$ нуқтада узлуксиз. **8.93.** $x_1=5$ иккинчи тур узилиш , $x_2=12$ нуқтада узлуксиз. **8.94.** $x_1=5$ йўқотилиши мумкин бўлган нукта, $x_2=-1$ иккинчи тур узилиш. **8.95.** $x=-1, x=1$ йўкотилиши мумкин бўлган узилиш нукталари. Бу функциянинг графиги 8.27-чизмада тасвирланган **8.96.** $x=-1, x=1$ да биринчи тур узилиш, $x=0$ да эса, йўқотилиши мумкин бўлган узилиш. Бу функциянинг графиги 8.28-чизмада тасвирланган



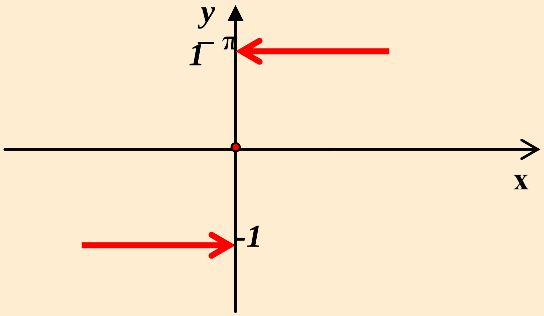
8.27-чизма.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



**8.28-чизма.**

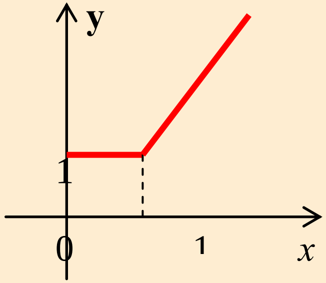
**8.97.** $x=0$ биринчи тур узилиш Бу функциянинг графиги 8.29-чизмада тасвирланган.



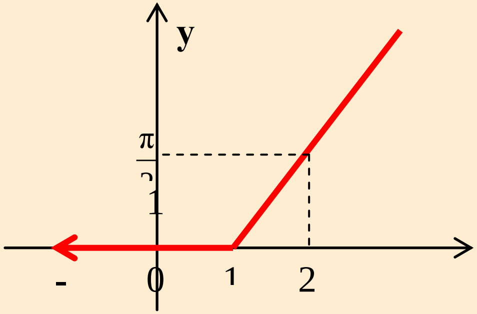
**8.29-чизма.**

**8.98**. Узлуксиз. Берилган функциянинг графиги 8.30-чизмада тасвирланган. **8.99**. Узлуксиз. Берилган функциянинг графиги 8.31-чизмада тасвирланган. **8.100**. Узлуксиз. Бу функциянинг графиги 8.32-чизмада тасвирланган.

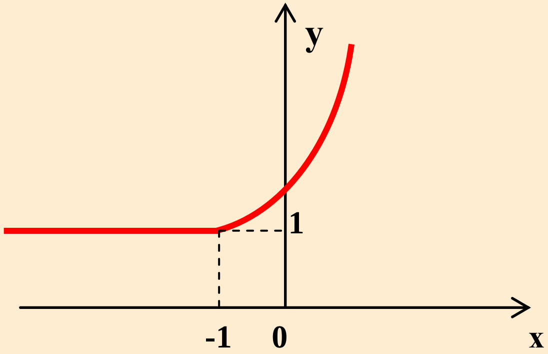
Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



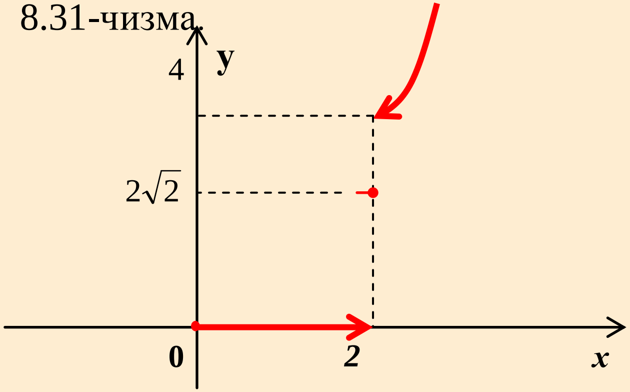
8.30-чизма.



8.31-чизма.



**8.32-чизма.**

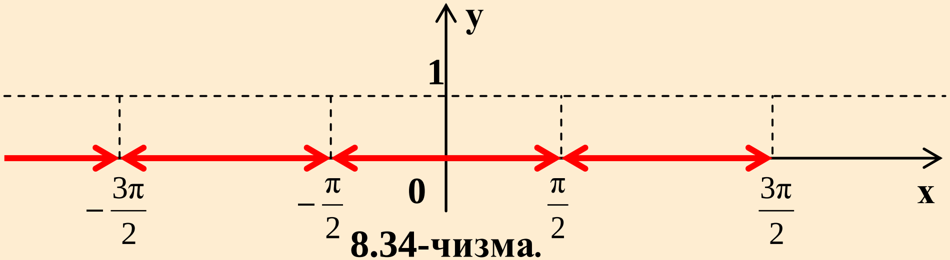


**8.33-чизма.**

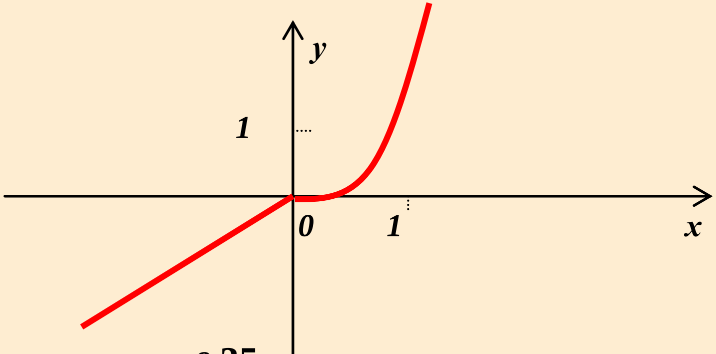
**8.101**. $x=2$ йўкотилиши мумкин бўлган узилиш. Бу функциянинг графиги 8.33-чизмада тасвирланган. **8.102**. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$ йўкотилиши мумкин бўлган

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

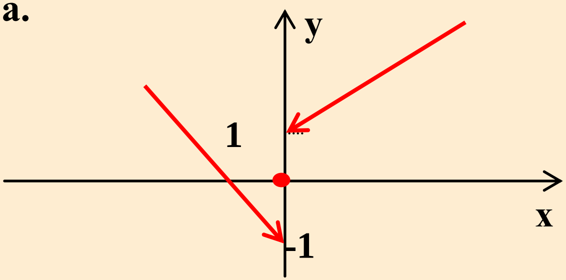
узилиш. Бу функциянинг графиги 8.34-чизмада тасвирланган:



**8.34-чизма.**



**8.35-чизма.**



**8.36-чизма.**

**8.103**. Узлуксиз. Бу функциянинг графиги 8.35 -чизмада тасвирланган. **8.104.** $x=0$ биринчи тур узилиш. Бу функциянинг графиги 8.36-чизмада тасвирланган. **8.105.** $a=12, b=8.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**8.106**. Шундай $a$ сон мавжуд эмас. **8.107.** Шундай $a$ ва $b$ сонлар мавжуд эмас. **8.108.** $a=\ln 2$. **8.109.** $a=n, n\in N$.**8.110.** $a=3$. **8.111.** $a=1$.**8.111.** $a=\frac{1}{27}$. **8.113.** $a=2, b=1$. **8.114.** $f(\varphi(x))$ узлуксиз, $\varphi(f(x))$ функция $x$=0 нуқтада узлуксиз. **8.115.** $f(\varphi(x))$ функция $x$=-1 нуқтада узлуксиз, φ( $f(x)$) функция $x$=1 нуқтада узлуксиз. **8.116.** $f(\varphi(x))$ функция $x$=0, $x$=±1 нуқталарда узлуксиз φ( $f(x)$) узлуксиз. **8.117.** $f(\varphi(x))$ узлуксиз, $\varphi(f(x))$ функция $x$=0, $x$=±1 нуқталарда узлуксиз. **8.118.** $f(0)=\frac{1}{4}$. **8.119.** $f(\pi)=1$. **8.110.** $f(0)=2$.

**8.111.** $f(0)=4$.**8.112.** $f(0)=1$. **8.113.** $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{3}{2}$. **8.114.** Мумкун эмас . **8.1**15. Ҳа, $f$ (0)=1. **8.116.** Ҳа, $f$ (-1)=$\frac{-3}{2}$. **8.117.** Ҳа, $f$ (0)=2. **8.118.**

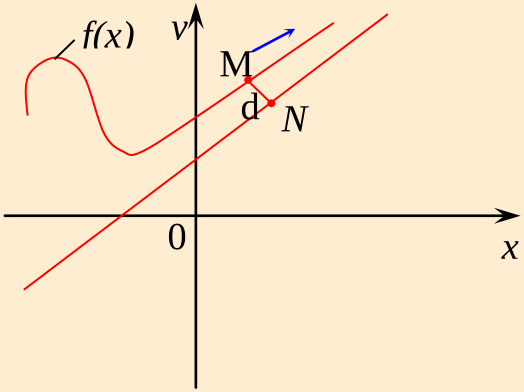
Ҳа, $f$ (0)=$\frac{1}{2}$. **8.119.** Мумкин эмас. **8.130.** Ҳа, $f$ (0)=$-\frac{1}{3}$. **8.131.** Мумкин эмас. **8.132**. Ҳа, $f$ (0)=1. **8.137.** Мавжуд. **8.138.** Мавжуд. **8.139.** Мавжуд эмас. **8.140.** Мавжуд эмас. **8.146.** Мавжуд.**8.147.** Мавжуд. **8.148.** Мавжуд . **8.149.** Мавжуд. **8.150.** Мавжуд. **8.151.** Мавжуд эмас. **8.152.** Мавжуд эмас.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

# 9-§. ФУНКЦИЯ ГРАФИГИНИНГ АСИМПТОТАЛАРИ

Функцияни текшириш жараёнида унинг графиги координаталар бошидан чексиз узоқлашганда, ёки бошқача айтганда, унинг ўзгарувчан нуқтаси чексизликка интилганда графикнинг кўринишини билиб олиш муҳим.

**9.1-таъриф.** Агар ўзгарувчи М($x, y$) нуқта функция графиги бўйича координаталар бошидан чексиз узоқлашганда, $y = f(x)$ функция графигидаги ўзгарувчи М($x, y$) нуқтадан тўғри чизиқдаги $N(x_1, y_1)$ нуқтагача бўлган $d$=$MN$ масофа нолга интилса, бу тўғри чизиқ $y = f(x)$ функция *графигининг асимптотаси* дейилади (9.1-чизма).



9.1-чизма

$Oy$ ва $Ox$ ўқларга параллел, ҳамда координата ўқларига параллел бўлмаган асимптоталарни қараймиз.

### 9.1. Вертикал асимптоталар.

$y = f(x)$ функция $a$ нуқтанинг бирор $\varepsilon > 0$ атрофида аниқланган, яъни $x \in \dot{U}_{\varepsilon}(a)$ бўлсин.

**9.2-таъриф.** Агар

$$\lim_{x \to a-0} f(x), \quad \lim_{x \to a+0} f(x)$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

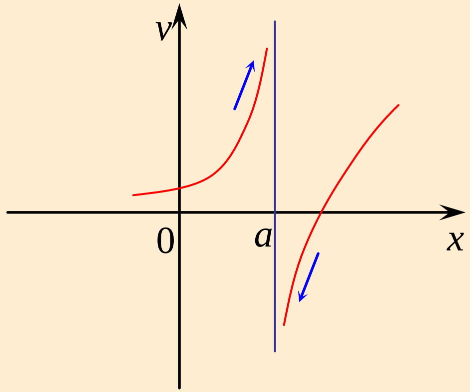
лардан бири ёки уларнинг иккаласи ҳам чексиз бўлса, $x=a$ тўғри чизик $f(x)$ *функция графигининг вертикал ёки $Oy$ ўққа параллел асимптотаси* дейилади (9.2-*a*),*b*),*c*),*d*) чизмалар).

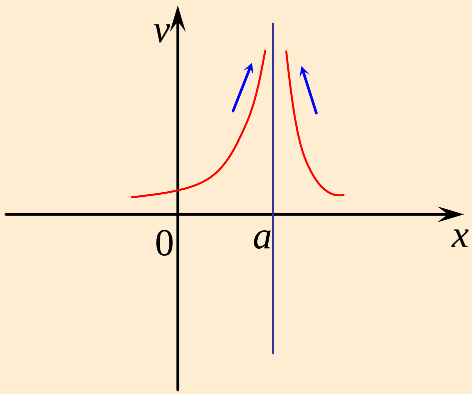
Демак, $y=f(x)$ функция графигининг вертикал асимптоталарини излаш учун функциянинг қийматини чексизликка айлантирадиган (чексиз узилишга эга бўлган) $x=a$ нуқтани топиш керак экан. Бунда $x=a$ тўғри чизиқ вертикал асимптота бўлади.

**9.1-эслатма**. Умуман айтганда, $y=f(x)$ функциянинг графиги бир нечта вертикал асимптоталарга эга бўлиши ҳам мумкин.

**9.1 – мисол.** Ушбу

$$f(x)=\frac{1}{x-2},\ x\in[-2;\ 3]$$





Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

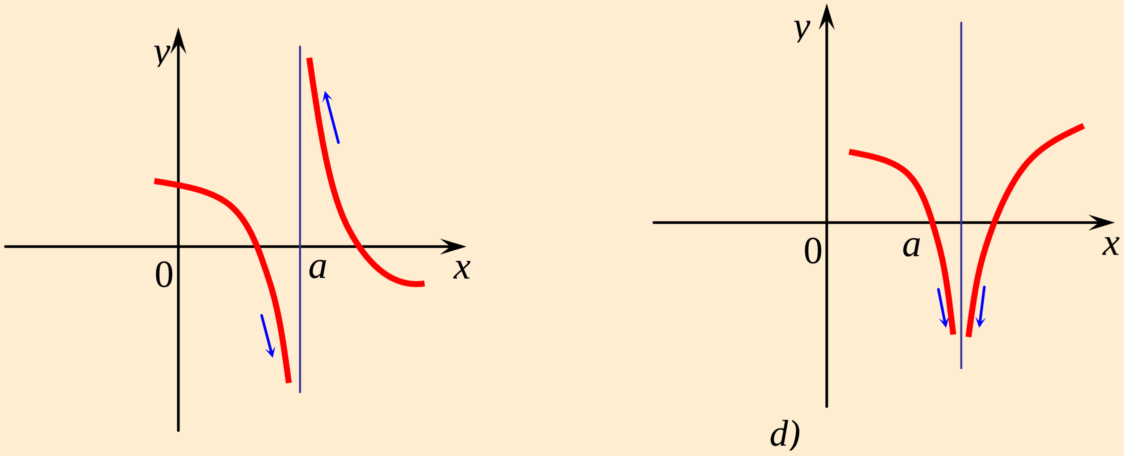
функция графигининг вертикал асимптотасини топинг.

**Ечилиши**. Берилган функциянинг махражи $x=2$ нуқтада нолга айланади. $x\to 2\pm 0$ да берилган функциянинг лимитини ҳисоблаймиз:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2}=-\infty,\ \lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2}=+\infty.$$

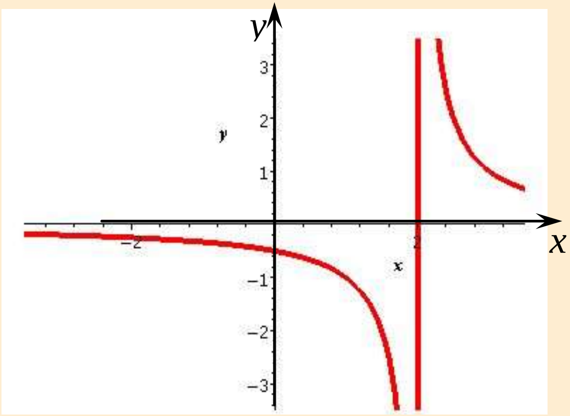
Демак, 9.2-таърифга кўра, берилган функциянинг графиги учун $x=2$ тўғри чизиқ вертикал асимптота бўлади (9.3-чизма).

**9.2-мисол**. Ушбу

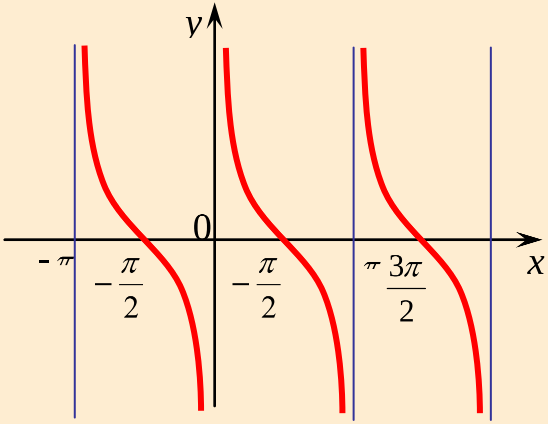


9.2-чизма

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



9.3-чизма



9.4-чизма.

$f(x)=ctg\ x$ функция графигининг вертикал асимптоталарини топинг.

**Ечилиши**. Берилган функция $x=\pi n$ $(n\in Z)$ нуқталарда 2 тур узилишга эга. $x\to\pi n\pm0$ $(n\in Z)$ да берилган функциянинг лимити $\pm\infty$ га айланади. Шунинг учун, 9.2-таърифга асосан, функциянинг графиги чексиз кўп вертикал асимптоталарга эга (9.4-чизма): $x=0$, $x=\pm\pi n$, $x=\pm2\pi$,..

### 9.2. Горизонтал асимптоталар.

**9.3-таъриф.** Агар

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} f(x)=\text{b} \qquad (b\in R)$$

бўлса, $y=\text{b}$ тўғри чизиқ $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ да $y=f(x)$ функция графигининг

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

*горизонтал ёки $Ox$ ўққа параллел асимптотаси* дейилади. (9.5-$a$),$b$),$c$),$d$) чизмалар).

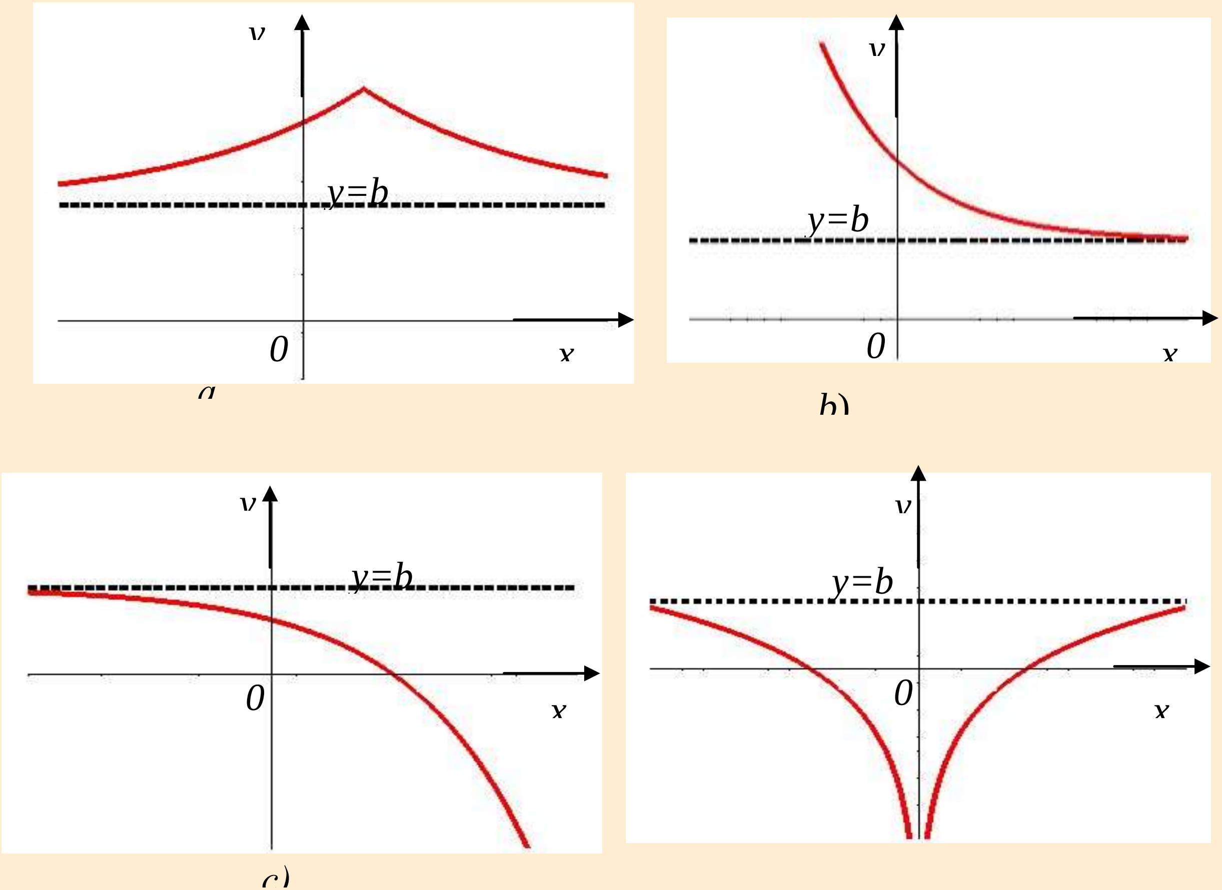
**9.3-мисол**. Ушбу $f(x)=\frac{x^2}{x^2+2}$ функция графигининг горизонтал асимптотасини топинг.

**Ечилиши**. Берилган функция R да аниқланган. $x\to\pm\infty$ да берилган функциянинг лимитини ҳисоблаймиз:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{x^2}}=1.$$

Демак, 9.3-таърифга кўра, берилган функциянинг графиги учун $y=1$ тўғри чизиқ горизонтал асимптота бўлади (9.6-чизма).

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



9.5-чизма.

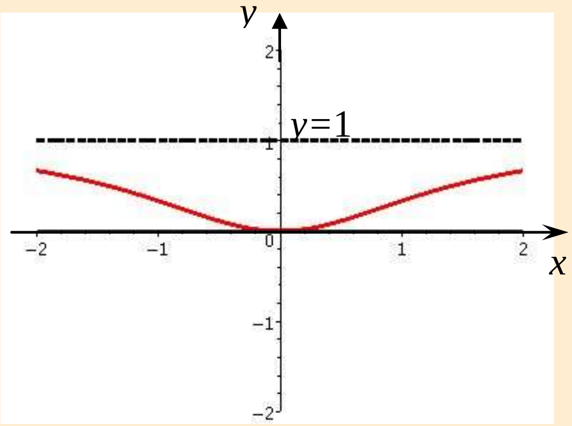
**9.4 – мисол**. Ушбу $f(x)=\frac{1}{x}$ функция графигининг вертикал ва горизонтал асимптоталарини топинг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

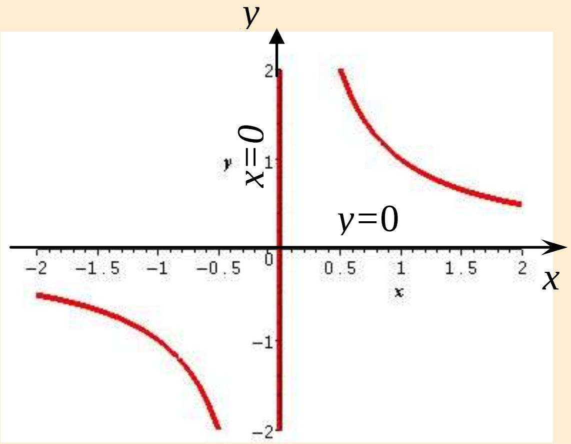
**Ечилиши**. Равшанки, $\frac{1}{x}$ функциянинг графиги учун $x=0$ ва $y=0$ тўғри чизиқлар, мос равишда, вертикал ва горизонтал асимптоталар бўлади:

$$\lim_{x\to 0\pm 0} f(x)=\lim_{x\to 0\pm 0}\frac{1}{x}=\pm\infty,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0.$$ (9.7-чизма).



9. 6-чизма.



9.7-чизма.

**9.3. Оғма асимптоталар.**

**9.4-таъриф.** Шундай $k$ ва $b$ чекли сонлар мавжуд бўлиб, $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$) да $f(x)$ функция қуйидаги

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Орқага
Тулик экран
Чикиш

$$f(x)=kx+b+\alpha(x)$$

кўринишда ифодаланса (бунда $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\alpha(x)=0$), $Y=kx+b$ тўғри чизиқ $y=f(x)$ *функция графигининг оғма асимптотаси* дейилади. Хусусий ҳолда $k$=0 бўлса, $Y$ =b тўғри чизиқ горизонтал асимптота бўлади.

**9.1-теорема**. $y=f(x)$ функция графиги $x\to\pm\infty$ да $Y=kx+b$ оғма асимптотага эга бўлиши учун

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\quad \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=b \qquad (9.1)$$

муносабатлар ўринли бўлиши зарур ва етарли.

(9.1) лимитларни ҳисоблашда қуйидаги хусусий ҳоллар бўлади:

**1-ҳол**. Аргумент $x$ нинг ишорасига боғлиқ бўлмаган ҳолда, ушбу

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k,$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=b$$

иккала лимит ҳам мавжуд ва чекли . Бу ҳолда $Y=kx+b$ тўғри чизиқ функция графигининг икки томонлама оғма асимптотаси бўлади (қуйидаги 9.5-мисолга қаранг).

**2-ҳол**. Аргумент $x$ ҳам мусбат, хам манфий ишорали чексизликка интилганда, ушбу

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k_1,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k_2,\quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b_1,\quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=b_2$$

лимитлар мавжуд, лекин улар ўзаро ҳар хил (ҳеч бўлмаганда $k_1 \neq k_2$ ёки

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$b_1 \neq b_2$ ). Бу ҳолда $Y_1 = k_1 x + b_1$ ва $Y_2 = k_2 x + b$ тўғри чизиқлар функция графигининг мос равишда иккита бир томонли (ўнг ва чап) оғма асимптоталари бўлади (9.6-мисолга қаранг).

**3-ҳол**. Фақат $x \to +\infty$ да

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b$$

иккала лимит ҳам мавжуд. Бу ҳолда $Y = kx + b$ тўғри чизиқ функция графигининг фақат ўнг оғма асимптотаси бўлади (9.7-мисолга қаранг).

**4-ҳол**. Фақат $x \to -\infty$ да

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - kx] = b$$

иккала лимит ҳам мавжуд. Бу ҳолда $Y = kx + b$ тўғри чизиқ функция графигининг фақат чап оғма асимптотаси бўлади.

Агар юқоридаги ҳолларнинг барчасида $k$=0 бўлса, $Y = b$ тўғри чизиқ горизонтал асимптота бўлади.

Функция графигининг асимптоталарга нисбатан жойлашишини аниқлаш учун $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ ҳолларнинг ҳар бирида $f(x) - (kx + b)$ айирманинг ишораси текширилади.

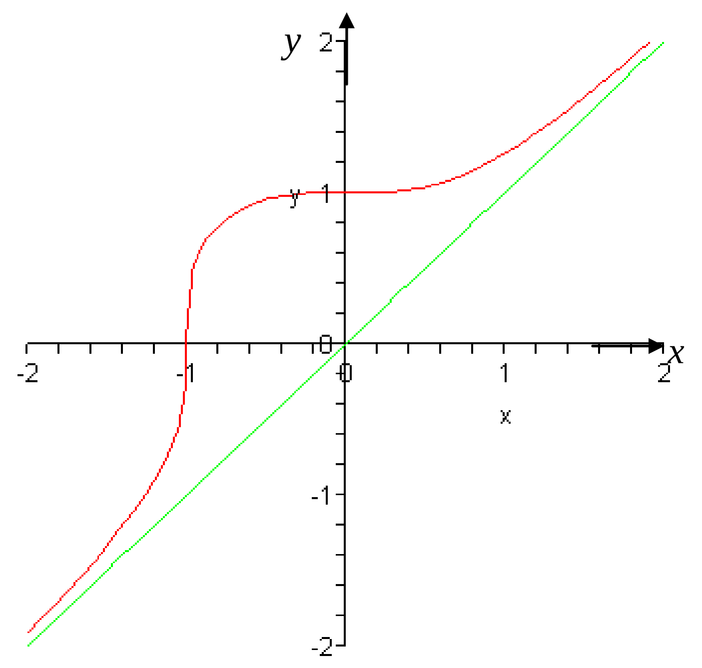
Агар айирманинг ишораси мусбат (манфий) бўлса, функция графиги асимтотадан юқори (паст) да жойлашган бўлади. Агар айирма ишорасини ўзгартирса, у ҳолда асимптота функция графигини кесади.

**9.5-мисол**. Ушбу

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 1}$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

функция графигининг оғма асимптоталарини топинг.



9.8-чизма.

**Ечилиши**. Оғма асимптоталарни топамиз:

$$k= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}=1,$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$b= \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+1}-x\right]= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+1-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2}=0$$

Демак, 9.1- теоремага асосан, $y=x$ тўғри чизиқ берилган функциянинг икки томонлама оғма асимптотаси бўлади (9.8-чизма).

**9.6-мисол**. Ушбу $y=\sqrt{x^2+1}$ функция графигининг оғма асимптоталарини топинг.

**Ечилиши**. Оғма асимптоталарни топамиз:

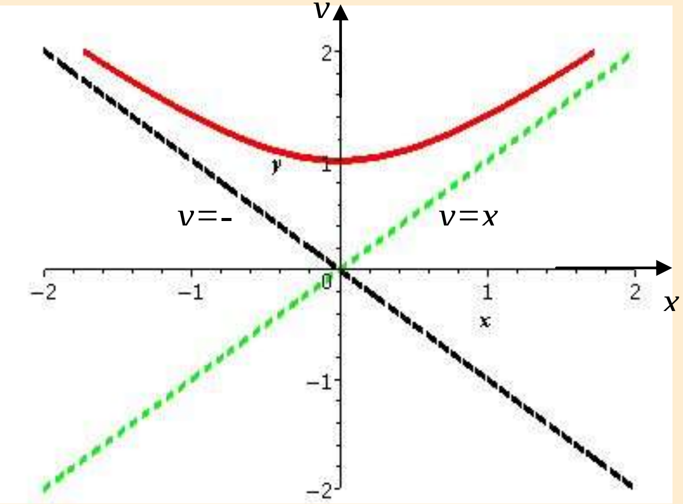
$$k_1= \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}= \lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1,$$

$$k_2= \lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}= \lim_{x\to\infty}\frac{|x|}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-1,$$

$$b_1= \lim_{x\to+\infty}(y-k_1x)= \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0,$$

Демак, 9.1-теоремага асосан, $Y_1=x$ ва $Y_2=-x$ тўғри чизиқлар, мос равишда, берилган функциянинг бир томонли (ўнг ва чап) оғма асимптоталари бўлади (9.9-чизма). Берилган функцияни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин: $y^2-x^2=1$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



9.9-чизма.

**9.7-мисол.** Ушбу $y=e^{-3x}+2$ функция графигининг оғма асимптоталарини топинг.

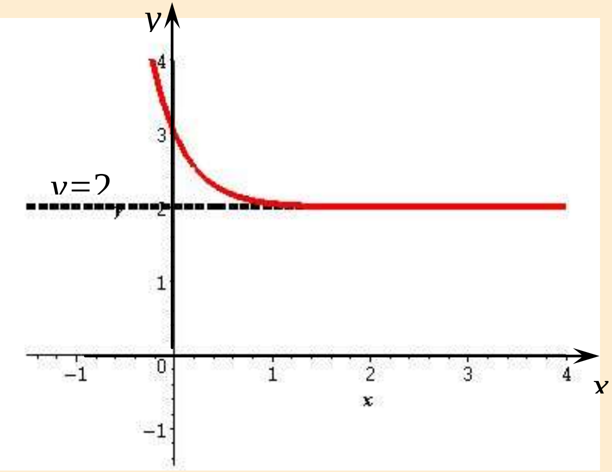
**Ечилиши**. Оғма асимптоталарни топамиз:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-3x}+2}{x}=0, k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-3x}+2}{x}=\infty,$$

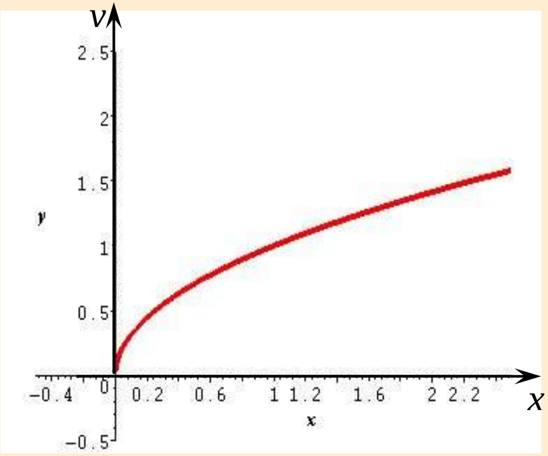
$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(y-k_1x)=\lim_{x\to+\infty}(e^{-3x}+2)=2$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Демак, 9.1-теоремага кўра, $y=2$ тўғри чизиқ берилган функцянинг фақат ўнг оғма асимптотаси бўлади (9.10-чизма).



9.10-чизма.



9.11-чизма.

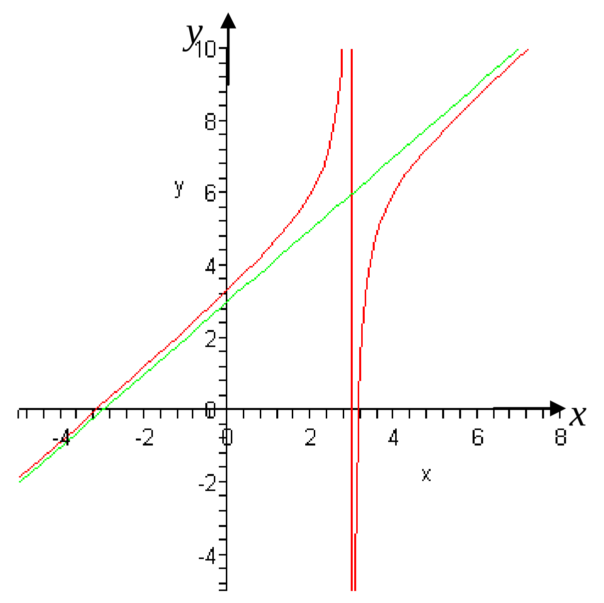
**9.2-эслатма**. Берилган $y=f(x)$ функция учун фақат $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$ мавжуд бўлиб, $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$ мавжуд бўлмаса (ёки чексиз) бўлса, берилган функция графиги асимптотага эга бўлмайди, лекин асимптотик йўналишга эга бўлади. Масалан, $y=\sqrt{x}$ парабола O$x$ ўққа параллел бўлган асимптотик йўналишга эга, лекин горизонтал асимптотага эга эмас (9.11-чизма):

$$\text{k}=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=0, \qquad \text{b}=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty.$$

**9.8- мисол**. Қуйидаги $f(x)=\frac{x^2-10}{x-3}$ функция графиги учун $y=x+3$ тўғри чизиқ оғма асимптота бўлишини кўрсатинг.

**Ечилиши**. Берилган функциянинг кўринишини қуйидагича ўзгартириб, $f(x)=x+3-\frac{1}{x-3}$ ни ҳосил қиламиз. Бунда $x\to\pm\infty$ да $\alpha(x)=-\frac{1}{x-3}\to 0$ учун, $f(x)$ функцияни $f(x)=x+3+\alpha(x)$ кўринишда ифодалаш мумкин. Демак, 9.4-таърифга кўра, $y=x+3$ тўғри чизиқ функция графигининг оғма асимптотаси бўлади(9.12-чизма).

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



9.12-чизма.

**9.9- мисол**. Ушбу $f(x)=\frac{x^2-2x}{x-1}$ функция графигининг асимптоталарини топинг.

**Ечилиши**. (12.1) формуладан фойдаланиб, $k$ ва b ларни топамиз:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x}{x(x-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}=1,\ k=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-2x}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-1}{1-\frac{1}{x}}=-1,\ b=-1.$$

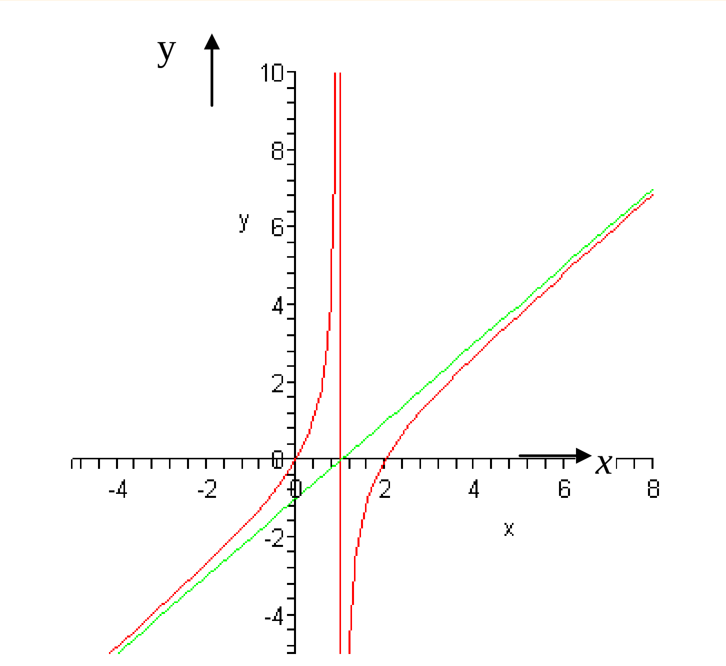
Демак, 9.1-теоремага кўра, $y=x\text{-}1$ тўғри чизиқ берилган функция графигининг оғма асимптотаси бўлади. k≠0 бўлганлиги учун функция графиги горизонтал асимптотага эга эмас.

Энди берилган функциянинг вертикал асимптотасини топамиз. Функция $x=1$ нуқтада 2-тур узилишга эга. $x\to 1\pm 0$ да берилган функциянинг лимитини ҳисоблаймиз:

$$\lim_{x\to 1\pm 0}f(x)=\lim_{x\to 1\pm 0}\frac{x^2-2x}{x-1}=\pm\infty.$$

Демак, 9.2-таърифга кўра, берилган функциянинг графиги учун $x=1$ тўғри чизиқ вертикал асимптота бўлади (9.13-чизма).

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



9.13-чизма.

**9.3-эслатма.** $Y = kx + b$ асимптоталар билан бир қаторда мураккаб кўринишдаги асимптоталар ҳам қаралади. Агар $f(x)$ функцияни ушбу

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 + \alpha(x)$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлиб, унда $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$ бўлса, у ҳолда

$$Y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{12.2}$$

кўпҳад билан аниқланган $n$-тартибли парабола $x\to+\infty$ да $y=f(x)$ функция графигининг асимптотаси дейилади.

**9.2-теорема**. $y=f(x)$ функциянинг графиги $x\to+\infty$ да (12.2) асимптотага эга бўлиши учун $n$+1 та лимит қийматларнинг мавжуд бўлиши зарур ва етарли:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^n}=a_n,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-a_nx^n}{x^{n-1}}=a_{n-1},\ .\ .\ .\ ,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2)}{x}=a_1$$

$$\lim_{x\to+\infty}[\ f(x)-(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x)]=a_0.$$

**9.10-мисол**. Ушбу

$$f(x)=\frac{x^3+2x-3}{x-3}$$

функция графигининг асимптотасини топинг.

**Ечилиши**. Берилган функцияни ушбу $f(x)=x^2+3x+11+\dfrac{30}{x-3}$ кўринишда тасвирлаймиз, бунда $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{30}{x-3}=0.$

Демак, $Y=x^2+3x+11$ – чизиқ, таърифга кўра, берилган функция графигининг асимптотаси бўлади. Равшанки, $x=3$ тўғри чизиқ берилган функция графигининг вертикал асимптотаси бўлади.

**9.11-мисол.** Ушбу

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$f(x)=3^{\frac{1}{x}}$$

функциянинг асимтоталарини топинг ва функция графигининг асимтоталарга нисбатан қандай жойлашганлигини аниқланг.

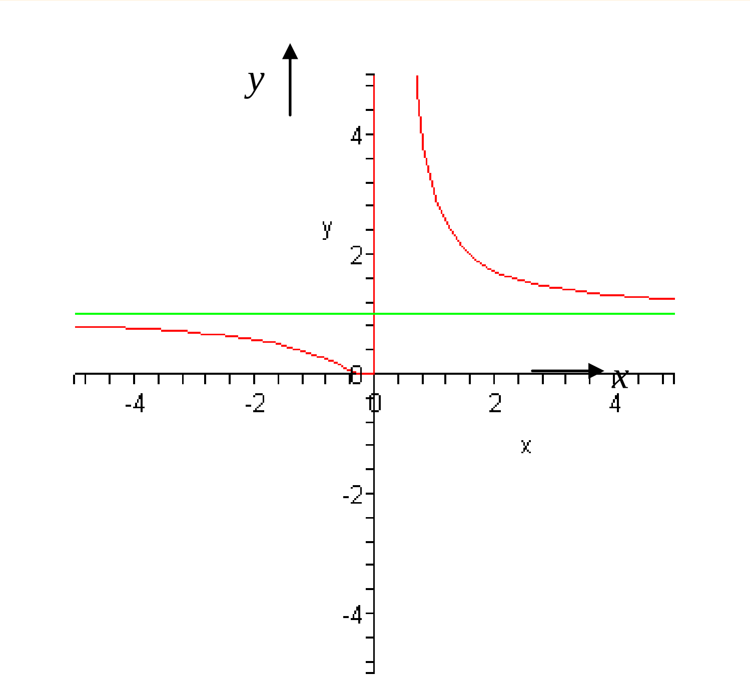
**Ечилиши.** Берилган $f(x)=3^{\frac{1}{x}}$ функция $R\setminus\{0\}$ тўпламда аниқланган. Функциянинг $x\to\pm\infty$ ва $x\to\pm0$ даги лимитларини топамиз:

$$\lim_{x\to\pm\infty}3^{\frac{1}{x}}=1,\quad \lim_{x\to+0}3^{\frac{1}{x}}=+\infty,\quad \lim_{x\to-0}3^{\frac{1}{x}}=0.$$

Демак, $x\to\pm\infty$ да $y=1$ тўғри чизиқ функция графиги учун горизантал асимтота бўлади. $x\to+0$ да $x=0$ вертикал асимтота бўлади.

Равшанки, $x>0$ да $3^{\frac{1}{x}}-1>0,\ 3^{\frac{1}{x}}>1,$ $x<0$ бўлганда эса, $3^{\frac{1}{x}}-1<0,\ 3^{\frac{1}{x}}<1$ бўлгани учун, функция графиги $x>0$ бўлганда $y=1$ асимтотадан юқорида, $x<0$ бўлганда эса пастда жойлашади (9.14-чизма).

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



9.14-чизма.

### Мустақил ишлаш учун мисоллар

Қуйидаги функция графикларининг асимптоталарини топинг.

**9.1.** $y = x + \frac{1}{x}$.  **9.2** $y = \frac{x^2 - 6x + 4}{3x - 2}$.  **9.3.** $y = 10 + \frac{3}{x}$.

**9.4.** $y = \frac{3x^2 - 7}{2x + 1}$.  **9.5.** $y = e^{\frac{1}{x}}$ .  **9.6.** $y = \frac{21 - x^2}{7x + 9}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**9.7.** $y=\sqrt{x}+\sqrt{5-x}$. **9.8.** $y=\frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-2}}$. **9.9.** $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

**9.10.** $y=\frac{x^3-2x^2-3x+2}{1-x^2}$. **9.12.** $y=\frac{x^3}{6(3-x)^2}$. **9.12.** $y=|x+2|\,e^{-\frac{1}{x}}$. **9.13.** $y=x^{x}$.

**9.14.** $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$. **9.15.** $y=\frac{x^2+16}{\sqrt{9x^2-8}}$. **9.16.** $y=\frac{x-1}{\sqrt{x(3-x)}}$.

**9.17.** $y=\frac{(x+1)^2}{x-2}$. **9.18.** $y=\frac{x^2-2x}{x-1}$. **9.19.** $y=\frac{6(x^2-4)}{3x^2+8}$. **9.20.** $y=tgx$.

**9.21.** $y=\frac{2x^3-2x+1}{1+x^2}$. **9.22.** $y=4x+\frac{1}{x+3}$.

**9.23.** $y=\frac{2x^3-3x^2-2x+1}{1-3x^2}$. **9.24.** $y=\frac{x^3-28}{x-3}$.

## Мустақил ечиш учун берилган мисолларнинг жавоблари

**9.1.** $x=0$ – вертикал асимптота, $y=x$ – оғма асимптота. **9.2.** $x=\frac{2}{3}$ – вертикал асимптота, $y=\frac{1}{3}x-\frac{20}{9}$ – оғма асимптота. **9.3.** $y=10$ – горизонтал асимптота, $x=0$ – вертикал асимптота. **9.4.** $x=-\frac{1}{2}$ – вертикал асимптота, $y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}$ – оғма асимптота. **9.5.** $y=1$ – горизонтал асимптота, $x=0$ – вертикал асимптота. **9.6.** $x=-\frac{9}{7}$ – вертикал асимптота, $y=-\frac{1}{7}x+\frac{9}{49}$ – оғма асимптота. **9.7.** Асимптота йўқ. **9.8.** $x=\pm\sqrt{2}$ –

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

вертикал асимптоталар, $y=-2x-1$, $y=2x-1$ – оғма асимптоталар. **9.9.** $x=-1$ – вертикал асимптота. **9.10.** $x=\pm1$– вертикал асимптоталар, $y=-x+2$ – оғма асимптота.**9.12.** $x=3$– вертикал асимптота, $y=\frac{1}{6}x+1$ - тўғри чизиқ оғма асимптота. **9.12.** $y=-x-1$ ва $y=x+1$ – оғма асимптоталар. **9.13.** Асимптота йўқ. **9.14.** $x=1$, $x=-1$ – вертикал асимптота. **9.15.** $x=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$– вертикал асимптоталар, $y=-\frac{1}{3}x$, $y=\frac{1}{3}x$ – оғма асимптоталар. **9.16.** $x=0$, $x=3$ – вертикал асимптота. **9.17.** $x=2$ – вертикал асимптота, $y=x+4$ – оғма асимптота

**9.18.** $x=1$ – вертикал асимптота, $y=x-1$ – оғма асимптота

**9.19.** $y=2$ – оғма асимптота. **9.20.** $y=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$ вертикал асимптоталар. **9.21.** $y=2x$ – оғма асимптота **9.22.** $y=4x$ – оғма асимптота, $x=-3$ – вертикал асимптота.**9.23.** $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$– вертикал асимптоталар, $y=-\frac{2}{3}x+1$ – оғма асимптота. **9.24.** $Y=x^{2}+x+1$ чизиқ асимптотаси, $x=3$ – вертикал асимптота.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

# 10-§. ФУНКЦИЯНИНГ ТЕКИС УЗЛУКСИЗЛИГИ

**10.1. Функциянинг текис ва узлуксизлик модули.** $f(x)$ функция $X$ тўпламда аниқланган бўлсин. $X$ тўпламнинг ҳар бир нуқтаси унинг лимит нуқтаси бўлсин.

**10.1-таъриф.** $\forall\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ сон топилиб, $X$ тўпламнинг $|x'-x''|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall\, x',x''\ (x',x''\in X)$ нуқталари учун

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция $X$ тўпламда *текис узлуксиз* дейилади. Бу таърифни, қисқача,

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta(\varepsilon)>0,\ \forall x',x''\in X,\ |x'-x''|<\delta\Rightarrow|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

кўринишда ифодалаш ҳам мумкин.

**10.1-эслатма.** $f(x)$ функциянинг текис узлуксизлиги таърифидаги $\delta>0$ сон, $\varepsilon>0$ сонга боғлиқ бўлиб, қаралаётган $x$ нуқталарга боғлиқ эмас.

$f(x)$ функциянинг $X$ тўпламдаги текис узлуксизлиги инкорини, қисқача, қуйидагича таърифлаш мумкин:

$$\exists\varepsilon>0, \forall\delta(\varepsilon)>0,\ \exists x',x''\in X,\ |x'-x''|<\delta\Rightarrow|f(x')-f(x'')|\ge\varepsilon.$$

**10.1-теорема (Кантор теоремаси)**. Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, у шу сегментда текис узлуксиз бўлади.

$f(x)$ функция $X$ тўпламда аниқланган бўлиб, $\delta$ ихтиёрий мусбат сон

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

бўлсин.

**10.2-таъриф.** Ушбу

$$\omega(f;\delta)=\sup_{\substack{|x'-x''|<\delta \\ \forall x',x''\in X}}\{|f(x')-f(x'')|\}$$

ифодага $f(x)$ функциянинг $X$ тўпламдаги узлуксизлик модули дейилади.

$f(x)$ функция $X$ тўпламда аниқланган бўлсин.

**10.3- таъриф.** Агар $\exists K>0,\ \alpha\ (0<\alpha<1)$ сонлар мавжуд бўлиб, $\forall x_1,x_2\in X$ лар учун

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le K|x_1-x_2|^{\alpha} \tag{10.1}$$

Шарт бажарилса, у ҳолда $f(x)$ функция $X$ тўпламда *Гёльдер шартини* қаноатлантиради дейилади ($\alpha=1$ бўлса, у ҳолда (10.1) шарт *Липшиц шарти* дейилади)

**10.2-теорема.** $f(x)$ функция $X$ тўпламда текис узлуксиз бўлиши учун $\lim\limits_{\delta\to 0+o}\omega(f;\delta)=0$ шартининг бажарлиши зарур ва етарли.

Функциянинг узлуксизлик модули қуйидаги хоссаларга эга:

$1^0$. $\omega(f;\delta)$ ҳар доим $\omega(f;\delta)\ge 0$.

$2^0$. $\omega(f;\delta)$ $\delta>0$ бўйича ўсувчи функция бўлади.

$3^0$. Ихтиёрий $\lambda$ - мусбат сон учун $\omega(f,\lambda\delta)\le(1+\lambda)\omega(f,\delta)$ тенгсизлик ўринли.

$4^0$. Ихтиёрий мусбат сон $\delta_1,\ \delta_2$ лар учун

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\omega(f,\delta_1+\delta_2)\le\omega(f,\delta_1)+\omega(f,\delta_2)$$

тенгсизлик ўринли.

**10.1-мисол.** Ушбу

$$f(x)=x+\sin x$$

функциянинг $R$ да текис узлуксизлигини исботланг.

**Ечилиши.** *a*) "$\delta$" ни топиш. $\forall\varepsilon>0$ сон берилган бўлсин. Берилган $\forall\varepsilon>0$ га кўра, шундай $x$ га боғлиқ бўлмаган $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ ни топиш керакки, $|x'-x''|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall x',x''\in R$ лар учун $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилсин. Бунинг учун $|f(x')-f(x'')|$, $|x'-x''|$ ифодалар ўртасидаги боғланишни топамиз:

$$|f(x')-f(x'')|=|x'+\sin x'-x''-\sin x''|=|x'-x''-(\sin x''-\sin x')|\le$$

$$\le|x'-x''|+2\left|\sin\frac{x'-x''}{2}\right|\left|\cos\frac{x'+x''}{2}\right|\le 2|x'-x''|<\varepsilon$$

бўлиши учун $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$ деб олиш етарли.

b). $\delta$ *нинг «ишлаш»ини* кўрсатамиз.

$|x'-x''|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ бўлсин. Бундан, $\dfrac{|x'-x''|}{2}\ge\left|\sin\dfrac{x'-x''}{2}\right|$, $1\ge\left|\cos\dfrac{x'+x''}{2}\right|$

тенгсизликларни эътиборга олган ҳолда,

$$\varepsilon > 2|x'-x''| = |x'-x''| + 2\frac{|x'-x''|}{2}\cdot 1 \ge$$

$$\ge |x'-x''| + 2\left|\sin\frac{x'-x''}{2}\right|\left|\cos\frac{|x'+x''|}{2}\right| =$$

$$= |x'-x''| + |\sin x' - \sin x''| \ge |x' + \sin x' - x'' - \sin x''| = |f(x') - f(x'')|$$

тенгсизликка эга бўламиз. Демак, берилган $\varepsilon$ бўйича топилган $\delta$ текис узлуксиз таърифини қаноатлантиради.

**10.2-мисол.** Ушбу

$$f(x) = e^x \sin\frac{1}{x}$$

функцияни $X = (0, 1)$ да текис узлуксизликка текширинг.

**Ечилиши.** $x_n^{'} = \frac{2}{(4n-1)\pi}$, $x_n^{''} = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ нуқталарни оламиз.

$$|x_n^{'} - x_n^{''}| = \left|\frac{2}{(4n-1)\pi} - \frac{2}{(4n+1)\pi}\right| = \frac{2}{\pi}\left|\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+1}\right| = \frac{1}{\frac{\pi}{4}(16n^2-1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$|f(x_n^{'}) - f(x_n^{''})| = \left|e^{\frac{2}{\pi(4n-1)}}\sin(4n-1)\frac{\pi}{2} - e^{\frac{2}{\pi(4n+1)}}\sin(4n+1)\frac{\pi}{2}\right| =$$

$$= \left|-e^{\frac{2}{\pi(4n-1)}} - e^{\frac{2}{\pi(4n+1)}}\right| = \left|e^{\frac{2}{\pi(4n-1)}} + e^{\frac{2}{\pi(4n+1)}}\right| \ge 2 = \varepsilon.$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Демак, берилган функция $(0;1)$ да текис узлуксиз эмас.

**10.3-мисол.** Ушбу

$$f(x)=\sin x^{2}$$

функциянинг $X=R$ да текис узлуксиз эмаслигини кўрсатинг.

**Ечилиши.** Равшанки, берилган функция $R$ да чегаралган ва узлуксиз, лекин унинг $R$ да текис узлуксиз эмаслигини кўрсатамиз: $\forall\delta>0$ берилган бўлсин, $R$ дан $\forall x_n^{'}=\sqrt{n\pi}$, $x_n^{''}=\sqrt{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$ нуқталарни оламиз. Унда,

$$\left|x_n^{'}-x_n^{''}\right|=\left|\sqrt{n\pi}-\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}\right|=\frac{\dfrac{\pi}{2}}{\sqrt{n\pi}+\sqrt{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Демак, бу айирма $n$ нинг ўсиши билан $\forall\delta>0$ сондан кичик бўлиб бораверади, лекин

$$\left|f(x_n^{'})-f(x_n^{''})\right|=\left|\sin n\pi-\sin(n\pi+\frac{\pi}{2})\right|=1>\varepsilon\quad(\forall\varepsilon<1).$$

Шундай қилиб, $f(x)=\sin x^{2}$ функция $R$ да текис узлуксиз эмас экан.

**10.4-мисол.** Ушбу

1) $f(x)=2x-1,\ \ X=R;$ 2) $f(x)=\sqrt[3]{x},\ \ X=[0,2];$

3) $f(x)=\cos\dfrac{1}{x},\ \ X=(0,1);$ 4) $f(x)=x^{2}:\ a)\ \ X=(1;1),\ \ b)\ \ X=R;$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

5) $f(x)=\frac{x}{2-x^2}$, $X=[-1,1]$

функцияларни кўрсатилган $X$ тўпламда текис узлуксизликка текширинг.

**Ечилиши.** 1) $\forall\varepsilon>0$ сон берилган бўлсин. Бу берилган $\varepsilon>0$ сонга кўра $x$ га боғлиқ бўлмаган шундай $\delta=\delta(\varepsilon)$ сон топишимиз керакки, $|x'-x''|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall x', x''\in R$ лар учун $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилсин. Унда

$$|f(x')-f(x'')|=|2x'-1-2x''+1|=2|x'-x''|<\varepsilon$$

бўлиши учун $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ деб олиш етарли.

Демак, 10.1-таърифга асосан, берилган функция $R$ да текис узлуксиз бўлади.

2) Равшанки, $f(x)=\sqrt[3]{x}$ функция $[0,2]$ сегментда узлуксиз. У вақтда, Кантор теоремасига асосан, берилган функция $[0,2]$ сегментда текис узлуксиз бўлади.

3) $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ функция $(0,1)$ да узлуксиз, лекин текис узлуксиз эмас. Ҳақиқатан ҳам, $\forall\delta>0$ сон берилган бўлсин.

Агар $\varepsilon\in(0;2)$, $x_n'=\frac{1}{2\pi n}$, $x_n''=\frac{1}{(2n+1)\pi}$ деб олсак, унда, бу

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\left|x_n^{'} - x_n^{''}\right| = \left|\frac{1}{2\pi n} - \frac{1}{(2n+1)\pi}\right| = \frac{1}{2n(2n+1)\pi}$$

айирма, $n$ нинг ўисши билан исталганча кичик $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ сондан кичик бўлиб бораверади.

$$\left|f(x_n^{'}) - f(x_n^{''})\right| = \left|\cos 2\pi n - \cos(2n+1)\pi\right| = 2 > \varepsilon \quad (0<\varepsilon<2).$$

Демак, $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ функция $(0,1)$ да текис узлуксиз эмас экан.

4) $a$) $\forall\varepsilon>0$ сон берилган бўлсин. Унда берилган $\varepsilon$ га кўра, шундай $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ сонни топишимиз керакки, $\left|x^{'}-x^{''}\right|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall x^{'},x^{''}\in(-1;1)$ лар учун

$$\left|f(x^{'})-f(x^{''})\right| = \left|(x^{'})^2-(x^{''})^2\right|<\varepsilon \qquad (10.2)$$

тенгсизлик бажарилсин. Бунинг учун аввало,

$$\left|(x^{'})^2 - (x^{''})^2\right|,\ \left|x^{'}-x^{''}\right|$$

муносабатлар орасидаги боғланишни топамиз:

$$\left|f(x^{'})-f(x^{''})\right|=\left|x^{'}-x^{''}\right|\left|x^{'}+x^{''}\right|<2\left|x^{'}-x^{''}\right|.$$

(10.2) тенгсизлик бажарилиши учун $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ деб олиш етарли. Энди, берилган $\varepsilon$ га кўра $\delta$ нинг тўғри топилганлигини текшириб кўрамиз:

$\left|x^{'}-x^{''}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ бўлсин. Бундан, $2\left|x^{'}-x^{''}\right|<\varepsilon$ $x^{'},x^{''}\in(-1,1)$ эканлигини инобатга

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

олган ҳолда, кейинги тенгсизликдан

$$\varepsilon > \left|x^{'} - x^{"}\right|\left|x^{'} + x^{"}\right| = \left|(x')^2 - (x^{"})^2\right|$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

Демак, $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ тўғри топилган экан, яъни берилган функция $(-1, 1)$ да текис узлуксиз.

b) $f(x) = x^2$ функция $R$ да текис узлуксиз эмас. Ҳақиқатан ҳам, $\forall \varepsilon < 2,\ x_n^{'} = n + \frac{1}{n},\ x_n^{"} = n$ деб олсак, унда $\left|x_n^{'} - x_n^{"}\right| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$

$$\left|f(x_n^{'}) - f(x_n^{"})\right| = \left|(n + \frac{1}{n})^2 - n^2\right| = \left|n^2 + 2 + \frac{1}{n^2} - n^2\right| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2 > \varepsilon.$$

Демак, текис узлуксизликнинг инкорига асосан, $f(x) = x^2$ функция $R$ да текис узлуксиз эмас.

5) Равшанки, $f(x) = \frac{x}{2 - x^2}$ функция $[-1, 1]$ сегментда узлуксиз. У ҳолда Кантор теоремасига асосан, $[-1, 1]$ сегментда текис узлуксиз бўлади.

**10.5-мисол.** Ушбу

1) $f(x) = 3x^2 + x + 2,\ \ X = [0, 1];$

2) $f(x) = x^2,\ \ a)\ X = [-a, a]\ (a > 0),\ \ b)\ X = (-\infty, \infty);$

3) $f(x) = \cos\frac{1}{x},\ \ X = (0, \infty);$ 4) $f(x) = \sqrt[3]{x},\ \ X = [0, 2];$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

функцияларнинг узлуксизлик модулини топинг ва уларни текис узлуксизликка текширинг.

**Ечилиши.** 1) $\forall\delta>0$ берилган бўлсин. $X=[0,1]$ тўпламдан ихтиёрий $x', x''$ нуқталарни оламиз ва аниқлик учун $x'>x''$ деб, яъни $x'=x''+\Delta x,\ 0<\Delta x<\delta$ қараймиз. У ҳолда $\forall x''>0$ учун

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|(3x'^2+x'+2)-(3x''^2+x''+2)\right|=$$

$$=\left|3(x''+\Delta x)^2+(x''+\Delta x)+2-(3x''^2+x''+2)\right|=$$

$$=\left|6x''\Delta x+3\Delta x^2+\Delta x\right|\le 6\delta+3\delta^2+\delta=7\delta+3\delta^2.$$

Бундан, $\omega(f,\delta)=\sup\limits_{|x'-x''|\le\delta}\left|f(x')-f(x'')\right|\le 7\delta+3\delta^2$. Лекин, $x'=x''+\delta$ нуқталар

учун $|x'-x''|=\delta$ ва

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|(3x'^2+x'+2)-(3x''^2+x''+2)\right|=$$

$$=\left|3x'^2+x'-(3x''^2+x'')\right|=7\delta+3\delta^2$$

бўлишини эътиборга олсак, унда бу тенглик ва юқоридаги тенгсизликдан

$$\omega(f,\delta)=7\delta+3\delta^2,\ \delta>0.$$

Бундан эса, $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(f,\delta)=\lim\limits_{\delta\to 0}(7\delta+3\delta^2)=0.$

Демак, берилган $f(x)=3x^2+x+2$ функция $[0,1]$ да текис узлуксиз.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

2) $a$) $\forall\delta>0$ берилган. $\left|x'-x''\right|\le\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall x',x''\in[-a,a]$ нуқталарни оламиз.

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|x'^2-x''^2\right|=\left|x'+x''\right|\cdot\left|x'-x''\right|\le 2a\delta.$$

Бундан, $\omega(f,\delta)=\omega(x^2,\delta)\le 2a\delta$ бўлади. Аммо, $x'=a,\ x''=a-\delta\ \ (0<\delta<2a)$ нуқталар учун

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|x'^2-x''^2\right|=a^2-(a-\delta)^2=\left|2a\delta-\delta^2\right|=2a\delta-\delta^2$$

бўлганлиги сабабли. $\omega(x^2,\delta)=2a\delta-\delta^2$ бўлади. Бундан, $\lim\limits_{\delta\to0}\omega\left(x^2,\delta\right)=\lim\limits_{\delta\to0}\left(2a\delta-\delta^2\right)=0$.

Демак, берилган $f(x)=x^2$ функция $[-a,a]\ (a>0)$ сегментда текис узлуксиз.

b) $X=(-\infty,\infty)$ тўпламдан $\forall x'=n+\frac{1}{n},\quad x''=n$ нуқталарни олайлик.

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|\left(n+\frac{1}{n}\right)^2-n^2\right|=2+\frac{1}{n^2}$$

Бундан, $\forall\ \ \delta>0$ учун $\omega\left(x^2,\delta\right)=3,\ \lim\limits_{\delta\to0}2\omega\left(x^2,\delta\right)=3\ne0$ бўлгани учун $f(x)=x^2$ функция $x=(-\infty,\infty)$ да текис узлуксиз эмас.

3) $\forall\ \ \delta>0$ сон берилган бўлсин.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Равшанки, $\forall x',\ x''\in(0,\infty)$ нуқталар учун

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\cos\frac{1}{x'}-\cos\frac{1}{x''}\right|\le 2$$

Хусусий холда $|x'-x''|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $x'$ ва $x''$ лар учун ҳам

$$\left|\cos\frac{1}{x'}-\cos\frac{1}{x''}\right|\le 2$$

тенгсизлик бажарилади. Демак,

$$\omega\left(\cos\frac{1}{x},\delta\right)\le 2$$

Аммо, $(0,\infty)$ тўпламдан, $x'_n=\frac{1}{2\pi n}$, $x''_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}$ нуқталар олинса,

Равшанки, $n$ ни етарлича катта қилиб олиш натижасида, $x'_n$ ва $x''_n$ нуқталар учун $|x'-x''|<\delta$ тенгсизликка эришиш мумкин. У ҳолда,

$$\left|\cos\frac{1}{x'}-\cos\frac{1}{x''}\right|=|\cos 2\pi n-\cos(2n+1)\pi|=2.$$

Бундан, $\omega\left(\cos\frac{1}{x},\delta\right)=2$, лекин, $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega\left(\cos\frac{1}{x},\delta\right)=2\ne 0$ бўлганлиги учун, берилган $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ функция $(0,\infty)$ да текис узлуксиз эмас.

4) $\forall\ \delta>0$ сонни танлаб, $\forall\ x^{/},x^{//}\in[0,2]$ нуқталарни оламиз. Аниқлик

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

учун $x^{/} > x^{//}$ деб, яъни $x^{/} = x^{//} + \Delta x,\ 0 < \Delta x \le \delta < 2$ деб оламиз. Унда, $\forall\ x^{//} > 0$ учун

$$\left| f(x^{/}) - f(x^{//}) \right| = \left| \sqrt[3]{x^{/}} - \sqrt[3]{x^{//}} \right| = \sqrt[3]{x^{//} + \Delta x} - \sqrt[3]{x^{//}} \le \sqrt[3]{x^{//} + \delta} - \sqrt[3]{x^{//}} =$$

$$= \frac{\delta}{\sqrt[3]{x^{//2}} + \sqrt[3]{x^{//}(x+\delta)} + \sqrt[3]{\left(x^{//} + \delta\right)^2}} \le \sqrt[3]{\delta}$$

бўлади. Бу тенгсизликдан $\omega\left(\sqrt[3]{x}, \delta\right) \le \sqrt[3]{\delta}$. Аммо, $x^{/} = x^{//} + \delta$ бўлганда,

$$\lim_{x^{//} \to 0}\left(\sqrt[3]{x^{//} + \delta} - \sqrt[3]{x^{//}}\right) = \sqrt[3]{\delta}$$

бўлгани учун, $\omega\left(\sqrt[3]{x}, \delta\right) \ge \sqrt[3]{\delta}$. Бундан ва юқоридаги тенгсизликдан $\forall \delta > 0$ учун $\omega\left(\sqrt[3]{x}, \delta\right) = \sqrt[3]{\delta}$. $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega\left(\sqrt[3]{x}, \delta\right) = 0$ бўлганлиги сабабли, берилган $f(x) = \sqrt[3]{x}$ функция [0, 2] да текис узлуксиз.

## Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

**10.1.** Қуйидаги берилган $f(x)$ функциянинг X тўпламда текс узлуксиз эканлигини исботланг.

1) $f(x) = 3x - 1,\ X = R$ ;

2) $f(x) = \dfrac{x}{3 - x^2},\ X = [-1;1]$;

3) $f(x) = \sin x^2,\ X = [-3;3]$;

4) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x},\ X = (0;\pi)$;

5) $f(x) = \sin x,\ X = R$;

5) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ X = [a;+\infty),\ a > 0$;

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

6) $\mathrm{f(x)} = \mathrm{arctg}\ \mathrm{x},\quad X = (-\infty;+\infty)$; 7) $f(x) = \sqrt{x},\ X = (0;+\infty)$;

8) $f(x) = \dfrac{x^6 - 1}{\sqrt{1 - x^4}},\quad X = (-1;1)$; 9) $f(x) = \sin(\dfrac{1}{x}),\ X = [0{,}01;+\infty)$.

**10.2**. $f(x)$ функция текис узлуксиз бўладиган оралиқда берилган $\varepsilon > 0$ учун $\delta = \delta(\varepsilon)$ни топинг.

1) $f(x) = 4x + 5,\ (-\infty < x < \infty)$; 2) $f(x) = x^2 - 3x - 2,\ (-1 < x < 5)$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\ (0{,}1 \le x \le 1)$; 4) $f(x) = 2\sin x - \cos x,\ (-\infty < x < +\infty)$;

5) $f(x) = x\cos\dfrac{1}{x},\ (x \ne 0)$ ва $f(x) = 0,\ (0 \le x \le \pi)$.

**10.3.** Қуйида берилган $f(x)$ функциянинг X тўпламда текис узлуксиз эмаслигини исботланг.

1) $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right),\ x = (0;1)$; 2) $f(x) = \sin x^2,\quad X = R$;

3) $f(x) = e^X,\quad X = R$; 4) $f(x) = ctgx,\quad X = (0;1)$;

5) $f(x) = \ln x,\quad X = (0;1)$; 6) $f(x) = e^x \cos\dfrac{1}{x},\quad X = (0;1)$;

7) $f(x) = x\sin x,\ X = (0;\ \infty)$; 8) $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right),\quad X = (0;1)$.

**10.4.** Қуйидаги берилган $f(x)$ функцияни X тўпламда текис узлуксизликка текширинг.

1) $f(x) = e^{-\arcsin x},\quad X = [-1;1]$; 2) $f(x) = \sqrt[3]{x},\quad X = R$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

3) $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & -1\le x\le 0,\\ 1+x, & 0<x\le 1,\end{cases} X=[-1;1]$; 4) $f(x)=\frac{1}{x},\quad X=[0,1;1]$

5) $f(x)=\cos x,\ X=(0;1)$; 6) $f(x)=x^2:\ a)X=[-e,e];\ b)\ X=R.$

**10.5.** Қуйида берилган $f(x)$ функциянинг X тўпланма узлуксизлик модул- ларини топинг ва уларни узлуксизлик модули ёрдамида текис узлуксизликка текширинг.

1) $f(x)=2x-1,\ X=R$ ; 2) $f(x)=\frac{1}{x},\quad X=[a;+\infty),\ a>0$;

3) $f(x)=x^{\varepsilon}+1,\quad X=[0;1]$ ; 4) $f(x)=\sin\frac{1}{x},\ X=(0;+\infty)$ ;

5) $f(x)=\frac{1}{x^2},\ X=(0;1)$ .

**10.6.** Агар $\delta_1<\delta_2$ бўлса $\omega(f;\delta_1)\le\omega(f;\delta_2)$ тенгсизликни исботланг.

**10.7.** Агар $X$ тўплам чегараланган, $X$ тўпламда $f(x)$ функция чегараланмаган бўлса, у ҳолда $\forall\delta>0$ учун $\omega(f;\delta)=+\infty$ эканлигини исботланг.

**10.8.** Агар $X$ - оралиқ (интервал) бўлса, у ҳолда $\forall\delta_1>0,\ \delta_2>0$ учун $\omega(f;\delta_1+\delta_2)\le\omega(f;\delta_1)+\omega(f;\delta_2)$ эканлигини исботланг.

**10.9**. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $X$ тўрламда текис узлусиз бўлса, у ҳолда $\forall\lambda,\beta\in R$ учун $\lambda f(x)+\beta g(x)$ функция ҳам $X$ тўпламда текис узлуксиз бўлишини исботланг.

**10.10.** Агар $f(x)$ ва $g(x)$функциялар $[a;+\infty)$ да чегараланган ва текис узлусиз бўлса, у ҳолда $f(x)\cdot g(x)$ функциянинг $[a;+\infty)$ да текис узлусиз

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

эканлигини исботланг.

**10.11.** $[a,+\infty)$ орликда ҳар бири текис узлуксиз, кўпайтмаси эса, текис узлуксиз бўлмайдиган функцияларга мисол келтиринг.

**10.12.** Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $X$ - чегараланган тўпламда текис узлуксиз бўлса, у ҳолда уларнинг кўпайтмасини $X$ тўпламда текис узлуксиз бўлишини исботланг.

**10.13.** Ушбу $a)$ $X=(0;\,1)$; $b)$ $X=[0;\,+\infty)$ тўпламларда узлуксиз, лекин текис узлуксиз бўлмаган функцияларга мисоллар келтиринг.

**10.14.** $X=[0;\,+\infty)$ тўпламда чегараланмаган, лекин унда текис узлуксиз бўлган функцияларга мисоллар келтиринг.

**10.15.** $(0;\,1)$ оралиқда чегараланган, узлуксиз бўлган, аммо берилган оралиқда текис узлуксиз бўлмайдиган функцияларга мисол келтиринг.

**10.16.** Кўрсатилган оралиқларда $\sqrt{x}$ функция текис узлуксиз бўладими?
1) $[o;a]$ $(a>0)$; 2) $(0;\,a)$, $(a>0)$; 3) $[4;+\infty)$; 4) $[0,+\infty)$; 5) $(0;\infty)$

**10.17.** Узлуксиз даврий функциянинг текис узлуксиз эканлигини исботланг

**10.18.** Гельдер шартини қаноатлантирувчи функцияларнинг текис узлуксиз бўлишини исботланг.

**10.19.** $(a;\,b)$ оралиқда текис узлуксиз бўлган функциянинг, шу оралиқда узлуксиз эканлигини исботланг.

**10.20.** Ушбу

1) $f(x)=x^3$ $(0\le x\le 1)$; 2) $f(x)=\sqrt{x}$ $(0\le x\le a;)$;

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

3) $f(x)=\sin x+\cos x \qquad (0\le x\le 2\pi)$

функцияларнинг модул узлуксизлари учун $\omega(f;\delta)\le \mathrm{K}\delta^{\alpha}$ кўринишдаги тенгсизликларни исботланг.

## Мустақил ечиш учун берилган мисол ва масалаларнинг жавоблари

**10.2.** 1) $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$; 2) $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$; 3) $\delta=\frac{0{,}0001\varepsilon}{2}$; 4) $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$; 5) $\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{5},\frac{\varepsilon 2}{5+\varepsilon}\right)$.

**10.5.** 1) $\omega(f\cdot\delta)=2\delta$, текис узлуксиз; 2) $\forall\delta>0$ учун $\omega(f,\delta)=+\infty$, текис узлуксиз эмас; 3) $\omega(t,\delta)=2\delta-\delta^2$; 4) $\omega(t;\delta)=2$, текис узлуксиз эмас; 5) $\forall\delta>0$ учун $\omega(f,\delta)=+\infty$текис узлуксиз эмас. **10.13.** а) масалан, $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ ёки $g(x)=\frac{1}{x}$; б) $f(x)=x\cos x$ ёки $g(x)=\sin x^2$. **10.14.** Масалан, $f(x)=\sqrt{x}$ ёки $g(x)=x+\cos x$. **10.15.** Масалан, $y=\cos\frac{1}{x}$. **10.16.** 1) ҳа ; 2) ҳа; 3) ҳа ; 4) ҳа ; 5) ҳа.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

# III БОБ

# ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБ ВА УНИНГ ТАДБИҚЛАРИ

## 11-§. ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛАСИ ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛИ

**11.1. Функция ҳосиласининг таърифлари**. $f(x)$ функция $(a,b)$ оралиқда аниқланган бўлсин. Бу оралиқдан $x_0$ нуқта олиб, унга $x_0+\Delta x\in(a,b)$ бўлган $\Delta x$ $(\Delta x<0$ ёки $\Delta \text{x}>0)$ орттирма берайлик. У ҳолда $f(x)$ функция ҳам $x_0$ нуқтада

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

орттирмага эга бўлади. Ушбу

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\quad(\Delta x\neq 0)$$

нисбатни қараймиз. Равшанки, бу нисбат $\Delta \text{x}$ нинг функцияси бўлиб, у $\Delta x$ нинг нолдан фарқли қийматларида, жумладан, нол нуқтанинг етарли кичик $\dot{U}_\delta(0)$ $(\delta>0)$ атрофида аниқланган. Бунда $\Delta x=0$ нуқта $\dot{U}_\delta(0)$ тўпламнинг лимит нуқтасидир.

**11.1- таъриф**. Агар $\Delta \text{x}\to 0$ да $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатнинг

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

лимити мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг $x_0$ нуқтадаги ҳосиласи дейилади ва

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (11.1)$$

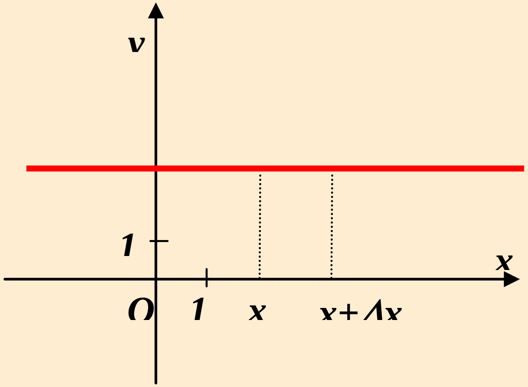
каби белгиланади.

Агар $x_0+\Delta x=x$ деб олинса, унда $\Delta x=x-x_0$ ва $\Delta x\to 0$ да $x\to x_0$, натижада (11.1) нинг кўриниши

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (11.2)$$

шаклда бўлади. Ҳосила қуйидаги $y'(x_0)$, $y'_x$ (Лагранж), $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$ (Лейбниц), $Dy$, $Df$ (Коши) белгилар ёрдамида ҳам ёзилади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



11.1-чизма.

**11.1-мисол.** Ушбу $f(x)=C$ функциянинг ҳосиласини таърифдан фойдаланиб топинг, бунда $C$-бирор ўзгармас сон (11.1-чизма).

**Ечилиши.** Эркли ўзгарувчининг иккита турли $x$ ва $x+\Delta x$ қийматини олсак, бу қийматларда функциянинг қийматлари бир хил бўлади, яъни

$$f(x)=C, \quad f(x+\Delta x)=C\,.$$

Шунинг учун $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0,$ демак, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{0}{\Delta x}=0\,.$

Шундай қилиб,

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0\,,$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

яъни ўзгармас соннинг ҳосиласи нолга тенг.

**11.2- мисол**. Ушбу $y = \mathrm{tg}\, x$ функциянинг ҳосиласини таърифдан фойдаланиб топинг.

**Ечилиши.** Маълумки, $y = \mathrm{tg} x$ функция $R$ нинг $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z)$ нуқталардан ташқари нуқталарида аниқланган. $\forall x \in D(y)$ нуқтани олиб, унга $x + \Delta x \in D(y)$ бўладиган $\Delta x$ $(\Delta x < 0$ ёки $\Delta x > 0)$ орттирма берайлик. Бунда, аргументнинг $\Delta x$ орттирмасига мос равишда, берилган функция ҳам

$$\Delta y = \mathrm{tg}(x + \Delta x) - \mathrm{tg}\, x = \frac{\sin(\Delta x)}{\cos(x + \Delta x)\cos x} \tag{11.3}$$

орттирма олади. (11.3) нинг иккала томонини $\Delta x$ га бўлиб,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\cos(x + \Delta x) \cdot \cos x} \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}$$

нисбатни ҳосил қиламиз ва унинг $\Delta x \to 0$ даги лимитини ҳисоблаймиз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\cos(x + \Delta x) \cdot \cos x} \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Демак, $y' = (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in Z.$

**11.3- мисол**. Ушбу $f(x)=(x-1)^2(x+3)$ функциянинг $x_0=1$ нуқтадаги ҳосиласини, таърифдан фойдаланиб, топинг.

**Ечилиши.** (11.2) формулага асосан: $f(1)=0$ ва

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+3)}{x-1}=0$$

бўлади. Демак, $f'(1)=0$.

**11.4- мисол**. Ушбу 1) $y=\sqrt{x},\ x_0=0$ ва $\Delta x=0{,}01;$

2) $y=2x^2+3x+5,\ x_0=0$ ва $\Delta x=0{,}001;$ 3) $y=\dfrac{2}{x^2+x-4},\ x_0=1$ ва $\Delta x=0{,}2$

функциялар учун $x_0$ ва $\Delta x$ ларнинг кўрсатилган қийматларида $\Delta y$ ва $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ларни топинг.

**Ечилиши.** $\Delta y$ ва $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ларни тузиб ҳисоблаймиз:

1) $\Delta y=\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}=\sqrt{0{,}01}=0{,}1;\quad \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{0{,}1}{0{,}01}=10.$

2) $\Delta y=2\cdot(0{,}001)^2+3\cdot 0{,}001+5-5=0{,}003002;\quad \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{0{,}003002}{0{,}001}=3{,}002.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$3)\ \Delta y = \frac{1}{(1+0,2)^2+(1+0,2)-4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{1,44+1,2-4}+\frac{1}{2}=$$

$$=-\frac{1}{1,36}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{21}; \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\frac{1}{21}}{\frac{1}{5}}=-\frac{5}{21}.$$

Берилган нуқтада чекли ҳосилага эга бўлган функция, шу нуқтада албатта узлуксиз бўлади, яъни функциянинг нуқтада чекли ҳосилага эга бўлиши учун, унинг шу нуқтада узлуксиз бўлиши зарурий шарт бўлади, лекин етарли шарт бўла олмайди, масалан,

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0, \\ -x, & x<0, \end{cases}$$

функция $x=0$ нуқтада узлуксиз, лекин бу нуқтада ҳосилага эга эмас.

**11.2- таъриф.** Агар $\Delta x \to 0+0\ (\Delta x \to 0-0)$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нинг чекли лимити

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\left(\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right) \qquad (11.4)$$

мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг $x_0$ нуқтадаги ўнг (чап) ҳосиласи

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

деб аталади ва $f'(x_0+0)\left(f'(x_0-0)\right)$ каби белгиланади.

Одатда, функциянинг ўнг ва чап ҳосилалари бир томонли ҳосилалар деб ҳам айтилади.

**11.5- мисол.** Ушбу $y=|x-2|$ функциянинг $x=2$ нуқтадаги ўнг ва чап ҳосилаларини топинг.

**Ечилиши**. (11.4) формуладан,

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

Демак, $f(x)=|x-2|$ функциянинг $x=2$ нуқтадаги ўнг ҳосиласи $f'(2+0)=1$, чап ҳосиласи эса $f'(2-0)=-1$ экан.

**11.1-эслатма.** Агар $f(x)$ функция $x_0$ нуқтада ҳосилага эга бўлса, у шу нуқтада бир томонли $f'(x_0+0)$, $f'(x_0-0)$ ҳосилаларга ҳам эга бўлиб, $f'(x_0+0)=f'(x_0-0)=f'(x_0)$ тенгликлар ўринли.

**11.2-эслатма.** Агар $f(x)$ функция $x_0$ нуқтанинг бирор $U(x_0)$ атрофида узлуксиз, $x_0$ нуқтада бир томонли $f'(x_0+0)$ ва $f'(x_0-0)$ ҳосилаларга эга бўлиб,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$f'(x_0+0)=f'(x_0-0)$ бўлса, $f(x)$ функция шу нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлади ва $f'(x_0)=f'(x_0+0)=f'(x_0-0)$ тенгликлар ўринли.

**11.3-эслатма.** Агар $\Delta x \to 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбат аниқ ишорали чексиз лимитга эга, яъни

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\pm\infty \tag{11.5}$$

бўлса, у ҳам $f(x)$ функциянинг $x_0$ нуқтадаги ҳосиласи деб юритилади. Бундай ҳосила чексиз ҳосила деб аталади.

**11.6- мисол.** Ушбу $y=\sqrt[4]{x}$ функциянинг $x=0$ нуқтадаги ҳосиласини топинг.

**Ечилиши.** Таърифга кўра,

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\sqrt[4]{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{1}{\sqrt[4]{\Delta x^3}}=+\infty$$

бўлади. Демак, $f'(0)=+\infty$.

**11.7- мисол.** Ушбу $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ функциянинг $x=1$ нуқтадаги ҳосиласини топинг.

**Ечилиши.** Берилган функциянинг $x=1$ нуқтадаги орттирмасини

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

топамиз:

$$\Delta f(1)=\sqrt[3]{(1+\Delta x-1)^2}-\sqrt[3]{(1-1)^2}=(\Delta x)^{\frac{2}{3}}.$$

Энди $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ нисбатни топамиз: $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}{\Delta x}=\frac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}$. 11.2-таърифга кўра,

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=+\infty, \qquad \lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=-\infty$$

бўлади. Демак, $f'_+(0)=+\infty$, $f'_-(0)=-\infty$ .

**11.8-мисол**. Ушбу $y=|\ln x|$ функциянинг $x_0=1$ нуқтада ҳосилага эга эмаслигини исботланг.

**Ечилиши**. Берилган функциянинг $x_0=1$ нуқтадаги ортирмаси $\Delta y$ ни топамиз:

$$\Delta y=\Delta f=|\ln(1+\Delta x)|-|\ln 1|=|\ln(1+\Delta x)|,$$

$$\Delta y=|\ln(1+\Delta x)|=\begin{cases}\ln(1+\Delta x), & \Delta x\ge 0\\ -\ln(1+\Delta x), & \Delta x<0.\end{cases}$$

Бундан,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}, & \Delta x>0,\\ -\dfrac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}, & \Delta x<0,\end{cases}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\ln(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}=1,\quad \lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0-0}\ln(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}=-1.$$

Демак, берилган функциянинг $x_0=1$ нуқтадаги ўнг ва чап ҳосилалари мавжуд ва улар бир-бирига тенг эмас. Шунинг учун, $y=|\ln x|$ функция $x_0=1$ нуқтада ҳосилага эга эмас.

**11.9-мисол.** Ушбу

$$1)\ f(x)=(x-a)(x-b)^2(x-c)^3;\ 2)\ f(x)=x+(x-2)\arccos\sqrt{\frac{x}{x+2}}$$

функцияларнинг, мос равишда, $1)\ f'(a),\ f'(b),\ f'(c);\ 2)\ f'(2)$ ҳосилаларини топинг.

**Ечилиши.**Ҳосиланинг таърифига кўра,

$$1)\ f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(a+\Delta x-a)(a+\Delta x-b)^2(a+\Delta x-c)^3-0}{\Delta x}=(a-b)^2(a-c)^3;$$

$$f'(b)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(b+\Delta x-a)(b+\Delta x-b)^2(b+\Delta x-c)^3-0}{\Delta x}=0;$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(c+\Delta x-a)(c+\Delta x-b)^2\,(c+\Delta x-c)^3-0}{\Delta x}=0;$$

2) $$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2+\Delta x+\Delta x\arccos\sqrt{\frac{2+\Delta x}{2+\Delta x+2}}-2}{\Delta x}=1+\arccos\sqrt{\frac{1}{2}}=1+\frac{\pi}{4}.$$

**11.2. Ҳосиланинг геометрик маъноси**. $f(x)$ функция $(a;b)$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Унинг графиги узлуксиз бирор Г чизиқдан иборат бўлиб, у 11.2- чизмада тасвирлвнгандек бўлсин деб фараз қилайлик. Г чизиқдан $M_0(x_0, f(x_0))$ нуқтани олиб, бу нуқтадан уринма ўтказиш масаласини қараймиз. Г чизиқда $M_0$ нуқтадан фарқли $M(x_0+\Delta x,\ f(x_0+\Delta x))$ $(\Delta x\neq 0)$ нуқтани олиб, бу нуқталар орқали $l$ кесувчи ўтказамиз. Бу кесувчи $x$ нинг ўсиш томонига қараб йўналган бўлсин деб фараз қиламиз. $l$ кесувчининг $Ox$ ўқининг мусбат йўналиши билан ташкил қилган бурчагининг $\varphi$ деб белгилаймиз. $\varphi$ бурчак $\Delta x$ га боғлиқ бўлади: $\varphi=\varphi(\Delta x)$.

**11.3-таъриф.** Агар $l$ кесувчининг $M(x_0+\Delta x,\ f(x_0+\Delta x))$ $(\Delta x\neq 0)$ нуқта Г чизиқ бўйлаб $M_0(x_0, f(x_0))$ нуқтага интилганда ($\Delta x\to 0$ даги) лимит ҳолати мавжуд бўлса, у ҳолда кесувчининг бу лимит ҳолатига Г чизиққа $M_0(x_0, f(x_0))$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

*нуқтада ўтказилган уринма* дейилади.

Равшанки, 11.2- чизмадан

$$tg\varphi(\Delta x)=\frac{NM}{M_0N}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Маълумки, $M_0(x_0, f(x_0))$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ $M_0(x_0, f(x_0))$ нуқтанинг координаталари ҳамда бу тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти орқали тўлиқ аниқланади.

Агар $\Delta x\to 0$са, у ҳолда $\Delta y\to 0$ ва $M$ нуқта $\Gamma$ чизиқ бўйлаб $M_0(x_0, f(x_0))$ нуқтага интилади, яъни $l$ кесувчининг ҳолати $T$ уринма ҳолатга ўтади, яъни $\lim\limits_{\Delta x\to 0} tg\varphi(\Delta x)=tg\alpha$, бунда $\alpha$ бурчак $T$ уринманинг $Ox$ ўқи билан ташкил қилган бурчаги. Иккинчи томондан,

$$\lim_{\Delta x\to 0} tg\varphi(\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

Шундай қилиб, $f'(x_0)=\mathrm{tg}\alpha$.

Демак, агар $f(x)$ функция $x_0\in(a;b)$ нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функциянинг графигига $M_0(x_0, f(x_0))$ нуқтада ўтказилган уринма мавжуд бўлади (11.2-чизма). Маълумки, функциянинг $x_0$ нуқтадаги $f'(x_0)$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

ҳосиласи, шу уринманинг бурчак коэффициентини ифодалайди. $M_0T$ уринма чизиқ тенгламаси

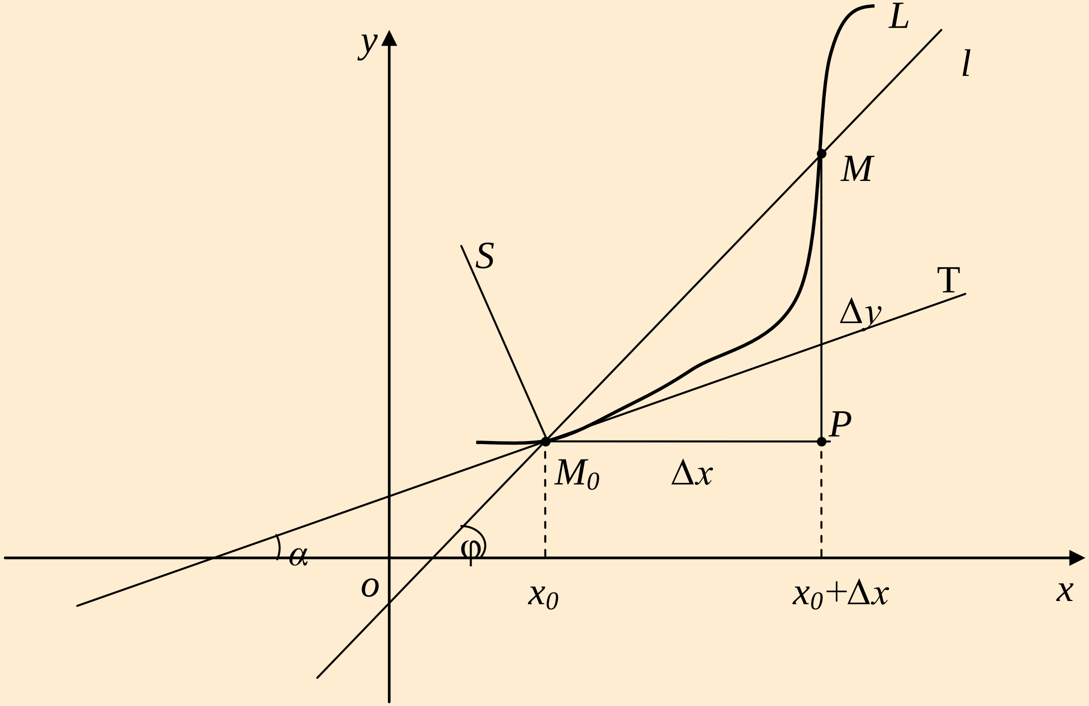
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \tag{11.4}$$

бўлиб, бунда $f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha$, эгри чизиқнинг $M_0(x_0, f(x_0))$ нуқтасига ўтказилган $M_0S$ нормалнинг тенгламаси эса,

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \tag{11.5}$$

кўринишда бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



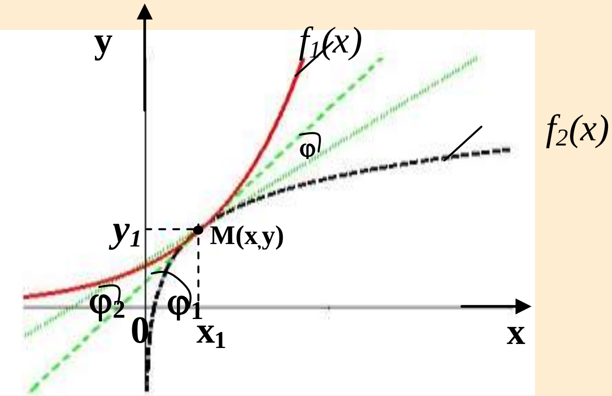
11.2-чизма.

$y_1 = f_1(x)$ ва $y_2 = f_2(x)$ функциялар графикларининг $M(x_1,y_1)$ кесишиш нуқтасида ўтказилган уринмалар орасидаги φ бурчак берилган икки эгри чизиқ орасидаги бурчак бўлади ва

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{f_2'(x_1) - f_1'(x_1)}{1 + f_1'(x_1) f_2'(x_1)} \qquad (11.6)$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

формуладан топилади (11.3-чизма).



11.3-чизма

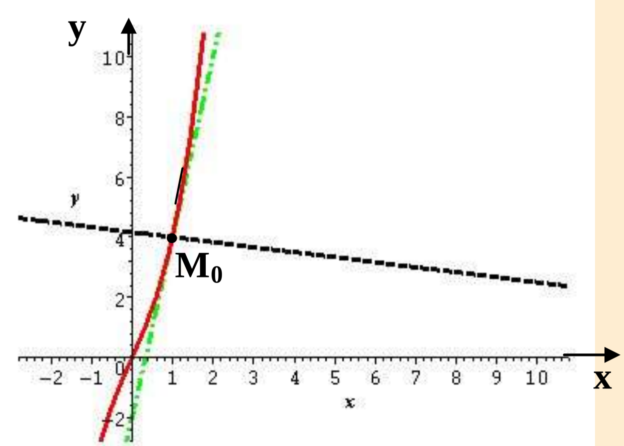
**11.10- мисол.** Ушбу $y = x^3 + 3x$ функция графигига $M_0(1;4)$ нуқтада ўтказилган уринма ва нормал тенгламаларини топинг.

**Ечилиш**. Уринма тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини топиш учун аввало берилган функциянинг ҳосиласини топамиз: $y' = 3x^2 + 3$. Бу ҳосиланинг $x = 1$ нуқтадаги қиймати уринма тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини ифодалайди, яъни $f'(1) = 3 \cdot 1 + 3 = 6$. Шундай қилиб, (11.4) ва (11.5) формулаларга асосан, уринма ва нормал чизиқ тенгламалари, мос равишда,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

куйидаги кўринишларда бўлади (11.4-чизма):

$$y-4=6(x-1) \text{ ёки } y=6x-2; \quad y-4=-\frac{1}{6}(x-1) \quad \text{ёки} \quad y=-\frac{1}{6}x+4\frac{1}{6}.$$



**11.4-чизма.**

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> V:=diff(x^3+3*x-y(x),x);
```

$$V:=3x^2+3-\left(\frac{d}{dx}y(x)\right).$$

```
> W:=solve(V=0,diff(y(x),x));
```

$$W:=3\,x^2+3$$

```
> subs(x=1,y=4,W);
```

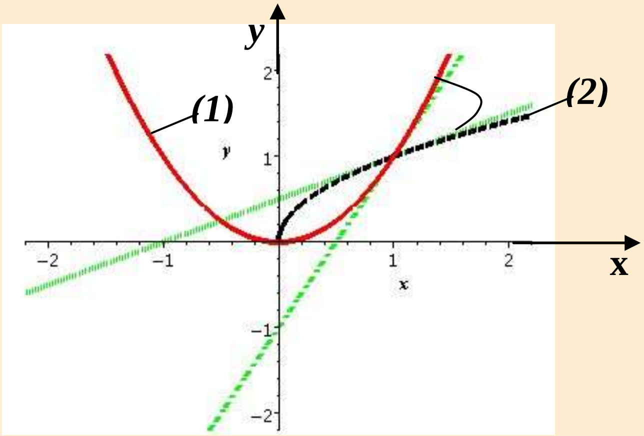
$$6.$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**11.11- мисол**. Ушбу $f(x)=x^2$ ва $f(x)=\sqrt{x}$ функциялар графикларининг $M(1;1)$ кесишиш нуқтасида ўтказилган уринмалар орасидаги бурчакни топинг.

**Ечилиши.** Берилган функцияларнинг $x=1$ нуқтадаги ҳосилаларини топамиз: $f'(x)=2x,$ $f'(1)=2,$ $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},$ $f'(1)={}^1\!/_2.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



11.5-чизма.

(1) - $y=x^2$ ,   (2) - $y=\sqrt{x}$

(11.6) формулага кўра, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$ бўлади. Бу ердан $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$ (11.5-чизма).

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> solve(x^2=sqrt(x),x);
```

```
1, 0
```

```
> a:=diff(x^2,x);b:=diff(sqrt(x),x);
```

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$a := 2\,x$

$b := \frac{1}{2\,\sqrt{x}}$

```
> arctan(subs(x=1,(a-b)/(1+a*b)));
```

$\operatorname{arctg}\frac{3}{4}.$

**11.12- мисол.** Ушбу $y = x^3 + 3x + 4$ чизиққа ўтказилган уринма:

1) $y = 6x$ тўғри чизиққа параллел бўладиган; 2) $y = -\frac{x}{12}$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўладиган нуқталарни топинг.

**Ечилиши.** Маълумки, берилган $y = x^3 + 3x + 4$ чизиққа ўтказилган уринманинг уриниш нуқтасидаги бурчак коэффиценти $y' = 3x^2 + 3$ га тенг бўлади.

1) Паралеллик шартига кўра, $3x^2 + 3 = 6$ , бундан $x^2 = 1,\ x_1 = 1,\ x_2 = -1.$ Изланаётган нуқталар: $M_1(1;\ 8),\ M_2(-1;\ 0)$.

2) Перпендикулярлик шартига кўра, $3x^2 + 3 = 12,$ бундан $x_1 = -\sqrt{3}$ , $x_2 = \sqrt{3}$. Изланаётган нуқталар: $M_1\ (-\sqrt{3}\,; -6\sqrt{3} + 4)$ , $M_2\ (\sqrt{3}\,; 6\sqrt{3} + 4)$ .

**11.13- мисол.** Тенгламаси $x = 2\cos t - \cos 2t,\ y = 2\sin t - \sin 2t$ кўринишда бўлган $y = y(x)$ чизиққа: 1) $t = \frac{\pi}{2}$; 2) $t = \pi$; 3) $t = \frac{3\pi}{2}$ нуқталарда ўтказилган

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Орқага
Тулик экран
Чикиш

уринма чизиқларнинг тенгламасини тузинг.

**Ечилиши**. $t=\frac{\pi}{2}$ бўлганда, $x=1,\ y=2;$ $t=\pi$ бўлганда, $x=-3,\ y=0;$ $t=\frac{3\pi}{2}$ бўлганда, $x=1,\ y=-2$ бўлади. Энди берилган $y=y(x)$ функциянинг $y'_x(x)$ ҳосиласини топамиз:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\sin\frac{3t}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{3t}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}}=\operatorname{tg}\frac{3t}{2},$$

бундан, $y'_x\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1;$ $y'_x\left(\frac{3\pi}{2}\right)=1;$ $t=\pi$ бўлганда эса, $y'_x(x)$ функция аниқланмаган.

Демак, 1) ва 3) ҳолларда уринма тўғри чизиқлар тенгламалари, мос равишда, $y-2=-(x-1),$ $y+2=x-1$ кўринишда бўлади.

**11.3. Ҳосиланинг физик маъноси**. Моддий нуктанинг тўғри чизиқли ҳаракати $s=f(t)$ тенглама билан ифодаланган бўлсин, бунда $t$ вакт, $s$ шу вакт ичида ўтилган йўл (масофа). $s=f(t)$ функциянинг $t_0$ нуктадаги ҳосиласи $s=f(t)$ қонун билан ҳаракат қилаётган моддий нуктанинг $t_0$ моментдаги оний тезлигини билдиради, яъни

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$v = f'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Моддий нуқтанинг берилган $t = t_0$ моментдаги $a$ тезланиши эса $v$ тезликдан $t$ вақт бўйича олинган ҳосиланинг $t = t_0$ даги қийматига тенгдир, яъни

$$a = v'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f^{/}(t_0 + \Delta t) - f^{/}(t_0)}{\Delta t}$$

**11.14-мисол**. Моддий нуқта $s(t) = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 2t$ қонун бўйича тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилади. Унинг $t = 4$ моментдаги тезлигини топинг.

**Ечилиши**. Моддий нуқтанинг исталган $t$ вақтдаги ҳаракат тезлигини топамиз:

$$v(t) = s'(t) = 2t^2 + t - 2.$$

Моддий нуқтанинг $t = 4$ моментдаги ҳаракат тезлигини ҳисоблаймиз:

$$v(t)\big|_{t=4} = 2 \cdot 4^2 + 4 - 2 = 34(^{м}/_{c}).$$

### 11.4. Ҳосилани ҳисоблашнинг содда қоидалари.

1.Ўзгармас соннинг ҳосиласи нолга тенг: $(C)' = 0$ (бунда $C$ -ўзгармас сон).

2. Ўзгармас сонни ҳосила ишорасидан ташқарига чиқариш мумкин: $(Cf(x))' = C \cdot (f(x))'$ (бунда $C$ -ўзгармас сон).

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

3. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар бири $x\in(a,b)$ нуқтада $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлса, $f(x)\pm g(x)$ функция ҳам $x$ нуқтада ҳосилага эга ва у

$$[f(x)\pm g(x)]' = f'(x)\pm g'(x) \qquad (11.7)$$

формула бўйича топилади.

4. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар бири $x\in(a,b)$ нуқтада $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилага эга бўлса, $f(x)\cdot g(x)$ функция ҳам $x$ нуқтада ҳосилага эга ва у

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \qquad (11.8)$$

формула бўйича топилади.

5. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар бири $x\in(a,b)$ нуқтада $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, $g(x)\neq 0$ бўлса, $\frac{f(x)}{g(x)}$ функция ҳам $x$ нуқтада ҳосилага эга ва у

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)} \qquad (11.9)$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

формула бўйича топилади.

6. Агар $f(x)$ функция $x_0 \in (a,b)$ нуқтада $f'(x_0) \neq 0$ ҳосилага эга бўлса, бу функцияга тескари $x = f^{-1}(y)$ функция $x_0$ нуқтага мос келган $y_0$ $(y_0 = f(x_0))$ нуқтада ҳосилага эга ва

$$\left[f^{-1}(y)\right]'_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad (11.10)$$

тенглик ўринли.

7. Агар $u = f(x)$ функция $x_0 \in (a,b)$ нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлиб, $y = F(u)$ функция эса $x_0$ нуқтага мос келган $u_0$ $(u_0 = f(x_0))$ нуқтада $F'(u_0)$ ҳосилага эга бўлса, $\mathbf{\Phi}(x) = F(f(x))$ мураккаб функция ҳам $x_0$ нуқтада ҳосилага эга ва

$$\Phi'(x_0) = [F(f(x))]'\big|_{x=x_0} = F'(u_0)\cdot f'(x_0) \qquad (11.11)$$

формула ўринли.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

8. Ошкормас $F(x,y)=0$ функция учун $y'(x)=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$ формула ўринли.

9. Параметрик тенгламаси билан берилган $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, (t_0 \le t \le t_1)$

функциянинг ҳосиласи қуйидаги

$$y'_x=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad \text{ёки} \quad y'_x=\frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} \qquad (11.12)$$

формула бўйича топилади.

### 11.5. Асосий элементар функцияларнинг ҳосилалари жадвали.

1. $y=C.$ $\quad y'=0.$

2. $y=x^{\alpha}.$ $\quad y'=\alpha\cdot x^{\alpha-1},\quad \alpha\in R.$

3. $y=\sqrt{x}.$ $\quad y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

4. $\mathbf{y = e^x}.$ $\quad y'=e^x.$

5. $y=a^x\ a>0,\quad a\neq 1..$ $\quad y'=a^x\ln a.$

6. $y=\ln x.$ $\quad y'=\dfrac{1}{x}.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

7. $y = \log_a x, \; a > 0, \; a \neq 1.$ $\qquad y^{/} = \dfrac{\log_a e}{x} = \dfrac{1}{x \ln a}.$

8. $y = \lg x.$ $\qquad y^{/} = \dfrac{1}{x} \lg e = \dfrac{1}{x \ln 10}.$

9. $y = \sin x.$ $\qquad y^{/} = \cos x.$

10. $y = \cos x.$ $\qquad y^{/} = -\sin x.$

11. $y = \operatorname{tg} x.$ $\qquad y^{/} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$

12. $y = \operatorname{ctg} x.$ $\qquad y^{/} = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x.$

13. $y = \arcsin x.$ $\qquad y^{/} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$

14. $y = \arccos x.$ $\qquad y^{/} = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$

15. $y = \operatorname{arctg} x.$ $\qquad y^{/} = \dfrac{1}{1 + x^2}.$

16. $y = \operatorname{arcctg} x.$ $\qquad y^{/} = -\dfrac{1}{1 + x^2}.$

17. $y = \sec x.$ $\qquad y^{/} = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \sin x \cdot sex^2 x.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

18. $y=\operatorname{cosec} x$. $\qquad y^{/}=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}=-\cos x\cdot\cos ec^2 x$.

19. $y=\operatorname{sh} x$. $\qquad y^{/}=\operatorname{ch} x$.

20. $y=\operatorname{ch} x$. $\qquad y^{/}=\operatorname{sh} x$.

21. $y=\operatorname{th} x$. $\qquad y^{/}=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

22. $y=\operatorname{cth} x$. $\qquad y^{/}=\dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

23. $y=\operatorname{Arsh} x$. $\qquad y^{/}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

24. $y=\operatorname{Arch} x$. $\qquad y^{/}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

25. $y=\operatorname{Arth} x$. $\qquad y^{/}=\dfrac{1}{1-x^2}$.

26. $y=\operatorname{Arcth} x$. $\qquad y^{/}=\dfrac{-1}{1-x^2}$.

27. $y=x^x$. $\qquad y^{/}=x^x(1+\ln x)$.

**11.15- мисол.** Ушбу

1) $y=2x^5-5x^3+7x+6$; $\qquad$ 2) $y=\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-0{,}2x^5$;

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

3) $y=\dfrac{3x^3-2x^2+3}{x^2-x+1}$;  4) $y=\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-2\sqrt[3]{x}}$;

5) $y=\dfrac{\sin\varphi+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}$;  6) $y=3e^x-\ln x$;  7) $y=\mathrm{e}^x(\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x)$;

8) $y=\mathrm{arctg}\,x+x^2+\mathrm{arcctg}\,x$;  9) $y=e^x\,\log_2 x$;  10) $y=\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x$

функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

**Ечилиши.** Ҳосилани ҳисоблашнинг содда қоидалари ва элементар функцияларнинг ҳосилалари жадвалига асосан топамиз:

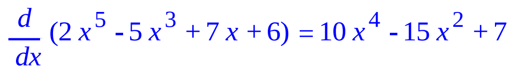
1) Йиғинди (айирма)нинг ҳосиласини ифодалайдиган (11.7) формула ва даражали функция ҳосиласи формуласидан фойдаланамиз:

$$y^{/}=(2x^5-5x^3+7x+6)^{/}=(2x^5)^{/}-(5x^3)^{/}+(7x)^{/}+(6)^{/}=10x^4-15x^2+7;$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> Diff((2*x^5)-(5*x^3)+7*x+6,x)=

diff((2*x^5)-(5*x^3)+7*x+6,x);
```



$$\frac{d}{dx}(2x^5-5x^3+7x+6)=10x^4-15x^2+7$$

2) Аввало (11.7) формуладан ва сўнгра даражали функция ҳосиласини топиш формуласидан фойдаланамиз:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-0{,}2x^5\right)^/ = \left(x^{1/3}+x^{-1/2}-0{,}2x^5\right)^/ = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-0{,}2\cdot 5x^4 =$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}-x^4;$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
 > Diff(x^(1/3)+1/sqrt(x)-0.2*x^5,x)=

diff(x^(1/3)+1/sqrt(x)-0.2*x^5,x);
```

$$\frac{d}{dx}\left(x^{(1/3)}+\frac{1}{\sqrt{x}}-0{,}2x^5\right)=\frac{1}{3x^{(2/3)}}-\frac{1}{2x^{(3/2)}}-1.0x^4.$$

3) Икки функциянинг нисбати (касрнинг) ҳосиласини ифодалайдиган (11.9) формула ва юқорида фойдаланган формулаларни қўллаймиз:

$$y^/ = \frac{(3x^3-2x^2+3)^/\,(x^2-x+1)-(3x^3-2x^2+3)\,(x^2-x+1)'}{(x^2-x+1)^2} =$$

$$=\frac{(9x^2-4x)\,(x^2-x+1)-(2x-1)\cdot(3x^3-2x^2+3)}{(x^2-x+1)^2}=\frac{3x^4-6x^3+11x^2-10x+3}{(x^2-x+1)^2};$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
Diff(((3*x^3)-(2*x^2)+3)/((x^2)-

x+1),x)=diff(((3*x^3)-(2*x^2)+3)/((x^2)-x+1),x);
```

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^3-2x^2+3}{x^2-x+1}\right)=\frac{9x^2-4x}{x^2-x+1}-\frac{(3x^3-2x^2+3)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$$

4) Икки функция нисбати (касрнинг) ҳосиласини ифодалайдиган (11.9) формула, шунингдек, йиғинди (айирма) нинг ҳосиласини топиш (11.7) формула ҳамда жадвалдаги илдизнинг ҳосиласи формуласидан фойдаланамиз:

$$y' = \frac{\left(x^2+\sqrt{x}\right)' \cdot \left(x-2\sqrt[3]{x}\right)-\left(x-2\sqrt[3]{x}\right)' \cdot \left(x^2+\sqrt{x}\right)}{\left(x-2\sqrt[3]{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(x-2\sqrt[3]{x}\right)-\left(1-\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}\right)\left(x^2+\sqrt{x}\right)}{\left(x-2\sqrt[3]{x}\right)^2}=\frac{x^2-\frac{10}{3}x\sqrt[3]{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{3\sqrt[6]{x}}}{\left(x-2\sqrt[3]{x}\right)^2};$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> diff(((x^2)+sqrt(x))/(x-2*x^(1/3)),x);
```

$$\frac{2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x-2x^{(1/3)}}-\frac{\left(x^2+\sqrt{x}\right)\left(1-\frac{2}{3x^{(2/3)}}\right)}{\left(x-2x^{(1/3)}\right)^2}$$

5) Икки функция нисбати (касрнинг) ҳосиласини ифодалайдиган (11.9) формула, йиғинди (айирма) нинг ҳосиласи учун келтирилган (11.7) формула ҳамда жадвалдаги синус ва косунс функцияларнинг ҳосилалари

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

формулаларидан фойдаланамиз:

$$y'=\frac{(\sin\varphi+\cos\varphi)'(1-\cos\varphi)-(1-\cos\varphi)'\cdot(\sin\varphi+\cos\varphi)}{(1-\cos\varphi)^2}=$$

$$=\frac{(\cos\varphi-\sin\varphi)(1-\cos\varphi)-\left(\sin\varphi+\cos\varphi\right)\sin\varphi}{(1-\cos\varphi)^2}=\frac{\cos\varphi-\sin\varphi-1}{(1-\cos\varphi)^2};$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> diff((sin(φ)+cos(φ))/(1-cos(φ)),φx);
```

$$\frac{\cos(\varphi)-\sin(\varphi)}{1-\cos(\varphi)}-\frac{(\sin(\varphi)+\cos(\varphi))\sin(\varphi)}{(1-\cos(\varphi))^2}.$$

6) Аввало (11.7) формуладан, сўнгра жадвалдаги кўрсаткичли ва логарифмик функциялар ҳосилалари формулаларидан фойдаланамиз:

$$y'=(3e^x-\ln x)'=3e^x-\frac{1}{x};$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> diff((3*exp(x)-ln(x)),x);
```

$$3\,\mathbf{e}^x-\frac{1}{x}.$$

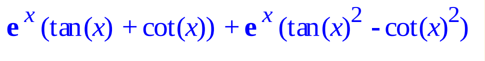
7) Кўпайтманинг ҳосиласи тўғрисидаги (11.8) формула ва жадвалдаги кўрсаткичли ва тригонометрик функциялар ҳосилалари формулаларидан фойдаланамиз:

Титул варақ
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Орқага
Тулик экран
Чиқиш

$$y'=\Bigl((e^{x}(\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x)\Bigr)'=e^{x}(\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x)+e^{x}\left(\frac{1}{\cos^{2}x}-\frac{1}{\sin^{2}x}\right)=\frac{2e^{x}(\sin 2x-2\cos 2x)}{\sin^{2}2x};$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> diff(exp(x)*(tan(x)+cot(x)),x);
```



$$\mathbf{e}^{x}(\tan(x)+\cot(x))+\mathbf{e}^{x}(\tan(x)^{2}-\cot(x)^{2})$$

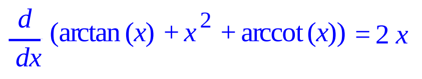
8) Йиғиндининг ҳосиласини ифодалайдиган (11.7) формула, сўнгра жадвалдаги тескари тригонометрик функциялар ва даражали функция ҳосилалари формулаларидан фойдаланамиз:

$$y'=(\mathrm{arctg}\,x+x^{2}+\mathrm{arcctg}\,x)'=\frac{1}{1+x^{2}}+2x-\frac{1}{1+x^{2}}=2x;$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
>  Diff(arctan(x)+x^2+arccot(x),x)=

diff(arctan(x)+x^2+arccot(x),x);
```



$$\frac{d}{dx}(\arctan(x)+x^{2}+\mathrm{arccot}(x))=2\,x$$

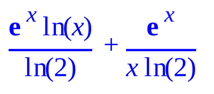
9) Кўпайтманинг ҳосиласи тўғрисидаги (11.8) формула ва жадвалдаги кўрсаткичли ва логарифмик функция ҳосилалари формулаларидан фойдаланамиз

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$y'=(e^x\cdot\log_2 x)'=e^x\cdot\log_2 x+e^x\cdot\frac{1}{x\ln 2}=e^x(\log_2 x+\frac{1}{x\ln 2});$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> diff(exp(x)*log[2](x),x);
```



$$\frac{\mathrm{e}^{x}\ln(x)}{\ln(2)}+\frac{\mathrm{e}^{x}}{x\ln(2)}$$

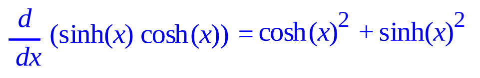
.

10) Кўпайтманинг ҳосиласи формуласи (11.8) ва жадвалдаги гиперболик функциялар ҳосилалари формулаларидан фойдаланамиз:

$$y'=(\operatorname{sh} x\cdot\operatorname{ch} x)'=\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x.$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> Diff(sinh(x)*cosh(x),x)=diff(sinh(x)*cosh(x),x);
```



$$\frac{d}{dx}(\sinh(x)\cosh(x))=\cosh(x)^2+\sinh(x)^2$$

**11.16- мисол.** Мураккаб функциянинг ҳосиласини топиш қоидасига асосан, ушбу

$$1)\ y=3^{\sin 2x};\quad 2)\ y=\sqrt{1+x^3};\quad 3)\ y=\ln\cos(x^2+1);$$

$$4)\ y=\arccos\sqrt{1-x^2};\quad 5)\ y=\ln\sqrt{\frac{2^{3x}}{1+\sin 5x}};\quad 6)\ y=(3+\sin x)^x$$

функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

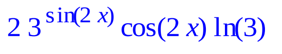
Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**Ечилиши. 1)** Мураккаб функциянинг ҳосиласини топиш қоидасини, яъни (11.11) формулани икки марта қўллаб, топамиз.

$$y' = (3^{\sin 2x})' = 3^{\sin 2x}\ln 3\cdot(\sin 2x)' = 3^{\sin 2x}\ \ln 3\cos 2x\cdot 2 = 2\cdot\ln 3\ 3^{\sin 2x}\cos 2x\ ;$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> diff(3^sin(2*x),x);
```

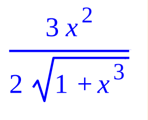


$2\,3^{\sin(2\,x)}\cos(2\,x)\ln(3)$

**2)** Берилган функция $z = 1 + x^3$ ва $y = \sqrt{z}$ функциялар композициясидан иборат бўлиб, $z'_x = 3x^2$, $y'_z = \frac{1}{2\sqrt{z}}$. Унда мураккаб функциянинг ҳосиласини топиш формуласи (11.11) га асосан, $y'_x = \frac{1}{2\sqrt{z}}\cdot 3x^2 = \frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$.

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> diff(sqrt(1+x^3),x);
```



$\frac{3\,x^2}{2\,\sqrt{1+x^3}}$.

**3)** Мураккаб функциянинг ҳосиласини топиш қоидасини икки марта қўллаб,

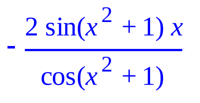
$$y' = \frac{1}{\cos(x^2+1)}.(\cos\ (x^2+1))' = -\frac{\sin(x^2+1)}{\cos(x^2+1}\cdot(x^2+1)' = -tg(x^2+1)\cdot 2x$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

бўлишини топамиз.

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> diff(ln(cos(x^2+1)),x);
```



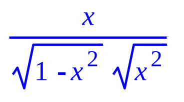
$$-\frac{2\sin(x^2+1)\,x}{\cos(x^2+1)}$$

**4)** Мураккаб функциянинг ҳосиласини топиш қоидасини уч марта қўллаб, $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot(\sqrt{1-x^2})' = -\frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x^2)' = \frac{x}{|x|\,\sqrt{1-x^2}}$

бўлишини топамиз.

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> diff(arccos(sqrt(1-x^2)),x);
```



$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{x^2}}$$

.

**5)** Бу ҳолда, берилган функцияни соддалаштириш мақсадга мувофик бўлади:

$$y = \frac{1}{2}\left(\ln 2^{3x} - \ln(1+\sin 5x)\right) = \frac{3x}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1+\sin 5x)$$

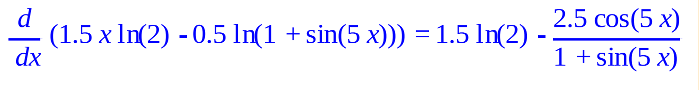
Энди, берилган функциядан ҳосила олиш осонлашади:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$y'=\frac{3}{2}\cdot\ln 2-\frac{1}{2}\cdot(1+\sin 5x)'=\frac{3}{2}\ln 2-\frac{1}{2(1+\sin 5x}\cdot\cos 5x\cdot(5x)'=\frac{3}{2}\ln 2-\frac{5\cos 5x}{2\,(1+\sin 5x)}.$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
➤ Diff(1.5*x*ln(2)-
  0.5*ln(1+sin(5*x)),x)=diff(1.5*x*ln(2)-
  0.5*ln(1+sin(5*x)),x);
```



$$\frac{d}{dx}\,(1.5\,x\ln(2)-0.5\ln(1+\sin(5\,x)))=1.5\ln(2)-\frac{2.5\cos(5\,x)}{1+\sin(5\,x)}$$

.

**6)** Даража кўрсаткичли функциянинг таърифига асосан, берилган функцияни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз: $y=e^{x\ln(3+\sin x)}$. Энди, берилган функциядан ҳосила оламиз:

$$y'=e^{x\ln(3+\sin x)}(x\ln(3+\sin x))'=e^{x\ln(3+\sin x)}\left(\ln(3+\sin x)+\frac{x}{3+\sin x}(3+\sin x)'\right)=$$

$$=e^{x\ln(3+\sin x)}\left(\ln(3+\sin x)+\frac{x\cos x}{3+\sin x}\right)=(3+\sin x)^{x}\left(\ln(3+\sin x)+\frac{x\cos x}{3+\sin x}\right)$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> diff((3+sin(x))^x,x);
```

$$(3+\sin(x))^{x}\left(\ln(3+\sin(x))+\frac{x\cos(x)}{3+\sin(x)}\right).$$

**11.17- мисол.** Ушбу

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

1) $y = x + \frac{1}{5}x^5$, $y = 0$, $y = \frac{6}{5}$;

2) $y = 0{,}1x + e^{0{,}1x}$, $y = 1$; 3) $y = 2x^2 - x^4$, $x > 1$, $y = 0$

функцияларга тескари бўлган функцияларнинг кўрсатилган нуқтадаги ҳосиласи топилсин.

**Ечилиши. 1)** Берилган функция $\forall x \in R$, қатъий ўсувчи, $y_x^{/} = 1 + x^4$ функция $R$ нинг ҳеч бир нуқтасида нолга тенг эмас. Шунинг учун, бу функцияга тескари функция мавжуд ва унинг ҳосиласи $x_y^{/} = \frac{1}{y_x^{/}} = \frac{1}{1+x^4}$. $y = 0$ бўлганда, $0 = x\left(1 + \frac{1}{5}x^4\right)$, $x = 0$ бўлади ва $x_y^{/}(0) = 1$. $y = \frac{6}{5}$ бўлганда эса, $6 = 5x + x^5$, $x^5 + 5x - 6 = 0$, $x = 1$ ва $x_y^{/}\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{1}{2}$ бўлади.

**2)** $y = 0{,}1x + e^{0{,}1x}$ функция $R$ да узлуксиз, қатъий монотон ва $y_x^{/} = 0{,}1 + 0{,}1e^{0{,}1x}$, $R$ даги бирор нуқтада ҳам нолга айланмайди. Демак, берилган функцияга тескари функция мавжуд ва унинг ҳосиласи

$$x_y^{/} = \frac{1}{y_x^{'}} = \frac{1}{0{,}1 + 0{,}1e^{0{,}1x}} = \frac{10}{1 + e^{0{,}1x}}$$

$y = 1$ бўлганда, $1 = 0{,}1x + e^{0{,}1x}$, $x = 0$ **ва** $x_y^{1}(1) = 5$ бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

3) $y=2x^2-x^4$ функция $R$ да узлуксиз, $x>1$ бўлганда $y^{/}=4x(1-x^2)<0$ ва нолга айланмайди. Берилган функция $x$>1 да қатъий камаювчи.

Шундай қилиб, $x>1$ да $y=2x^2-x^4$ функцияга тескари функция мавжуд ва унинг ҳосиласи $x'_y=\frac{1}{y'_x}=\frac{1}{4x(1-x^2)}$ га тенг. $y=0$ бўлганда $x=\sqrt{2}$ бўлади.

Демак, $y'_x(0)=\frac{1}{4\cdot\sqrt{2}(1-2)}=-\frac{\sqrt{2}}{8}$.

**11.18- мисол.** Ушбу $3y^3+2y=x$ тенгламадан топиладиган бир қийматли $y=y(x)$ функциянинг мавжудлигини кўрсатинг ва унинг ҳосиласи $y'_x$ ни топинг.

**Ечилиши**. Фараз қилайлик, берилган тенглама иккита ҳақиқий $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимларга эга бўлсин, яъни $3y_1^3+2y_1=x$, $3y_2^3+2y_2=x$. Бундан, $3(y_1^3-y_2^3)+2(y_1-y_2)\equiv 0$ ёки $(3y_1^2+3y_1y_2+3y_2^2+2)(y_1-y_2)\equiv 0$, бунда, $\forall x$ учун $3y_1^2+3y_1y_2+3y_2^2+2>0$ бўлганлигидан, $y_1-y_2\equiv 0$, $y_1=y_2$.

Шундай қилиб, берилган тенглама ягона ҳақиқий ечимга эга экан.Ҳақиқий ягона ечимнинг мавжудлигини ҳосила ёрдамида ҳам топиш мумкин. $x_y^{/}=9y^2+2>0$ бўлиб, у ҳеч бир нуқтада нолга айланмайди, яъни $x(y)$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

функция қатъий ўсувчи функция. Шунинг учун $x(y)$ функцияга тескари, ягона, монотон ўсувчи, дифференциалланувчи $y=y(x)$ функция мавжуд бўлади ва унинг ҳосиласи (11.10) га асосан, $y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{2+9y^2}$.

**11.19- мисол.** Ушбу

1) $y^5+y^3+y-x=0$; 2) $(2a-x)y^2=x^3,\ y<0$;

3) $6xy+8y^2-12x-26y+11=0,\ y<2,\ x_0=\frac{11}{12}$

ошкормас шаклда берилган $y=y(x)$ функцияларнинг ҳосилалари $y'_x$ ни, 3)- да эса, $y'_x(x_0)$ ни топинг.

**Ечилиши**. Агар бирор ораликда дифференциалланувчи $y=y(x)$ функция $F(x,y)=0$ тенгламани қаноатлантирса, у ҳолда унинг ҳосиласи

$$\frac{d}{dx}F(x,y)=0 \qquad (*)$$

тенгламадан топилади. **1)-** ҳолда, (*) тенгламанинг кўриниши

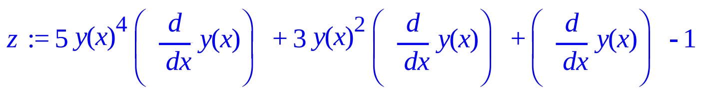
$$\frac{d}{dx}(y^5+y^3+y-x)=0$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

шаклда бўлади. Бундан, $5y^4 \cdot y_x'+3y^2 \cdot y_x'+y_x'-1=0$, $\quad y_x'=\dfrac{1}{5y^4+3y^2+1}$.

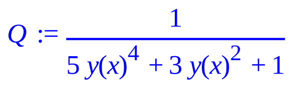
***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> z:=diff(y(x)^5+y(x)^3+y(x)-x,x);
```



$$z := 5\,y(x)^4\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)+3\,y(x)^2\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)+\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)-1$$

```
> Q:=solve(z=0,diff(y(x),x));
```



$$Q := \frac{1}{5\,y(x)^4+3\,y(x)^2+1}$$

**2)** ҳолда (*) тенгламанинг кўриниши $\dfrac{d}{dx}((2a-x)y^2-x^3)=0$ шаклда бўлади. Бу тенгламани дифференциаллаш натижасида, ушбу

$$-y^2+(2a-x)\cdot 2y\cdot y_x'-3x^2=0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бундан, $x\neq 2a$ шартда $y_x'=\dfrac{3x^2+y^2}{2y(2a-x)}$ бўлишини топамиз. $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$ муносабатдан, шартга кўра, $y<0$ бўлгани учун, $y=-\sqrt{\dfrac{x^3}{2a-x}}$ эканлигини эътиборга олган ҳолда, $0<x<2a$ шартда

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

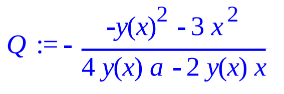
$y_x^{'} = -\frac{(3a-x)y}{(2a-x)x}$ эканлигини топамиз.

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
>  z:=diff((2*a-x)*y(x)^2-x^3,x);
```

$$z := -y(x)^2 + 2(2a-x)y(x)(\frac{d}{dx}y(x)) - 3x^2$$

```
> Q:=solve(z=0,diff(y(x),x));
```



$$Q := -\frac{-y(x)^2 - 3\,x^2}{4\,y(x)\,a - 2\,y(x)\,x}$$

.

**3)** ҳолда (*) тенглама

$$\frac{d}{dx}(6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11) = 0$$

шаклда бўлади. Бундан, $6y + 6x\,y_x^{'} + 16y \cdot y_x^{'} - 12 - 26y_x^{'} = 0$, $y_x^{'} = \frac{3(2-y)}{3x + 8y - 13}$ эканлигини топамиз. Шартга кўра, $y < 2,\ x_0 = \frac{11}{12}$ бўлгани учун, берилган тенгламадан $8y^2 + \frac{11}{2}y - 26y = 0$ ёки $y \cdot \left(8y - \frac{41}{2}\right) = 0$ бўлади, бундан

$y_1 = 0,\quad y_2 = \frac{41}{16} > 2.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Демак, $y<2,\ x_0=\frac{11}{12}$ даги ҳосила, $y'_x\left(\frac{11}{12}\right)=-\frac{24}{41}$ экан.

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> z:=diff(6*x*y(x)+8*y(x)^2-12*x-26*y(x)+11,x);
```

$$z:=6\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)+6y(x)+16y(x)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)-12-26\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)$$

```
> Q:=solve(z=0,diff(y(x),x));
```

$$Q:=-\frac{3\,y(x)-6}{3\,x+8\,y(x)-13}.$$

**11.20- мисол.** Параметрик шаклда берилган ушбу

1) $x=\sin^2 t,\quad y=\cos^2 t,\quad 0<t<\frac{\pi}{2}$; 2) $x=e^{-t},\quad y=t^3,\quad -\infty<t<\infty$;

3) $x=a(t-\sin t)\,,\quad y=a\,(1-\cos t),\ -\infty<t<\infty$

$y=y(x)$ функцияларнинг $y'_x$ ҳосилаларини топинг.

**Ечилиши. 1)** $x(t),\ y(t)$ функциялар $\forall t$ ларда дифференциялянувчи ҳамда $0<t<\frac{\pi}{2}$ да $x'_t=2\sin t\cos t=\sin 2t\neq 0$. У ҳолда, берилган $y=y(x)$ функциянинг ҳосиласи (11.12) формулага асосан, $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{-2\cos t\cdot\sin t}{2\sin t\,\cos t}=-1\,,\quad 0<x<1.$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

```
> s:=diff((cos(t))^2,t)/diff((sin(t))^2,t);
```

$$s := -1.$$

**2)** $x(t)$, $y(t)$ функциялар $\forall t$ учун дифференциялланувчи ва $-\infty < t < \infty$ да $x_t' = -e^{-t} \neq 0$. Шундай қилиб, берилган $y = y(x)$ функциянинг ҳосиласи:

$$y_x' = -\frac{3t^2}{e^{-t}} = -3t^2 e^t.$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
s:=diff(t^3,t)/diff(exp(-t),t);
```

$$s := -\frac{3\,t^2}{\mathbf{e}^{(-t)}}.$$

**3)** $x(t)$, $y(t)$ функциялар ҳам, кўрсатилган ораликда дифференциалланувчи ва $x_t' = a(1 - \cos t)$, $y_t' = a \sin t$, $t \neq 2k\pi$, бўлганда

$$y_x^{/} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \mathrm{ctg}\frac{t}{2}.$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
s:=diff(a*(1-cos(t)),t)/diff(a*(t-sin(t)),t);
```

$$s := \frac{\sin(t)}{1 - \cos(t)}$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**11.21- мисол.** Тенгламаси ушбу

1) $r = a\varphi$, $\frac{4\pi}{3} < \varphi < 2\pi$, $x_0 = 0$; 2) $r = e^{\varphi}$, $-\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{6}$, $x_0 = 1$

кўринишда берилган (бунда $r$ ва $\varphi$ лар $(x; y)$ нуқтанинг қутб координаталари) $y = y(x)$ функцияларнинг $y'(x_0)$ ҳосилаларини топинг.

**Ечилиши**. **1)** $r = a\varphi$ функциянинг ифодасини параметрик шаклга келтирамиз: $x = r\cos\varphi = a\varphi\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi = a\varphi\sin\varphi$. Бундан,

$$x'_{\varphi} = a\cos\varphi - a\varphi\sin\varphi,\ y'_{\varphi} = a\sin\varphi + a\varphi\cos\varphi,\ y'_x = \frac{\sin\varphi + \varphi\cos\varphi}{\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}.$$

Шартга кўра, $\frac{4\pi}{3} < \varphi < 2\pi$, $x_0 = 0$ бўлгани учун $0 = a\cdot\varphi\cos\varphi$, бундан $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Демак, $y'_x(0) = \frac{-1}{\frac{3\pi}{2}} = -\frac{2}{3\pi}$.

**2)** Берилган $r = e^{\varphi}$ функциянинг тенгламасини параметрик шаклга келтирамиз: $x = r\cos\varphi = e^{\varphi}\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi = e^{\varphi}\sin\varphi$. Бундан,

$$x'_{\varphi} = e^{\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi),\ y'_{\varphi} = e^{\varphi}(\sin\varphi + \cos\varphi),\ y'_x(x) = \frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}.$$

Шартга кўра, $-\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{6}$, $x_0 = 1$ бўлгани учун $1 = e^{\varphi}\cos\varphi$, $\varphi = 0$ бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Демак, $y'_x(1)=1$.

**11.6. Функциянинг дифференциали.** $y=f(x)$ функция $(a;b)$ ораликда берилган бўлсин. $x_0\in(a,b)$ нуқтани олиб, унга $\Delta x(\Delta x>0$ ёки $\Delta x<0)$ орттирма берамиз ($x_0+\Delta x\in(a,b)$). Натижада берилган функция ҳам шу нуқтада орттирма олади ва у $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ каби ифодаланади.

**11.4- таъриф.** Агар $y=f(x)$ функциянинг $x_0\in(a,b)$ нуқтадаги $\Delta y$ орттирмаси ушбу

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x \tag{11.15}$$

(бунда $A-\Delta x$ га боғлиқ бўлмаган ўзгармас сон, $\alpha=\alpha(\Delta x)$ бўлиб, $\Delta x\to 0$ да $\alpha(\Delta x)\to 0$) кўринишда ифодаланса, функция $x_0$ нуқтада *дифференциалланувчи* дейилади.

(11.15) муносабатни қуйидагича

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x) \tag{11.16}$$

ёзиш ҳам мумкин.

**11.5- таъриф.** $f(x)$ функция $\Delta y$ орттирмасининг $\Delta x$ га нисбатан чизиқли бош қисми $A\Delta x$ функциянинг *дифференциали* дейилади ва

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$dy = df(x_0)$ каби белгиланади.

Демак, $dy = df(x_0) = A\Delta x$, $\Delta x = dx$ эканлигини эътиборга олсак (эркли ўзгарувчи $x$ нинг $\Delta x$ орттирмасини унинг дифференциали $dx$ билан алмаштириш мумкин), $dy = Adx$ бўлади.

(11.15) формулани ушбу

$$y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + dy(x_0) + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин. Агар $dy(x_0) \neq 0$ бўлса, функциянинг $x_0 + \Delta x$ нуқтадаги қийматини тақрибий

$$y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + dy(x_0) \qquad (11.17)$$

формула билан ҳисоблаш мумкин

**11.22- мисол.** Ушбу $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ функциянинг $x_0$ $(\forall x_0 \in R)$ нуқтада дифференциалланувчилигини кўрсатинг.

**Ечилиши.** Берилган функциянинг $x_0$ нуқтадаги орттирмасини топамиз:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) + f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - 2(x_0 + \Delta x)^2 + 3 - (x_0^3 - 2x_0^2 + 3) =$$
$$= (3x_0^2 - 4x_0)\Delta x + (3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - 2\Delta x)\Delta x.$$

Агар $A = 3x_0^2 - 4x_0$ ,$\alpha(\Delta x) = 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - 2\Delta x$ дейилса, $\boldsymbol{\Delta} f(x_0) = A\boldsymbol{\Delta} x + \alpha(\boldsymbol{\Delta} x)\boldsymbol{\Delta} x$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса берилган функциянинг $x_0$ нуқтада

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

дифференциалланувчи эканлигини билдиради.

**11.23- мисол**. Ушбу

$$f(x) = x\sin\frac{1}{x}, \quad f(0) = 0$$

функция $x = 0$ нуқтада дифференциалланувчи бўладими?

**Ечилиши.** Берилган функциянинг $x = 0$ нуқтадаги орттирмасини топамиз:

$$\Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = \Delta x \sin\frac{1}{\Delta x}.$$

Бу тенгликдан кўринадики, берилган функциянинг $x = 0$ нуқтадаги $\Delta f(0)$ орттирмасини (11.15) кўринишда ифодалаб бўлмайди. Демак, функция $x = 0$ нуқтада дифференциалланувчи бўлмайди.

**11.1- теорема**. $f(x)$ функция $x_0$ нуқтада дифференциалланувчи бўлиши учун унинг шу нуқтада чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиши зарур ва етарли.

Агар $y = f(x)$ функция дифференциалланувчи бўлса,

$$dy = f'(x_0)dx \qquad (11.18)$$

эканлигини кўриш қийин эмас. Маълумки, дифференциалланувчи функциялар

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

учун $dy$ билан $dx$ лар пропорционал ўзгариб, $f'(x)$ пропорционаллик коэффициентини ифодалайди.

Ихтиёрий дифференциалланувчи $u$ ва $v$ функциялар учун ушбу

$$d(\alpha u\pm\beta v)=\alpha\,du\pm\beta\,dv,\ \alpha,\beta\in R;\ \ d(u\cdot v)=v\,du+u\,dv;\ \ d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2},\ v\neq0 \qquad (11.19)$$

тенгликлар ўринли бўлади.

**11.24-мисол.** $y=2x^2-x+1$ функциянинг $x=1$ нуқтадаги дифференциалини топинг.

**Ечилиши.** *1-усул.* Берилган функциянинг $x=1$ нуқтадаги орттирмасини топамиз:

$$\Delta f(1)= f(1+\Delta x)+ f(1)=2(1+\Delta x)^2-(1+\Delta x)+1-2=3\Delta x+2(\Delta x)^2.$$

Функциянинг ортирмаси (11.15) шаклида тасвирланди, бу ҳолда $A=3,\ \alpha(\Delta x)=2(\Delta x)^2$.

Шундай қилиб, $dy\big|_{x=1}=3dx.$

*2-усул.* $y=2x^2-x+1$ функциянинг $x=1$ нуқтадаги ҳосиласини топамиз: $y'(x)=4x-1,\ y'(1)=3$ (11.18) формулага биноан, $dy\big|_{x=1}=3dx.$

**11.25–мисол.** Ушбу 1) $\sin 31^0$ ; 2) $\sqrt[4]{17}$ ифодаларнинг тақрибий

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

қийматларини топинг.

**Ечилиши.** Берилган ифодаларнинг тақрибий қийматларини ҳисоблашда (11.17) формуладан фойдаланамиз.

**1)** $x_0=\frac{\pi}{6}$, $\Delta x=\frac{\pi}{180}$ деб олиб, $y=\sin x$ функцияни ва унинг ҳосиласининг $x_0=\frac{\pi}{6}$ нуқтадаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};\quad y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \sin 31^0=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)\approx\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\approx 0{,}501$$

**2)** $x_0=16,\ \Delta x=1$ деб олиб, (11.17) формула буйича

$$\sqrt[4]{17}\approx\sqrt[4]{16}+\left(\sqrt[4]{x}\right)'\Big|_{x-16}\cdot 1=2+\frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}}=2\frac{1}{32}\ .$$

Функция дифференциалининг (11.18) ифодасидан фойдаланиб, элементар функцияларнинг дифференциаллари жадвалини келтирамиз:

1. $d(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}dx\quad (x>0).$
2. $d(a^{x})=a^{x}\ln a\,dx\quad (a>0,\ a\neq1).$
3. $d(\log_a x)=\frac{1}{x}\log_a e\quad (x>0,\ a>0,\ a\neq1\ ).$
4. $d(\sin x)=\cos x\,dx.$

5. $d(\cos x) = -\sin x\, dx$.

6. $d(\mathrm{tg}\, x) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos^2\, x}}\,\mathbf{dx}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, k=0, ±1, ±2,. . .

7. $d(\mathrm{ctg}\, x) = -\frac{1}{\sin^2 x}dx, \quad x \neq k\pi$, k=0, ±1, ±2,. . .

8. $d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$.

9. $d(e^x) = e^x dx$.

10. $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad -1 < x < 1$.

11. $d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$.

12. $d(\mathrm{arctg}\, x) = \frac{dx}{1+x^2}$.

13. $d(\mathrm{arcctg}\, x) = -\frac{dx}{1+x^2}$.

**11.26- мисол.** Ушбу

1) $y = 2\sqrt{x^3}(3\ln x - 2)$; 2) $y = \arccos e^x$;

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
← →
⇤ ⇥
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$3)\ y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}};\quad 4)\ y=\frac{x^2\cdot 2^x}{x^x},\quad x_1=1,\quad x_2=2$$

функцияларнинг дифференцияларини топинг.

**Ечилиши**. (11.19) формулалардан фойдаланиб, берилган функцияларнинг дифференциалларини ҳисоблаймиз:

$$\mathbf{1)}\ d\,y=d\left(2\sqrt{x^3}\,(3\ln x-2)\right)=2\sqrt{x^3}\,d(3\ln x-2)+(3\ln x-2)d(2\sqrt{x^3}\,)=$$

$$=2\sqrt{x^3}\cdot\frac{3}{x}dx+(3\ln x-2)\cdot\frac{3x^2}{\sqrt{x^3}}dx=9\sqrt{x}\cdot\ln x\,dx\ ;$$

$$\mathbf{2)}\ dy=d(\arccos e^x)=-\frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}\cdot e^x\cdot dx;$$

$$3)\ dy=d\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)=d\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)+d\left(\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x\right)}{(1-x^2)^{3/2}}dx-\frac{dx}{\frac{1-x}{1+x}\cdot(1+x)^2}=\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}dx\ ;$$

$$\mathbf{4)}\ dy=d\left(\frac{x^2\cdot 2^x}{x^x}\right)=\frac{x^x d(x^2\cdot 2^x)-x^2\cdot 2^x d(x^x)}{(x^x)^2}=\frac{2x\cdot 2^x+x^2\cdot 2^x(\ln 2-\ln x-1)}{x^x}dx\,.$$

Бундан $dy\big|_{x=1}=(2+\ln 4)dx;$ $dy\big|_{x=2}=0\,.$

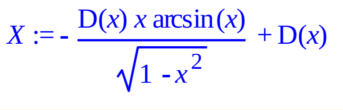
**11.27- мисол.** Maple тизимидан фойдаланиб, ушбу $y=\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

функциянинг биринчи тартибли дифференциалини топинг.

**Ечилиши.**

```
> X:=subs(D(arcsin(x))=diff(arcsin(x),x)*D(x),D(sqrt(1-x^2)*arcsin(x)));
```



$$X := -\frac{D(x)\,x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} + D(x)$$

.

## Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

**11.1.** Ҳосила таърифидан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг $f^{/}(x)$ ҳосилаларини топинг.

1) $f(x)=x^3-2x$. 2) $f(x)=2^x\cos x$ . 3) $f(x)=\cos 5x$ .

4) $f(x)=\operatorname{tg}x+2x$ . 5) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ . 6) $f(x)=\ln(4x-1)$.

7) $f(x)=\arccos 2x$ . 8) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 9) $f(x)=e^{-x}+e^x$ .

**11.2.** Ҳосила таърифидан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг $f^{/}(x_0)$ ҳосилаларини топинг:

1) $f(x)=(x-4)^3(x+3)$, $f^{/}(4)$. 2) $f(x)=\dfrac{(x-2)^3\ln x}{\sin x}$, $f^{/}(2)$.

3) $f(x)=\operatorname{ctg}x+2x$, $f^{/}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$. 4) $f(x)=\sqrt[5]{x-4}$, $f^{/}(4)$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

5) $f(x)=\sqrt[3]{x^4},\ f'(0).$ 6) $f(x)=\frac{1}{x^2},\quad f'(1).$

7) $f(x)=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}},\ f'(0).$ 8) $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}},\quad f'(0).$

9) $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x-1},\quad f'(2).$ 10) $f(x)=3|x+1|,\quad f'(-2).$

**11.3.** Ҳосила таърифидан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари мавжудлигини текширинг.

1) $f(x)=|\ln x|,\quad x_0=1.$ 2) $f(x)=|(x-1)\,(x-2)|,\ x_0=1,\ x_0=2.$

3) $f(x)=|\sin x|,\ x_0=\pi\ .$ 4) $f(x)=|\cos x|.$

5) $f(x)=|\pi^2-x^2|\cdot\sin^2 x\ .$

6) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x>0,\\ x^4, & x\le 0\end{cases}\quad x_0=0.$ 7) $f(x)=\begin{cases}x\cdot\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

8) $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\le 0,\\ e^{-\frac{1}{x}}, & x>0,\end{cases}\quad x_0=0.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

9) $f(x)=\begin{cases} x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|, & x\neq 0, \\ 0\,, & x=0, \end{cases}$ $x_0=0.$

10) $f(x)=\begin{cases} x\,, & x\in Q, \\ 0\,, & x\in I. \end{cases}$ (бунда $Q$-рационал сонлар, $I$ - эса иррационал сонлар тўплами).

Ҳосилалар жадвали ва содда қоидалар ёрдамида қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

Даражали функциялар

**11.4.** $y=3x^2+6x+3.$ **11.5.** $y=2\sqrt{x}-\frac{1}{x^3}+\sqrt{3}\,.$ **11.6.** $y=\frac{1-x^3}{1+x^3}.$

**11.7.** $y=(1+2x)^{30}.$ **11.8.** $y=\left(7x^2-\frac{4}{x}+6\right)^8.$ **11.9.** $y=\left(t^3-\frac{1}{t^3}+3\right)^4.$

**11.10.** $y=\sqrt{1-x^2}.$ **11.11.** $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}.$ **11.12.** $y=\frac{t^3}{(1-t)^2}.$

**11.13.** $y=\frac{3x-1}{x^5}.$ **11.14.** $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}.$ **11.15.** $y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,.$

**11.16.** $y=\sqrt[3]{(2x+1)^2}.$ **11.17.** $y=\frac{(2-x^2)\,(2-x^3)}{(1-x)^2}.$ **11.18.** $y=\frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}\,.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

## Тригонометрик функциялар

**11.19.** $y = x^2 \cdot \sin x + 2x \cos x - 2\sin x.$ **11.20.** $y = \sin^3 x + \sin^{-2} x\,.$

**11.21.** $y = \cos^{-4} x.$ **11.22.** $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$ **11.23.** $y = \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x\,.$

**11.24.** $y = 3\sin^2 x - \sin^5 x.$ **11.25.** $y = \sin\frac{1}{x}.$ **11.26.** $y = \sin(\sin x).$

**11.27.** $y = \cos^3 4x\,.$ **11.28.** $y = \left(1 + \sin^2 x\right)^4\,.$ **11.29.** $y = \operatorname{ctg}\sqrt[5]{1 + x^2}\,.$

**11.30.** $y = \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}.$ **11.31.** $y = \sin^2(\cos 3x)\,.$**11.32.** $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}\,.$

**11.33.** $y = \frac{x}{1 - \sin x}.$ **11.34.** $y = (0{,}4\cos(8x + 5) - 0{,}6\sin(0{,}8x))^2\,.$

**11.35.** $y = (a\cos x + b\sin x)^{\alpha}\,.$ **11.36.** $y = \frac{1 - \cos(8x - 3\pi)}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x}\,.$

## Логарифмик функциялар.

**11.37.** $y = x^3 \log_4 x.$ **11.38.** $y = x\ln x\,.$ **11.39.** $y = \sqrt{\ln x}\,.$

**11.40.** $y = \ln\left(1 - 2x^2\right).$ **11.41.** $y = \log_2\left(x^2 - 4x\right).$ **11.42.** $y = \ln^5(\sin x)\,.$

**11.43.** $y = \ln(\arccos 2\mathrm{x})\,.$ **11.44.** $y = (1 + \ln\sin x)^n\,,\ n \in N\,.$ **11.45.** $y = \frac{\ln x}{1 + x^2}.$

**11.46.** $y = \ln\left(\operatorname{arctg}\sqrt{1 + \mathrm{x}^2}\right).$ **11.47.** $y = \ln^3(\operatorname{tgx})\,.$ **11.48.** $y = \ln(\cos 5x + 2x^3)\,.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Кўрсаткичли функциялар.

**11.49.** $y=3^x$. **11.50.** $y=2^{\sin 2x}$. **11.51.** $y=5^{\cos 4x}$.

**11.52.** $y=\frac{x^2}{4^x}$. **11.53.** $y=e^x\cos x$. **11.54.** $y=x^4-5^{2x}$ .

**11.55.** $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$. **11.56.** $y=\left(x^2-5x+6\right)6^x$ . **11.57.** $y=10^{3x-4}$ .

**11.58.** $y=e^{-4x}$ . **11.59.** $y=e^{\arcsin 2x}$ . **11.60.** $y=a^x\ x^a$ .

**11.61.** $y=e^{\sqrt{x+1}}$ . **11.62.** $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$. **11.63.** $y=e^{ax}\cos bx$ .

Гиперболик функциялар.

**11.64.** $y=\mathrm{sh}^2\,x$. **11.65.** $y=\ln(\mathrm{ch}\,x)$. **11.66.**

$y=\mathrm{sh}^2\,x+\mathrm{ch}^2\,x.$

**11.67.** $y=\mathrm{th}^3\,x$ . **11.68.** $y=x^2\,\mathrm{sh}\,x$ . **11.69.** $y=\frac{1+\mathrm{th}\,x}{1-\mathrm{th}\,x}$.

**11.70.** $y=\frac{1}{3}\mathrm{th}\frac{x}{3}-\frac{1}{6}\mathrm{th}^2\frac{x}{3}$ . **11.71.** $y=\mathrm{cth}\,4x$ . **11.72.** $y=3^{\mathrm{ch}\,5x}$ .

Тескари тригонометрик функциялар.

**11.73.** $y=x\arcsin x$ . **11.74.** $y=(\arccos x)^2$ . **11.75.** $y=\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\,x.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**11.76.** $y=\arcsin\frac{3}{x}$. **11.77.** $y=\frac{x^2}{\operatorname{arctg} x}$. **11.78.** $y=\frac{\arccos x}{x}$ .

**11.79.** $y=\operatorname{arctg}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)$. **11.80.** $y=\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$ . **11.81.** $y=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$.

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

**11.82.** $y=\sqrt{x}+\ln x-\frac{1}{\sqrt{x}}$ . **11.83.** $y=\frac{x^4}{4}\left[(\ln x)^2-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{8}\right]$

**11.84.** $y=\operatorname{ctg}\pi x+\frac{\cos\pi x}{2\sin^3\pi x}$. **11.85.** $y=e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x^2}+2\right)$

**11.86.** $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}\cdot\operatorname{tg}x+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x}\right)$. **11.87.**

$$y=\frac{1}{2a}\left[\ln\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a+x}-\frac{a}{a+x}\right]$$

**11.88.** $y=+\frac{\sin x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$. **11.89.**

$$y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}x\cdot\ln(1+\sin x)-x.$$

**11.90.** $y=\frac{x^2\ln x}{a+bx^2}-\frac{1}{b}\ln\sqrt{a+bx^2}$ .

**11.91.** $y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$ .

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**11.92.** $y = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{4}{3}\right).$

**11.93.** $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x + \ln\sqrt{1-x^2}$

**11.94.** $y = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}\cdot\arcsin\sqrt{x}\,.$

**11.95.** $y = \frac{3x+2}{4x^2}\sqrt{x-1} + \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\,.$

**11.96.** $y = \arcsin(\sin x - \cos x) + \ln\left(\sin x + \cos x + \sqrt{\sin 2x}\right).$

**11.97.** $y = 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\operatorname{tg}x}}{1-\operatorname{tg}x} + \ln\frac{1+\sqrt{2\operatorname{tg}x}+\operatorname{tg}x}{1-\sqrt{2\operatorname{tg}x}+\operatorname{tg}x}.$

**11.98.** $y = \ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x} - 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$

**11.99.** $y = x^{\sin x}\,.$ **11.100.** $y = A\bar{e}^{k^2 x}\sin(\omega x + a)\,.$

**11.101.** $y = \sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}\,.$

**11.102.** $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}.$ **11.103.** $y = \frac{x^2+4}{x\sqrt{4+\left(\frac{x^2-4}{2x}\right)^2}}.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**11.104.** $y=\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. **11.105.** $y=\log_2^3(2x+3)^2$. **11.106.** $y=\sin\ln|x|$.

**11.107.** $y=\sin[\sin(\sin x)]$. **11.108.** $y=2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$. **11.109.** $y=\sin\left[\cos^2\left(\operatorname{tg}^3 x\right)\right]$.

**11.110.** $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}$ $(a>0)$. **11.111.** $y=\ln\left(\ln^2\left(\ln^3 x\right)\right)$.

**11.112.** $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{th}x\dfrac{\sqrt{2}}{8}\ln\dfrac{1+\sqrt{2}\operatorname{th}x}{1-\sqrt{2}\operatorname{th}x}$. **11.113.** $y=\sin\cos^2 x\cdot\cos\sin^2 x$.

**11.114.** $y=\cos^n x\cdot\cos nx$. **11.115.** $y=\sin(\arcsin x)$.

**11.116.** $y=\cos(2\arccos x)$ . **11.117.** $y=\log_2(\log_3(\log_5 x))$. **11.118.**

$y=e^{e^x}+x^{e^x}$ .

**11.119.** $y=\dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{x-a}{x+a}$, $(a<0)$. **11.120.** $y=\arcsin(\sin x)$.

**11.121.** $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$. **11.122.** $y=(\sin x)^{\cos x}$.

**11.123.** $y=\dfrac{\operatorname{ch}x^2}{\operatorname{sh}^2 x^2}-\ln\operatorname{cth}\dfrac{x^2}{2}$. **11.124.** $y=\ln\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\cos x}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\cos x}$.

**11.125.** $y=\dfrac{1}{\sin\alpha}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\operatorname{ctg}\alpha\cdot\ln\dfrac{1+x\cos\alpha}{1-x\cos\alpha}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**11.126.** $y = \operatorname{th} x + \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \frac{1+\sqrt{2}\ \operatorname{th} x}{1-\sqrt{2}\ \operatorname{th} x}$. **11.127.** $y = x - \ln\sqrt{1+e^{2x}} + \bar{e}^{x} \cdot \operatorname{arcctg} e^{x}$.

**11.128.** $y = 2^{x^{x}}$. **11.129.** $y = x^{x^{x^2}}$. **11.130.** $y = x^{e^{x}}$.

**11.131.** $y = x^{x^{x}}$. **11.132.** $y = x^{\frac{2}{\ln x}} - 2x^{\log_x e} e^{1+\ln x} + e^{1+\frac{2}{\log_x e}}$.

**11.133.** $y = \left(\frac{a}{b}\right)^{x} \cdot \left(\frac{b}{x}\right)^{a} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^{b} \quad (a > 0, \quad b > 0)$. **11.134.** $y = e^{x} + e^{e^{x}} + e^{e^{e^{x}}}$.

**11.135.** $y = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}$. $\quad (a > 0, \quad b > 0)$.

**11.136.** $y = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}$. **11.137.** $y = \ln \frac{b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2}\sin x}{a + b\cos x}$.

**11.138.** $y = \ln\left[\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}\right)\right]$. **11.139.**

$y = x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$.

**11.140.** $y = x \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x}$. **11.141.** $y = \arcsin(\sin x - \cos x)$.

**11.142.** $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Орқага
Тулик экран
Чикиш

**11.143.** $y=\frac{a}{b}x+\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,th\frac{x}{2}\right)\quad (0\le|b|<a).$

**11.144.** $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}.$ **11.145.** $y=\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}.$

**11.146**. Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган нуқталардаги ўнг ва чап ҳосилаларини топинг.

1) $f(x)=|x+3|,\qquad f'(-3+0),\qquad f'(-3-0)$ .

2) $y=f(x)=|x^2-5x+6|,\ x=2,\ x=3.$ 3) $f(x)=|2^x-2|,\ x=1.$

4) $f(x)=\sqrt[3]{\sin\pi x}$ , $x=k,\ k\in Z$ . 5) $f(x)=\arccos\left(\frac{1}{x}\right),\ x=-1,\ x=1.$

**11.147**. Қуйидаги функцияларнинг $x=0$ нуқтадаги ўнг ва чап ҳосилаларини топинг:

1) $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 0,\\ \sqrt[3]{x^4}\ln x, & x>0;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}1+e^{1/x}, & x<0,\\ \sqrt{1+\sqrt[3]{x^4}}, & x\ge 0.\end{cases}$

**11.148.** Функцияларнинг узилиш нуқталаридаги ўнг ва чап ҳосилаларини топинг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

1) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+x^3}{x}}$;　　2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{1/x}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

3) $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1+x}{1-x}$;　　4) $f(x)=(1-x^2)\,\mathrm{signx}$ .

**11.149.** $f(x)=|x-x_0|\cdot\varphi(x)$ функция учун $f'_+(x_0)$ ва $f'_-(x_0)$ ларни топинг, бунда $\varphi(x)$ -берилган $x_0$ нуқтада узлуксиз функция.

**11.150.** $y=\dfrac{1}{2}x^2-\ln x$ функция графигига абсциссаси $x_0=2$ бўлган нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топинг.

**11.151.** $y=x^2-3x+2$ параболага абсциссаси $x_0=2$ бўлган нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топинг.

**11.152.** $y=4\sin\dfrac{x}{3}$ функция графигининг $M(\dfrac{3\pi}{2},4)$ нуктасидан ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг.

**11.153.** $\mathrm{y}=\mathrm{x}^2+1$ эгри чизиққа ўтказилган уринма $y=2x+3$ тўғри чизиққа параллел. Уриниш нуқтасининг ординатасини топинг.

**11.154.** $y=x^2-2x+1$ эгри чизиқдаги қандай нуқтада унга ўтказилган уринма $y=-4(x+1)$ тўғри чизиққа параллел бўлади?

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**11.155.** $y=\frac{x}{1-x}$ функция графигига абсциссаси $x_0=3$ бўлган нуқтадан ўтказилган уринманинг О$x$ ўқи билан ташкил этган бурчаги $\alpha$ бўлса, $\mathrm{tg}2\alpha$ ни топинг.

**11.156.** $y=\frac{x+2}{x-2}$ функция графигига қандай нуқталарда ўтказилган уринма, О$x$ ўқининг мусбат йўналиши билан $135^0$ ли бурчак ташкил этади?

**11.157.** $y=\sqrt[3]{x}$ функциянинг графиги қандай нуқтада абсцисса ўқига $30^0$ ли бурчак остида жойлашган бўлади?

**11.158.** $y=x^3+2x-1$ функция графигига қандай нуқтада ўтказилган уринма, $x+y=0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлади?

**11.159.** $y=x^4$ ва $y^4=x$ функцияларнинг графиклари қайси нуқталарда, қандай бурчак остида кесишишларини аниқланг.

**11.160.** $y=\mathbf{ln}x$ чизиқ $Ox$ ўқни қандай бурчак остида кесади?

**11.161.** $y=\mathbf{sin}\,x$ чизиқ синусоида $Ox$ ўқни қандай бурчак остида кесади?

**11.162.** $a$ нинг қандай қийматида $y=a^x$ чизиқ $Oy$ ўқни $45^0$ ли бурчак остида кесади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**11.163.** Ушбу

1) $y = \sin x\sqrt{3}$ ; 2) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$; 3) $y = \dfrac{x}{\sqrt{3+x^2}}$

функциялар $Oy$ ўқни қандай бурчак остида кесади?

**11.164.** $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t$ эллипсга ўтказилган уринманинг $Ox$ ўқ билан ташкил қилган бурчагини топинг.

**11.165.** $(2;1)$ нуқтада $x = t^2 - 3t + 4,\ y = t^2 - 4t + 4$ чизиққа ўтказилган уринмани топинг.

**11.166.** $x = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 1,\ y = t^2 + t + 1$ чизиққа қандай нуқтада ўтказилган уринма $Oy$ ўққа параллел бўлали.

**11.167.** $x = 2t - t^2,\ y = 3t + t^3$ чизиққа: 1) $t = -1$; 2) $t = 1$; 3) $t = \sqrt{2}$ нуқталарда ўтказилган уринма тўғри чизиқлар тенгламасини ёзинг.

**11.168.** Қуйидаги функцияларнинг графиклари қайси нуқталарда қандай бурчак остида кесишишларини аниқланг:

**1)** $f_1(x) = x - x^3$ , $f_2(x) = 5x$ .

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**2)** $f_1(x)=\sqrt{2}\sin x,\quad f_2(x)=\sqrt{2}\cos x$. . **3)** $f_1(x)=\dfrac{1}{x},\quad f_2(x)=\sqrt{x}.$

**4)** $f_1(x)=\ln x,\ f_2(x)=\dfrac{x^2}{2e}.$ **5)** $f_1(x)=x^2-4x+4,\quad f_2(x)=-x^2+6x-4.$

**6)** $f_1(x)=x^3\ ,\quad f_2(x)=\dfrac{1}{x^2}\ .$ **7)** $f_1(x)=4x^2+2x-8,\quad f_2(x)=-x^3-x+10.$

**11.169**. Қандай нуқталарда қуйидаги $y=y(x)$ функциялар графигига ўтказилган уринмалар берилган тўғри чизиқларга параллел бўлади?

**1)** $y=x^2-7x+3,\quad 5x+y-3=0.$ **2)** $y=\dfrac{1}{3}\sin 3x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cos 3x,\quad y=-x.$

**3)** $y=x^3-3x+5,\quad y=-2x.$ **4)** $y=\ln(4x-1),\ y=x\,.$ **5)** $y=x^2,\ y=2x+5\,.$

6) $y=(3-x^2)e^x\ \ x=0.$ 7) $y=|x-5|\cdot(x-3)^3,\quad x=0.$

**11.170**. Қандай нуқталарда қуйидаги $y=y(x)$ ункциялар графигига ўтказилган уринмалар берилган тўғри чизиқларга перпендикуляр бўлади?

1) $y=\ln x,\quad 2y+x+1=0.$ 2) $y=x^3-3x+5\ ,\quad y=-x/9.$

**3)** $y=-\sqrt{2x^3}\ ,\quad 4x-3y+2=0$ . **4)** $y=\sin x,\quad x-10=0.$

5) $y=tgx,\quad x+y=0$ . 6) $y=x^2\ ,\ y=2x+5$

**11.171**. $y=f(x)$ функция графигига берилган нуқтада ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

1) $y = \operatorname{arctg} 2x,\ x = 0.$ 2) $y = e^{x},\ x = 1.$

3) $y = |x-1|\sqrt[3]{x+2}\ ,\ x = 6.$ 4) $y = \sqrt{5-x^{2}}\ ,\ x = 1.$

5) $y = 4\operatorname{ctg} x - \dfrac{\cos x}{\sin^{2} x}\ ,\qquad x = \dfrac{\pi}{2}.$ 6) $x^{2} + y^{2} - 2x + 6y = 0\ ,\quad y > -3,\quad x = 0.$

7) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)\ ,\ t = t_{0} \neq 2n\pi,\ n \in Z.$

8) $x = t\,e^{t}\ ,\ y = t\,e^{-t}\ ,\ t > -1,\ t = t_{0} > -1.$

**11.172.** $s = 2\sin 3t$ қонуният бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган нуқтанинг $t = \dfrac{\pi}{9}$ пайтдаги тезлигини топинг.

**11.173.** $s = \sin^{2} t$ қонуният бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган нуқтанинг $t = \dfrac{\pi}{6}$ пайтдаги тезлигини топинг.

**11.174.** $s = e^{t} + \cos t + 5t$ қонуният бўйича ҳаракатланаётган моддий нуқтанинг $t = 0$ даги тезлигини топинг.

**11.175.** Икки моддий нуқта, мос равишда, $s_{1} = 2{,}5t^{2} - 6t + 1$ ва $s_{2} = 0{,}5t^{2} + 2t - 3$ қонуниятлар бўйича ҳаракатланмоқда. Қайси вақтда биринчи нуқтанинг тезлиги иккинчисиникидан 3 марта катта бўлади?

**11.176.** Моддий нуқта $s = \ln t + \dfrac{1}{16}t$ қонуният бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Ҳаракат бошлангандан қанча вақт ўтгач, нуқтанинг тезлиги $\frac{1}{8}$ $м/с$ бўлади?

**11.177**. Массаси $m = 1{,}5$ бўлган жисм $s(t) = t^2 + t + 1$ қонуният бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Жисмнинг ҳаракати бошлангандан 5 секунд вақт ўтгандаги кинетик энергиясини топинг (*m* масса килограммларда, *s* йўл – метрларда берилган).

**11.178**. Абциссалар ўқи бўйлаб иккита нуқта, мос равишда, $x = 100 + 5t$ ва $x = \frac{t^2}{2}$ қонуниятлар бўйича ҳаракат қилмоқда. Бу нуқталар учрашиш пайтида (моментида) бир-биридан қандай тезликда узоқлашади? (*x* метрлар билан ўлчанади, *t* – секундлар билан).

**11.179**. Ғилдирак шундай айланадики, унинг бурилиш бурчаги вақтнинг квадратига пропорционалдир. Биринчи айланиш 8 секунд вақт давомида амалга оширилди. Ҳаракат бошлангандан 64 секунд вақт ўтгандаги бурчак тезлигини топинг.

**11.180.** Кўрсатилган нуқталарда қуйидаги функцияларга тескари бўлган функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

1) $y = 2x - \frac{\cos x}{2}, \ y = -\frac{1}{2}.$ 2) $y = 2x^2 - x^4, \ 0 < x < 1, \ y = \frac{3}{4}.$

**11.181.** Параметрик шаклда берилган қуийдаги $y = y(x)$ функцияларнинг $y_x^/$ ҳосилаларини топинг:

1) $x = e^{-t}, \ \ y = t^3, \quad -\infty < t < +\infty.$ 2) $x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \ 0 < t < \pi.$

**3)** $\mathrm{x} = \ln(1+t^2), \ \mathrm{y} = \mathrm{t} - \mathrm{arctg}\, t.$ 4) $x = a(t - \sin t), \ y = a(1 - \cos t).$

5) $x = \frac{a\sin t}{1 + b\cos t}, \ \ y = \frac{c\cos t}{1 + b\cos t}.$ 6) $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t.$

7) $x = a\,\mathrm{ch}\,t, \ y = b\,\mathrm{sh}\,t.$ 8) $x = \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad y = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$

**11.182.** Ошкормас шаклда берилган қуийдаги $y = y(x)$ функцияларнинг $y_x^/$ ҳосилаларини топинг:

1) $x + \sqrt{xy} + y = a.$ 2) $e^x \cdot \sin y - e^{-y}\cos x = 0.$ 3) $y^2 = 2px, \ y > 0.$

4) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \ \ y > 0.$ 5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y > 0.$ 6) $e^y + xy = e, \ x = 0, \ y = 1.$

7) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$ 8) $\mathrm{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}.$

9) $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 - 6\mathrm{x} + 10\mathrm{y} + 2 = 0, \quad \mathrm{y} > -5, \ \mathrm{x}_0 = 0.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

10) $x^2 -4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0, \quad x < 2y - 1.$

**11.183**-мисол. Ушбу

1) $r = a(1+\cos\varphi), \quad \varphi \in (0; \frac{2\pi}{3}).$ 2) $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}, \quad x_0 = a\frac{\sqrt{6}}{4}.$

3) $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, \quad f_+^{'}(0) = ?, \quad f_-^{'}(0) = ?;$

4) $r = a(1+\cos\varphi)$ . 5) $r = ae^{m\varphi}$ .

кўринишда берилган $y = y(x)$ функцияларнинг $y_x^{/}$ ҳосилаларини топинг (бунда $r$ ва $\varphi$ лар $(x;\, y)$ нуқтанинг қутб координаталари).

Қуйидаги функцияларнинг дифференциалини топинг.

**11.184.** $y = \ln x + x^2$.**11.185.** $y=e^{3x}+\sqrt{x}.$ **11.286.** $y = \cos^2 x + 3.$

**11.187.** $y = \mathrm{tg}\, 4x + \frac{2}{x}.$ **11.188.** $y = \log_3 x + \sin 5x.$

**11.189.** Қуйидаги функцияларнинг дифференциалини топинг.

1) $y = \ln\ln\left(\frac{x}{2}\right).$ 2) $y = \cos\frac{1}{\log_2 x}$ . 3) $y = e^{\frac{\sqrt{1-x}}{1+x}}$ . 4) $y = x^{x^2}$ .

5) $y=\mathrm{arc\,tg}\frac{\ln x}{x}, \quad x_0=\frac{1}{e}, \quad x_0=e.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

6) $y=\frac{x^2\cdot 2x}{x^x}$, $x_0=1$, $x_0=2$. 7) $y=\arcsin^2 x+\operatorname{arctg}^3 x$.

**4.190**. Функциянинг орттирмасини унинг дифференциали билан алмаштириб, қуйидаги $y=f(x)$ функцияларнинг кўрсатилган нуқтадаги тақрибий қийматларини топинг:

1) $y=\sqrt[3]{x}$, $a)\,x=65$; $b)\,x=125{,}1324$ . 2) $y=\sqrt[4]{x}$, $a)\ x=90$; $b)\ x=15{,}8$.

**3)** $y=\mathbf{tg}x$, $x=\mathbf{44^0\,50'}$ . 4) $y=\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$ , $x=0{,}15$ .

**11.191**. Функциянинг орттирмасини унинг дифференциали билан алмаштириб, қуйидаги ифодаларнинг тақрибий қийматларини топинг:

1) $\sqrt[3]{1{,}02}$. 2) $\sin 29^0$. 3) $\cos 151^0$. 4) $\lg 11$.

**11.192**. Ошкормас ёки параметрик шаклда берилган $y=y(x)$ функцияларнинг дифференциалларини қуйидаги берилган нуқталарда топинг.

1) $y^3-y=6x^2$, $(1;\,2)$. 2) $y^5+x^4=xy^2$, $(x_0,y_0)$. 3) $xy-\sqrt[3]{xy^2+6}=0$, $(2;\,1)$.

4) $4xy^3+\ln\sqrt[3]{\frac{x}{x+y}}=0$, $(1;\,0)$. 5) $x=(t-1)^2\,(t-2)$, $y=(t-1)^2\cdot(t-3)$, $(4;\,0)$.

6) $x=\frac{e^t}{t}$, $y=(t-1)^2\,e^t$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{e}};\,\frac{9}{4\sqrt{e}}\right)$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**11.193**. Қуйидаги $y=f(x)$ функцияларни берилган нуқталарда дифференциалланувчиликка текширинг.

1) $y=\sqrt{x^3},\ x_0=0.$ 2) $y=\sqrt{1-x},\ x_0=\dfrac{1}{2}.$ 3) $y=3x^3+4x^2+5x-2,\qquad \forall x_0\in R.$

4) $y=x\cos\dfrac{1}{x},\ x_0=0.$ 5) $y=\begin{cases} x\cdot\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}\qquad x_0=0.$

6) $y=x\sqrt{\ln(1+x^2}\,,\quad x_0=0.$ 7) $y=\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2},\quad x_0=1;\ x_0=-1;\ x_0=0.$

8) $y=\begin{cases} \operatorname{arctg}x, & x\geq 0, \\ x^2+x\,, & x<0, \end{cases}\qquad \forall x_0\in R.$ 9) $y=3^{tg\frac{1}{x}}\,,\quad x_0=\dfrac{1}{\pi}.$

10) $y=\ln(1+\sin^2 x)-2\sin x\cdot\operatorname{arctg}\sin x,\quad x_0=\dfrac{\pi}{2}.$

11) $y=\begin{cases} (x-2)\ arctg\,\dfrac{1}{x-2}, & x\neq 2, \\ 0\,, & x=2, \end{cases}\qquad x_0=2.$ 12) $y=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^x,\quad x_0=\dfrac{\pi}{2}.$

13) $y=\sqrt{1-e^{-x2}}\,,\quad x_0=0.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

## Мустақил ечиш учун берилган мисол ва масалаларнинг жавоблари

**11.1.** 1) $3x^2-2x$. 2) $2^x(\ln 2\cos x-\sin x)$. 3) $-5\sin 5x$. 4) $\frac{1}{\cos^2 x}+2$. 5) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

6) $\frac{4}{4x-1}$. 7) $-\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$. 8) $\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 9) $-e^{-x}+e^{x}$.

**11.2.** 1) 0. 2) 0. 3) 0. 4) $\infty$. 5) 0. 6) $-2$. 7) 0. 8) 0. 9) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. 10) $-3$.

**11.3.** 1) Мавжуд эмас. 2) Мавжуд эмас. 3) Мавжуд эмас. 4) $x=\frac{2k-1}{2}\pi,\ k\in Z$ нуқтада ҳосилага эга эмас. 5) . Ҳамма жойда ҳосилага эга. 6) $f'(0)=0$. 7) Мавжуд эмас. 8) Мавжуд эмас. 9) $f'(0)=0$. 10) $f'(0)=0$.

**11.4.** $6(x+1)$ **11.5.** $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x^4}$. **11.6.** $-\frac{6x^2}{(1+x^3)^2}$. **11.7.** $60(1+2x)^{29}$. **11.8.** $16\left(7x^2-\frac{4}{x}+6\right)^7\left(7x+\frac{2}{x^2}\right)$. **11.9.** $12\left(t^3-\frac{1}{t^3}+3\right)^3\left(t^2+\frac{1}{t^4}\right)$. **11.10.** $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **11.11.** $\frac{3-x}{2(1-x)^{3/2}}$. **11.12.** $\frac{t^2(3-t)}{(1-t)^3}$. **11.13.** $12x^{-5}+5x^{-6}$.

**11.14.** $\frac{2(1-x^2)}{(x^2-x+1)^2}$. **11.15.** $\frac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}}$. **11.16.** $\frac{4}{3\sqrt[3]{2x+1}}$. **11.17.**

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$\frac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3}$. **11.18.** $-\frac{(1-x)^{p-1}[(p+q)+(p-q)x]}{(1+x)^{q+1}}$.

**11.19.** $x^2\cos x$. **11.20.** $\cos x\left(3\sin^2 x-2\operatorname{cosec}^3 x\right)$. **11.21.** $4\sin x\cdot\sec^5 x$.

**11.22.** $\frac{x-0{,}5\sin 2x}{x^2\cos^2 x}$. **11.23.** $-\sin^3 x$. **11.24.** $\sin x\cos x\left(6-5\sin^3 x\right)$. **11.25.** $-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$. **11.26.** $\cos(\sin x)\cos x$. **11.27.** $-6\sin 8x\cos 4x$. **11.28.** $4\sin 2x\left(1+\sin^2 x\right)^3$. **11.29.** $\frac{2x}{5\sin^2\sqrt[5]{1+x^2}\sqrt[5]{\left(1+x^2\right)^4}}$ .**11.30.** $\frac{1}{2\sqrt{1+\mathrm{tg}\,x}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$. **11.31.** $-3\sin 3x\sin(2\cos 3x)$.

**11.32.** $\frac{\cos x+\cos 2x}{(1+\cos x)^2}$. **11.33.** $\frac{1-\sin x+x\cdot\cos x}{(1-\sin x)^2}$. **11.34.** $-0{,}64(2\cos(8x+5)-3\sin 0{,}8x)(2\sin(8x+5)+0{,}3\cos 0{,}8x)$.

**11.35.** $\alpha(a\cos x+b\sin x)^{a-1}(-a\sin x+b\cos x)$. **11.36.** $-4\cos 8x$, $x\neq\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}k$, $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $x\neq\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$ .**11.37.** $3x^2\log_4 x+\frac{x^2}{2\ln 2}$. **11.38.** $\ln x+1$.

**11.39.** $\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}$. **11.40.** $-\frac{4x}{1-2x^2}$. **11.41.** $\frac{2(x-2)}{\left(x^2-4x\right)\ln 2}$. **11.42.**

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$5\ln^4(\sin x)\mathrm{ctg}x$. **11.43.** $\frac{2}{\arccos 2x}\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$. **11.44.** $n(1+\ln\sin x)^{n-1}ctgx$. **11.45.**

$\frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)}$. **11.46.** $\frac{x}{\mathrm{arctg}\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. **11.47.** $\frac{6\ln^2 tgx}{\sin 2x}$.

**11.48.** $\frac{6x^2-5\sin 5x}{\cos 5x+2x^3}$. **11.49.** $3^x\ln 3$. **11.50.** $2^{1+\sin 2x}\cdot\cos 2x\cdot\ln 2$. **11.51.**

$-4\cdot 5^{\cos 4x}\cdot\sin 4x\cdot\ln 5$. **11.52.** $\frac{2(x-x^2\ln 2)}{4^x}$. **11.53.** $e^x(\cos x-\sin x)$.

**11.54.** $4x^3-2\cdot 5^{2x}\ln 5$. **11.55.** $\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$.

**11.56.** $[2x-5+(x^2-5x+6)\ln 6]6^x$. **11.57.** $3\cdot 10^{3x-4}\cdot\ln 10$. **11.58.** $-4e^{-4x}$. **11.59.**

$\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}e^{\arcsin 2x}$. **11.60.** $a^x x^a\ln a+a^{1+x}x^{a-1}$. **11.61.** $e^{\sqrt{x+1}}\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

**11.62.** $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$. **11.63.** $e^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)$. **11.64.** $\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2x$. **11.65.**

$\mathrm{th}\,x$. **11.66.** $2\mathrm{sh}\,2x$. **11.67.** $3\mathrm{th}^2 x\cdot\frac{1}{ch^2x}$. **11.68.** $x(2\mathrm{sh}\,x+x\,\mathrm{ch}\,x)$. **11.69.**

$\frac{2}{\mathrm{ch}^2 x\cdot(1-\mathrm{th}\,x)^2}$. **11.70.** $\frac{1}{9\mathrm{ch}^2\frac{x}{3}}\cdot\left(1-\mathrm{th}\frac{x}{3}\right)$. **11.71.** $-\frac{4}{\mathrm{sh}^2 4x}$. **11.72.**

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$5\cdot 3^{\operatorname{ch}5x}\ln 3\operatorname{sh}5x$. **11.73.** $\arcsin x+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **11.74.** $-\dfrac{2\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$. **11.75.**

$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{arctg}x+\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$. **11.76.** $-\dfrac{3x^3}{\sqrt{x^2-9}}\operatorname{sign}x$. **11.77.**

$\dfrac{2x\operatorname{arctg}x+2x^3\operatorname{arctg}x-x^2}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^2 x}$. **11.78.** $-\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}\arccos x}{x^2\sqrt{1-x^2}}$. **11.79.** $\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1-x^2}\left(1-x\sqrt{1-x^2}\right)}$.

**11.80.** $\dfrac{x\arccos x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. **11.81.** $\arccos x$. **11.82.** $\dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}}$. **11.83.** $x^3\ln^2 x$.

**11.84.** $-\dfrac{3\pi}{2\sin^4\pi x}$. **11.85.** $\dfrac{1}{3}e^{\sqrt[3]{x}}$. **11.86.** $\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^4 x}}$.

**11.87.** $\dfrac{x^2}{(x^2+a^2)(x+a)^2}$. **11.88.** $\dfrac{1}{\cos^3 x}$. **11.89.** $\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin^2 x}$. **11.90.** $\dfrac{2ax\ln x}{(a+bx^2)^2}$.

**11.91.** $\dfrac{1}{1+x^4}$.. **11.92.** $\dfrac{1}{5+4\sin x}$. **11.93.** $\dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$. **11.94.**

$\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}}$. **11.95.** $\dfrac{1}{x^3\sqrt{x-1}}$. **11.96.** $\sqrt{2\operatorname{ctg}x}$. **11.97.** $2\sqrt{2\operatorname{ctg}x}$. **11.98.**

$\dfrac{4}{\sqrt[4]{1+x^4}}$. **11.99.** $x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x}+\cos x\cdot\sin x\right)$.

**11.100.** $Ae^{-k^2x}\left(\varpi\cos(\varpi x+a)-k^2\sin(\varpi x+a)\right)$. **11.101.**

$\frac{n-m-(n+m)x}{(n+m)\sqrt[n+m]{(1-x)^n(1+x)^m}}$. **11.102.** $-\frac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$. **11.103.** $0,\ x\neq 0$.

**11.104.** $\frac{-3x}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$.**11.105.** $\frac{12}{\ln 2}\frac{\log_2^2(2x+3)^2}{2x+3}$.**11.106.** $\frac{\cos\ln|x|}{x}$.

**11.107.** $\cos x\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos[\sin(\sin x)]$. **11.108.** $-\frac{1}{x^2}2^{tg\frac{1}{x}}\cdot\sec^2\frac{1}{x}\cdot\ln 2$.

**11.109.** $-3\text{tg}^2 x\cdot\sec^2 x\cdot\sin\left(2\cdot\text{tg}^3 x\right)\cdot\cos\left[\cos^2\left(\text{tg}^3 x\right)\right]$. **11.110.**

$a^a\cdot x^{a^a-1}+ax^{a-1}a^{x^a}\ln a+a^x\cdot a^{a^x}\cdot\ln^2 a$. **11.111.** $\frac{6}{x\ln x\ln\left(\ln^2 x\right)}(x>e)$.

**11.112.** $\frac{1}{1-\text{sh}^4 x}$. **11.113.** $-\sin 2x\cdot\cos(\cos 2x)$. **11.114.**

$-n\cos^{n-1}x\cdot\sin(n+1)x$.**11.115.** $1,\ |x|<1$. **11.116.** $4x,\ |x|<1$.

**11.117.** $\frac{1}{\ln 2}\frac{1}{x\ln x\ln\log_5 x}$, $x>5$. **11.118.** $e^x\left(e^{e^x}+x^{e^x}\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)\right)$.

**11.119.** $\frac{1}{x^2-a^2}$. **11.120.** $\text{sgn}(\cos x)$, $\left(x\neq\frac{2k-1}{k}\pi,\ \ k\in Z\right)$.

**11.121.** $\frac{x\arcsin x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$.**11.122.** $(\sin x)^{1+\cos x}\left(\text{ctg}^2 x-\ln(\sin x)\right)$,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$\left(2k\pi < x < (2k+1)\pi,\ k \in Z\right)$. **11.123.** $-\dfrac{4x}{\operatorname{sh}^3 x^2}$ .**11.124.** $\dfrac{2\sqrt{6}\sin x}{3-2\cos^2 x}$ .**11.125.**

$\dfrac{2\sin\alpha}{\left(1-x^2\right)\left(1-x^2\cos^2\alpha\right)}$, $|x|<1$.**11.126.** $\dfrac{2}{1-\operatorname{sh}^4 x}$. **11.127.** $-\dfrac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x}$. **11.128.**

$(\ln 2)2^{x^x} \cdot x^x(1+\ln x)$.**11.129.** $x^{1+x^2}(1+2\ln x)$.**11.130.** $e^x \cdot x^{e^x}\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\right)$. **11.131.**

$x^{x^x} \cdot x^{x-1}\left(x\ln^2 x + x\ln x + 1\right)$. **11.132.** $2e(x-e)$, $x>0,\ x \neq 1$.**11.133.**

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x \cdot \left(\dfrac{b}{x}\right)^a \cdot \left(\dfrac{x}{a}\right)^b \left(\ln\dfrac{a}{b} - \dfrac{a-b}{x}\right)$, $(x>0)$ . **11.134.** $e^x\left[1+e^{e^x}\left(1+e^{e^{e^x}}\right)\right]$.

**11.135.** $\dfrac{1}{a-bx^2}$, $\left(|x|<\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)$.**11.136.** $\dfrac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$ $(0<x-2k\pi<\pi,\quad k\in Z)$.

**11.137.** $\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x}$. **11.138.** $-\dfrac{1+x+\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{1}{x}}{\left(1+x\ln\dfrac{1}{x}\right)\left[1+x\ln\left(\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{1}{x}\right)\right]}$. **11.139.**

$2\sin(\ln x)$ $(x>0)$. **11.140.** $\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$ $(x \geq 0)$. **11.141.**

$\dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$, $\left(0<x-k\pi<\dfrac{\pi}{2},\ k\in Z\right)$.**11.142.** 1, $\left(x \neq \dfrac{\pi}{4}+k\pi,\quad k\in Z\right)$.**11.143.** $\dfrac{a+b\operatorname{ch} x}{b+a\operatorname{ch} x}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**11.144.** $(\sin x)^{1+\cos x}\left(\mathrm{ctg}^2 x-\ln\sin x\right)-\cos x^{1+\sin x}\left(\mathrm{tg}^2 x-\ln\cos x\right),\quad \left(0<x-2k\pi<\frac{\pi}{2},\ k\in Z\right).$

**11.145.** $\frac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x+1}}\left[x-2\ln^2 x+x\ln x\cdot\ln(\ln x)\right],\quad (x>1).$ **11.146.**

1) $f'_+(-3+0)=1,\ f'_-(-3-0)=-1$. 2) $f_-^{/}(2)=f_-^{/}(3)=-1,\quad f_+^{/}(2)=f_+^{/}(3)=1$.

3) $f_+^{/}(1)=\ln 4,\quad f_-^{/}(1)=-\ln 4$. 4) $f^{/}(2k)=+\infty,\quad f^{/}(2k-1)=-\infty,\ k\in Z.$

4) $f(x)=\sqrt[3]{\sin\pi x}$ , $x=k,\ k\in Z$ . 5) $f_-^{/}(-1)=f_+^{/}(1)=+\infty,\quad f_+^{/}(-1)$ ва $f_-^{/}(1)$ мавжуд эмас. **11.147.** 1) $f_-^{/}(0)=1,\quad f_+^{/}(0)=0.$ 2) $f^{/}(0)=0.$ **11.148.** 1) $f_-^{/}(0)=-\frac{1}{2},\quad f_+^{/}(0)=\frac{1}{2}.$

2) $f_-^{/}(0)=-\infty,\quad f_+^{/}(0)=0.$ 3) $f_-^{/}(1)=f_+^{/}(1)=\frac{1}{2}.$ 4) $f_+^{/}(0)=+\infty,\ f_-^{/}(0)=+\infty.$ **11.149.**

$f_+^{'}(x_0)=\varphi(x_0),\ f_-^{'}(x_0)=-\varphi(x_0)$ . **11.150.** k=3/2. **11.151.** k = 1. **11.152.** $y=4$ . **11.153.**. $y=2$ . **11.154.** (-1; 4). **11.155.** $\frac{8}{15}$. **11.156.** (4;3), (0;-1). **11.157.** $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{27}};\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$. **11.158.** (-1;0), (1,-2). **11.159.** $\varphi=\mathrm{arctg}\frac{3}{8}.$

**11.160.** $45^0$. **11.161.** $x=2\pi n$ да $45^0$, $x=(2n+1)\pi$ да $-45^0$ $(n\in Z)$. **11.162.** $a=e$. **11.163.** 1) $30^0$. 2) $45^0$. 3) $60^0$. **11.164.** $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{b}{a}\mathrm{ctg}\,t$. **11.165.** $y=2x-3$. **11.166.**

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$(4;3)$ *ва* $(3;7)$. **11.167.** 1) ва 3) ҳолларда, мос равишда, $y+2=0$ ва $y-\sqrt{2}=\frac{3}{2}(1+\sqrt{2})(x-2\sqrt{2}+2)$; 2) ҳолда $t=1$ нуқтада $\frac{3(1-t^2)}{2(1-t)}$ функция аниқланмаган. **11.168.** 1) $(0;0)$, $\varphi=\mathrm{arctg}(2/3)$. 2) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\ (-1)^k\right),(k\in Z),\varphi=\frac{\pi}{2}$.

3) $(1;\ 1)$, $\varphi=\mathrm{arctg}\,3$. 4) $(\sqrt{e};\ 1/2)$, $\varphi=0$ .5) $(1;1)$ **ва** $(4;\ 4)$, $\varphi=\mathrm{arctg}\frac{6}{7}$.

6) $(1;\ 1)$, $\varphi=\frac{5\pi}{4}$. 7) $(3;\ 34)$, $\varphi=0$. **11.169.** 1) $(1;-3)$. 2) $\left(\frac{1}{3}(\frac{\pi}{3}-2k\pi);\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,

$\left(\frac{1}{3}(-\frac{2\pi}{3}-2m\pi);\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $k,m\in Z$. 3) $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\ 5+8\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$, $M_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ 5+8\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$..

4) $\left(\frac{5}{4};\ \ln 4\right)$. 5) $(1;\ 1)$. 6) $(1;\ 2e)$. 7) $(3;\ 0)$; $\left(\frac{9}{2};\ \frac{27}{16}\right)$. **11.170.**

1) $\left(\frac{1}{2};\ -\ln 2\right)$. 2) $M_1(-2;\ 3)$, $M_2(2;\ 7)$. 3) $\left(\frac{1}{8};\ -1/16\right)$. 4) $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi;1\right)$, $(k\in Z)$.

5) $(k\pi;\ 0)$, $(k\in Z)$. 6) $\left(-\frac{1}{4};\ \frac{1}{16}\right)$. **11.171.** 1) $2x-y=0$. 2) $ex-y=0$.

3) $29x-12y-54=0$. 4) $x+2y-5=0$. 5) $y=-3x+\frac{3\pi}{2}$. 6) $x-3y=0$.

7) $y=\left(\mathrm{ctg}\left(\frac{t_0}{2}\right)\right)x+2a-at_0\,\mathrm{ctg}(t_0/2)$. 8) $(1-t_0)e^{-t_0}x-(1+t_0)e^{t_0}y+2t_0^2=0$. **11.172.** $3\sqrt{3}$ (м/с).

**11.173.** $\frac{\sqrt{3}}{2}(m/c)$. **11.174.** 6 (м/с). **11.175.** 6 (с). **11.176.** 16 (с). **11.177.** 90,75 Жауль .

**11.178.** $15\,\frac{\textbf{м}}{\textbf{сек}}$. **11.179.** $4\pi\cdot$ **рад/сек.**

**11.180.** 1) $x'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. 2) $x'\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **11.181.** 1) $y'_x=-3t^2e^t$. 2) $y'_x=-\frac{b}{a}\mathrm{ctg}\,t$.

3) $y'_x=\frac{t}{2}$. 4) $y'_x=\mathrm{ctg}\frac{t}{2}\ (t\neq 2k\pi, k\in Z)$. 5) $y'_x=\frac{-c\sin t}{a(b+\cos t)}$.

6) $y'_x=-\mathrm{tg}\,t\ \left(t\neq\frac{2k+1}{2}\pi,\ k\in Z\right)$. 7) $y'_x=\frac{b}{a}\mathrm{cth}\,t\ (|t|>0)$. 8) $y'_x=\mathrm{sign}\,t\ (0<|t|<+\infty)$.

**11.182.** 1) $y'_x=\frac{2a-2x-y}{x+2y-2a}$. 2) $y'_x=\frac{e^x\sin y+e^{-y}\sin x}{e^x\cos y+e^{-y}\cos x}$. 3) $y'_x=\frac{p}{y}$.

4) $y'_x=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$, $|x|<a$. 5) $y'_x=\frac{b^2x}{a^2y}$, $|x|>a$. 6) $y'_x(0)=-\frac{1}{e}$. 7) $y'_x=-\frac{b^2x}{a^2y}$. 8) $y'_x=\frac{x+y}{x-y}$.

9) $y'_x(0)=\frac{1}{\sqrt{3}}$. 10) $y'_x=\frac{4y-2x-4}{8y-4x-3}$. **11.183.** 1) $y'_x=-\mathrm{ctg}\frac{3\varphi}{2}$.

2) $y'\left(a\frac{\sqrt{6}}{4}\right)=1$. 3) $y'_+(0)=1,\ y'_-(0)=-\infty$. 4) $y'_x=-\mathrm{ctg}\frac{3\varphi}{2}, \varphi\neq 0$. 5) $y'_x=\mathrm{tg}\left(\varphi+\mathrm{arctg}\frac{1}{m}\right)$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**11.184.** $\left(\frac{1}{x}+2x\right)dx$. **11.185.** $\left(3e^{3x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$ .**11.286.** $-\sin 2x\cdot dx$ .**11.187.** $(\frac{4}{\cos^2 4x}-\frac{2}{x^2})dx.$ **11.188.** $\left(\frac{1}{x\ln 3}+5\cos 5x\right)dx$**.**

**11.189.** 1) $\frac{dx}{x\ln\frac{x}{2}}$, $x>2$. 2) $\frac{\sin\left(\frac{1}{\log_2 x}\right)}{\left(x\log_2^2 x\right)\ln 2}dx.$ 3) $-\frac{1}{\sqrt{1+x}\,\sqrt{1-x^2}}e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\ dx.$

4) $x^{1+x^2}(1+2\ln x)dx$ . 5) $\frac{2e^2dx}{e^2+1}$; 0. 6) $(2+\ln 4)dx$; 0 . 7) $\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3\,arctg^2 x}{1+x^2}\right)dx.$

**11.190**. 1) $a)$ 4,0208 ; $b)$ 5,00177. 2) $a)$ 3,083 ; $b)$ 1,9938. 3) 0,9942 . 4) 0,925.

**11.191**. 1) 1,007. 2) 0,4849. 3) $-0{,}8748$ . 4) 1,043.**11.192**. 1) $\frac{12}{11}dx$ .

2) $\frac{y_0^2-4x_0^3}{5y_0^4-2x_0y_0}dx$ . 3) $-\frac{11}{20}dx$ . 4) 0 . 5) $\frac{1}{2}dx$ . 6) $\frac{1}{8}dx$ . **11.193**. 1) Дифференциалланувчи; 2) Дифференциалланувчи; 3) Дифференциалланувчи; 4)Дифференциалланувчи эмас; 5) Дифференциалланувчи эмас; 6) Дифференциалланувчи; 7) $x_0=1$, $x_0=-1$ да дифференциалланувчи, $x_0=0$ да эса дифференциалланувчи эмас; 8)

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Орқага
Тулик экран
Чикиш

Сонлар ўқининг ҳамма жойида; 9) Дифференциалланувчи; 10) Дифференциалланувчи; 11) Дифференциалланувчи эмас; 12) Дифференциалланувчи; 13) Дифференциалланувчи эмас.

## 12-§. ФУНКЦИЯНИНГ ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ҲОСИЛАСИ ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛИ

**12.1. Функциянинг юқори тартибли ҳосиласи.** $y = f(x)$ функция $(a,b)$ ораликда берилган бўлсин.

12.1-таъриф. Агар $f(x)$ функция $(a,b)$ ораликнинг ҳар бир $x \in (a,b)$ нуқтасида $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, бу $f'(x)$ функция ҳам $x_0 \in (a,b)$ нуқтада ҳосилага эга бўлса, уни $f(x)$ функциянинг $x_0$ нуқтадаги иккинчи тартибли ҳосиласи деб аталади ва $y''\big|_{x=x_0}$, $f''(x_0)$, $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)\Bigg|_{x=x_0}$ каби белгилардан бири орқали ёзилади.

$f(x)$ функция $(a,b)$ ораликнинг ҳар бир $x \in (a,b)$ нуқтасида $(n-1)$ тартибли $f^{(n-1)}(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Бу $f^{(n-1)}(x)$ функциянинг $x_0 \in (a,b)$ нуқтадаги ҳосиласи (агар у мавжуд бўлса), $f(x)$ функциянинг $x_0$ нуқтадаги $n$-тартибли ҳосиласи деб аталади ва у $y^{(n)}(x_0)$, $f^{(n)}(x_0)$, $\dfrac{d^n y(x)}{dx^n}\Bigg|_{x=x_0}$ белгилардан

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

бири орқали ёзилади. Одатда $f(x)$ функциянинг $f^{'}(x), f^{''}(x),...$ ҳосилалари унинг юқори тартибли ҳосилалари дейилади.

Агар $s=s(t)$ - тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилаётган материал нуқтанинг ҳаракат қонунини ифодаласа, у ҳолда $s^{''}(t)$ - шу нуқтанинг $t$ вақт ичидаги тезланишини ифодалайди. Демак, иккинчи тартибли ҳосиланинг физик маъноси-материал нуқтанинг тезланишидан иборат экан.

12.1-эслатма. $f(x)$ функциянинг бирор $x\in(a,b)$ нуктадаги $f'(x)$ ҳосиласи мавжудлигидан унинг шу нуқтадаги юқори тартибли ҳосилаларга эга бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди. Масалан, $f(x)=\sqrt{x^5}$ функция $x\geq 0$ да, жумладан, $x=0$ нуқтада ҳам, $f'(x)=\frac{5}{2}x^{3/2}$, $f''(x)=\frac{15}{4}x^{1/2}$ ҳосилаларга эга, лекин, бу функция $x=0$ нуқтада чекли учинчи тартибли ҳосилага эга эмас.

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $(a,b)$ ораликда аниқланган бўлиб, улар $x\in(a,b)$ нуқтада $n$- тартибли $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. (Буни қуйидагича тушуниш лозим: $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $x$ нуқтани ўз ичига олган $(\alpha, \beta)\subset(a, b)$ ораликда $f', f'',..., f^{(n-1)}$ ҳамда $g', g'',..., g^{(n-1)}$ ҳосилаларга

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

эга бўлиб, x нуқтада эса $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ ҳосилаларга эга). У ҳолда

1) $\left[Cf(x)\right]^{(n)} = Cf^{(n)}(x), \quad C = const;$

2) $\left(f(x) \pm g(x)\right)^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x);$

3) $\left(f(x)\cdot g(x)\right)^{(n)} = f^{(n)}(x)\cdot g(x) + C_n^1 f^{(n-1)}(x)\cdot g^{/}(x) + C_n^2 f^{(n-2)}(x)\cdot g^{//}(x) + \ldots +$

$+C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x) + \ldots + f(x)g^{(n)}(x), \qquad (12.1)$

бунда $C_n^k = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$. (12.1) формула Лейбниц формуласи дейилади.

Юқори тартибли ҳосилаларни топишда, қуйидаги, асосий элементар функцияларнинг $n$- тартибли ҳосилаларини топиш формулалари муҳим аҳамиятга эга:

1. $y = x^m \qquad y^{(n)} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$

Агар $m$ бутун сон ва $n > m$ бўлса, $y^{(n)}=0$ бўлади. Хусусий ҳолда , $m=-1$ бўлса, $y = \dfrac{1}{x}$ функциянинг $n$- тартибли ҳосиласи $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n m!}{x^{n+1}}$ бўлади.

2. y=lnx, $\qquad y^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

3. $y=\log_a x,\qquad y^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{\ln a}\dfrac{1}{x^n}.$

4. $y=e^{\lambda x},\qquad y^{(n)}=\lambda^n e^{\lambda x}.$

5. $y=a^{bx},\qquad y^{(n)}=b^n a^x \ln^n a.$

6. y=sinbx, $\quad y^{(n)}=b^n\sin(bx+n\dfrac{\pi}{2}).$

7. $y=\cos bx,\qquad y^{(n)}=b^n\cos(bx+n\dfrac{\pi}{2})$

8. $y=(ax+b)^{\alpha},\ \ y^{(n)}=((ax+b)^{\alpha})^{(n)}=a^n\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(ax+b)^{\alpha-n}.$

12.1-мисол. Ушбу

**1)**. $y=\ln(x^2-3x+2);$ **2)**. $y=3^{5x};$

**3)**. $y=\dfrac{ax+b}{cx+d};$ **4)**. $y=x^3\sin x;$ **5)**. $y=\operatorname{arctg} x,\ y^{(n)}(0)$

функцияларнинг n- тартибли ҳосилаларини топинг.

Ечилиши. 1) $y'=\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}$. Ҳисоблашларни соддалаштириш учун охирги функцияни қуйидагича шакл алмаштирамиз:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$y' = \frac{2x-3}{x^2-3x+2} = \frac{x-2+x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2} = (x-1)^{-1}+(x-2)^{-1}.$$

Бундан, 8) формулада $\alpha=-1,\ a=1,\ b=-1,\ b=-2$ деб олиб,

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} = (-1)(-2).....(-1-n+1)(x-1)^{-1-n},$$

$$\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} = (-1)(-2).....(-1-n+1)(x-2)^{-1-n},$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$y^{(n)} = (\ln(x^2-3x+2))^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\left[\frac{1}{(x-1)^n}+\frac{1}{(x+2)^n}\right].$$

2) $y' = 3^{5x}\cdot\ln 3\cdot 5,\quad y'' = (3^{5x}\cdot 5\cdot\ln 3)' = 3^{5x}\cdot 5^2\ln^2 3,$

$y^{(3)}=3^{5x}5^3\cdot\ln^3 3$ ва ҳоказо $y^{(n)} = 3^{5x}\cdot 5^n\cdot\ln^4 3$ деб ёзиш мумкин.

Бу формуланинг тўғрилигини математик индукция усули билан кўрсатамиз: Бу формула $n=1$ да ўринли. Фараз қилайлик, $n=k$ да ҳам ўринли бўлсин, яъни $y^{(k)} = 3^{5x}\cdot 5^k\cdot\ln^k 3$. У ҳолда, $(y^{(k)})' = (3^{5x}\cdot 5^k\cdot\ln^k 3)' = 3^{5x}\cdot 5^{k+1}\ln^{k+1} 3.$

Демак, формула $n=k+1$ бўлганда ҳам ўринли экан. Бундан, $\forall n$ учун ўринли эканлиги келиб чиқади. Шу билан биз, 5) формуланинг ҳам тўғрилигини исботладик.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

3) Ҳисоблашни соддалаштириш мақсадида берилган функциянинг шаклини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}(cx-d)^{-1}.$$

Бундан, 8) формулани эътиборга олган ҳолда, $(x=-1,\ \ a=c,\ \ b=-d)$,

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!c^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}\cdot(bc-ad)$$

бўлишини топамиз.

4) $u=\sin x,\ \ v=x^3$деб олиб, Лейбниц (12.1) формуласидан фойдаланиб:

$$(x^3\sin x)^{(n)}=C_n^0x^3(\sin x)^{(n)}+C_n^1(x^3)^1(\sin x)^{(n-1)}+$$
$$+C_n^2(x^3)^{//}(\sin x)^{n-2}+C_n^3(x^3)^{///}(\sin x)^{n-3}$$

топамиз. Қолган ҳадлар нулга тенг бўлади, чунки $(x^3)^{(k)}=0 \qquad k>3.$

sinx функциянинг $n,n-1,n-2,n-3$ тартибли ҳосилаларини топишда 6) формуладан $b=1$ бўлган ҳолда, фойдаланамиз:

$$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2}),\qquad (\sin x)^{(n-1)}=\sin(x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2})=-\cos(x+\frac{n\pi}{2}),$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$(\sin x)^{(n-2)}=\sin(x+(n-2)\frac{\pi}{2})=-\sin(x+\frac{n\pi}{2}), \quad (\sin x)^{(n-3)}=\sin(x+(n-3)\cdot\frac{\pi}{2})=$

$=\cos(x+\frac{n\pi}{2}).$

Шундай қилиб,

$$y^{(n)}=(x^3\cdot\sin x)^{(n)}=x^3\cdot\sin(x+\frac{n\pi}{2})-3x^2n\cos(x+\frac{n\pi}{2})+$$

$$+\frac{6x\cdot n(n-1)}{2!}\sin(x+\frac{n\pi}{2})+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot 6\cos(x+\frac{n\pi}{2})=$$

$$=(x^3-3xn(n-1))\sin(x+\frac{n\pi}{2})+(n(n-1)(n-2)-3nx^2)\cos(x+\frac{n\pi}{2}).$$

5) $y'=\frac{1}{1+x^2}$, бундан $(1+x^2)y'=1$. Кейинги тенгликнинг иккала томонидан $n-1$ тартибли ҳосила оламиз. Чап томоннинг ҳосиласини топишда $u=y'$, $v=(1+x^2)$ деб олиб, Лейбниц формуласини қўллаймиз;

$$y^{(n)}(1+x^2)+2(n-1)xy^{(n-1)}+(n-1)(n-2)y^{(n-2)}=0.$$

Бундан $x=0$ бўлганда, ушбу $y^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0)$ рекуррент формулага эга бўламиз. $n$ жуфт $(n=2k)$ бўлганда, $y^{(2k)}(0)=0$. $n$ тоқ $(n=2k+1)$ бўлганда эса, $y^{(2k+1)}(0)=-(2k)(2k-1)y^{(2k-1)}(0)=...=(-1)^k(2k)!y'(0)=(-1)^k(2k)!$ ,чунки

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$y^{/}(0)=1.$

12.2-мисол. Ушбу $y=x+x^{3}, \quad x\in R$ функцияга тескари бўлган функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

Ечилиши. Берилган функция ҳамма жойда узлуксиз,

$$y_{x}^{/}=1+3x^{2}>0, \qquad y_{x}^{/}=1+3x^{2}\neq 0, \qquad \forall x\in R$$

бўлгани учун унга тескари функция мавжуд ва унинг ҳосиласи

$$x_{y}^{/}=\frac{1}{y_{x}^{/}}=\frac{1}{1+3x^{2}}.$$

Бу тенгликнинг иккала томонидан $y$ бўйича ҳосила оламиз:

$$x_{yy}^{//}=\left(\frac{1}{1+3x^{2}}\right)^{/}\cdot x_{y}^{/}=\frac{-6x}{(1+3x^{2})^{3}}.$$

12.3-мисол. $y=f(x)$ функция ушбу

$x=x(t), \quad y=y(t), \quad t\in(a;b)$

параметрик тенглама билан берилган бўлиб, $x(t)$ ва $y(t)$ функциялар $\forall t\in(a,b)$ учун икки марта дифференциалланувчи ва $x^{/}(t)\neq 0$ бўлсин. У ҳолда $y_{xx}^{//}$ ни топинг.

Ечилиши. Маълумки, берилган функциянинг биринчи тартибли ҳосиласи

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

формула орқали топилади. Бу тенгликнинг иккала томонидан x бўйича ҳосила оламиз:

$$y''_{xx} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \cdot t'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t},$$

$$y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y''_{tt} - y'_t \cdot x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3}. \qquad (12.2)$$

12.4-мисол. Қуйидаги: 1). $x = t^3, \quad y = t^2, \quad$ 2). $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ параметрик тенгламалар берилган $y(x)$ функцияларнинг $y''_{xx}$ ҳосилалари топинг.

Ечилиши. Берилган функцияларнинг $y''_{xx}$ ҳосилалари (12.2) формула орқали топилади:

$$1) \quad x'_t = 3t^2,\ x''_{tt} = 6t;\ \ y'_t = 2t,\ y''_{tt} = 2,\ y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y''_{tt} - y'_t \cdot x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3} = \frac{6t^2 - 12t^2}{27 \cdot t^6} = -\frac{2}{9t^4}.$$

$$2)\ x'_t = a(1 - \cos t),\ \ x''_{tt} = a\sin t;\ y'_t = a\sin t,\ y''_{tt} = a\cos t,\ y''_{xx} = -\frac{1}{4a\sin^{4}\frac{t}{2}}(t \neq 2\pi n,\ n \in Z).$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

12.5-мисол. Параметрик шаклда берилган ушбу

$$x = \frac{2t - t^2}{t-1}, \qquad y = \frac{t^2}{t-1}.$$

$y(x)$ функциянинг $(0;\,4)$ нуқтадаги $y''_{xx}$ ҳосиласи топилсин.

Ечилиши. Берилган $y(x)$ функциянинг $y''_{xx}$ ҳосиласини (12.2) формула орқали топамиз:

$$x'_t = \frac{t^2 - 2t + 2}{(t-1)^2}, \quad x''_{tt} = \frac{2}{(t-1)^3}; \quad y'_t = \frac{t^2 - 2t}{(t-1)^2}, \quad y''_{tt} = \frac{2}{(t-1)^3}.$$

Шартга кўра $x = 0,\ y = 4$ бўлгани учун

$$\begin{cases} 2t - t^2 = 0, \\ 4t - 4 - t^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t(2-t) = 0, \\ 4t - 4 - t^2 = 0, \end{cases}$$

бунда $t = 2$ ечим бўлади. Энди $x'_t, x''_t, y'_t, y''_{tt}$ ларнинг $t = 2$ даги қийматини топамиз:

$$x'_t(2) = -2, \quad x''_t(2) = 2; \quad y'_t(2) = 0, \quad y''_{tt}(2) = 2.$$

Топилган қийматларни (12.2) формулага қўйиб, $y''_{xx}\big|_{(0,4)} = \frac{1}{2}$ эканлигини топамиз.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

12.6-мисол. Ошкормас шаклда берилган ушбу $x^2 + y^2 = 25$ $y(x)$функциянинг $(3;\ 4)$ нуқтадаги $y'_x, y''_{xx}$ ҳосилаларини топинг.

Ечилиши. Берилган функциянинг $y'_x$ ҳосиласи ушбу

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - 25) = 0$$

тенгламадан топилади: $2x + 2yy'_x = 0$. Бу тенгламадан

$$y'_x = -\frac{x}{y}. \qquad (12.3)$$

(12.3) нинг иккала томонида $x$ бўйича ҳосила оламиз: $y''_{xx} = -\dfrac{y - xy'_x}{y^2}$,

(12.3) ни эътиборга олган ҳолда,

$$y''_{xx} = -\frac{y - \dfrac{x^2}{y}}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{25}{y^3}. \qquad (12.4)$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

Шартга кўра $x = 3,\ y = 4$ бўлгани учун (12.3), (12.4)лардан

$$y'_x\Big|_{(3;4)} = -\frac{3}{4},\quad y''_{xx}\Big|_{(3;4)} = -\frac{25}{64}.$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

12.7-мисол. Ушбу $y=|x|^2$ функциянинг $x=0$ нуқтада нечанчи тартибгача ҳосилага эга эканлигини аниқланг.

Ечилиши. $x \neq 0$ бўлса, $y'_x = \begin{cases} 2x, & x>0 \ \textbf{бўлганда}, \\ -2x, & x<0 \ \textbf{бўлганда}. \end{cases}$

$x=0$ да ҳосиланинг таърифига кўра,

$$y'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(0+\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|^2}{\Delta x}=0.$$

Демак, берилган функция $\forall x$ учун биринчи тартибли ҳосилага эга:

$$y'(x)=2|x|.$$

Маълумки, $|x|$ функция $x=0$ нуқтада дифференциалланувчи эмас. Шунинг учун $y=|x|^2$ функция $x=0$ нуқтада фақат биринчи тартибли ҳосилага эга бўлиб, иккинчи тартибли ҳосилага эга эмас.

12.8-мисол. Иккита моддий нуқта берилган бўлиб, улардан бири $s_1(t)=t^3+\frac{t^2}{2}+t+\frac{1}{2}$ қонун бўйича, иккинчиси эса, $s_2(t)=\frac{2}{3}t^3+3t^2-5t$ ($s_1$, $s_2$ - метрда, $t$ – секунда ўлчанади) қонун бўйича ҳаракатланади. Бу моддий нуқталарнинг тезликлари ўзаро тенг бўлган нуқтадаги тезланишини топинг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Ечилиши. Маълумки, ҳаракатланаётган моддий нуқталарнинг тезликлари мос равишда $v_1(t)=s_1'(t), v_2(t)=s_2'(t)$ формулалар билан топилади:

$$v_1(t)=s_1'(t)=3t^2+t+1,\ \ v_2(t)=s_2'(t)=2t^2+6t-5$$

Шартга кўра, $3t^2+t+1=2t^2+6t-5$, бундан $t^2-5t+6=0,\ t_1=2,\ t_2=3.$

1) $t=2$ секунда биринчи ва иккинчи моддий нуқталарнинг тезланишлари:

$$a_1(t)\big|_{t=2}=v_1'(t)\big|_{t=2}=(6t+1)\big|_{t=2}=13\frac{m}{sek^2},\ a_2(t)\big|_{t=2}=v_2'(t)\big|_{t=2}=(4t+6)\big|_{t=2}=14\frac{m}{sek^2}$$

2) $t=3$ секунд

$$a_1(t)\big|_{t=3}=v_1'(t)\big|_{t=3}=(6t+1)\big|_{t=3}=19\frac{m}{sek^2},\ a_2(t)\big|_{t=3}=v_2'(t)\big|_{t=3}=(4t+6)\big|_{t=3}=18\frac{m}{sek^2}.$$

12.2. Функциянинг юқори тартибли дифференциали. $y=f(x)$ функция $(a,b)$ оралиқда берилган бўлсин. Агар $f(x)$ функция $x\in(a,b)$ нуқтада чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, функциянинг дифференциали ушбу $dy=f'(x)dx$ формула билан ҳисобланишини 11-§. нинг 6-бандида кўрдик, бунда $dx$ миқдор $f(x)$ функция аргументи $x$ нинг ихтиёрий орттирмаси $\Delta x$ ни ифодалайди.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $x \in (a,b)$ нуқтада иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда, белгиланган $dx$ лар учун функциянинг дифференциали $dy$ фақат $x$ нинг функцияси бўлади ва унинг дифференциалини ҳисоблаш мумкин, бунда ҳам $dx = \Delta x$ деб олинади.

12.2-таъриф. $f(x)$ функция дифференциали dy нинг $x \in (a,b)$ нуқтадаги дифференциалига берилган $f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли дифференциали деб аталади ва у $d^2y$ ёки $d^2 f(x)$ каби белгиланади, яъни $d^2y = d(dy)$ ёки $d^2 f(x) = d(df(x))$.

Дифференциаллаш қоидасидан фойдаланиб,

$$d^2y = d(dy) = d(y' d(x)) = d(y')dx = y''(dx)^2$$

бўлишини топамиз

Шундай қилиб, функциянинг иккинчи тартибли дифференциали унинг иккинчи тартибли ҳосиласи орқали қуйидагича ёзилади:

$$d^2y = y'' dx^2, \qquad (12.5)$$

бунда $dx^2 = dx \cdot dx = (dx)^2$. Худди шундай, $x$ - эркли ўзгарувчи бўлганда, функциянинг $n$- тартибли дифференциали таърифини бериш мумкин.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$f(x)$ функция $x \in (a,b)$ нуқтада $n$-тартибли $f^{(n)}(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Функциянинг $(n-1)$ тартибли дифференциали $d^{n-1}y$ дан олинган дифференциал, берилган $f(x)$ функциянинг $x \in (a,b)$ нуқтадаги $n$- тартибли дифференциали деб аталади ва у $d^n y$ ёки $d^n f(x)$ каби белгиланади, яъни

$$d^n y = d\left(d^{n-1}y\right) \quad \text{ёки} \quad d^n f(x) = d\left(d^{n-1} f(x)\right); \qquad d^n y = y^{(n)}dx^n. \qquad (12.6)$$

Эркли ўзгарувчи $x$ нинг $n$ - тартибли дифференциали $n > 1$ да, таъриф бўйича $d^n x = 0$ деб олинади. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $(a,b)$ оралиқда берилган бўлиб, улар $x \in (a,b)$ нуқтада дифференциалга эга бўлсин. У ҳолда қуйидаги

1) $d^n[Cf(x)] = Cd^n f(x)$, $C = const$;

2) $d^n[f(x) \pm g(x)] = d^n f(x) \pm d^n g(x)$;

3) $d^n[f(x) \cdot g(x)] = d^n[f(x)] \cdot g(x) + C_n^1 d^{n-1}[f(x)] \cdot d[g(x)] + .... +$
$+ C_n^k d^{n-k}[f(x)] \cdot d^k[g(x)] + .... + f(x) \cdot d^n[g(x)]$,

формулалар ўринли бўлади, бунда $C_n^k = \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$.

$u = f(x)$ функция $(a,b)$ оралиқда, $y = F(u)$ функция эса $(c,d)$ оралиқда берилган бўлиб, улар ёрдамида $y = F(f(x))$ мураккаб функция тузилган

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

бўлсин. $u=f(x)$ функция $x\in(a,b)$ нуқтада $f'(x)$, $F(u)$ функция эса, мос $u\in(c,d)$ нуқтада $F'(u)$ ҳосилага эга деб, $y=F(f(x))$ функциянинг дифференциалини ҳисоблаймиз:

$$dy=F'(f(x))\cdot f'(x)dx=F'(f(x))\cdot df(x).$$

12.2.-эслатма. (12.5) ва (12.6) формулалар $n>1$ бўлганда фақат x - эркли ўзагрувчи бўлган ҳолда ўринли.

$\chi$-эрксиз ўзгарувчи бўлган ҳолда, яъни $y=y(x(t))$ мураккаб функция учун (12.5) формула ушбу:

$$d^2y=d(dy)=d(y'_x dx)=d(y'_x)\cdot dx+y'_x d(dx)=y''_{xx}dx^2+y'_x d^2x \qquad (12.7)$$

кўринишда бўлади.

Агар $x$- эркли ўзгарувчи бўлса, $d^2x=0$ бўлади ва (12.5) формула (12.7) формулага тенг бўлади.

12.9-мисол. x ни эркли ўзгарувчи деб, ушбу $y=xe^{x^2}$ функциянинг учинчи тартибли дифференциалини топинг.

Ечилиши. 1-усул. Иккинчи тартибли дифференциалнинг таърифига кўра,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$d^2y = d(dy) = d(xde^{x^2} + e^{x^2}dx) = d(2x^2e^{x^2}dx + e^{x^2}dx) =$$

$$=2d(x^2e^{x^2})\cdot dx + d(e^{x^2})\cdot dx=$$

$$=2\left[d(e^{x^2})\cdot x^2 + e^{x^2}d(x^2)\right]dx + d(e^{x^2})dx= \qquad (12.8)$$

$$=4e^{x^2}\cdot x^3dx^2 + 4xe^{x^2}dx^2 + 2xe^{x^2}dx^2 =$$

$$= (6e^{x^2}x + 4e^{x^2}\cdot x^3)dx^2 = 2e^{x^2}(3x + 2x^3)dx^2.$$

Учинчи тартибли дифференциалнинг таърифига кўра,

$$d(d^2y) = d\left[2e^{x^2}(3x + 2x^3)dx^2\right] = 2d\left[e^{x^2}(3x + 2x^3)dx^2\right] =$$
$$= 2\left[e^{x^2}d(3x + 2x^3) + (3x + 2x^3)d(e^{x^2})\right]dx^2 =$$
$$= 2\left[e^{x^2}(3 + 6x^2) + (3x + 2x^3)2xe^{x^2}\right]dx^3 = 2e^{x^2}(3 + 12x^2 + 4x^4)dx^3.$$

2-усул. Берилган функциянинг учинчи тартибли ҳосиласини топамиз: (12.8)ни эътиборга олиб,

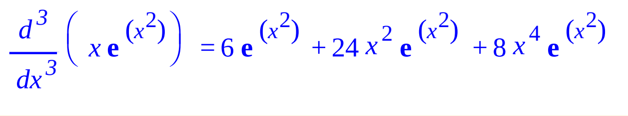
$$y^{///} = (xe^{x^2})^{///} = \left[2e^{x^2}3x + 2x^3\right]^{/} =$$
$$= 2\left[(e^{x^2})^{/}(3x + 2x^3) + e^{x^2}(3x + 2x^3)^{/}\right] = 2e^{x^2}(3 + 12x^2 + 4x^4).$$

(12.6) формулага асосан $(n = 3)$, $d^3y = 2e^{x2}(3 + 12x^2 + 4x^4)dx^3$ бўлишини топамиз.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:

```
> Diff(x*exp(x^2),x$3)=diff(x*exp(x^2),x$3);
```



$$\frac{d^3}{dx^3}\left(x\,\mathbf{e}^{(x^2)}\right)=6\,\mathbf{e}^{(x^2)}+24\,x^2\,\mathbf{e}^{(x^2)}+8\,x^4\,\mathbf{e}^{(x^2)}$$

.

12.10-мисол. Қуйидаги: $a$) $x$ бирор эркли ўзгарувчининг функцияси; $b$) $x$ эркли ўзгарувчи бўлган ҳолларда, $y=e^{\sqrt{x}}$ функциянинг иккинчи тартибли дифференциалини топинг.

Ечилиши. $a$). 1-усул. Иккинчи тартибли дифференциалнинг таърифига кўра,

$$d^2y=d\left(d\left(e^{\sqrt{x}}\right)\right)=d\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}d^2x+\frac{e^{\sqrt{x}}}{4x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx^2.$$

2-усул. Берилган функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топамиз:

$$y_x^{/}=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}},\ y_{xx}^{//}=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2x}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3\sqrt{x}}\right).$$

(12.7) формулага асосан,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$d^2y=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}d^2x+\frac{e^{\sqrt{x}}}{4x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx^2.$$

$b$). Бу ҳолда $d^2x=0$, демак, унда $d^2y=\frac{e^{\sqrt{x}}}{4x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx^2$ бўлади.

12.11-мисол. Ушбу $y=\sqrt{1-x^2}\arcsin x$ функциянинг иккинчи тартибли дифференциалини топинг.

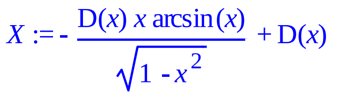
Ечилиши. Иккинчи тартибли дифференциални топиш учун (12.5) муносабатдан фойдаланамиз:

$$y'=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x+1,$$

$$d^2y=y''dx^2=\left(-\frac{x}{1-x^2}-\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\arcsin x\right)dx^2$$

$$y''=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\arcsin x,$$

```
> X:=subs(D(arcsin(x))=diff(arcsin(x),x)*D(x),
D(sqrt(1-x^2)*arcsin(x)));
```

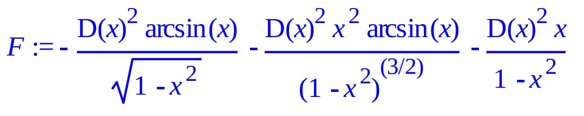


$$X:=-\frac{\mathrm{D}(x)\,x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}+\mathrm{D}(x)$$

```
> F:=subs(D(D(X))=0,D(arcsin(x))=
```

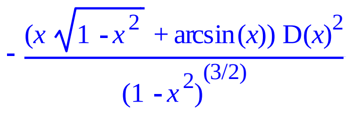
Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

```
diff(arcsin(x),x)*D(x),D(X));
```



$$F := -\frac{D(x)^2 \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{D(x)^2 x^2 \arcsin(x)}{(1-x^2)^{(3/2)}} - \frac{D(x)^2 x}{1-x^2}$$

```
> simplify(F);
```



$$-\frac{(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x))\, D(x)^2}{(1-x^2)^{(3/2)}}$$

.

12.12-мисол. Ушбу $y = \sin 5x \cdot \cos 2x$ функциянинг $n$- тартибли дифференциалини топинг.

Ечилиши. Берилган функцияни $y = \frac{1}{2}[\sin 7x + \sin 3x]$ кўринишда ифодалаймиз. Бу функциянинг $n$-тартибли дифференциалини топиш учун $y^{(n)} = (\mathrm{sinbx})^{(\mathrm{n})} = b^n \sin(bx + n\frac{\pi}{2})$ ва (12.6) формулалардан фойдаланамиз:

$$d^n y = y^{(n)} dx^n = \frac{1}{2}\left[7^n \sin\left(7x + \frac{n\pi}{2}\right) + 3^n \sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right)\right] dx^n.$$

12.13-мисол. Ушбу $y = \frac{3x+2}{x^2 - 2x + 5}$ функциянинг $x = 0$ нуқтадаги иккинчи тартибли дифференциалини топинг.

Ечилиши. Берилган функциянинг иккинчи тартибли дифференциалини

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
←
→
⇤
⇥
Оркага
Тулик экран
Чикиш

(12.6) формула бўйича $(n=2)$ топамиз:

$$y'_x = \frac{-3x^2-4x+19}{\left(x^2-2x+5\right)^2}, \quad y''_{xx} = \frac{6x^3+12x^2-114x+56}{\left(x^2-2x+5\right)^3}.$$

(12.6) формулага асосан, $d^2y\big|_{x=0} = y''_{xx}\big|_{x=0} dx^2 = \dfrac{56}{125}dx^2.$

## Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

Қуйидаги мисолларнинг кўрсатилган тартибдаги ҳосилаларини топинг.

12.1. $y = x(2x-1)^2(x+3)^3, \quad y^{(7)} = ?$

12.2. $y = \dfrac{1}{1+x^3}, \quad y'' = ?$

12.3. $y = 1+10x+\dfrac{1}{x^{98}}, \quad y'' = ?$

12.4. $y = \cos^2 x, \quad y'' = ?$

12.5. $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x, \quad y'' = ?$

12.6. $y = \operatorname{arctg}(x+\sqrt{x^2+1}), \quad y'' = ?$

12.7. $y = \sqrt{1-x^2}\arcsin x, \quad y'' = ?$

12.8. $y = \ln(x+\sqrt{x^2+1}), \quad y'' = ?$

12.9. $y = \sqrt[5]{x^3}, \quad y''' = ?$

12.10. $y = x^5 \ln x, \quad y''' = ?$

12.11. $y = x^2\cos 3x, \quad y^{IV} = ?$

12.12. $y = x^2\sin 2x, \quad y^{(50)} = ?$

12.13. $y = \dfrac{e^x}{x}, \quad y^{(10)} = ?$

12.14. $y = \sin x \sin 2x \sin 3x, \quad y^{(10)} = ?$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

12.15. $y=\sin^2 x\ln x,\quad y^{(6)}=?$

12.16. $y=x^2e^{2x},\quad y^{(50)}=?$

12.17. $y=a^{3x},\quad y^{(III)}=?$

12.18. $y=\dfrac{1+x}{1-x},\quad y^{(n)}=?$

12.19. $y=\sin ax+\cos bx,\quad y^{(n)}=?$

12.20. $y=\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},\quad y^{(n)}=?$

12.21. $y=\dfrac{x}{a+bx},\quad y^{(n)}=?$

12.22. $y=\dfrac{1}{x(x+1)},\quad y^{(n)}=?$

12.23. $y=\sin x\cos x,\quad y^{(n)}=?$

12.24. $y=\sin 5x\cos 2x,\quad y^{(n)}=?$

12.25. $y=\log_a x,\quad y^{(n)}=?$

12.26. $y=\sin^4 x+\cos^4 x,\quad y^{(n)}=?$

12.27. $y=\sin 3x\cos^2 x,\quad y^{(n)}=?$

Қуйидаги функцияларнинг берилган нуқталардаги кўрсатилган тартибдаги ҳосилаларини топинг.

12.28. $y=x^6-4x^3+4,\quad y^{(IV)}(1)=?$

12.29. $y=\dfrac{x^5}{(x-1)^4},\quad y^{(II)}(5)=?$

12.30. $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1+x^2}},\quad y^{(II)}(0)=?$

12.31. $y=\operatorname{arctg} x,\quad y^{(II)}(1)=?$

12.32. $y=e^{\sqrt{x}},\quad y^{(II)}(4)=?$

12.33. $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}},\quad y^{(100)}(x)=?$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

12.34. $y=\frac{1}{1-x}, \quad y^{(IV)}(x)=?$

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган тенгламаларни қаноатлантиришини исботланг.

12.35. $y=e^{x}\sin x, \quad y^{//}-2y^{/}+2y=0;$

12.36. $y=e^{-x}\sin x, \quad y^{//}+2y^{/}+2y=0;$

12.37. $y=c_1\cos x+c_2\sin x, \quad y^{//}+y=0$ ($c_1$ ва $c_2$ - ихтиёрий ўзгармас сонлар);

12.38. $y=c_1 chx+c_2 shx, \quad y^{//}-y=0$ ($c_1$ ва $c_2$ - ихтиёрий ўзгармас сонлар);

12.39. $y=A\sin(\omega t+\omega_0)+B\cos(\omega t+\omega_0), \quad \frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2 y=0$ ($A, B, \omega, \omega_0$ - ихтиёрий ўзгармас сонлар);

12.40. $y=\sin(n\arcsin x), \quad (1-x^2)y^{//}-xy^{/}+n^2y=0;$

12.41. $y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}, \quad y^{//}-(\lambda_1+\lambda_2)y^{/}+\lambda_1\lambda_2 y=0$ ($c_1$, $c_2$ - ихтиёрий ўзгармас сонлар, $\lambda_1, \lambda_2$ - ўзгармас);

12.42. $y=\cos(m\ln x), \quad x^2y^{(n+2)}+(2n+1)xy^{(n+1)}+(n^2+m^2)y^{(n)}=0;$

Берилган $y=y(x)$ функцияларнинг қуйидаги тенгламаларни қаноатлантиришини аниқланг:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

12.43. $y = A\cos ax + B\sin ax, \quad y^{//} + a^2 y = 0$.

12.44. $y = Ae^{x} + Be^{-y} - \frac{1}{x}, \quad y^{//} - y = \frac{x^2 - 2}{x^3}$.

12.45. $y = 1 + \cos e^{x} + \sin e^{x}, \quad y^{//} - y^{/} + e^{2x} y = 0$.

Қуйидаги параметрик шаклда берилган $y = y(x)$ функцияларнинг кўрсатилган тартибдаги ҳосилаларини топинг:

12.46. $x = at^2, \quad y = bt^3; \quad x^{//}_{yy} = ?$

12.47. $x = t^3 + 3t + 1, \quad y = t^3 - 3t + 1; \quad y^{//}_{xx} = ?$

12.48. $x = e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad y = e^{\alpha t} \sin \beta t; \quad y^{//}_{xx} = ?$

12.49. $x = a(\cos t - \ln ctg \frac{t}{2}), \quad y = a\sin t; \quad y^{///}_{xxx} = ?$

12.50. $x = tcht - sht, \quad y = tsht - cht; \quad y^{//}_{xx} = ?$

12.51. $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t; \quad y^{///}_{xxx} = ?$

12.52. $x = a(1 + \cos t)\cos t, \quad y = a(1 - \cos t)\sin t; \quad y^{///}_{x} = ?$

12.53. $x = \ln t, \quad y = t^2 - 1; \quad y^{//}_{x} = ?$

12.54. $x = 2t\cos t + (t^2 - 2)\sin t, \quad y = 2t\sin t - (t^2 - 2)\cos t; \quad y^{///}_{x} = ?$

12.55. $x = 2^{\cos^2 t}, \quad y = 2^{\sin^2 t}; \quad y^{//}_{x} = ?$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Қуйидаги параметрик шаклда берилган $y = y(x)$ функцияларнинг берилган нуқтада кўрсатилган тартибдаги ҳосилаларини топинг:

12.56. $x = \ln(1+\sin\varphi),\quad y = \ln(1-\cos 2\varphi);\quad (\ln(\frac{3}{2}); \ln(\frac{1}{2}));\quad y_{xx}^{//} = ?$

12.57. $x = \operatorname{ch} t \sin t + \operatorname{sh} t \cos t,\quad y = \operatorname{ch} t \cos t - \operatorname{sh} t \sin t;\quad (0;1);\quad y_{xx}^{//} = ?$

Параметрик шаклда берилган $y = y(x)$ функцияларнинг берилган тенгламаларни қаноатлантиришини исботланг:

12.58. $x = e^t \sin t,\quad y = e^t \cos t;\quad y^{//}(t+y)^2 = 2(xy^{/} - y).$

12.59. $x = \sin t,\quad y = \sin kt;\quad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + k^2 y = 0.$

12.60. $x = \sin t,\quad y = Ae^{\sqrt{2}t} + Be^{\sqrt{2}t};\quad (1-x^2)y^{//} - xy^{/} - 2y = 0,\quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},$ $A$ ва $B$ - ихтиёрий ўзгармас сонлар;

Қуйидаги ошкормас шаклда берилган $y = y(x)$ функцияларнинг $x$ бўйича кўрсатилган тартибдаги ҳосилаларини топинг:

12.61. $y^2 = 2px,\quad y_{xx}^{//} = ?$ 12.62. $e^{x-y} = x + y,\quad y_{xx}^{//} = ?$

12.63. $\operatorname{arctg} y - y + x = 0,\quad y_{xx}^{//} = ?$ 12.64. $e^x - e^y = y - x,\quad y_{xx}^{//} = ?$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

12.65. $x^2+5xy+y^2-2x+y-6=0,\qquad (1;1)$ нуқтадаги $y''_{xx}=?$

Қуйидаги функцияларнинг $x=0$ нуктада нечанчи тартибли ҳосилаларга эга эканлигини аниқланг ва мавжуд ҳосилаларнинг бу нуқтадаги қийматини ҳисобланг:

12.66. $y=\begin{cases}1-\cos x, & x<0 \text{ bo'lganda,}\\ \ln(1+x)-x, & x\geq 0 \text{ bo'lganda.}\end{cases}$

12.67. $y=\begin{cases}shx-x, & x<0 \text{ bo'lganda,}\\ x-\sin x, & x\geq 0 \text{ bo'lganda.}\end{cases}$

12.68. $y=\begin{cases}shx, & x<0 \text{ bo'lganda,}\\ \sin x chx, & x\geq 0 \text{ bo'lganda.}\end{cases}$

12.69. $y=\begin{cases}x^{10}, & x-\text{rasional son bo'lganda,}\\ -x^{10}, & x-\text{irrasional son bo'lganda.}\end{cases}$

12.70. $y=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \text{ bo'lganda,}\\ 0, & x=0 \text{ bo'lganda.}\end{cases}$

$x$ ни эркли ўзгарувчи деб, қуйидаги $y=y(x)$ функцияларнинг кўрсатилган тартибдаги дифференциалларини топинг:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

12.71. $y=(x+1)^3(x-1)^2,\ d^2y=?$ 12.72. $y=(x^3+2x^2+x+3)e^{-2x},\ d^2y=?$

12.73. $y=\sin^2 x,\ d^4y=?$ 12.74. $y=x\cos 2x,\ d^{12}y=?$

12.75. $y=\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}tgx\right);\ d^2y=?$ 12.76. $y=\cos x chx;\ d^8y=?$

12.77. $y=\sqrt{\ln^2 x-4};\ d^2y=?$ 12.78. $y=3^{-x^2};\ d^3y=?$

Агар $du, d^2u, dv, dv^2$ лар мавжуд бўлса, қуйидаги $y=y(x)$ функциялар учун $d^2y$ ни топинг.

12.79. $y=\sqrt{u^2+v^2};\ d^2y=?$ 12.80. $y=u^v;\ d^2y=?$

12.81. $y=\frac{2u+v}{u};\ d^2y=?$ 12.82. $y=u\ln v;\ d^2y=?$

Қуйидаги $y=y(x)$ функцияларнинг берилган нуқтадаги кўрсатилган тартибдаги дифференциалларини топинг:

12.83. $y=xe^{x^2};\ d^2y\big|_{x=1}=?$

12.84. $y=\cos^2 x;\ d^3y\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=?$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

12.85. $y = x\sqrt[3]{(x-5)^2}$; $d^2y\big|_{x=-3} = ?$

12.86. $y = \frac{1}{ax+b}$; $d^ny\big|_{x=0} = ?$

12.87. $y = \left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-1}\right)^2$; $d^{16}y\big|_{x=1} = ?$

12.88. $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$; $d^{10}y\Big|_{x=\frac{\pi}{6}} = ?$

Ошкормас шаклда берилган $y = y(x)$ функцияларнинг $(x_0; y_0)$ нуқтадаги иккинчи тартибли дифференциалини топинг:

12.89. $x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0, \quad (1;1).$

12.90. $3(y-x+1)+arctg(y/x)=0, \quad (1;0).$

Мустақил ечиш учун берилган мисол ва масалаларнинг жавоблари

12.1. 0. 12.2. $\frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$. 12.3. $9702/x^{100}$. 12.4. $-2\cos 2x$. 12.5. $\frac{2x}{1+x^2}+2arctgx$. 12.6. $-x(1+x^2)^{-2}$. 12.7. $-\frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

12.8. $-x(x^2+1)^{-3/2}$. 12.9. $\frac{42}{125}x^{-\frac{12}{5}}$. 12.10. $x^2(60\ln x+47)$.

12.11. $27(3x^2\cos 3x+8x\sin 3x-4\cos 3x)$.

12.12. $2^{50}(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x+\frac{1225}{2}\sin 2x)$.

12.13. $\frac{e^x}{x}-10\frac{e^x}{x^2}+90\frac{e^x}{x^3}-720\frac{e^x}{x^4}+5040\frac{e^x}{x^5}-30240\frac{e^x}{x^6}+151200\frac{e^x}{x^7}-604800\frac{e^x}{x^8}+$

$+1814400\frac{e^x}{x^9}-3628800\frac{e^x}{x^{10}}+3628800\frac{e^x}{x^{11}}$. 12.14. $-2^8\sin 2x-2^{18}\sin 4x+2^8 3^{10}\sin 6x$.

12.15. $-60/x^6+\left(\frac{144}{x^5}-\frac{160}{x^3}-\frac{96}{x}\right)\sin 2x+\left(\frac{60}{x^6}-\frac{180}{x^4}+\frac{120}{x^2}+32\ln x\right)\cos 2x$.

12.16. $2^{49}e^{2x}(2x^2+10x+1225)$. 12.17. $27a^{3x}\ln^3 a$. 12.18. $2(n!)(1-x.)^{-n-1}$.

12.19. $a^n\sin(ax+n\frac{\pi}{2})+b^n\cos(bx+n\frac{\pi}{2})$. 12.20. $(-1)^{n-1}n!(\alpha\delta-\beta\gamma)\gamma^{n-1}(\gamma x+\delta)^{-n-1}$.

12.21. $(-1)^{n-1}n!ab^{n-1}(a+bx)^{-n-1}$. 12.22. $(-1)^n n![x^{-n-1}-(x+1)^{-n-1}]$.

12.23. $2^{n-1}\sin(2x+n\frac{\pi}{2})$. 12.24. $\frac{1}{2}[7^n\sin(7x+n\frac{\pi}{2})+3^n\sin(3x+n\frac{\pi}{2})]$.

12.25. $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n\ln a}$. 12.26. $4^{n-1}\cos(4x+n\frac{\pi}{2})$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

12.27. $\frac{1}{4}\sin(x+n\frac{\pi}{2})+\frac{3^n}{2}\sin(3x+n\frac{\pi}{2})+\frac{5^n}{4}\sin(5x+n\frac{\pi}{2})$.

12.28. $360$. 12.29. $\frac{625}{1024}$. 12.30. $0$. 12.31. $-\frac{1}{2}$. 12.32. $e^{2/32}$.

12.33. $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot 197(399-x)}{2^{100}(1-x)^{201/2}}$. 12.34. $\frac{5!}{(1-x)^6}$. 12.46. $-\frac{2a}{9b^2t^4}$.

12.47. $\frac{4t}{3(t^2+1)^3}$. 12.48. $\frac{(\alpha^2+\beta^2)\beta e^{-\alpha t}}{(\alpha\cos\beta t-\beta\sin\beta t)^3}$. 12.49. $\frac{\sin t(1+3\sin^2 t)}{a^2\cos^7 t}$. 12.50. $-1/(tsh^3t)$. 12.51. $\frac{5\cos^2 t-4}{9a^2\sin^3 t\cos^7 t}$. 12.52. $\frac{3}{16a^2}\frac{\cos 2t}{\left(\sin\frac{3t}{2}\right)^3\left(\cos\frac{t}{2}\right)^5}$. 12.53. $4t^2$.

12.54. $\frac{1}{(at+b)\cos^3 t}$. 12.55. $2^{3\sin^2 t-1}$. 12.56. $-12$. 12.57. $-\frac{1}{2}$. 12.61. $-p^2/y^3$. 12.62. $4(x+y)/(x+y+1)^3$. 12.63. $-\frac{2(1+y^2)}{y^5}$. 12.64. $(e^x-e^y)(1-e^{x+y})/(1+e^y)^3$. 12.65. $\frac{111}{256}$. 12.66. $y'(0)=0,\ y''(0)$ мавжуд эмас.

12.67. $y'(0)=0,\ y''(0)=0,\ y'''(0)=1,\ y^{(IV)}(0)=0,\ y^{(V)}(0)$ мавжуд эмас. 12.68. $y'(0)=1,\ y''(0)=0,\ y'''(0)$ мавжуд эмас. 12.69. $y'(0)=0,\ y''(0)$ мавжуд эмас. 12.70. $y^{(n)}(0)=0,\ n\in N$. 12.71. $4(x+1)(5x^2-2x-1)dx^2$. 12.72.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$2(2x^3-2x^2-3x+6)e^{-2x}dx^2$. 12.73. $-8\cos 2x dx^4$. 12.74. $4096(6\sin 2x+x\cos 2x)dx^{12}$.

12.75. $\dfrac{ab(a^2-b^2)\sin 2x}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)}dx^2$. 12.76. $17\cos x ch x dx^8$. 12.77. $\dfrac{4\ln x-4-\ln^3 x}{x^2\sqrt{(\ln^2 x-4)^2}}dx^2$.

12.78. $4\ln 3\cdot 3^{-x^2}x[2x-\ln 3(2x^2\ln 3-1)]dx^3$. 12.79. $\dfrac{(u^2-v^2)(ud^2u+vd^2v)+(vdu-udv)^2}{(u^2-v^2)^{3/2}}$.

12.80. $u^v\left(\dfrac{v}{u}d^2u+\ln u d^2v+\dfrac{v(v-1)}{u^2}du^2+\dfrac{2(v\ln u+1)}{u}dudv+\ln^2 u dv^2\right)$.

12.81. $\dfrac{1}{u^3}\left(u^2d^2v-uvd^2u-2ududv+2vdu^2\right)$. 12.82. $\ln v d^2u+\dfrac{2}{v}dudv+\dfrac{u}{v}d^2v-\dfrac{u}{v^2}dv^2$.

12.83. $10edx^2$. 12.84. $4dx^3$. 12.85. $-\dfrac{5}{8}dx^2$. 12.86. $\dfrac{(-1)^n a^n n!}{b^{n+1}}dx^n$. 12.87. $\dfrac{(27)!!\sqrt{2}}{2^{25}}dx^{16}$

12.88. $-2^7\cdot 1025\sqrt{3}dx^{10}$. 12.89. $-\dfrac{1}{3}dx^2$. 12.90. $\dfrac{3}{8}dx^2$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

# 13-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБНИНГ АСОСИЙ ТЕОРЕМАЛАРИ

**13.1. Нуқтада функциянинг ўсиши (камайиши). Функциянинг локал экстремум қийматлари.** $y=f(x)$ функция бирор белгиланган $c$ нуқтанинг атрофида аниқланган бўлсин.

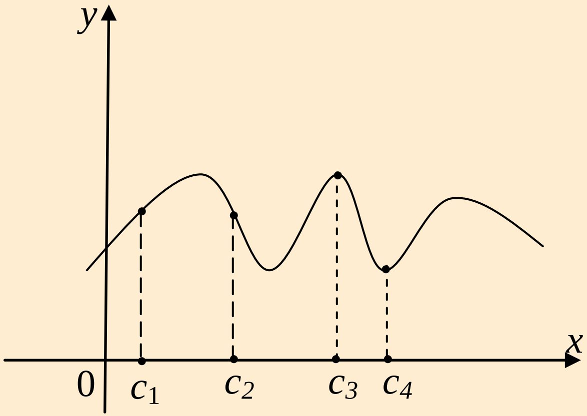
**13.1-таъриф.** Агар $c$ нуқтанинг шундай $U_\delta(c)\,(\delta>0)$ атрофи мавжуд бўлиб, $x<c$ бўлганда $f(x)<f(c)$ тенгсизлик, $x>c$ бўлганда эса, $f(x)>f(c)$ тенгсизлик ўринли бўлса, $y=f(x)$ функция $c$ *нуқтада ўсади*, дейилади.

**13.2-таъриф.** Агар $c$ нуқтанинг шундай $U_\delta(c)$ атрофи мавжуд бўлиб, $x<c$ бўлганда, $f(x)>f(c)$ тенгсизлик, $x>c$ бўлганда эса, $f(x)<f(c)$ тенгсизлик бажарилса, $y=f(x)$ функция $c$ *нуқтада камаяди* дейилади.

**13.3-таъриф.** Агар $c$ нуқтанинг шундай $U_\delta(c)$ атрофи мавжуд бўлиб, $f(c)$ қиймат, функциянинг $U_\delta(c)$ атрофдаги қийматлари ичида энг каттаси (энг кичиги) бўлса, $y=f(x)$ функция $c$ *нуқтада локал максимум (локал*

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

*минимум) га эга* дейилади.



13.1-чизма

Одатда функциянинг $c$ нуқтадаги локал максимум ва локал минимум қийматлари биргаликда локал экстремум қиймати деб юритилади.

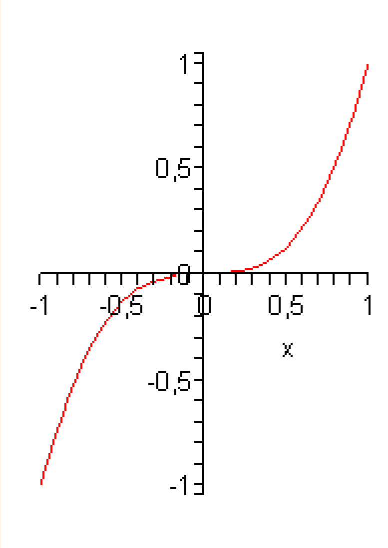
13.1-чизмада функциянинг $c_1$ нуқтада ўсувчи, $c_2$ нуқтада камаювчи, $c_3$ нуқтада локал максимумга, $c_4$ нуқтада эса? локал минимумга эга эканлиги тасвирланган (13.1- чизма).

**13.1-теорема (Функциянинг нуқтада ўсувчи, камаювчи бўлишининг етарли шарти).** Агар $y = f(x)$ функция $c$ нуқтада дифференциалланувчи бўлиб, унинг бу нуқтадаги $f^{'}(c)$ ҳосиласи мусбат (манфий) бўлса, у ҳолда бу функция $c$ нуқтада ўсувчи (камаювчи) бўлади.

**13.1-эслатма.** $y = f(x)$ функциянинг $c$ нуқтада ўсувчи (камаювчи)

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

бўлиши учун унинг шу нуқтадаги $f^{'}(c)$ ҳосиласининг мусбат (манфий) бўлиши зарурий шарт бўла олмайди. Масалан, $y = x^3$ функция $x = 0$ нуқтада ўсувчи, лекин унинг $x = 0$ нуқтадаги ҳосиласи $f^{'}(0) = 0$ (13.2-чизма).



13.2-чизма

**13.2-эслатма.** Агар функция $x_0$ нуқтада ўсувчи бўлса, унинг $x_0$ нуқтанинг бирор атрофида ўсувчи бўлиши шарт эмас. Масалан,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x=0\ , \\ \dfrac{x}{2}-x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\ . \end{cases}$$

Ҳосиланинг таърифига асосан,

$$f^{'}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{2}-x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\frac{1}{2}>0.$$

Демак, $f(x)$ функция $x=0$ нуқтада ўсувчи. Лекин, бу функция монотон эмас, чунки

$$f^{'}(x)=\frac{1}{2}-2x\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}$$

функция $x=0$ нуқтанинг ихтиёрий кичик атрофида мусбат қийматни ҳам, манфий қийматни ҳам қабул қилади: $x_k=\dfrac{1}{k\pi}$ $(k=1,2,\ldots)$ бўлиб, $k$ жуфт бўлганда $f^{'}(x)$ нинг қиймати $\dfrac{3}{2}$ га, $k$ тоқ сон бўлганда эса, $-\dfrac{1}{2}$ га тенг бўлади.

## 13.2. Ферма, Ролл, Лагранж ва Коши теоремалари.

**13.2- теорема (Ферма теоремаси).** $y=f(x)$ функция бирор $X$

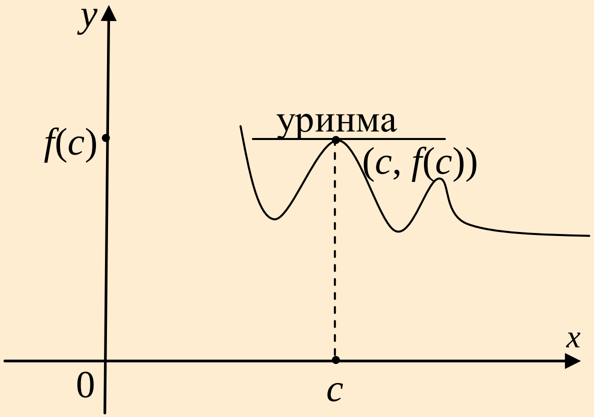
Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

оралиқда аниқланган бўлиб, бу оралиқнинг ички $c$ нуқтасида ўзининг энг катта (энг кичик) қийматига эришсин. Агар $c$ нуқтада функция чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда

$$f'(c)=0$$

бўлади.

*Ферма теоремаси содда геометрик маънога эга.* $y=f(x)$ функция Ферма теоремасининг шартларини қаноатлантирганда, $f(x)$ функциянинг графигидаги $(c, f(c))$ нуқтага ўтказилган уринма $OX$ ўқига параллел бўлади (13.3-чизма).



13.3-чизма

*Ферма теоремасининг физик маъноси қуйидагича*: тўғри чизик бўйлаб ҳаракат қилаётган заррачанинг қайтиш моменти тезлиги нолга тенг бўлади.

**13.3-эслатма.** $f'(c)=0$ шарт, функциянинг $c$ нуқтада локал

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

экстремумга эга бўлиши учун етарли шарт бўла олмайди.

Масалан, $f(x)=x^3$ функциянинг ҳосиласи $x=0$ нуқтада $f^{'}(0)=0$ бўлсада, функция $x=0$ нуқтада ўсади.

**13.3-теорема (Ролл теоремаси).** $y=f(x)$ функция $[a,b]$ да аниқланган бўлиб: 1) узлуксиз; 2) ақалли $(a,b)$ да чекли ҳосилага эга; 3) $[a,b]$ нинг четларида ўзаро тенг $(f(a)=f(b))$ қийматларни қабул қилса, у ҳолда, камида битта шундай $c$ $(a<c<b)$ нуқта топиладики, $f^{'}(c)=0$ бўлади.

*Ролл теоремасининг геометрик маъноси қуйидагича*: $y=f(x)$ функция Роль теоремасининг ҳамма шартларини қаноатлантирганда, бу функциянинг графигида шундай $(c;f(c))$ нуқта топиладики, бу нуқтада функция графигига ўтказилган уринма $Ox$ ўққа параллел бўлади (13.4-чизма).

**13.4-эслатма** Ролл теоремасида $y=f(x)$ функциядан, унинг $[a,b]$ сегментда узлуксизлиги, сегментнинг ички нуқталарида эса, унинг дифференциалланувчилиги, талаб қилинган эди. Функция сегментнинг

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

ички нуқталарида дифференциалланувчилигидан унинг шу нуқталарда узлуксизлиги келиб чиқади, шунинг учун Ролли теоремасидаги функцияга қўйилган 1) шартнинг ўрнига, $f(x)$ нинг $a$ нуқтадан ўнгда, $b$ нуқтада эса чапдан узлуксиз бўлишини талаб қилиш етарли.

**13.5-эслатма.** Ролл теоремасининг барча шартлари муҳим. Агар теоремадаги $y=f(x)$ функцияга қўйилган шартларнинг бирортаси бажарилмаса, теореманинг тасдиғи ўринли бўлмаслиги мумкин.

Масалан, $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ функция $[-1;1]$ сегментда узлуксиз бўлиб, бу функция учун $f(-1)=f(1)=0$. Лекин, бу функциянинг ҳосиласи $(-1;1)$ интервалнинг бирорта нуқтасида ҳам нолга айланмайди. Бунга сабаб, берилган функция $(-1;1)$ интервалнинг $x=0$ нуқтадан ташқари қолган ҳамма нуқталарида ҳосилага эга. $x=0$ нуқта ички нуқта бўлганлиги учун Ролл теоремасининг 3) шарти бажарилмайди. Шунинг учун берилган функцияга Ролл теоремасини қўллаб бўлмайди.

**13.4-теорема (Лагранж теоремаси).** Агар $f(x)$ функция: 1) $[a,b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз; 2) ақалли $(a,b)$ оралиқда чекли ҳосилага эга бўлса, у ҳолда шундай $c$ $(a<c<b)$ нуқта топиладики, бу нуқтада

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f^{'}(c) \qquad (13.1)$$

тенглик ўринли бўлади.

*Лагранж теоремасининг геометрик маъноси қуйидагича*: фараз қилайлик, $f(x)$ функция Лагранж теоремасининг барча шартларини қаноатлантирсин. $f(x)$ функция графигининг $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ нуқталарини тўғри чизиқ билан туташтирамиз. $f^{'}(x)$- бу $f(x)$ функция графигининг $(x, f(x))$ нуқтасидан ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентидир, яъни $\mathrm{tg}\alpha = f^{'}(x)$. Шундай $c$ $(a<c<b)$ нуқта топиладики, $f(x)$ функция графигига $(c, f(c))$ нуқтада ўтказилган уринма $AB$ тўғри чизиққа параллел бўлади (13.4-чизма). (13.1) формулани бошқача ҳам ёзиш мумкин: $\forall x_0 \in [a;b]$ нуқтани олиб, унга ихтиёрий $\Delta x$ орттирма берамиз $(x_0+\Delta x \in [a;b])$. $[x_0, x_0+\Delta]$ сегмент учун (13.1) Лагранж формуласини ёзамиз:

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta x\cdot f^{/}(c), \qquad (13.2)$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

бунда $\forall c \in (x_0, x_0 + \Delta x)$. $c = x_0 + \theta \Delta x$, $0 < \theta < 1$ деб белгиласак,

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x \cdot f'(x_0 + \theta \Delta x) \qquad (13.3)$$

Одатда (13.2) ёки (13.3) формула, чекли орттирмалар ҳақидаги *Лагранж формуласи деб юритилади.*

**13.6-эслатма.** Агар (13.1) формулада $f(a) = f(b)$ деб олинса, у ҳолда $f'(c) = 0$ $(a < c < b)$ бўлиб, Лагранж теоремасидан Ролл теоремасининг келиб чиқишини кўрамиз.

*Лагранж теоремасидан қуйидаги натижалар келиб чиқади.*

**13.1-натижа.** Агар $f(x)$ функция $(a; b)$ ораликда дифференциалланувчи ва бу ораликда $f'(c) = 0$ бўлса, у ҳолда бу ораликда $f(x)$ функция ўзгармас бўлади.

**13.2-натижа.** $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар бирор $(a; b)$ ораликда узлуксиз, бу ораликда дифференциалланувчи бўлиб, $f'(x) = g'(x)$, $x \in (a; b)$ бўлса, у ҳолда бу функцияларнинг бири иккинчисидан ўзгармас сонга фарқ қилади, яъни $f(x) = g(x) + c$.

**13.3-натижа.** $f(x)$ функция бирор $x_0$ нуқтанинг $U_\delta(x_0)$ атрофида

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

узлуксиз ва $\dot{U}_{\delta}(x_0)$ атрофда дифференциалланувчи бўлсин. Агар чекли $\lim\limits_{x\to x_0} f^{/}(x)=A$ мавжуд бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $x_0$ нуқтада дифференциалланувчи дейилади ва $f^{'}(x_0)=A$ бўлади.

**13.5-теорема (Коши теоремаси)**. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар:

1) $[a,b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин;

2) $[a,b]$да чекли $f^{'}(x)$ ва $g^{'}(x)$ ҳосилаларга эга бўлиб, $\forall x\in(a,b)$ учун $g^{/}(x)\neq 0$ бўлсин.

У ҳолда шундай $c(a<c<b)$ нуқта топиладики,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)} \qquad (13.4)$$

тенглик ўринли бўлади.

**13.7-эслатма.** (13.1) Лагранж формуласи (13.4) Коши формуласидан ( $g^{'}(x)=x$ бўлганда) келиб чиқади.

**13.8-эслатма.** (13.4) формулада $b>a$ деб олиш шарт эмас.

**13.1-мисол.** Ушбу $f(x)=3x^2-1$ функция [1; 2] сегментда Ферма теоремасининг ҳамма шартларини қаноатлантирадими?

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**Ечилиши.** Берилган функция [1; 2] сегментда монотон ўсади. Демак, у $x=1$ да энг кичик қийматини, $x=2$ да эса, энг катта қийматини қабул қилади, лекин бу нуқталар [1; 2] сегментнинг ички нуқтаси эмас. Шундай қилиб $f(x)=3x^2$-1 функция учун Ферма теоремасини қўллаб бўлмайди, яъни

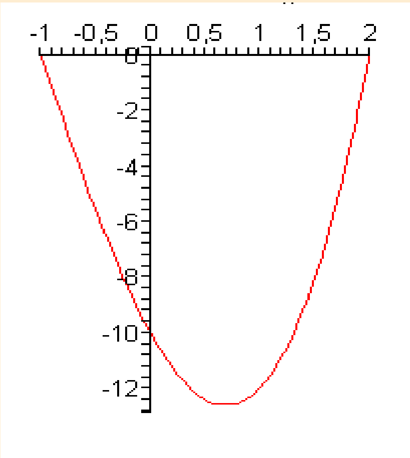
$f'(1)=f'(2)=0$ деб айтиш нотўғри бўлади, чунки $f'(1)=6$, $f'(2)=12$.

**13.2-мисол.** Қуйидаги функциялар учун кўрсатилган оралиқда Ролл теоремасининг шартларини текширинг:

$a)\ f(x)=x^3+4x^2-7x-10,\ x\in[-1;2];$ $b)\ f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0;1), \\ 0, & x=1\ ; \end{cases}$

$c)\ f(x)=|x-1|,\quad x\in[0;2];$ $d)\ f(x)=x,\ x\in[0;1].$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



13.5-чизма.

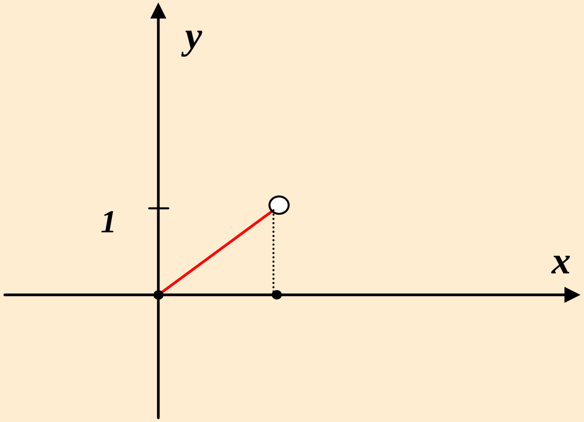
**Ечилиши.** $a$). 1) $[-1;\,2]$ кесмада $f(x)=x^3+4x^2-7x-10$ функция аниқланган ва узлуксиз; 2) $(-1;\,2)$ ораликда $f'(x)=x^2+8x-7$ чекли ҳосила мавжуд; 3) ораликнинг четки нуқталарида функция ўзаро тенг $f(-1)=f(2)$ қийматларни қабул қилади (13.5-чизма).

Демак, берилган $f(x)=x^3+4x^2-7x-10$ функция $[-1;\,2]$ ораликда Ролл теоремасининг ҳамма шартларини қаноатлантиради. У ҳолда, $f'(x)=0$ тенгламани қаноатлантирадиган $x_1=-\dfrac{4+\sqrt{47}}{3}$, $x_2=-\dfrac{-4+\sqrt{47}}{3}$ нуқталар мавжуд (13.5-чизма).

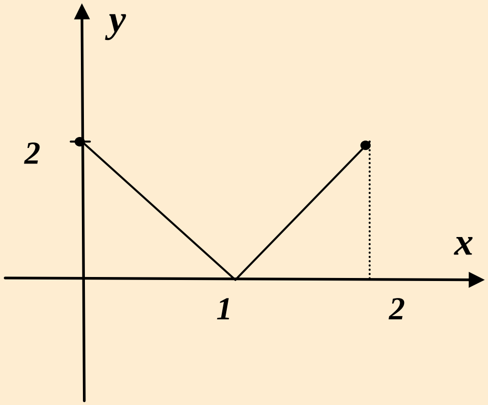
Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

*b*). Равшанки, берилган функция Ролл теоремасидаги 2) ва 3) шартларни қаноатлантиради, лекин 1) шарт бажарилмайди. Функция қаралаётган кесмада узлуксиз эмас, $x=1$ нуқтада у узилишга эга, чунки $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=1$, аммо $f(1)=0$. Демак, $(0;1)$ оралиқда $f'(c)=0$ бўладиган $x=c$ нуқта мавжуд эмас (13.6-чизма).

*c*). $[0;\,2]$ кесмада $f(x)=|x-1|$функция Ролл теоремасининг 1) ва 3) шартларини қаноатлантиради, лекин 2) шартини қаноатлантирмайди, берилган функция $x=1$ нуқтада дифференциалланувчи эмас (13.7-чизма).



**13.6-чизма.**



**13.7-чизма**

Демак, (0;2) оралиқда $f'(c)=0$ тенгламани қаноатлантирадиган $c$ нуқта

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

мавжуд эмас.

$d$). $[0;\,1]$ кесмада $f(x)=x$ функция Ролл теоремасининг 1) ва 2) шартларини қаноатлантиради, 3) шартини қаноатлантирмайди, чунки $f(0)=0,\ f(1)=1.$ Демак, $(0;\,1)$ ораликда тенгламани қаноатлантирадиган $c$ нуқта мавжуд эмас.

**13.3-мисол.** $[-2;\,0]$ кесмада $f(x)=2x^2-7$ функция Лагранж теоремасининг ҳамма шартларини қаноатлантирадими? Агар қаноатлантирса, $\left(f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)\right).$ Лагранж формуласида қатнашадиган $c$ нуқтани топинг.

**Ечилиши.** Берилган $f(x)=2x^2-7$ функция $[-2;\,0]$ кесмада узлуксиз ва $(-2;\,0)$ да чекли $f'(x)=4x$ ҳосилага эга. У ҳолда изланаётган $c$ нуқта

$$f'(c)=4c=\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}=\frac{-7-1}{2}=-4$$

бундан $c=-1.$

**13.4-мисол.** Ушбу

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

1) $\ln(1+x) < x \quad (x>0)$

2) $|\arg tgx_2 - \arg tgx_1| \le |x_2 - x_1|, \quad x_1, x_2 \in (-\infty;\infty)$

тенгсизликларни исботланг.

**Ечилиши. 1)** $[0;\, x]$ кесмада берилган $f(x)=\ln(1+x)$ функция Лагранж теоремасининг ҳамма шартларини қаноатлантиради, у ҳолда теореманинг тасдиғига кўра шундай $c(0<c<x)$ нуқта топиладики

$$f(x)-f(0)=\ln(1+x)=\frac{1}{1+c}x<x$$

бўлади, чунки $\frac{1}{1+c}<1.$

**2).** $[x_1,\, x_2]$кесмада берилган $f(x)=\operatorname{arctg} x$ функция Лагранж теоремасининг ҳамма шартларини қаноатлантиради, у ҳолда Лагранж формуласига асосан,

$$|\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1| = \left|\frac{1}{1+c^2}(x_1-x_2)\right| \le |x_2-x_1|,$$

чунки $0<\frac{1}{1+c^2}\le 1$

**13.5-мисол.** Ушбу

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$f(x)=x^2-2x+3,\qquad g(x)=x^3-7x^2+20x-5$$

функциялар $[1;\,4]$ кесмада Коши теоремасининг шартларини қаноатлантирадими? Агар қаноатлантирса, (13.4) Коши формуласида қатнашган $c$ нуқтани топинг.

**Ечилиши.** Берилган $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар ҳамма жойда узлуксиз, жумладан, $[1;\,4]$ да ҳам узлуксиз. Берилган функциялар мос равишда $(1;\,4)$ да чекли

$$f'(x)=2x-2,\quad g'(x)=3x^2-14x+20$$

ҳосилалар эга бўлиб, $x$ нинг ҳеч бир ҳақиқий қийматида $g'(x)$ функция нолга айланмайди. У ҳолда (13.4) формулага асосан,

$$\frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},\qquad \frac{11-2}{27-9}=\frac{2c-2}{3c^2-14c+20}\qquad (1<x<4),$$

Бу тенгламани $c$ га нисбатан ечиб, $c_1=2$ ва $c_2=4$ ларни топамиз. Булардан $c_1=2$ нуқта ички нуқта бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

## Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

**13.1**. Ушбу $f(x)=2x^2-1$ функция учун $[1;\,2]$ кесмада Ферма теоремасининг шартлари бажариладими?

**13.2**.Ушбу $f(x)=5\sqrt{2x+1}-x$ функция учун $[4;\,40]$ кесмада Ферма теоремасининг шартлари бажариладими?

**13.3**. Ушбу $f(x)=x\ln 5-x\ln x$ функция учун $\left[\frac{5}{3};\,2{,}5\right]$ кесмада Ферма теоремасининг шартлари бажариладими?

**13.4**. Ушбу $f(x)=\ln\sin x$ функция учун $\left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$ кесмада Ролл теоремасининг шартлари бажариладими?

**13.5**.Ушбу

1) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-3x+2}$, $[1;2]$; 2) $f(x)=4^{\sin x}$, $[0;\pi]$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

функцияларнинг кўрсатилган кесмада Ролл теоремасининг шартларини қаноатлантиришини текширинг.

**13.6.** Ушбу $f(x)=\sin x$ функция учун $[1;2]$ кесмада Ролл теоремасининг шартлари бажариладими?

**13.7**. Қуйидаги 1) $f(x)=x^3-x,\ x\in[0;\ 1];$ 2) $f(x)=\sin 2x,\ x\in[0;\ 2\pi]$

функциялар учун кўрсатилган оралиқда Ролл теоремасининг шартларини қаноатлантиришини кўрсатинг ва $f'(c)=0$ ни қаноатлантирувчи $c$ сонларни топинг.

**13.8**. Қуйидаги

1) $f(x)=x^2\ \ x\in[1;\ 2];$ 2) $f(x)=x^3,\ x\in[1;3];$ 3) $f(x)=\sqrt{1-x^2}\ \ x\in[0;1]$

функциялар учун кўрсатилган оралиқда ўрта қиймат ҳақидаги теореманинг шартларини текширинг ва теорема тасдиғини қаноатлантирувчи барча $c$ сонларни топинг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**13.9.** Ушбу $f(x)=3x^2-5$ функция $[-2;\ 0]$ кесмада Лагранж теоремасининг шартларини қаноатлантирадими? Агар қаноатлантирса, $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ Лагранж формуласидаги $c$ нуқтани топинг.

**13.10.** $f(x)=\ln x$ функцияга $[1;\ e]$ кесмада Лагранж формуласини қўлланг ва унда қатнашадиган $c$ нинг қийматини топинг.

**13.11.** $f(x)=\sin 3x$ функция учун $[x_1;x_2]$ кесмада Лагранж формуласини ёзинг.

**13.12.** $f(x)=\arcsin(2x)$ функция учун $[x_0;\ x_0+\Delta x]$ кесмада Лагранж формуласини ёзинг.

**13.13.** $f(x)=x^n$ функциянинг $[0;a]$ кесмада $(n>0;\ \ a>0)$ Лагранж теоремасининг шартларини қаноатлантиришини кўрсатинг.

**13.14.** $y=|x|$ функция учун $[0;a]$ кесмада Ролл теоремаси ўринли эмаслигини кўрсатинг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**13.15.** Агар $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x = 0$ тенглама $x = x_0$ мусбат илдизга эга бўлса, $na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0$ тенглама ҳам, мусбат, $x_0$ дан кичик илдизга эга бўлишини исботланг.

**13.16.** $x^3 - 3x + c = 0$ тенгламанинг $(0;1)$ ораликда иккита ҳар хил илдизга эга бўлмаслигини исботланг.

**13.17.** $y = x^3$ чизиқда шундай нуқтани топингки, унга ўтказилган уринма, $A(-1;1)$ ва $B(2;8)$ нуқталарни бирлаштирувчи ватарга параллел бўлсин.

Лагранж теоремасидан фойдаланиб қуйидаги тенгсизликларни исботланг:

**13.18.** $e^x > ex, \qquad x > 1.$

**18.19.** $\dfrac{a-b}{a} \le \ln\dfrac{a}{b} \le \dfrac{a-b}{b}, \quad 0 < b \le a.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**13.20.** $e^x > 1 + x, \quad x \in R.$

**13.21.** $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ .

**13.22.** $nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < n \cdot a^{n-1}(a-b), \quad n > 1, \quad a > b.$

**13.23.** $\dfrac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta} \leq \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta \leq \dfrac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}, \quad 0 < \beta \leq \alpha < \dfrac{\pi}{2}.$

**13.24**. Ушбу $f(x) = e^x, \quad g(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ функциялар учун [-3;3] кесмада Коши теоремаси ўринлими?

**13.25**. Ушбу $f(x) = x^2$ ва $g(x) = x^2$ фнкциялар учун [-1;1] кесмада Коши теоремаси ўринлими?

**13.26**. Функциянинг ўзгармаслик аломатидан фойдаланиб, элементар математикадан маълум бўлган қуйидаги формулаларни исбот қилинг:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

1) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$; 2) $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$;

3) $\arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = 2\,\mathrm{arctg}\,x, \quad 0 < x < \infty$; 4) $\arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} \pi - 2tgx, & x \geq 1, \\ 2\arg tgx, & -1 \leq x \leq x, \\ -\pi - 2arctgx, & x \leq 1. \end{cases}$

## Мустақил ечиш учун берилган мисол ва масалаларнинг жавоблари

**13.1.** Бажарилмайди. **13.2.** Бажарилади. **13.3**. Бажарилади.

**13.4**. Бажарилади. **13.6**. Бажарилади. **13.7**. 1) $c = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; 2)$c = \dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}$.

**13.8**. 1) $c = \dfrac{3}{2}$; 2)$c = \dfrac{1}{4}\sqrt{39}$; 3) $c = \dfrac{1}{4}\sqrt{2}$. **13.9**. $c = 1$. **13.10**. $c = e - 1$. **13.11**. $\sin(3x_2) - \sin(3x_1) = 3(x_2 - x_1)\cos(3c)$, $(x_1 < c < x_2)$ .**13.12**. $\arcsin[2(x_0 - \Delta x)] - \arcsin 2x_0 = \dfrac{2\Delta x}{\sqrt{1-4c^2}}$, $x_0 < c < x_0 + \Delta x$.**13.17**. $M(1;1)$.**13.24**. Ўринли эмас. **13.25**. Ўринли эмас.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

## 14-§. ЛОПИТАЛ ҚОИДАЛАРИ

Функцияларнинг лимитини ҳисоблаш жараёнида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$ кўринишидаги аниқмасликларни очиш вақтида, баъзан қийинчиликларга дуч келинади. Агар берилган функцияларнинг ҳосилалари мавжуд бўлса, улардан фойдаланганда берилган аниқмасликларни очиш енгиллашади. Одатда, ҳосилалардан фойдаланиб аниқмасликларни очиш *Лопитал қоидалари* деб аталади.

### 14.1. Лопиталнинг биринчи қоидаси $\left(\frac{0}{0}\right)$ .

Агар $x\to a$ да $f(x)\to 0,\ g(x)\to 0$ бўлса, $\frac{f(x)}{g(x)}$ нинг $x\to a$ даги лимити $\left(\frac{0}{0}\right)$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалайди. Баъзи ҳолларда, $x\to a$ да $\frac{f(x)}{g(x)}$ нисбатнинг лимитини топишга қараганда $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ нисбатнинг лимитини топиш енгил бўлади.

**14.1- теорема (Лопиталнинг биринчи қоидаси).** $f(x)$ ва $g(x)$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

функциялар $(a, b)$ да аниқланган, узлуксиз бўлиб, улар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$;

2) $(a, b)$ да чекли $f'(x)$ва $g'(x)$ ҳосилалар мавжуд ва $\forall x\in(a, b),\ g'(x)\neq 0$;

3) $\exists \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ ($A$-чекли ёки чексиз) бўлсин.

У ҳолда, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ҳам мавжуд ва

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

(14.1)

тенглик ўринли.

**14.1- эслатма.** 14.1-теореманинг 3) шарти бажарилмаганда ҳам, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ мавжуд бўлиши мумкин. Масалан, $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$, $g(x)=2^x-1$ бўлсин. Бу функциялар учун 14.1-теореманинг шартларини текширамиз:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^2\cdot\sin\frac{1}{x}=0;$ $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}(2^x-1)=0;$

2) $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$, $g'(x)=2^x\cdot\ln 2$ бўлиб, $x\to 0$да $\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{2^x\cdot\ln 2}$

нисбатнинг лимити мавжуд эмас, чунки $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ лимит мавжуд эмас.

Лекин, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{2^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\frac{2^x-1}{x}}=0.$

**14.2- эслатма.** 14.1- теоремада $f^{/}(x)$ва $g^{/}(x)$ ҳосилаларнинг $x=a$ нуқтада узлуксизлиги талаб қилинса, у ҳолда $g'(a)\neq 0$ шартда (14.1) формулани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

**14.3- эслатма.** 14.1- теорема $a=+\infty$ ёки $a=-\infty$ бўлган ҳол учун ҳам ўринли, яъни $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $c<x<\infty$ да аниқланган ва шу оралиқда дифференциалланувчи бўлиб, қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0\,, \qquad g'(x)\neq 0\,,\ \ \forall x\in(c;+\infty).$$

У ҳолда, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ мавжуд бўлса, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ҳам мавжуд бўлади ва $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ тенглик ўринли бўлади.

**14.4- эслатма.** Агар $f^{/}(x)$ва $g^{/}(x)$ функциялар 14.1-теореманинг барча шартларини қаноатлантирса, Лопитал қоидасини такрорий қўллаш мумкин, яъни

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

### 14.2. Лопиталнинг иккинчи қоидаси $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Агар $x\to a$да $f(x)\to\infty,\ g(x)\to\infty$ бўлса, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ нинг $x\to a$ даги лимити $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалайди. **Баъзи** ҳолларда, бундай аниқмасликларни очишда ҳам $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳосилаларидан фойдаланиш мақсадга мувофиқ бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**14.2- теорема (Лопиталнинг иккинчи қоидаси).** $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $(a,\ b)$ да қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ , $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$;

2) $(a,\ b)$ да чекли $f'(x)$ва $g'(x)$ ҳосилалар мавжуд ва $\forall x\in(a,\ b),\ g'(x)\neq 0$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ ($A$-чекли ёки чексиз), у ҳолда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

тенглик ўринли.

**14.5- эслатма.** Агар $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ бўлса, $f(x)\cdot g(x)$ ифода $(0\cdot\infty)$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалайди. Бу кўринишдаги аниқмасликни очишда, уни

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

каби ёзиш орқали $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ ёки $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ кўринишдаги аниқмасликларга келтирилиб, Лопитал қоидалари қўлланилади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**14.6- эслатма.** Агар $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ бўлса, $f(x)-g(x)$ ифода $(\infty-\infty)$ кўринишдаги аниқмасликни ифода қилади, уни ҳам қуйидаги

$$f(x)-g(x)=\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}\cdot\dfrac{1}{g(x)}}$$

каби ёзиш билан $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ кўринишдаги аниқмасликка келтирилади ва Лопитал қоидалари қўлланилади.

**14.7- эслатма.** Агар $x\to a$ да $f(x)$ функция $1, 0$ ва $\infty$, $g(x)$ функция эса мос равишда, $\infty$, $0$ ва $0$ га интилганда $(f(x))^{g(x)}$ – даража – кўрсаткичли ифода $(1^{\infty}),(0^{0}),(\infty^{0})$ кўринишдаги аниқмасликларни ифода қилади. Бу кўринишдаги аниқмасликларни очиш учун, аввало берилган ифода логарифмланади:

$$\ln y=g(x)\cdot\ln f(x),$$

бу ифода, $x\to a$ да $(0\cdot\infty)$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалайди, яъни юқорида ўрганилган ҳолга келтирилади.

Шундай қилиб: **1)** $(0\cdot\infty)$ ёки $(\infty-\infty)$ кўринишдаги аниқмасликлар

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

алгебраик алмаштиришлар натижасида $\left(\frac{0}{0}\right)$ ёки $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ кўринишдаги аниқмасликларга келтирилади ва уларга Лопитал қоидалари қўлланилади.

**2)** $(1^{\infty}),(0^{0}),(\infty^{0})$ кўринишдаги аниқмасликлар логарифмлаш ёки $(f(x))^{g(x)}=e^{g(x)\cdot\ln(f(x))}$ шакл ўзгартиришлар орқали $(0\cdot\infty)$ кўринишдаги аниқмасликка келтирилади, сўнгра уни $\left(\frac{0}{0}\right)$ ёки $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ кўринишдаги аниқмасликларга келтирилиб, Лопитал қоидалари қўлланилади.

**14.1- мисол.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$ лимитни ҳисобланг.

**Ечилиши.** Равшанки, $f(x)=\ln\left(x^2-3\right)$, $g(x)=x^2+3x-10$ функциялар $x\to 2$ да $f(x)=\ln\left(x^2-3\right)\to 0$, $g(x)=x^2+3x-10\to 0$. $x=2$ нуқтанинг $x=\pm\sqrt{3}$ нуқталарни ўз ичида сақламайдиган ихтиёрий кичик атрофида $f'(x)=\frac{2x}{x^2-3}$, $g'(x)=2x+3$ ҳосилалар мавжуд ва $g'(x)=2x+3\neq 0$ $\left(x>-\frac{3}{2}\right)$,

$$\lim_{x\to 2}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{x^2-3}}{2x+3}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{(x^2-3)(2x+3)}=\frac{4}{7}$$ мавжуд.

Демак, берилган лимитни ҳисоблашга Лопиталнинг биринчи

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Орқага
Тулик экран
Чикиш

қоидасини қўллаш мумкин:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{(x^2-3)(2x+3)}=\frac{4}{7}.$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> Limit(ln(x^2-3)/(x^2+3*x-10),x=2)=

limit(ln(x^2-3)/(x^2+3*x-10),x=2);
```

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}\right)=\frac{4}{7}.$$

**14.2- мисол.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{e^{ax}}$ $(a>0,\alpha>0)$ лимитни ҳисобланг.

**Ечилиши.** Бу ҳолда, $f(x)=x^\alpha, g(x)=e^{ax}$ бўлиб, улар 14.2-теореманинг барча шартларини қаноатлантиради. Шунинг учун, Лопиталнинг иккинчи қоидасига кўра,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{ax}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha\,x^{\alpha-1}}{a\,e^{ax}}=0\,,$$

чунки, $x\to+\infty$да асоси бирдан катта кўрсаткичли функция даражали функцияга қараганда тезроқ ўсади. Бу лимитни Лопитал қоидасини $k\,(k=[\alpha]+1,\ \alpha-k<0)$ марта қўллаб ҳам топиш мумкин:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{ax}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha\,x^{\alpha-1}}{a\,e^{ax}}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)\,x^{\alpha-k}}{a^{k}e^{ax}}=0$$

бўлишини топиш ҳам мумкин.

**14.3-мисол.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{x}-x}{\ln x-x+1}$ лимитни ҳисобланг.

**Ечилиши.** Бу ҳолда, $f(x)=x^{x}-x,\ g(x)=\ln x-x+1$ бўлиб, улар 14.1-теореманинг барча шартларини қаноатлантиради, жумладан, $x=1$ нуқтанинг ихтиёрий кичик атрофида

$$f'(x)=x^{x}(\ln x+1)-1\,,\qquad g'(x)=\frac{1}{x}-1$$

ҳосилалар мавжуд бўлиб, $g'(x)=\dfrac{1}{x}-1\neq0\ \ (x\neq1)$. Лекин, $f^{/}(x)$ ва $g^{/}(x)$ функциялар ҳам ўз навбатида $x=1$ нуқтанинг кичик атрофида **14.1**-теореманинг барча шартларини қаноатлантиради. Шунинг учун, берилган лимитни ҳисоблашга Лопиталнинг биринчи қоидасини икки марта қўллаймиз:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{x}-x}{\ln x-x+1}=\lim_{x\to1}\frac{x^{x+1}(\ln x+1)-x}{1-x}=\lim_{x\to1}\left[1-x^{x+1}(\ln x+1)\left(1+\frac{1}{x}+\ln x\right)-x^{x}\right]=-2.$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

```
> Limit(((x)^x-x)/(ln(x)-x+1),x=1)=

limit(((x)^x-x)/(ln(x)-x+1),x=1);
```

$$\lim_{x\to}\left(\frac{x^x-x}{\ln(x)-x+1}\right)=-2.$$

**14.4- мисол.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^n x}{x^a}$ $(a>0,\ n>0)$ лимитни ҳисобланг.

**Ечилиши.** $\ln x=t,\ x=e^t$ алмаштиришни олиб, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^n x}{x^a}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{t^n}{e^{at}}=0$ бўлишини топамиз (14.2-мисолга қаранг).

**14.5-мисол.** $\lim\limits_{x\to0+0}x^\alpha\ln^\beta\left(\frac{1}{x}\right)$ $(\alpha>0,\quad \beta>0)$ лимитни ҳисобланг.

**Ечилиши.** Бу ҳолда $\lim\limits_{x\to0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to0+0}x^\alpha=0,$ $\lim\limits_{x\to0+0}g(x)=\lim\limits_{x\to0+0}\ln^\beta\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty.$ Демак, берилган ифоданинг $x\to0+0$ даги лимити $(0\cdot\infty)$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалайди. Бу аниқмасликни очиш учун, уни $\left(\frac{0}{0}\right)$ ёки $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ кўринишдаги аниқмасликка келтириб, Лопиталнинг биринчи қоидасини қўллашда, соддалик учун, $\ln\frac{1}{x}=t,\ x=e^{-t}$ алмаштиришни бажариб, берилган

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

ифоданинг лимити

$$\lim_{x\to 0+0} x^{\alpha}\cdot \ln^{\beta}\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to +\infty}\frac{t^{\beta}}{e^{\alpha t}}=0$$

топамиз (14.2-мисолга қаранг).

**14.6 – мисол.** $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(1+\sin^2 x)\cdot ctg(\ln^2(1+x))]$ лимитни ҳисобланг.

**Ечилиши.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+\sin^2 x)=0,$ $\lim\limits_{x\to 0} ctg\ \ln^2(1+x)=\infty.$ Берилган ифоданинг лимити $(0\cdot\infty)$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалайди. Бу аниқмасликни очиш учун берилган ифоданинг шаклини ўзгартириб, уни $\left(\frac{0}{0}\right)$ кўринишдаги аниқмасликка келтириб, кейин Лопиталнинг биринчи қоидасини такрорий қўллаймиз:

$$\lim_{x\to 0}[\ln(1+\sin^2 x)\cdot ctg\,\ln^2(1+x)]\overset{(0\cdot\infty)}{=}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{tg\,\ln^2(1+x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+\sin^2 x}\sin 2x}{2[1+tg^2\ln^2(1+x)]\cdot\ln(1+x)\cdot\dfrac{1}{1+x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2\cdot\ln(1+x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{\dfrac{1}{1+x}}=1.$$

**14.7- мисол.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$ лимитни ҳисобланг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**Ечилиши.** Берилган функция $x=0$ нуқтада $(\infty-\infty)$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалайди. Бу аниқмасликни $\left(\frac{0}{0}\right)$ кўринишдаги аниқмасликка келтириб, сўнгра Лопиталнинг биринчи қоидасини такрорий қўллаб,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0$$

бўлишини топамиз.

**14.8- мисол.** Ушбу

$$1)\ \lim_{x\to 0+0}(1+x)^{\ln x};\quad 2)\ \lim_{x\to 0}(\mathrm{ctg}x)^{\sin x};\quad 3)\ \lim_{x\to +0}[\arcsin(\ln x)]^{tgx}$$

лимитларни ҳисобланг

**Ечилиши.** 1) $y=(1+x)^{\ln x}$ функция $x=0$ нуқтада $(1^{\infty})$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалайди. Бу аниқмасликни очиш учун аввало, берилган функцияни логарифмлаб, $(0\cdot\infty)$ кўринишдаги аниқмасликка келтирамиз:

$$\lim_{x\to 0+0}\ln y=\lim_{x\to +0}\ln x\ln(1+x).$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Буни шакл алмаштириш натижасида $\left(\frac{0}{0}\right)$ кўринишдаги аникмасликка келтирамиз ва Лопиталнинг биринчи қоидасини қўллаймиз:

$$\lim_{x\to0+0}\ln y=\lim_{x\to0+0}\frac{\ln(1+x)}{\frac{1}{\ln x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}-\lim_{x\to0+0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln^2 x}}=-\lim_{x\to0+0}\frac{x\cdot\ln^2 x^{(0\cdot\infty)}}{1+x}==\lim_{x\to0+0}\frac{1}{1+x}\cdot x\ln^2 x=$$

$$=\lim_{x\to0+0}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to0+0}\frac{2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-2\lim_{x\to0+0}x\ln x\overset{(0\cdot\infty)}{=}-2\lim_{x\to0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}2\lim_{x\to0+0}x^2=0.$$

Демак, $\lim\limits_{x\to0+0} y=e^0=1.$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> Limit((1+x)^(ln(x)),x=0,right)=
limit((1+x)^(ln(x)),x=0,right);
```

$$\lim_{x\to0+}(1+x)^{\ln(x)}=1.$$

2) Берилган $y=(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$ функция $x=0$ нуктада $(\infty^0)$ кўринишдаги аникмасликни ифодалайди. $y=(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}=e^{\sin x\cdot\ln(\operatorname{ctg}x)}$ айниятдан фойдаланиб,

$$\lim_{x\to0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}=\lim_{x\to0}e^{\sin x\ln\operatorname{ct}gx}=e^{\lim\limits_{x\to0}\sin x\ln\operatorname{ctg}x}\quad.\qquad(*)$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

бўлишини топамиз. Сўнгра, (*) нинг ўнг томонидаги кўрсаткичли функциянинг лимитини ҳисоблаймиз:

$$\lim_{x\to0}\sin x\ln\operatorname{ctg}x=\lim_{x\to0}\frac{\ln\operatorname{ctg}x}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\operatorname{ctg}x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\operatorname{ctg}x\cdot\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos^2 x}=0.$$

Буни ҳисобга олсак, (*) дан

$$\lim_{x\to0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}=e^0=1$$

бўлади.

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> Limit((ctan(x))^(sin(x)),x=0)=
limit((ctan(x))^(sin(x)),x=0);
```

$$\lim_{x\to0}(c\tan(\mathrm{x}))^{\sin(x)}=1.$$

3) Бу ҳолда берилган функция $x=0$ нуктада $\left(0^0\right)$ кўринишдаги аникмасликни ифодалайди. Энди

$$[\arcsin x]^{\operatorname{tg}x}=e^{\operatorname{tg}x\cdot\ln(\arcsin x)}$$

айниятга асосан, $\lim_{x\to0+0}(\arcsin x)^{tgx}=e^{\lim_{x\to0+0}tgx\cdot\ln(\arcsin x)}$ бўлади. Охирги тенгликнинг

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

ўнг томонидаги кўрсаткичли функциянинг лимитини ҳисоблаймиз:

$$\lim_{x\to 0+0} \operatorname{tg} x \cdot \ln(\arcsin x) \overset{(0\cdot\infty)}{=} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln(\arcsin x)}{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\dfrac{1}{\arcsin x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}} = .$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin^2 x}{\arcsin x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin 2x}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = 0.$$

Шундай қилиб, $\lim\limits_{x\to 0+0} (\arcsin x)^{\sin x} = e^0 = 1.$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> Limit((arcsin((x)))^tan(x),x=0,right)=

limit((arcsin((x)))^tan(x),x=0,right);
```

$$\lim_{x\to 0+} [\arcsin(x)]^{\tan(x)} = 1.$$

**14.9-мисол.** Ушбу

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot \sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}; \qquad 2)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\sec x}$$

лимитларни ҳисоблашга Лопитал қоидаларини қўллаш мумкинми?

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Орқага
Тулик экран
Чикиш

**Ечилиши.** 1) Бу ҳолда, $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, $g(x)=\sin x$. $\frac{f(x)}{g(x)}$ нисбатнинг $x\to0$ даги лимити мавжуд ва у  0 га тенг. Ҳақиқатан ҳам,

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\cdot\lim_{x\to0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=1\cdot0=0.$$

$\frac{f'(x)}{g'(x)}$ нинг $x\to0$ даги лимити мавжуд эмас:

$$\lim_{x\to0}\frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos x}=\frac{\lim\limits_{x\to0}2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\lim\limits_{x\to0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to0}\cos x}=0-\lim_{x\to0}\cos\frac{1}{x},$$

бунда $\lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$ мавжуд эмас. Демак, бу ҳолда Лопитал қоидасини қўллаш мумкин эмас.

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

**> Limit((x^2)*sin(1/x)/sin(x),x=0)=**

**limit((x^2)*sin(1/x)/sin(x),x=0);**

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}\right)=0\cdot$$

2) Бу ҳолда $f(x)=\mathrm{tg}\,x,\quad g(x)=\sec x$ бўлиб, $\frac{f(x)}{g(x)}$ нисбатнинг $x\to\frac{\pi}{2}$ даги лимити мавжуд:

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sec x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1.$ Лекин Лопитал қоидасини қўллаш билан мақсадга эришиб бўлмайди:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sec x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^{2}x}{\sec x\cdot\mathrm{tg}\,x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x}{\mathrm{tg}\,x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sec x}=\ldots$$

## Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

Лопитал қоидаларидан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг лимитини ҳисобланг

**14.1.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^{2}+5x-8}{4x^{2}+3x-7}$. **14.2.** $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\ln(x^{2}-15)}{3x^{2}-10x-8}$. **14.3.**

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\ln(1+x)}$.

**14.4.** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$.

**14.5.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$.

**14.6.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$.

**14.7.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{1/x^2}-1}{\operatorname{arctg}x^2-\pi}$.

**14.8.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 5x}$.

**14.9.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a^{\ln x}-x}{\ln x}$.

**14.10.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$.

**14.11.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\operatorname{ctg}x-1}{x^2}$.

**14.12.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax-\sin bx}{\operatorname{sh}ax-\operatorname{sh}bx}$.

**14.13.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\operatorname{tg}4x-12\operatorname{tg}x}{3\sin 4x-12\sin x}$.

**14.14.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{\alpha}-1}{x^{\beta}-1},\ \beta\neq0.$

**14.15.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$.

**14.16.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^m}{e^{ax}},\ a>0.$

**14.17.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

**14.18.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-4\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)}{1-x^2}$.

**14.19.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-b^x}{x\sqrt{1-x^2}}$.

**14.20.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

**14.21.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**14.22.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x\ln(x-a)}{\ln\left(e^x-e^a\right)}$.  **14.23.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\cdot\sin x^2}$.

**14.24.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$.

**14.25.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$.  **14.26.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^a-a^a}{x^a-a^a}$.  **14.27.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{\operatorname{tg}^2 x}$.

**14.28.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arc}osx\right)}{\ln(1+x)}$.  **14.29.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-1}{\ln x}$.  **14.30.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cos x}$.

**14.31.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^n\cdot e^{-x}\right)$.  **14.32.** $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.  **14.33.** $\lim\limits_{x\to a}\arcsin(x-a)\cdot\operatorname{ctg}(x-a)$.

**14.34.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\cdot\sin\frac{\alpha}{x}\right]$.  **14.35.** $\lim\limits_{x\to 0+0}x^\alpha\ln^\beta\left(\frac{1}{x}\right)$, $\alpha>0,\ \beta>0$.

**14.36.** $\lim\limits_{\varphi\to\alpha}\left[\left(\alpha^2-\varphi^2\right)\operatorname{tg}\frac{\pi\varphi}{2\alpha}\right]$. **14.37.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\alpha^{\frac{1}{x}}-1\right)x$, $(\alpha>0)$. **14.38.** $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(x^x-1\right)\ln x$.

**14.39.** $\lim\limits_{x\to\infty}x^\alpha a^x$, $a>0$, $a\neq 1$. **14.40.** $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)$. **14.41.**

$\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right]$.  **14.42.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right)$ .**14.43.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right]$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**14.44.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right]$. **14.45.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$. **14.46.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

**14.47.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$. **14.48.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$. **14.49.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\alpha}{1-x^{\alpha}}-\dfrac{\beta}{1-x^{\beta}}\right)$.

**14.50.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$. **14.51.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$.

**14.52.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$. **14.53.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

**14.54.** $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$. **14.55.** $\lim\limits_{x\to 0+0}|\ln x|^{2x}$. **14.56.** $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}}$.

**14.57.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$. **14.58.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$. **14.59.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

**14.60.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$. **14.61.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^{x}$. **14.62.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$.

**14.63.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg} x)^{\cos x}$. **14.64.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(3x^2+3x\right)^{\frac{1}{x}}$. **14.65.** $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\frac{1}{\ln shx}}$.

**14.66.** $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{x^x-1}$. **14.67.** $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**14.68.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}$.

**14.69.** $\lim\limits_{x\to 0+0}(\arcsin x)^{tgx}$.

**14.70.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{x^x}-1\right)$.

**14.71** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch} x}-\sqrt[n]{\operatorname{ch} x}}$.

**14.72** $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$.

**14.73.** $\lim\limits_{x\to 0+0}\left[(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1})\frac{\ln\left(e^x+x\right)}{x}\right]$.

**14.74.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\arcsin x}\right)$.

**14.75.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2}-\frac{1}{x}\right]$.

**14.76.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{5}{2+\sqrt{9+x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

**14.77.** $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{e^{1/x^2}-1}{2\operatorname{arctg} x^2-\pi}$.

**14.78.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sh^2 x}{\ln(ch3x)}$.

**14.79.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{1-x}\right)$.

**14.80.** $\lim\limits_{x\to 0+0}\left[(x+\alpha)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+\alpha}}\right]$.

**14.81.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+\frac{x^2}{2}-\sin x}{\operatorname{arctg}^3 x}$.

**14.82.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

**14.83.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**14.84.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\pi x-1}{2x^2}+\frac{\pi}{x(e^{2\pi\cdot x}-1)}\right]$. **14.85.** $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{\alpha}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2\alpha}}$.

**14.86.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(2\sqrt{x}+x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$. **14.87.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$. **14.88.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

**14.89.** Қуйидаги лимитларни Лопитал қоидаси бўйича ҳисоблаш мумкин эмаслигини кўрсатинг ва уларнинг лимитини ҳисобланг:

1). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3\sin(1/x)}{\sin^2 x}$; 2). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x-\cos x}$ .

**14.90.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+2x+\sin 2x}{(2x+\sin 2x)e^{\sin x}}$ лимитни ҳисоблашга Лопитал қоидасини қўллаш мумкинми, агар лимит мавжуд бўлса, уни ҳисобланг.

## Мустақил ечиш учун берилган мисол ва масалаларнинг жавоблари

14.1. $1$. 14.2. $\frac{4}{7}$. 17. 3. $3a$. 14.4. $\frac{4}{9}$. 17. 5. $1$. 14.6. $1$.14.7. $0$. 14.8. $\frac{4}{25}$. 14.9. $\ln a-1$. 14.10. $2$. 14.11. $-\frac{1}{3}$.14.12. $1$. 14.13. $-2$. 14.14. $\frac{\alpha}{\beta}$. 14.15. $0$. 14.16. $0$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

7.17. 2. 14.18. $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. 14.19. $\ln\frac{a}{b}$. 14.20. 2. 14.21. $\frac{\ln\frac{a}{b}}{\ln\frac{c}{d}}$. 14.22. $\cos a$. 14.23. $\frac{1}{2}$.

14.24. 1. 14.25. $\frac{1}{6}\ln a$. 14.26. $1-\ln a$. 14.27. $-\frac{1}{2}$. 14.28. $-\frac{2}{\pi}$. 14.29. 1. 14.30. 2.

14.31. 0. 14.32. $\frac{2}{\pi}$. 14.33. 1. 14.34. $a$. 14.35. 0. 14.36. $\frac{4a^2}{\pi}$. 14.37. $\ln a$.

14.38. 0. 14.39. 0, agar $0<a<1$, $\alpha$-ixtiyoriy bo'lganda, $+\infty$, agar $a>1$, $\alpha$-ixtiyoriy bo'lganda . 14.40. $-\frac{2}{\pi}$. 14.41. $-1$. 14.42. 0. 14.43. 1. 14.44. $\frac{1}{2}$. 14.45. $\frac{1}{2}$. 14.46. $\frac{2}{3}$. 14.47. $-\frac{1}{3}$. 14.48. 0. 14.49. $\frac{\alpha-\beta}{2}$. 14.50. $\frac{1}{2}$. 14.51. 0. 14.52. $-\frac{1}{2}$.

14.53. 1. 14.54. $e^{-1}$. 14.55. 1. 14.56. $e$. 14.57. 1. 14.58. $e^{-\frac{1}{2}}$. 14.59. $e^{-1}$. 14.60. $e^{2}$.

14.61. $e^{-\frac{2}{\pi}}$. 14.62. 1. 14.63. 1. 14.64. 3. 14.65. $e$. 14.66. 1. 14.67. 1. 14.68. $e^{-\frac{2}{\pi}}$.

14.69. 1. 14.70. $-1$. 14.71. $\frac{mn}{n-m}$. 14.72. 0. 14.73. $-\frac{1}{6}$. 14.74. 0. 14.75. $\frac{1}{2}$. 14.76. $e^{-\frac{1}{30}}$. 14.77. $-\frac{1}{2}$. 14.78. $\frac{2}{9}$. 14.79. 0. 14.80. $a$ .17. 81. $\frac{1}{2}$. 14.82. $\frac{1}{2}$. 14.83. $-1$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

14.84. $\frac{\pi^2}{6}$. 14.85. $e^{-\frac{2}{\pi}}$. 14.86. $\sqrt{e}$. 14.87. 1. 14.88. 2. 14.90. Лопитал қоидасини қўллаш мумкин эмас, лимит мавжуд эмас.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

## 15-§.ТЕЙЛОР ФОРМУЛАСИ

**15.1. Тейлор теоремаси.** Табиатда кўпгина масалалар функциянинг берилган нуқтадаги қийматини топишга боғлиқ бўлади. Функция мураккаб бўлган ҳолларда функциянинг берилган нуқтадаги қийматини ҳисоблаш ҳар доим ҳам енгил бўлавермайди. Бундай ҳолларда, нуқтадаги қийматини ҳисоблаш ноқулай бўлган функцияни, ўзига қараганда содда ва ҳисоблаш учун қулай бўлган функцияга яқинлаштириш-алмаштиришга тўғри келади. Берилган $f(x)$ функцияни бирор $g(x)$ функцияга яқинлаштириш-алмаштиришда қуйидаги икки моментни эътиборга олиш муҳимдир:

1) $f(x)$ га яқинлашадиган $g(x)$ функциянинг танлаб олиниши ва унинг тузилиши (соддалиги, ҳисоблаш учун қулайлиги);

2) $f(x)$ ни $g(x)$ га яқинлаштиришдаги қўйилган хатоликни аниқлаш ва уни ҳисоблаш.

Одатда яқинлашадиган функция сифатида бутун рационал $P_n(x)$ кўпҳад олинади.

1885 йилда буюк немис математиги К.Вейерштрасс $[a,b]$ кесмада

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

узлуксиз бўлган $f(x)$ функцияни $P_n(x)$ кўпхад билан яқинлаштириш мумкинлиги ҳақидаги теоремани исбот қилади, лекин бу теорема $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$ айирмани баҳолашни ва унинг нолга интилиш тартибини аниқлаб бермайди. Кейинги йиллардаги илмий изланишлар $R_n(x)$ нинг нолга интилиш тартиби яқинлаштириладиган $f(x)$ функциянинг ҳосилаларга эга бўлишига боғлиқ эканлигини кўрсатди.

$f(x)$ функция бирор $x_0$ нуқтанинг атрофида юқори тартибли ҳосилаларга эга бўлса, бу ҳосилалардан фойдаланиб, аввало $P_n(x)$ кўп ҳадни тузиш ва $f(x)$ функцияни бу кўп ҳад билан яқинлаштириш масаласини қараш мумкин бўлади. Бу масалани ечишда Тейлор формуласи муҳим рол ўйнайди.

**15.1- теорема (Тейлор).** $f(x)$ функция бирор $a$ нуқтанинг атрофида $n+1$ тартибгача ҳосилаларга эга, $x$ - функция аргументининг $a$ нуқтанинг атрофидаги ихтиёрий қиймати, $p$ – ихтиёрий мусбат сон бўлсин. У ҳолда $a$ ва $x$ нуқталар орасида шундай $\xi$ нуқта топиладики, бу нуқтада

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n+1}(x) \quad (15.1)$$

формула ўринли бўлади, бунда

$$R_{n+1}(x)=\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^{p}\cdot\frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!\,p}\cdot f^{(n+1)}(\xi).$$

(15.2)

(15.1) формулага *Тейлор формуласи* дейилади, $R_{n+1}(x)$ ифода эса, *Тейлор формуласининг қолдиқ ҳади* дейилади. Одатда, (15.2) кўринишдаги қолдиқ ҳад *умумий ёки Шлёмильх-Рош кўринишдаги қолдиқ ҳад* деб ҳам юритилади.

Тейлор формуласидан кенгроқ фойдаланиш мақсадида, унинг қолдиқ ҳадининг умумий кўриниши (15.2) дан хусусий ҳолда келиб чиқадиган қуйидаги турли хил кўринишларини келтирамиз:

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\;f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)],\quad 0<\theta<1,$$

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-a)^{n+1}\cdot(1-\theta)^{n}}{n!}\cdot f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)],\ 0<\theta<1,$$

$$R_{n+1}(x)=o\left((x-a)^{n}\right) \qquad .$$

(15.3)

Қолдиқ ҳаднинг бу кўринишлари, мос равишда, қолдиқ ҳаднинг *Лагранж, Коши ва Пеано кўринишлари* дейилади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**15.1-эслатма.** Пеано кўринишидаги қолдиқ ҳадни келтириб чиқаришда 15.1-теоремадаги $f(x)$ функцияга нисбатан қуйилган шартни «енгиллаштириш» мумкин, яъни, $f(x)$ функция $a$ нуқтанинг атрофида $f'(x), f''(x),...., f^{(n)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлиб, $f^{(n)}(x)$ ҳосила эса $a$ нуқтада узлуксиз бўлсин, деган шарт етарли.

Ечилаётган масаланинг хусусиятига қараб, у ёки бу кўринишдаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласидан фойдаланилади. Масалан, $a$ нуқта атрофидаги $x(x \neq a)$ нуқталарда $f(x)$ функциянинг қийматларини ҳисоблаш керак бўлганда, Коши ёки Лагранж кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласидан фойдаланилган маъқул. Агар $x \to a$ да қолдиқ ҳаднинг нолга интилиш тартибини билиш лозим бўлса, у ҳолда Пеано кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласидан фойдаланиш қулай бўлади.

*f(x)* функциянинг (15.1) Тейлор формуласида *a=0* деб олинса, ушбу

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x) \qquad (*)$$

формула ҳосил бўлади. Одатда бу формула *Маклерон формуласи* дейилади. Бу ҳолда қолдиқ ҳад $R_{n+1}(x)$ қуйидагича:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

1) *Лагранж кўринишида*: $R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$, $(0<\theta<1)$ ;

2) *Коши кўринишида*: $R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\theta x)$, $(0<\theta<1)$ ;

3) *Пеано кўринишида*: $R_{n+1}(x)=o(x^n)$

каби ёзилиши мумкин.

Кўп ҳолларда, (15.1) Тейлор формуласи қуйидаги кўринишда ҳам ёзилади: (15.1) формулада $a=x_0$, $x-a=\Delta x$, қолдиқ ҳад Лагранж кўринишида олинса,

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n+$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)}{(n+1)!}\cdot(\Delta x)^{n+1}\quad(0<\theta<1)\qquad(18.4)$$

формула ҳосил бўлади. (15.4) Тейлор формуласи чекли орттирмалар ҳақидаги Лагранж формуласининг умумлашмаси бўлиб ҳисобланади (16-§ га қ.). Хусусий ҳолда, (15.4) да $n=0$ деб олсак Лагранж формуласи келиб чиқади.

Ихтиёрий функция учун Лагранж кўринишидаги қолдиқ ҳадли Маклорен формуласини қараймиз ва унинг қолдиқ ҳадини баҳолаймиз.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Агар шундай ўзгармас $M$ сон мавжуд бўлиб, аргумент $x$ нинг $x_0=0$ нуқта атрофидаги барча қийматларида ҳамда $\forall n \in N$ учун

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда

$$\left|R_{n+1}(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)\, x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq M \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. $x$ нинг ҳар бир белгиланган қийматида

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда $n$ нинг етарли катта қийматларида $R_{n+1}(x)$ нинг етарли кичик бўлишига ишонч ҳосил қиламиз. Бу ҳолда $x_0 = 0$ нуқтанинг атрофида $f(x)$ функцияни

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

кўп ҳад билан тақрибий алмаштириш мумкин бўлади:

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

*f(x)* функция $x_0 = 0$ нуқтанинг атрофида исталган тартибдаги ҳосилага эга (чексиз дифференциалланувчи) бўлганда:

*a*) агар *f(x)* – жуфт бўлса, у ҳолда $\forall n \in N$ учун

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + R_{2n+1}(x)\,;$$

*b*) агар *f(x)* – тоқ бўлса, у ҳолда $\forall n \in N$ учун

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k+1)}}{(2k+1)!} x^{2k+1} + R_{2n+2}(x)$$

бўлади.

## 15.2. Элементар функциялар учун Маклорен формуласи.

$$f(x) = e^x, \quad f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos x, \quad f(x) = shx, \quad f(x) = chx,$$

$$f(x) = (1+x)^m, \qquad f(x) = \ln(1+x)$$

функциялар учун Пеано кўринишидаги қолдиқ ҳадли Маклорен формуласи қуйидагича бўлади:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^{2}}{2!} + \ldots + \frac{x^{n}}{n!} + o(x^{n}), \tag{15.5}$$

$$\sin x = x - \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{5}}{5!} - \ldots. + \frac{(-1)^{n} x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \tag{15.6}$$

$$\mathrm{sh}\, x = x + \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{5}}{5!} + \ldots. + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \tag{15.7}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{4}}{4!} + \ldots. + (-1)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \tag{15.8}$$

$$\mathrm{ch} x = 1 + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{4}}{4!} + \ldots. + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$(1+x)^{m} = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^{2} + \ldots. + \frac{m(m-1)\ldots.(m-(n-1))}{n!} x^{n} + o(x^{n}), \tag{15.9}$$

ёки

$$(1+x)^{m} = \sum_{k=0}^{n} C_{\alpha}^{k} x^{k} + 0(x^{n}), \quad C_{\alpha}^{0} = 1, C_{\alpha}^{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots.(\alpha-(k-1))}{k!}, \quad k = 1,2,\ldots$$

Хусусий ҳолда,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+o(x^n)\,, \qquad (15.10)$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n)\,,$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+o(x^n) \qquad (15.11)$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+o(x^n)\,. \qquad (15.12)$$

$$tgx=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+o(x^{11}).$$

$$a^x=1+(\ln a)x+\frac{1}{2!}(\ln a)^2x^2+\ldots+\frac{1}{n!}(\ln a)^n x^n+o\left(x^{n+1}\right),\ \ a>0,\ \ a\neq 1.$$

Агар

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n), \qquad g(x)=\sum_{k=0}^{n}b_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$$

бўлса,

$$f(x)+g(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)x^k+o((x-x_0)^n), \qquad (15.13)$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$f(x)\cdot g(x)=\sum_{k=0}^{n}C_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n), \qquad (15.14)$$

бунда $C_k=\sum\limits_{p=0}^{k}a_p b_{k-p}$.

**15.1-мисол.** Ушбу f(x)=arctgx функцияни $o\left(x^n\right)$ ҳадгача Маклорен формуласига ёйинг:

**Ечилиши.** Маълумки,

$$f^{(n)}(x)=\frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}}\cdot\sin\left[n(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2})\right],$$

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n \text{ жуфт бўлганда},\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!, & n \text{ ток бўлганда}.\end{cases}$$

Демак, Пеано кўринишидаги қолдиқ ҳадли (*) Маклорен формуласига асосан,

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n}+o(x^n) \qquad (15.15)$$

**15.2-мисол.** Ушбу

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$f(x)=\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}$$

функцияни $o\left(x^3\right)$ ҳадгача Маклорен формуласига ёйинг.

**Ечилиши.** $f_1(x)=\sqrt{1-2x+x^3}$ , $f_2(x)=\sqrt[3]{1-3x+x^2}$ деб белгилаб, (15.9) формулага асосан:

1) $m=\frac{1}{2}$ бўлган ҳолда,

$$f_1(x)=[1-(2x-x^3)]^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}(2x-x^3)-\frac{1}{8}(2x-x^3)^2-\frac{1}{16}(2x-x^3)^3+o(x^3),$$

2) $m=\frac{1}{3}$ бўлган ҳолда,

$$f_2(x)=\sqrt[3]{1-3x+x^2}=[1-(3x-x^2)]^{\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{3}(3x-x^2)-\frac{1}{9}(3x-x^2)^2-\frac{5}{81}(3x-x^2)^3+o(x^3)$$

ифодаларга эга бўламиз.

Шундай қилиб, (18.3) формулага асосан

$$f(x)=f_1(x)-f_2(x)=\frac{1}{6}x^2+x^3+o(x^3).$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> Order:=6;
```

```
Order := 6
```

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

```
> series(sqrt(1-2*x+x^3)-surd(1-3*x+x^2,3),x=0);
```

$$\frac{1}{6}x^2+x^3+\frac{119}{72}x^4+\frac{239}{72}x^5+O(x^6)$$

.

**15.3-мисол.** Ушбу $f(x)=e^{2x+3x^2}$ функцияни $o(x^3)$ гача Маклорен формуласига ёйинг.

**Ечилиши.** (15.5) формулага асосан:

$$e^{2x+3x^2}=1+\frac{(2x+3x^2)}{1!}+\frac{(2x+3x^2)^2}{2!}+\frac{(2x+3x^2)^3}{3!}+o(x^3)=1+2x+5x^2+\frac{22}{3}x^3+o(x^3).$$ ни

ҳосил қиламиз.

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> Order:=6;
```

$$Order:=6$$

```
> series(exp(2*x+3*x^2),x=0);
```

$$1+2x+5x^2+\frac{22}{3}x^3+\frac{67}{6}x^4+\frac{199}{15}x^5+O(x^6)$$

**15.4-мисол.** Ушбу

$$1)\ f(x)=\frac{1}{3x+4};\quad 2)\ f(x)=\ln(2+3x);\quad 3)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$$

функцияларни $o(x^n)$ ҳадгача Маклорен формуласига ёйинг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**Ечилиши. 1)** Берилган $\frac{1}{3x+4}$ функцияни $\frac{1}{3x+4}=\frac{1}{3\left(1+\frac{4}{3}x\right)}$ каби тасвирлаб, (15.10) формулани эътиборга олган ҳолда,

$$\frac{1}{3x+4}=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{4}{3}\right)^k\cdot x^k+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{4^k}{3^{k+1}}\cdot x^k+o(x^n)$$

ёйилмага эга бўламиз.

**2)** Ушбу $\ln(2+3x)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{3}{2}x\right)$ тенгликдан ҳамда (15.11) формуладан

$$\ln(2+3x)=\ln 2+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^k\cdot x^k+o(x^n)$$

ёйилмага эга бўламиз.

**3)** Берилган функцияни $\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}=(1+(-1)x)^{-\frac{1}{3}}$ каби тасвирлаб, (15.9) формуладан, $m=-\frac{1}{3}$ бўлганда $\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}=1+\sum_{k=1}^{n}C^k_{-\frac{1}{3}}\cdot x^k+o(x^n)$ ёйилмани топамиз, бунда

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$C_{-\frac{1}{3}}^{k}=\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(-1/3-1)\ldots(-1/3-(k-1))}{k!}=(-1)^{k}\cdot\frac{(3k-2)!}{3^{k}\cdot k!}$$

**15.5-мисол.** Ушбу

1) $f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{2}x}$; 2) $f(x)=e^{3x}\cdot\ln(1-x)$, $n=4$

функцияларни $o\left(x^{n}\right)$ аниқликда Маклорен формуласига ёйинг.

**Ечилиши.** **1)** Аввало, берилган $f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{2}x}$ функцияни $f(x)=xe^{\frac{x}{2}}+2e^{\frac{x}{2}}$ кўринишда ёзиб, сўнгра (15.5) ва (15.13) формулалардан фойдаланиб, ҳамда

$$f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{2}}=\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\cdot x^{k}}{k!}+o(x^{n-1})+2\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\cdot x^{k}}{k!}+o(x^{n})=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\cdot x^{k+1}}{k!}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\cdot x^{k}}{k!}+o(x^{n}),\quad \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\cdot x^{k+1}}{k!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{(k-1)!}x^{k};$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k}x^{k}}{k!}=2+\sum_{k=1}^{n}\frac{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k}x^{k}}{k!}.$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

эканлигини эътиборга олиб,

$$f(x)=2+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!}\right)x^{k}+o(x^{n})=2+\sum_{л=1}^{n}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{k!}(k+1)x^{k}+o(x^{n})=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{k-1}k!}(k+1)x^{k}+o(x^{n}).$$

ёйилмани ҳосил қиламиз.

**2)** (15.5), (15.12) ва (15.14) ёйилмаларни эътиборга олиб,

$$f(x)=e^{3x}\cdot\ln(1-x)=\left(1+3x+\frac{9}{2!}x^{2}+\frac{9}{2}x^{3}+o(x^{3})\right)\cdot(-1)\left(x+\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{4}}{4!}\right)+o(x^{4})=$$

$$=-x-\left(\frac{1}{2}+3\right)x^{2}-\left(\frac{1}{3!}+\frac{3}{2}+\frac{9}{2}\right)x^{3}-\left(\frac{1}{4!}+\frac{1}{2!}+\frac{9}{2!}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{9}{2}\right)x^{4}+o(x^{4})=$$

$$=-\left(x+\frac{7}{2}x^{2}+\frac{37}{6}x^{3}+\frac{175}{24}x^{4}\right)+o(x^{4}).$$

ёйилмага эга бўламиз.

**15.6-мисол.** Ушбу $f(x)=\cos x\cdot\sin^{2}x$ функцияни $o\left(x^{2n+1}\right)$ ҳадгача Маклорен формуласига ёйинг.

**Ечилиши.** Берилган функциянинг шаклини қуйидагича ўзгартирамиз:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$\cos x \sin^2 x = \cos x(1-\cos^2 x) = \cos x - \cos^3 x$. Сўнгра, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, муносабатдан $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$ каби ёзиш мумкин. Кейинги тенгликни эътиборга олсак,

$$\cos x \sin^2 x = \cos x - \frac{1}{4}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x = \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\cos 3x$$

бўлади. Сўнгра, (15.8) ва (15.14) формулаларга биноан,

$$\cos x \sin^2 x = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot \frac{3^{2k}\cdot x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot(3^{2k}-1)x^{2k} + o(x^{2n+1}).$$

ёйилмани ҳосил қиламиз.

**15.7-мисол.** [0; 1] сегментда аниқланган $f(x) = \ln(1+x)$ функцияни $x$ нинг даражалари бўйича Маклорен формуласига ёйинг. Ёйилманинг биринчи ўнта ҳадигача йўл қўйилган хатони баҳоланг.

**Ечилиши.** Маълумки, $f^{(n)}(x) = (\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

Бундан, $f(0)=0,\ f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!.$ Буни эътиборга олиб, $\ln(1+x)$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

функциянинг Маклорен формуласини ёзамиз:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^9}{9} + R_{10}(x)\ .$$

Қолдиқ ҳад $R_{10}(x)$ ни баҳолашда унинг Лагранж кўринишидан фойдаланамиз:

$$R_{10}(x) = \frac{f^{(10)}(\xi)}{10!}x^{10} = -\frac{9!}{10!(1+\xi)^{10}} \cdot x^{10} = -\frac{x^{10}}{10(1+\xi)^{10}} \qquad (0 < \xi < x).$$

$0 \le x \le 1,\ \ \xi > 0$ ларни эътиборга олган ҳолда, $\mathrm{R}_{10}(x)$ ни абсолют қиймати бўйича баҳолаймиз:

$$|R_{10}(x)| = \left|\frac{-x^{10}}{10(1+\xi)^{10}}\right| < \frac{1}{10}\ .$$

**15.8-мисол.** *x* нинг қандай қийматида

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

тақрибий формулада йўл қўйилган хато 0,0005 дан кичик бўлади.

**Ечилиши.** $(\sin x)^{(7)} = -\cos x$ бўлгани учун

$$|R_7(x)| = \left|\frac{-\cos\theta x}{7!}x^7\right| \le \frac{|x|^7}{7!}\ .$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Шартга кўра, $\frac{|x|^7}{7!} < 0,0005$. Демак, $|x| < 0,821$ бўлганда.

**15.9-мисол.** Маклорен формуласидан фойдаланиб, ушбу 1) $\sin 20^0$, 2) $\sqrt[4]{83}$ миқдорларни $o(x^5)$ ҳадгача тақрибий ҳисобланг.

**Ечилиши. 1)** (15.15) формулага асосланиб,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

муносабатни оламиз ва ундан қуйидаги тақрибий формулага эга бўламиз:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

бундан

$$\sin 20^0 = \sin\frac{\pi}{9} \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi^3}{729} + \frac{\pi^5}{120\cdot 9^5} \approx 0.3420213308.$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> C:=taylor(sin(x), x=Pi/6,5);
```

$$C := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{1}{12}\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \frac{1}{48}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4 + o\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^5$$

```
> V:=subs(x=Pi/9,C);convert(evalf(V),polynom);
```

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$V:=\frac{1}{2}+\frac{1}{36}\sqrt{3}\pi-\frac{1}{1296}\pi^2+\frac{1}{69984}\sqrt{3}\pi^3+\frac{1}{5038848}\pi^4+o\left(-\frac{1}{1889568}\pi^5\right)$$

0.3420213308

**2)** (15.9) формуладан

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+o(x^3)$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан эса,

$$(1+x)^m\approx 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2$$

тақрибий формулага эга бўламиз. Бу формуладан фойдаланиб, $\sqrt[4]{83}$ миқдорни тақрибий ҳисоблаймиз:

$$\sqrt[4]{83}=\sqrt[4]{81+2}=3\left(1+\frac{2}{81}\right)^{\frac{1}{4}}\approx 3\left(1+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{81}+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2!}\left(\frac{2}{81}\right)^2+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-2\right)}{3!}\cdot\left(\frac{3}{81}\right)^3\right)=$$

$$=3\left(1+\frac{1}{162}-\frac{3\cdot 4}{4\cdot 4\cdot 2!\,81\cdot 81}+\frac{3\cdot 7\cdot 2^3}{4^3\cdot 6\cdot 81^3}\right)=3\left(\frac{163}{162}-\frac{1}{8\cdot 27\cdot 81}+\frac{7}{16\cdot 81^3}\right)=$$

$$=\left(\frac{163}{54}-\frac{1}{8\cdot 9\cdot 81}+\frac{7}{16\cdot 27\cdot 81^2}\right)\approx 3,018349479\ .$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Шундай қилиб,

$$\sqrt[4]{83} \approx 3{,}018342.$$

***Maple тизимидан фойдаланиб мисолни ечиш:***

```
> C:=taylor(3*surd(1+x,4), x=2/81,4);
```

$$C := \frac{1}{27}83^{(1/4)}81^{(3/4)} + \frac{3}{332}83^{(1/4)}81^{(3/4)}\left(x-\frac{2}{81}\right) + \frac{729}{220448}83^{(1/4)}81^{(3/4)}\left(x-\frac{2}{81}\right)^2 + \frac{137781}{73188736}83^{(1/4)}81^{(3/4)}\left(x-\frac{2}{81}\right)^3 + O\left(\left(x-\frac{2}{81}\right)^4\right)$$

```
> V:=subs(x=2/81,C);convert(evalf(V),polynom);
```

$$V := \frac{1}{27}\,83^{(1/4)}\,81^{(3/4)}$$

$$3.018349479$$

## 15.3. Тейлор формуласидан фойдаланиб лимитларни ҳисоблаш.

Ушбу $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ лимитни топиш талаб қилинган бўлсин, бунда $f(0)=g(0)=0$. $f(x)$ ва $g(x)$ лар Маклорен формуласига ёйиладиган функциялар бўлсин. Бу функцияларнинг Маклорен формуласидаги

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

ёйилмаларининг нолдан фарқли биринчи ҳади билан чегараланамиз:

$$f(x)=ax^n+o(x^n)\,,\quad a\neq 0,$$
$$g(x)=bx^m+o(x^m)\,,\quad b\neq 0.$$

Агар $m=n$ бўлса,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^n+o(x^n)}{bx^m+o(x^m)}=\frac{a}{b}$$

бўлади.

Агар $n>m$ бўлса,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^n+o(x^n)}{bx^m+o(x^m)}=0 \qquad (2)$$

бўлади.

Агар $n<m$ бўлса,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^n+o(x^n)}{bx^m+o(x^m)}=\infty \qquad (3)$$

бўлади.

**15.10-мисол.** Ушбу

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

лимитни топинг.

**Ечилиши.** $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ ,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

ёйилмалардан фойдаланиб, берилган лимитни топамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right] = \frac{1}{2}\,.$$

**15.11-мисол.** Ушбу

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+2x} - 1}{\sqrt[4]{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

лимитни топинг.

**Ечилиши.** $x \to 0$ да

$$\sqrt[4]{1+x} = 1 + \frac{1}{4}x + o(x)\,,$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x + o(x)$$

ёйилмалардан фойдаланиб, берилган каср махражининг $x \to 0$ даги Маклорен формуласига ёйилмасини топамиз:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$x \to 0 \text{ да } \quad \sqrt[4]{1+x} - \sqrt{1-x} = \frac{3}{4}x + o(x).$$

Бу ёйилмани эътиборга олиб, берилган касрнинг суратини $o(x)$ гача Маклорен формуласига ёямиз:

$$\sqrt[5]{1+2x} - 1 = 1 + \frac{1}{5}2x + o(x) - 1 = \frac{2}{5}x + o(x).$$

Шундай қилиб,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+2x} - 1}{\sqrt[4]{1+x} - \sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{5}x + o(x)}{\frac{3}{4}x + o(x)} = \frac{8}{15}.$$

**15.12-мисол.** Ушбу

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1-x^2} - x\operatorname{ctg} x}{x\sin x}$$

лимитни топинг.

**Ечилиши.** (15.6), (15.8) ва (15.9) формулалардан фойдаланиб, касрнинг суратида $x$ нинг учинчи даражасигача бўлган ҳадларни қолдириб, берилган лимитни ҳисоблаймиз:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1-x^2}-x\,\mathrm{ctg}\,x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}-x\cos x}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}-x\cos x}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^2)\right)\left(1-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)\right)-x\left(1-\frac{x^2}{2!}+o(x^3)\right)\right]\cdot x^{-3}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}x^3-\frac{x^3}{3!}-x+\frac{x^3}{2!}+o(x^3)}{x^3}=0$$

Демак,

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1-x^2}-x\cos x}{x\sin x}=0\,.$$

**15.13-мисол.** Ушбу

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-\sqrt{1+x^2}-\arcsin x}{\mathrm{sh}\,(x-x^2)-\ln\sqrt{1+2x}}$$

лимитни топинг.

**Ечилиши.** $x\to0$ да (15.7) ва (15.11) ёйилмалардан фойдаланиб,

$$\mathrm{sh}\,(x-x^2)-\ln\sqrt{1+2x}=x-x^2+\frac{(x-x^2)^3}{3!}+o(x^3)-\frac{1}{2}(2x-2x^2+o(x^3))=\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\,.$$

ёйилмага эга бўламиз. Шунга кўра, берилган ифоданинг суратини $x\to0$ да $x$ нинг даражалари бўйича o($x^3$) ҳадгача Маклорен формуласига ёямиз. $x\to0$ да

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

ушбу

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\,, \qquad e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + o(t^3)\,,$$

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\,, \quad \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

ёйилмалардан фойдаланиб, $x \to 0$ да суратнинг ёйилмасини топамиз:

$$e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - \arcsin x = -\frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Шундай қилиб, берилган каср $x \to 0$ да $\dfrac{-\dfrac{x^3}{3} + o(x^3)}{\dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)}$ шаклида тасвирланади.

Бундан эса, изланаётган лимитнинг $-2$ га тенглиги келиб чиқади.

Кўп ҳолларда, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^{g(x)}$ $\left(f(x) > 0,\ \lim\limits_{x\to 0} g(x) = \infty\right)$ кўринишдаги лимитларни ҳисоблашда ҳам Тейлор формуласи қўлланилади. Фараз қилайлик, хусусий ҳолда $x_0 = 0$ да $f(x)$ ва *g(x)* функциялар

$$f(x) = 1 + ax^k + o(x^k), \quad g(x) = 1/(bx^k + o(x^k))$$

каби тасвирланган бўлсин, бунда $a \neq 0,\ b \neq 0,\ k \in N$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\lim_{x\to 0}(1+ax^k+o(x^k))^{\frac{1}{(ax^k+0(x^k))}}=e, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{ax^k+o(x^k)}{bx^k+o(x^k)}=\frac{a}{b}$$

бўлгани учун

$$\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to 0}(1+ax^k+o(x^k))^{\frac{1}{(bx^k+0(x^k))}}=e^{\frac{a}{b}}. \qquad (15.16)$$

бўлади.

Агар $x\to 0$ да

$$f(x)=\frac{1+ax^k+o(x^k)}{1+cx^k+o(x^k)}, \quad g(x)=\frac{1}{bx^k+o(x^k)},$$

$$a\neq 0, \quad c\neq 0, \quad b\neq 0, \quad k\in N \quad \text{бўлса,}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)}=e^{\frac{a-c}{b}}. \qquad (15.17)$$

бўлади.

$x\to 0$ да $(f(x))^{g(x)}$ функциянинг лимитини топишда, аввало $g(x)$ ва $\ln f(x)$ функцияларни Маклорен формуласига ёйиб, сўнгра $\lim_{x\to 0} g(x)\ln f(x)$ ни топиб, берилган ифоданинг лимитини топиш ҳам мумкин.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**15.14-мисол.** Ушбу

$$\lim_{x\to 0} (e^{\operatorname{tg} x} + \ln(1-x))^{\operatorname{ctg} x^3}$$

лимитни топинг.

**Ечилиши.** $x \to 0$ да $\operatorname{ctg} x^3 = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x^3} = \dfrac{1}{x^3 + o(x^3)}$ бўлгани учун, $f(x) = e^{tgx} + \ln(1-x)$ функцияни $o(x^3)$ ҳадгача Маклорен формуласига ёйиш керак бўлади.

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\,, \qquad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$t \to 0 \quad \text{да} \quad e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + o(x^3)$$

ёйилмаларни эътиборга олган ҳолда,

$$e^{\operatorname{tg} x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\,,$$

$$e^{\operatorname{tg} x} + \ln(1-x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

ёйилмани топамиз.

Шундай қилиб, (15.16) формулага асосан,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{\mathrm{t}\,gx}+\ln(1-x)\right)^{\mathrm{ctg}\,x^3} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)^{\frac{1}{x^3+0(x^3)}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

бўлади.

**15.15-мисол.** Ушбу

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\sin x}{2x+tgx}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

лимитни топинг.

**Ечилиши.** $x\to 0$ да ушбу

$$1-\cos x=\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right),\quad \sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3),$$

$$tgx=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

ёйилмалардан фойдаланиб,

$$\left(\frac{3\sin x}{2x+\mathrm{tg}\,x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\left(\frac{3x-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{3x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}\right)^{\frac{1}{\frac{x^2}{2}+0(x^3)}}=\left(\frac{1-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{1+\frac{1}{9}x^3+o(x^3)}\right)^{\frac{1}{\frac{x^2}{2}+o(x^3)}}\backslash$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан, (15.17) формулага асосан, изланаётган лимит

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{3\sin x}{2x+tgx}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^{\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{9}\right)\cdot2}=e^{-\frac{5}{9}}$$ бўлади.

**15.16-мисол.** Ушбу

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}x\right)$$

лимитни топинг.

**Ечилиши.** Берилган ифодани

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}x\right)=\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\cdot\sin x}$$

кўринишда тасвирлаб, $x\to0$ да

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\,,\quad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+o(x^3),\quad x^2\sin x=x^3+o(x^3)$$

ёйилмаларни эътиборга олиб,

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-ctg\ x\right)=\frac{x-\frac{x^3}{6}-x+\frac{x^3}{2!}+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}=\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}$$

ёйилмага эга бўламиз. Бундан изланаётган лимитнинг $\frac{1}{3}$ га тенглиги келиб чиқади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

## Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

Қуйидаги кўпҳадларни $x - x_0$ нинг манфий бўлмаган даражалари бўйича Тейлор формуласига ёйинг:

15.1. $P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3, \quad x_0 = -1.$

15.2. $P(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 5x + 3, \quad x_0 = 2.$

15.3. $P(x) = x^9 + 3x^4 + 2x - 2, \quad x_0 = 1.$

Қуйидаги функцияларни $x$ нинг манфий бўлмаган даражалари бўйича кўрсатилган тартибгача Маклорен формуласига ёйинг:

15.4. $f(x) = \dfrac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40} \cdot (1+2x)^{60}}, \quad o(x^2)$ ҳадгача.

15.5. $f(x) = e^{\sqrt{1+2x}}, \quad o(x^2)$ ҳадгача .

15.6. $f(x) = xe^x, \quad o(x^3)$ ҳадгача.

15.7. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad o(x^4)$ ҳадгача.

15.8. $f(x) = \sqrt{1 - 2x + x^3} - \sqrt[3]{1 - 3x + x^3}, \quad o(x^3)$ ҳадгача.

15.9. $f(x) = \ln(1 + \arcsin x), \quad o(x^3)$ ҳадгача.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

15.10. $f(x)=\frac{5x^6-11}{x^6-x^3-2}$, $o(x^6)$ ҳадгача.

15.11. $f(x)=\ln\sqrt{\frac{e-x^3}{1-ex^3}}$, $o(x^4)$ ҳадгача.

15.12. $f(x)=\sqrt[3]{\sin x^3}$, $o(x^{13})$ ҳадгача.

15.13. $f(x)=\ln\cos x$, $o\left(x^6\right)$ ҳадгача.

15.14. $f(x)=\sin(\sin x)$, $o\left(x^3\right)$ ҳадгача.

15.15. $f(x)=tgx$, $o\left(x^5\right)$ ҳадгача.

15.16. $f(x)=\sin x\cdot\sin 3x$, $o(x^5)$ ҳадгача.

15.17. $f(x)=\sin^2 x\cdot\cos^4 x$, $o(x^7)$ ҳадгача.

15.18. $f(x)=\cos^6 x+\sin^6 x$, $o\left(x^5\right)$ ҳадгача.

Қуйидаги функцияларни Маклорен формуласига $o(x^4)$ ҳадгача ёйинг:

**15.19.** $f(x)=e^{2x+1}$.

**15.20.** $f(x)=5^{2-x}$.

**15.21.** $f(x)=\ln(e^x+3)$.

**15.22.** $f(x)=\frac{1}{2x+5}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**15.23.** $f(x)=\ln\frac{2-3x}{3+2x}.$

**15.24.** $f(x)=\ln(x^2+3x+2).$

**15.25.** $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{9-6x+x^2}}.$

**15.26.** $f(x)=\frac{x^2+1}{2x-3}.$

**15.27.** $f(x)=\frac{3x^2+5x-5}{x^2+x-2}$

Қуйидаги функцияларни Маклорен формуласига $o\left(x^{2n}\right)$ ҳадгача ёйинг:

**15.28.** $f(x)=x\,\mathrm{ch}\,5x.$

**15.29.** $f(x)=\mathrm{ch}\,x\cdot\mathrm{ch}\,2x.$

**15.30.** $f(x)=\sin^3 x\cdot\cos x$

Қуйидаги функцияларни Маклорен формуласига $o\left(x^{2n+1}\right)$ ҳадгача ёйинг:

**15.31.** $f(x)=\mathrm{sh}\,x\cdot\mathrm{sh}\,5x.$

**15.32.** $f(x)=\cos^4 x+\sin^4 x.$

**15.33.** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2-x^2}}.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Қуйидаги функцияларни Тейлор формуласига $x_0$ нуқтанинг атрофида $o\left((x-x_0)^n\right)$ ҳадгача ёйинг:

**15.34.** $f(x)=(x^2-1)e^{2x}$ , $x_0=-1$ .

**15.35.** $f(x)=\ln(x^2-7x+12)$ , $x_0=1.$

**15.36.** $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}\ln x$ , $x_0=1.$

**15.37.** $f(x)=\dfrac{x+7}{x(2x+7)}$ , $x_0=-2.$

**15.38.** $f(x)=\dfrac{x^2-4x+5}{x^2-5x+6}$ , $x_0=1.$

Қуйидаги функцияларни Тейлор формуласига $x_0$ нуқтанинг атрофида $o\left((x-x_0)^{2n}\right)$ ҳадгача ёйинг:

**15.39.** $f(x)=(x+3)e^{3x^2+18x}$ , $x_0=-3.$

**15.40.** $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{\sqrt[3]{x(2-x)}}$ , $x_0=+1.$

**15.41.** $f(x)=\dfrac{x-1}{3x^2-6x+5}$ , $x_0=1.$

Қуйидаги функцияларни Тейлор формуласига $x_0$ нуқтанинг атрофида

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$o\left((x-x_0)^{2n+1}\right)$ ҳадгача ёйинг:

**15.42.** $f(x)=x(x-2)2^{x^2-2x-1}$, $x_0=1$.

**15.43.** $f(x)=\left(x+\frac{\pi}{4}\right)(\sin x+\cos x)$, $x_0=-\frac{\pi}{4}$.

**15.44.** $f(x)=\log_5\sqrt[3]{\frac{2x-1}{3-2x}}$, $x_0=1$.

**15.45.** $f(x)=\frac{1-4x+4x^2}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$, $x_0=\frac{1}{2}$.

**15.46**. Ушбу $f(x)=2^{x^3-3x^2+3x}$ функцияни Тейлор формуласига $x_0=1$ нуқтанинг атрофида $o\left((x-x_0)^{3n}\right)$ ҳадгача ёйинг.

**15.47.** Ушбу $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt[3]{(x-4)(x^2-2x+4)}}$ функцияни Тейлор формуласига $x_0=2$ нуқтанинг атрофида $o\left((x-2)^{3n+1}\right)$ ҳадгача ёйинг.

**15.48**. Ушбу $f(x)=\sin(3x^2+6x+4)$ функцияни Тейлор формуласига $x_0=-1$ нуқтанинг атрофида $o\left((x+1)^{4n}\right)$ ҳадгача ёйинг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**15.49**. Ушбу $f(x)=\cos\left(\frac{8}{\pi}x^2-4x+\pi\right)$ функцияни Тейлор формуласига $x_0=\frac{\pi}{4}$ нуқта атрофида $o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{4n+3}\right)$ ҳадгача ёйинг.

**15.50.** Тейлор формуласидан фойдаланиб, ушбу ифоданинг тақрибий қийматини топинг.

1) $\sqrt[5]{250}$; 2) $\sqrt[12]{4000}$; 3) $\operatorname{arctg}0{,}8$; 4) $\sin 36^0$; 5) $(1{,}2)^{1{,}1}$.

**15.51**. Қуйидаги миқдорларни Тейлор формуласидан фойдаланиб, кўрсатилган аниқликгача тақрибий ҳисобланг:

1) $e$ сонини $10^{-9}$ аниқликгача; 2) $\cos 10^0$ сонини $10^{-3}$ аниқликгача;

3) $\sqrt[3]{30}$ сонини $10^{-4}$ аниқликгача; 4) $\lg 11$ сонини $10^{-5}$ аниқликгача;

Тейлор формуласидан фойдаланиб, қуйидаги лимитларни топинг.

**15.52.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{x^2}$. **15.53.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-(1+x)}{x}$.

**15.54.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{x^4}$. **15.55.** $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(e^{-\frac{1}{x^2}}-1\right)$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**15.56.** $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\cos y-\dfrac{y^2}{2}}{y^4}$.

**15.57.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

**15.58.** $\lim\limits_{t\to\infty}(t+1)\cdot\sin\dfrac{1}{t+1}$.

**15.59.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$.

**15.60.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}$.

**15.61.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+x}-\sqrt[n]{1+x}}{x}$. $(m\neq n, m\neq 0, n\neq 0)$.

**15.62.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x(1+x)^{\alpha}}{x^2}$.

**15.63.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$.

**15.64.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ch3x+\cos 3x-2}{x^4}$.

**15.65.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}-2\sqrt[4]{1-x}}{x}$.

**15.66.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,x-\arcsin x}{x^2}$.

**15.67.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,x-\arcsin x}{\mathrm{tg}\,x-\sin x}$.

**15.68.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{1/x}-\sqrt{x^6+1}\right]$.

**15.69.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

**15.70.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos x+\arcsin x-3\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1-x^2)}$.

**15.71.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}-x\,\mathrm{ctg}\,x}{x\sin x}$.

**15.72.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

**15.73.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**15.74.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(\sin\pi x)}{\ln(1+\ln x)}$.

**15.75.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sh}(\operatorname{tg}x)-x}{x^3}$.

**15.76.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)-2\sin x+2x\cos x^2}{arc\,tgx^3}$.

**15.77.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\operatorname{tg}x}\right)$.

**15.78.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-\sqrt{1+x^2}-x\cos x}{\ln^3(1-x)}$.

**15.79.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\operatorname{arctg}x}+\ln(1-x)-1}{2-\sqrt{4+x^2}}$.

**15.80.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x^3}-\cos x^4}{\operatorname{tg}x-x}$.

**15.81.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}+\ln(1-x)-1}{\arcsin x-\sin x}$.

**15.82.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-e^{\sin x}+\frac{3}{2}x^2}{\arcsin x-\operatorname{tg}x}$.

**15.83.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}(x/2)}-\sqrt{1+\sin x}-\frac{x^2}{4}}{\arccos x-\operatorname{arcctg}x}$.

**15.84.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}-x\operatorname{ctg}x-\frac{1}{2}x^2}{x\cos x-\sin x}$.

**15.85.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+x-\frac{1}{6}x^2\right)-\operatorname{sh}x+\frac{2}{3}x^2}{\sin 2x-2x\cos x}$.

**15.86.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\sqrt{1+2x+2x^2}}{x+tgx-\sin 2x}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**15.87.** $$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\operatorname{arctg}x)-t\,g\,x}{e^{shx}-(1+2x)^{1/2}-x^{2}}.$$

**15.88.** $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-e^{\operatorname{tg}x}+6x^{3}+x^{2}}{\ln(1+x)-\operatorname{arctg}x+\frac{x^{2}}{2}}.$$

**15.89.** $$\lim_{x\to0}\frac{x+chx-e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg}x+\sqrt[3]{1-3x}-2\cos x+1}.$$

**15.90.** $$\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch}3x}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}.$$

**15.91.** $$\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{arctg}x}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}.$$

**15.92.** $$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}e^{\frac{x}{1+x}}-\frac{1}{\sin x}\right)^{1/arctgx}.$$

**15.93.** $$\lim_{x\to0}\left(\frac{chx-\cos x}{2\sqrt{1+2x}-2\sqrt[3]{1+3x}}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

**15.94.** $$\lim_{x\to0}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}\right)+2-\sqrt[3]{1+x}\right)^{ctg^{2}x}.$$

**15.95.** $$\lim_{x\to0}\left(\frac{2\cos x+x}{2\sqrt{1+x}}\right)^{1/x^{2}}.$$

**15.96.** $$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{\cos x}}{e^{x}-\ln(1+x)}\right)^{1/x^{2}}.$$

**15.97.** $$\lim_{x\to0}\left(\frac{x^{2}-(\operatorname{arctg}x)^{2}}{x^{2}\cdot\sin\frac{2}{3}x^{2}}\right)^{1/x^{2}}.$$

**15.98.** $$\lim_{x\to0}\left(\frac{sh(x+\sin x)}{\sin x+\operatorname{arc}\ln x}\right)^{ctg^{2}x}.$$

**15.99.** $$\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{x}{\ln(e^{2}-xe^{2})}\right)^{1/x^{2}}.$$

**15.100.** $$\lim_{x\to0}\left(\frac{2x}{x-2}+\ln(e+xe^{x+1})\right)^{1/x^{2}}.$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**15.101.** $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{\arcsin x^3}}$.

**15.102.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{3}{2}x^2+\sqrt[3]{1+3\sin x}+\ln(1-x)\right)^{\frac{1}{sh^3x}}$.

**15.103.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt{1-2x+3x^2}+x(1-shx)\right)^{ctg^3x}$.

**15.104.** $\lim\limits_{x\to0}\left(1+th(xe^x)+\frac{1}{2}\ln(1-2x)\right)^{\frac{1}{x^3}}$. **15.105.** $\lim\limits_{x\to0}\left(e^{\sin x}-\frac{x^2}{2}-x\cos x\right)^{\frac{1}{\ln^3(1-\frac{x}{2})}}$.

**15.106.** $\lim\limits_{x\to0}\left(e^{x-x^2}-x\sqrt[3]{1-\frac{3}{2}x}\right)^{\frac{1}{tgx-x}}$.

## Мустақил ечиш учун берилган мисол ва масалаларнинг жавоблари

**15.1.** $5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3$.

**15.2.** $5+7(x-2)+7(x-2)^2+4(x-2)^3+(x-2)^4$.

**15.3.** $2-3(x-1)+(x-1)^2+15(x-1)^3+25(x-1)^4+\frac{7}{3}(x-1)^5+7(x-1)^6+(x-1)^7$.

**15.4.** $1+60x+195x^2+o(x^2)$. **15.5.** $e+ex+o(x^2)$.

**15.6.** $x+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{2!}+o(x^3)$. **15.7.** $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$.

**15.8.** $\frac{1}{6}x^2+x^3+o(x^3)$. **15.9.** $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+(x^3)$.

**15.10.** $\frac{11}{2}-\frac{11}{4}x^3+\frac{13}{8}x^6+o(x^6)$. **15.11.** $\frac{1}{2}+x^3\,\mathrm{sh}1+o(x^4)$.

**15.12.** $x-\frac{x^7}{18}-\frac{x^{13}}{3240}+o(x^{13})$. **15.13.** $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o(x^6)$.

**15.14.** $x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$. **15.15** $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)$.

**15.16.** $3x^2$-$5x^4+o(x^5)$. **15.17.** $x^2-\frac{7}{3}x^4+\frac{107}{45}+o(x^6)$.

**15.18.** $1\text{-}3x^2+4x^4+o(x^5)$ **15.19.** $\sum_{k!}^{n} e\cdot\frac{2^k}{k!}x^k+o(x^n)$.

**15.20.** $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{25\cdot(\ln 5)^k}{k!}x^k+o(x^n)$.

**15.21.** $\ln 3+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{e}{3}\right)^k x^k+o(x^n)$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**15.22.** $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot \frac{2^k}{5^{k+1}} x^k + o(x^n).$

**15.23.** $\ln\frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-4)^k - 9^k}{k \cdot 6^k} x^k + o(x^n).$

**15.24.** $\ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(1+2^{-k})x^k + o(x^n).$

**15.25.** $\sum_{k=1}^{n} 3^{\frac{1}{3}-k} (-1)^{k-1} C_{-2/3}^{k-1} \cdot x^k + o(x^n).$

**15.26.** $-\frac{1}{3} - \frac{2}{9}x - \frac{13}{12} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k x^k + o(x^n).$

**15.27.** $\frac{5}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^k 2^{-(k+1)} - 1\right)x^k + o(x^n).$

**15.28.** $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{5^{2k}}{(2k)!} x^{2k+1} + o(x^{2n}).$

**15.29.** $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{3^{2k+1} - 1}{2(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n}).$

**15.30.** $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k-1}(1-2^{2k})x^{2k+1} + o(x^{2n}).$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**15.31.** $\sum_{k=0}^{n}\frac{6^{2k}-4^{2k}}{2\cdot(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n+1}).$

**15.32.** $1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{4^{2k}}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n+1}).$

**15.33.** $\sum_{k=0}^{n}C_{1/2}^{k+1}\cdot 2^{-\left(k+\frac{3}{2}\right)}(1+(-1)^k)x^{2k}+o(x^{2n+1}).$

**15.34.** $\sum_{k=1}^{n}e^{-2}\frac{2^{k-2}(k-5)}{(k-1)!}(x+1)^k+o\left((x+1)^n\right).$

**15.35.** $\ln 6-\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{-k}+3^{-k}}{k}(x-1)^k+o\left((x-1)^n\right).$

**15.36.** $3+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(k-2)}{k(k+1)}(x-1)^k+o\left((x-1)^n\right).$

**15.37.** $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^{k+1}\cdot 2k}{3^{k+1}}-\frac{1}{2^{k+1}}\right)(x+2)^k+o\left((x+2)^n\right)$

**15.38.** $1+\sum_{k=1}^{n}(1-2^{-k})(x-1)^k+o\left((x-1)^n\right).$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**15.39.** $$\sum_{k=0}^{n-1} e^{-27} \cdot \frac{3^k}{k!}(x+3)^{2k+1} + o\left((x+3)^{2n}\right).$$

**15.40.** $$(x-1)^2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1\cdot 4\cdot 7 \ldots .(3k-2)}{3^k\, k!}(x-1)^{2k+2} + o\left((x-1)^{2n}\right).$$

**15.41.** $$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{3^k}{2^{k+1}}(x-1)^{2k+1} + o\left((x-1)^{2n}\right).$$

**15.42.** $$-\frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^{k-1}}{4\cdot k!}(k-\ln 2)(x-1)^{2k} + o\left((x-1)^{2n+1}\right).$$

**15.43.** $$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{2}(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^{2k} + o\left((x+\frac{\pi}{4})^{2n+1}\right).$$

**15.44.** $$\frac{2}{3\ln 5}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^{2k-1}}{2k-1}(x-1)^{2k-1} + o\left((x-1)^{2n+1}\right).$$

**15.45.** $$\sum_{k=0}^{n-1} C_{1/2}^{2k+1} 2^{2k+\frac{5}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2k+2} + o\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right).$$

**15.46.** $$\sum_{k=0}^{n} \frac{2(\ln 2)^k}{k!}(x-1)^{3k} + o\left((x-1)^{3n}\right).$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**15.47.** $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} C_{-1/3}^{k}}{2^{3k+1}} (x-2)^{3k+1} + o\left((x-2)^{3n+1}\right)$ .

**15.48.** $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k} 3^{2k+1} \cos 1}{(2k+1)!} (x+1)^{4k+2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k} 3^{2k} \cdot \sin 1}{(2k)!} (x+1)^{4k} + o\left((x+1)^{4n}\right).$

**15.49.** $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{2k+1} \left(\frac{8}{\pi}\right)^{2k+1} \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{4k+2} 3^{2k+1} \cos 1}{(2k+1)!} + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{4n+3}\right).$

**15.50.** **1)** $\sqrt[5]{250} \approx 3{,}017$ **;** **2)** $\sqrt[12]{4000} \approx 1{,}9961$ **;** **3)** arctg $0{,}8 \approx 0{,}6747409422$ ;

**4)** $\sin 36^0 \approx 0{,}5877852524$; **5)** $(1{,}2)^{1{,}1} \approx 1{,}222079251$ **15.51**. 1) 2.718281828;

2) 0.9848077530; 3) 3.107232506; 4) 1.041392685. **15.52.** $-\frac{1}{2}$

**15.53.** $\frac{1}{2}$ **15.54.** $\frac{1}{24}$ **15.55.** $-1$ **15.56.** $\frac{1}{4}$. **15.57.** $-\frac{1}{2}$.

**15.58.** $0$. **15.59.** $-\frac{1}{12}$. **15.60.** $2$. **15.61.** $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$. **15.62.** $-\frac{1}{2}-\alpha$.

**15.63.** $\frac{1}{3}$ **15.64.** $\frac{27}{4}$. **15.65.** $\frac{4}{3}$. **15.66.** $0$. **15.67.** $-1$.

**15.68.** $\frac{1}{6}$. **15.69.** $\frac{1}{2}$. **15.70.** $\frac{7}{6}$. **15.71.** $0$. **15.72.** $0$. **15.73.** $\frac{1}{3}$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**15.74.** $-\pi$ . **15.75.** $\frac{1}{2}$. **15.76.** $\frac{4}{3}$. **15.77.** $\frac{1}{3}$. **15.78.** $-\frac{1}{2}$. **15.79.**
$2$. **15.80.** $3$. **15.81.** $-1$. **15.82.** $-10$. **15.83.** $-\frac{1}{6}$. **15.84.** $-1$. **15.85.** $-1$.
**15.86.** $\frac{2}{5}$. **15.87.** $5$. **15.88.** $9$. **15.89.** $\frac{1}{4}$. **15.90.** $e^{-5}$ . **15.91.**
$e^{2/3}$ . **15.92.** $e^{-\frac{2}{3}}$ . **15.93.** $e^{\frac{7}{3}}$ . **15.94.** $e^{1/9}$ . **15.95.** $e^{-\frac{3}{8}}$ . **15.96.** $e^{-\frac{5}{4}}$ . **15.97.**
$e^{-\frac{23}{30}}$ . **15.98.** $e^{\frac{7}{12}}$ . **15.99.** $e^{\frac{7}{3}}$ . **15.100.** $e^{-\frac{5}{12}}$ . **15.101.** $e^{\frac{2}{3}}$ . **15.102.** $e^{\frac{7}{6}}$ . **15.103.**
$e$ . **15.104.** $e^{-\frac{7}{6}}$ . **15.105.** $e^{-4}$ . **15.106.** $e^{-\frac{7}{4}}$ .

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

# 16-§. ФУНКЦИЯНИ ҲОСИЛА ЁРДАМИДА ТЕКШИРИШ

**16.1. Функциянинг монотонлик оралиқларини аниқлаш.** Камаймовчи (ўсмовчи), ўсувчи (камаювчи) функцияларнинг таърифларини яна бир эслаб ўтамиз.

$1^0$. $x_1 < x_2$ шартни қаноатлантирадиган $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ учун $f(x_1) \le f(x_2)$, $(f(x_1) \ge f(x_2))$ тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция $(a;b)$ *оралиқда камаймовчи (ўсмовчи)* дейилади.

$2^0$. $x_1 < x_2$ шартни қаноатлантирадиган $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ учун $f(x_1) < f(x_2)$, $(f(x_1) > f(x_2))$ тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция $(a;b)$ *оралиқда ўсувчи (камаювчи)* дейилади. Баъзан, ўсувчи (камаювчи) ўрнига *қатъий ўсувчи (қатъий камаювчи)* деб ҳам юритилади.

16.1-теорема. $f(x)$ функция $(a,b)$ оралиқда чекли $f^{/}(x)$ ҳосилага эга бўлсин.

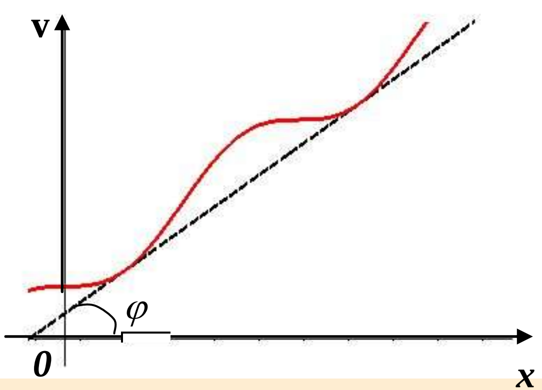
Функциянинг шу оралиқда камаймовчи (ўсмовчи) бўлиши учун

$f'(x) \ge 0 \ \ (f'(x) \le 0)$, $x \in (a,b)$

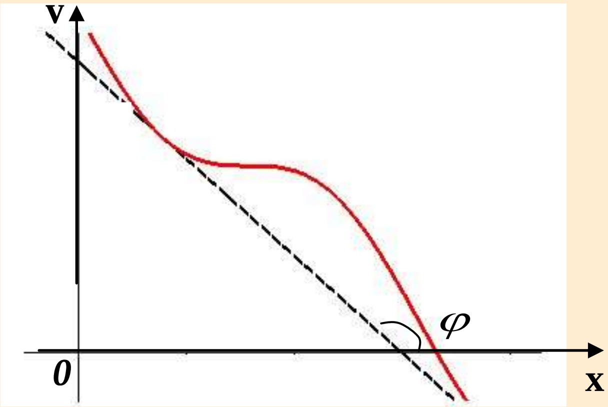
тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

16.2-теорема. $f(x)$ функция $(a,b)$ оралиқда чекли ҳосилага эга бўлиб,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



16.1-



16.2-чизма.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция $(a,b)$ оралиқда қатъий ўсувчи( қатъий камаювчи) бўлади.

16.3-теорема. $f(x)$ функция $(a,b)$ оралиқда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Бу функциянинг $(a,b)$ оралиқда ўзгармас бўлиши учун

$$f'(x)=0, \quad x\in(a,b)$$

бўлиши зарур ва етарли.

**Натижа.** Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $(a,b)$ оралиқда аниқланган бўлиб, чекли $f^{/}(x)$ ва $g^{/}(x)$ ҳосилаларга эга бўлиб, $\forall x\in(a;\, b)$ да $f^{/}(x)=g^{/}(x)$

бўлса, $(a,b)$ да бу функцияларнинг бири иккинчисидан ўзгармас сонга фарқ қилади, яъни $f(x)=g(x)+C$, $\forall x\in(a;\, b)$.

Масалан, $\operatorname{arctg} x$ ва $\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ функциялар $-\infty<x<+\infty$ да аниқланган, чекли

ҳосилаларга эга бўлиб, уларнинг ҳосилалари бир-бирига тенг.

Ҳақиқатан ҳам:

$$\frac{d}{dx}\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}, \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} x)=\frac{1}{1+x^2}$$

Юқоридаги натижага асосан, $\operatorname{arctg} x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$. Бунда ўзгармас $C$ сонни аниқлаш учун тенгликнинг иккала томонига $x=0$ қийматни қўйиб, $C=0$ эканлигини топамиз. Шундай қилиб, $-\infty<x<\infty$ да $\operatorname{arctg} x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ тенгликни ҳосил қиламиз.

*16.2-теореманинг геометрик маъноси қуйидагича*:

1) $f'(x)>0$ $(\mathbf{tg}\alpha>0)$ шарт функция графигининг ҳар бир нуқтасига ўтказилган уринма абсциссалар ўқининг мусбат йўналиши билан ўткир

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

бурчак ташкил қилишини (16.1-чизма);

2) $f^{/}(x)<0$ шарт эса, ўтмас бурчак ташкил қилишини (16.2-чизма) англатади.

**16.1- эслатма.** $f(x)$ функция $(a,b)$ ораликда чекли $f^{/}(x)$ ҳосилага эга бўлиб, бу функциянинг $(a,b)$ ораликда қатъий ўсувчи (қатъий камаючи) бўлишидан, $f^{/}(x)$ нинг $\forall x\in(a,b)$ да мусбат (манфий) бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди. Масалан, маълумки, $f(x)=x^3$ функция $R$ да қатъий ўсувчи, лекин унинг $y'=3x^2$ ҳосиласи ҳамма жойда мусбат эмас, $x=0$ да эса нолга айланади.

Шундай қилиб, функция ҳосиласининг $(a,b)$ ораликда мусбат (манфий) бўлиши функциянинг қатъий монотон бўлиши учун зарурий шарт бўла олмайди.

Функцияни монотонликка текширганда аввало унинг ҳосиласини топиш (у мавжуд бўлган жойда) керак, сўнгра ҳосила мусбат (манфий) бўладиган ораликларини аниқлаш керак. Ҳосиласи мусбат (манфий) бўлган ораликларда функция монотон ўсувчи (камаювчи) бўлади.

16.1-мисол. Ушбу

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**1)** $f(x)=x^3+2x-5$; 2) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$;

3) $f(x)=\cos\frac{\pi}{x}$; 4) $f(x)=x+|\sin 2x|$

функцияларнинг монотонлик оралиқларини аниқланг.

Ечилиши. 1) Берилган функция $\forall x\in R$ учун аниқланган бўлиб у дифференциалланувчи: $f'(x)=3x^2+2>0, \forall x\in R$. Демак, берилган функция $R$ да ўсувчи.

2) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ функция $\forall x\in R$ да аниқланган ва у дифференцияланувчи:

$f'(x)=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. Бундан $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ оралиқларда $f'(x)<0$, $(-1;1)$ оралиқда эса $f'(x)>0$ бўлиши келиб чиқади. Демак, функция $(-\infty,1)$ ва $(1,+\infty)$ оралиқларда қатъий камаювчи, $(-1;1)$ оралиқда қатъий ўсувчи.

3) $f(x)=\cos\frac{\pi}{x}$ функция $R$ нинг $x=0$ нуқтадан ташқари барча нуқталарида аниқланган ва дифференциалланувчи: $f'(x)=\frac{\pi}{x^2}\cdot\sin\frac{\pi}{x}$. Жуфт функция

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

бўлганлиги учун $x \ge 0$ ҳолни қараймиз. $f^{/}(x) = \frac{\pi}{x^2} \cdot \sin\frac{\pi}{x} > 0$ нинг ишораси $\sin\frac{\pi}{x}$ нинг ишораси каби бўлади. Бундан $0 < \frac{\pi}{x} < \pi$ ёки $2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi,\ \ k \in N$ да $\sin\frac{\pi}{x} > 0$, бу ердан $x > 1$ёки $\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k},\ \ k \in N.$

Шундай қилиб, $(1;+\infty)$ ёки $(\frac{1}{2k+1}; \frac{1}{2k}),\ k \in N$ оралиқларда функция қатъий ўсувчи.

Худди шундай $\left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k-1}\right), k \in N$ оралиқларда $f'(x) < 0$ бўлади.

Шунинг учун берилган функция қатъий камаювчи.

Агар $x < 0$ бўлса, у ҳолда берилган функциянинг жуфтлигини эътиборга олиб $\left(-\frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k+1}\right), k \in N$ оралиқларда функция қатъий ўсувчи; $(-\infty; -1)$ ва $\left(-\frac{1}{2k+1}, -\frac{1}{2k}\right), k \in N$ оралиқларда эса, қатъий камаювчи.

4) Берилган функция $R$ да аниқланган ва дифференциалланувчи.

Равшанки,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$f(x)=\begin{cases} x+\sin 2x, & k\pi<x<\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z\ ; \\ x-\sin 2x, & \pi\left(k+\dfrac{1}{2}\right)<x<\pi+k\pi, k\in Z\ ; \\ \dfrac{k\pi}{2}, & x=\dfrac{k\pi}{2}, k\in Z\ . \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 1+2\cos 2x, & k\pi<x<\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ \ k\in Z\ \ ; \\ 1-2\cos 2x, & \dfrac{\pi}{2}+k\pi<x<\pi+k\pi, k\in Z\ \ . \end{cases}$$

Бундан,

$$\begin{cases} 1+2\cos 2x>0; \\ k\pi<x<\dfrac{\pi}{2}+k\pi; \end{cases} \qquad \begin{cases} 1-2\cos 2x>0; \\ \dfrac{\pi}{2}+k\pi<x<\pi+k\pi \end{cases}$$

Системаларни ечиб, $k\pi<x<\dfrac{\pi}{3}+k\pi$ $, k\in Z$ ва $\pi\left(k+\dfrac{1}{2}\right)<x<\dfrac{\pi}{3}+\pi\left(k+\dfrac{1}{2}\right),$ $k\in Z$ лар учун $f^{/}(x)>0$ бўлишини топамиз. Юқоридаги ҳосил бўлган тенгсизликларни бирлаштирсак, $\dfrac{k\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in Z$ тенгсизлик ҳосил бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Шундай қилиб, $\left(\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\right), k\in Z$ ораликда $f^{/}(x)>0$,

$\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right), k\in Z$ ораликда $f^{/}(x)<0$ бўлади.

Демак, функция $\left(\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\right), k\in Z$ ораликда ўсувчи, $\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$, $k\in Z$ ораликда камаювчи бўлади.

16.2- мисол. Ушбу $f(x)=x^2\ln x$ функцияни монотонликка текширинг.

Ечилиши. Берилган функция $(0;+\infty)$ ораликда аниқланган. Унинг ҳосиласи $f'(x)=2x\ln x+x$ бўлади. Энди 16.1-теоремага кўра,

$f'(x)\geq 0$, яъни $2x\ln x+x\geq 0$

ёки

$f'(x)\leq 0$, яъни $2x\ln x+x\leq 0$

бўладиган нуқталар тўпламини топамиз:

$a)$ $x(2\ln x+1)\geq 0\Rightarrow\ 2\ln x+1\geq 0\Rightarrow\ x\geq e^{-\frac{1}{2}}$, $[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$,

b) $x(2\ln x+1)\leq 0\Leftrightarrow\ 2\ln x+1\leq 0\Rightarrow\ x\leq e^{-\frac{1}{2}}$, $\left[0; e^{-\frac{1}{2}}\right]$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Бундан берилган функция учун $[e^{-\frac{1}{2}};+\infty)$ да $f'(x)\geq 0$, $\left[0;\, e^{-\frac{1}{2}}\right]$ да $f'(x)\leq 0$ бўлишини оламиз. Демак, берилган функция $\left[0;e^{-\frac{1}{2}}\right]$ да камаювчи, $[e^{-\frac{1}{2}};+\infty)$ да эса ўсувчи экан.

16.3-мисол. Ушбу функцияни монотонликка текширинг:

$$f(x)=x^3-\frac{1}{x}$$

Ечилиши. Берилган функция учун $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Унинг ҳосиласи $f'(x)=3x^2+\frac{1}{x^2}$ бўлади. Равшанки, $(-\infty;0)$ ва $(0;+\infty)$ оралиқларда $f'(x)>0$ бўлади.

Демак, 16.2-теоремага кўра, берилган функция $(-\infty;\,0)$ ва $(0;\,+\infty)$ оралиқларда қатъий ўсувчидир.

16.2. Функциянинг экстремум қийматлари. $f(x)$ функция $(a,b)$ оралиқда аниқланган бўлиб, $x_0\in(a,b)$ бўлсин. Функциянинг экстремум қийматлари тушунчасини яна бир марта эслатиб ўтамиз.

16.1-таъриф. Агар $x_0\in(a,b)$ нуқтанинг шундай $U_\delta(x_0)\subset(a;\,b)$ атрофи мавжуд

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

бўлиб, $\forall x \in U_{\delta}(x_0)$ учун

$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0))$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция $x_0$ нуктада локал максимумга (локал минимумга) эга дейилади. $f(x_0)$ қиймат эса $f(x)$ функциянинг $U_{\delta}(x_0)$ атрофдаги *локал максимуми (локал минимуми)* дейилади.

16.2-таъриф. Агар $x_0 \in (a,b)$ нуқтанинг шундай $U_{\delta}(x_0) \subset (a;\, b)$ атрофи мавжуд бўлиб, $\forall x \in U_{б}(x_0)$ учун $f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0))$ тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция $x_0$ нуктада қатъий максимумга (қатъий минимумга) эга дейилади. $f(x_0)$ қиймат эса $f(x)$ функциянинг $U_{\delta}(x_0)$ атрофдаги *қатъий локал максимуми (қатъий локал минимуми)* дейилади.

Функциянинг максимуми ва минимуми умумий ном билан унинг *экстремуми* дейилади.

Юқорида келтирилган таърифлардаги $x_0$ нуқта $f(x)$ функциянинг *локал максимум (локал минимум), қатъий максимум (қатъий минимум) нуқтаси* деб юритилади. Функциянинг максимум ва минимум нуқталари унинг *экстремум нуқталари* дейилади.

Функциянинг $U_{\delta}(x_0)$ атрофдаги локал максимум (локал минимум) қийматлари

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$f(x_0)=\max\limits_{x\in U_\delta(x_0)}\{f(x)\}$ $\left(f(x_0)=\min\limits_{x\in U_\delta(x_0)}\{f(x)\}\right)$ каби белгиланади.

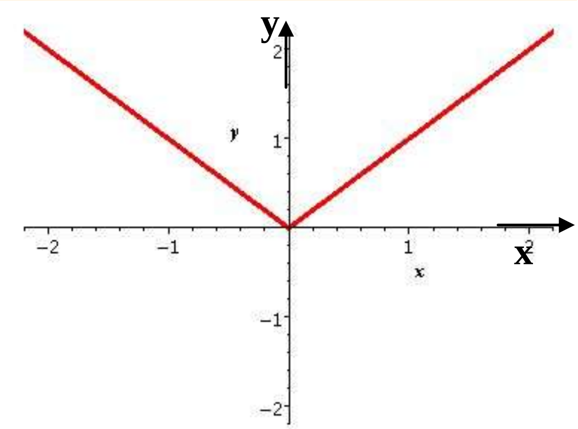
16.4-теорема (Функция экстремумга эга бўлишининг зарурий шарти). Агар $f(x)$ функция $x_0$ $(x_0\in(a,b))$ нуқтада ҳосилага эга бўлиб, у шу нуқтада экстремумга эга бўлса, $f^/(x_0)=0$ бўлади.

Бу шарт функция экстремумга эга бўлиши учун етарли шарт бўла олмайди. Масалан, $y=x^3$ функциянинг $x=0$ нуқтадаги ҳосиласи нолга тенг, яъни $y^/(0)=0$, лекин функция бу нуқтада экстремумга эга эмас.

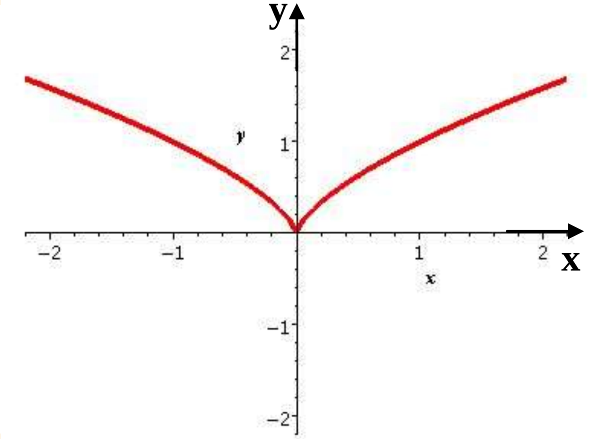
Одатда функциянинг ҳосиласи нолга айланадиган нуқталар стационар (турғун, критик) нуқталар деб аталади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$x_0$ нуқтада функция ҳосилага эга бўлмаса ҳам экстремумга эга бўлиши мумкин. Масалан, 1) $f(x)=|x|$ функциянинг $x=0$ нуқтадаги ҳосиласи мавжуд эмас, лекин функция $x=0$ нуқтада минимумга эга (16.3-чизма).



**16.3-чизма.**



**16.4-чизма.**

2) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ функциянинг $x=0$ нуқтадаги ҳосиласи чексиз, лекин функция $x$=0 нуқтада минимумга эга (16.4-чизма).

Демак, функциянинг ҳосиласи чексиз ёки ҳосиласи мавжуд бўлмаган нуқталарда ҳам экстремум мавжуд бўлиши мумкин экан.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Шундай қилиб, $f(x)$ функцияга экстремум қиймат берувчи нуқталарни функциянинг стационар нуқталари, функциянинг ҳосиласи мавжуд бўлмаган нуқталар, функциянинг ҳосиласи чексиз бўлган нуқталар орасидан излаш керак экан. Одатда бундай нуқталар экстремумга шубҳали нуқталар деб аталади.

$a$) Экстремум мавжуд бўлишининг биринчи етарли шарти. $x_0 \in (a,b)$ нуқтанинг $U_\delta^-(x_0) = \{x \in R: \ x_0 - \delta < x < x_0;\ \delta > 0\}$,

$U_\delta^+(x_0) = \{x \in R: \ x_0 < x < x_0 + \delta;\ \delta > 0\}$ чап ва ўнг атрофларини қараймиз.

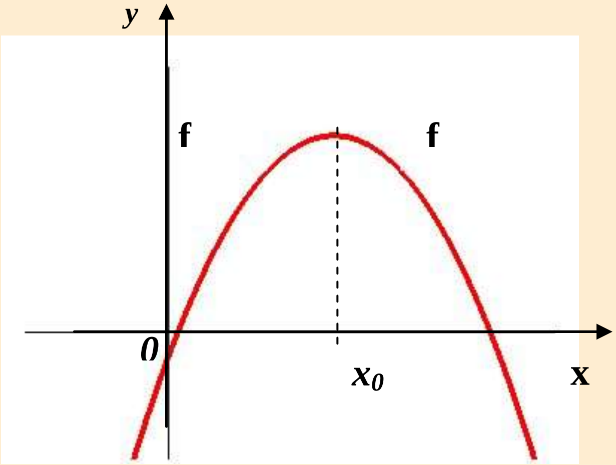
Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция $x_0$ нуқтада узлуксиз бўлиб, $\dot{U}_\delta(x_0)$ $\subset (a;b)$ да чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин ($x_0$ нуқтада ҳосила мавжуд бўлмаслиги ҳам мумкин).

1. Агар $\forall x \in U_\delta^-(x_0)$ учун, $f'(x) > 0$ , $\forall x \in U_\delta^+(x_0)$ учун $f'(x) < 0$ бўлса,

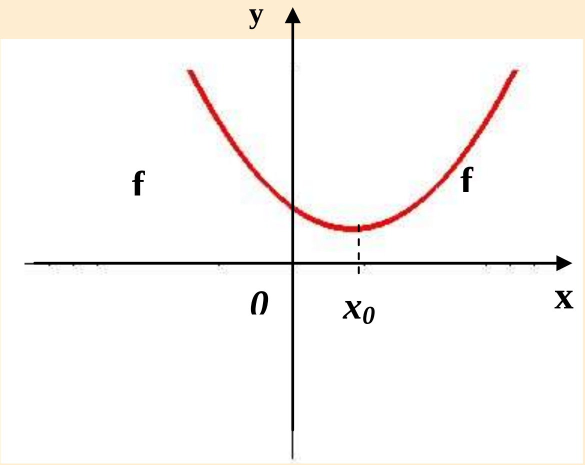
яъни $f^{/}(x)$ ҳосила $x_0$ нуқтадан ўтишда ўз ишорасини «+» дан «-» га ўзгартирса, $f(x)$ функция $x_0$ нуқтада локал максимумга эришади (16.5-чизма).

2. Агар $\forall x \in U_\delta^-(x_0)$ учун $f'(x) < 0$, $\forall x \in U_\delta^+(x_0)$ учун $f'(x) > 0$ бўлса,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



16.5-чизма.



16.6-чизма

яъни $f^{/}(x)$ ҳосила $x_0$ нуқтадан ўтишда ўз ишорасини «-» дан «+» га ўзгартирса $x_0$ нуқтада минимумга эришади (16.6-чизма)

Агар $\forall x\in U_{\delta}^{-}(x_0)$ учун $f'(x)>0$, $\forall x\in U_{\delta}^{+}(x_0)$ учун $f'(x)>0$ ёки $\forall x\in U_{\delta}^{-}(x_0)$ учун $f'(x)<0$, $\forall x\in U_{\delta}^{+}(x_0)$ учун $f'(x)<0$ бўлса, $f(x)$ функция $x_0$ нуқтада экстремумга эришмайди.

$y=f(x)$ функцияга экстремум қиймат берувчи нуқталарни *биринчи тартибли ҳосила ёрдамида топиш қоидаси:*

1. $f'(x)$ ҳосила топилади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

2. $y = f(x)$ функциянинг критик нуқталари, яъни $f'(x)$ ҳосила нолга айланадиган ёки узилишга эга бўлган нуқталар топилади.

3. Топилган критик нуқталар $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасини оралиқларга ажратади, шу оралиқларда $f'(x)$ ҳосиланинг ишораси текширилади.

4. Функциянинг экстремум нуқталардаги қийматлари ҳисобланади.

16.4- мисол. $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + 3$ функцияни экстремумга текширинг.

Ечилиши. Берилган функция $\forall x \in R$ учун аниқланган ва дифференциалланувчи.

1. $f'(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$

2. $f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3) = 0,$

бундан критик нуқталар $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$ эканлигини топамиз.

3. Оралиқлар усули ёрдамида қуйидаги жадвални тузамиз:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

| $x$ | $(-\infty;1)$ | $(1;\ 2)$ | $(2;\ 3)$ | $(3;\ +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | + | − | + |
| $f(x)$ | ↘ | ↗ | ↘ | ↗ |

4. Экстремум мавжуд бўлишининг биринчи етарли шартига асосан

$f_{\min}(1)=\frac{3}{4};\quad f_{\max}(2)=1,\quad f_{\min}(3)=\frac{3}{4}$ бўлишини топамиз.

16.5-мисол. $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$ функцияни экстремумга текширинг.

Ечилиши. Берилган функция $x=1$ нуқтадан ташқари $\forall x\in R$ да аниқланган ва дифференциалланувчи

$$1.\ f'(x)=\frac{(3x^2+4x)\ (x-1)^2-2(x-1)(x^3+2x^2)}{(x-1)^4}=\frac{x(x+1)(x-4)}{(x-1)^3}$$

$$2.\ f'(x)=0\Rightarrow\frac{x(x+1)(x-4)}{(x-1)^3}=0\Rightarrow x(x+1)(x-4)=0.$$

Бундан, $x_1=0,\ x_2=-1,\ x_3=4$ критик нуқталар эканлигини аниқлаймиз.

4. Ораликлар усули ёрдамида қуйидаги жадвални тузамиз:

5.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

| $x$ | $(-\infty;-1)$ | $(-1;\,0)$ | $(0;\,1)$ | $(1;\,4)$ | $(4;\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | – | + | – | + |
| $f(x)$ | ↗ | ↘ | ↗ | ↘ | ↗ |

4. Экстремум мавжуд бўлишининг биринчи етарли шартига асосан,

$$f_{\max}(-1)=\frac{1}{4}; \quad f_{\min}(0)=0, \quad f_{\min}(4)=\frac{32}{3}$$

бўлади.

16.6-мисол. Тенгламаси параметрик шаклида берилган ушбу

$$x=\frac{1}{t(t+1)}\ , \qquad y=\frac{(t+1)^2}{t}, \qquad t>0$$

функцияни экстремумга текширинг.

Ечилиши. $x(t)$ ва $y(t)$ функциялар $t$ параметрнинг $t>0$ қийматларида дифференциалланувчи:

$$x_t^{'}=-\frac{2t+1}{t^2(t+1)^2}\ , \qquad t>0 \ да \qquad x_t^{'}\neq 0. \qquad\qquad y_t^{'}=\frac{t^2-1}{t^2}.$$

1. Маълумки, бу ҳолда берилган функциянинг $y_x^{'}=f'(x)$ ҳосиласи $f^{'}(x)=\frac{y_t^{'}}{x_t^{'}}$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

формула бўйича топилади: $f'(x)=\frac{(t+1)^2(t^2-1)}{2t+1}$, $t>0$.

2. $f'(x)=\frac{(t+1)^3(t-1)}{2t+1}$ ҳосила $t=1$ нуқтада нолга айланади.

Демак, берилган функция битта критик нуқтага эга: $t=1$ да $x=\frac{1}{2}$.

Агар $x$, $x=\frac{1}{2}$ нуқтанинг чап томонида бўлганда $t$ параметр, $t=1$ нуқтанинг чап томонида бўлади, $t$ нинг бу қийматларида $f'(x)<0$, $x=\frac{1}{2}$ нуқтанинг ўнг атрофида ҳосила $f'(x)>0$ бўлади.

Шунинг учун $x=\frac{1}{2}$ нуқтада функция минимумга эга ва у $f_{\min}\left(\frac{1}{2}\right)=4$ бўлади.

16.7-мисол. Ушбу $f(x)=5\sqrt[5]{x^4}-x^4$ функцияни экстремумга текширинг.

Ечилиши. Берилган функция $R$ да аниқланган ва узлуксиз. Функциянинг ҳосиласи $f'(x)=4\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}-x^3\right)$ га тенг. $f'(x)=0$ тенгламанинг

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

илдизларини топамиз: $x=\pm 1$. Ҳосила $x=0$ нуқтада чексизликка айланади, яъни бу нуқтада чекли ҳосила мавжуд эмас.

Демак, функцияга экстремум берадиган нуқталарни $x_1=-1, x_2=0, \;\; x_3=1$ нуқталар орасидан излаш керак.

Оралиқлар усули ёрдамида қуйидаги жадвални тузамиз:

| $x$ | $(-\infty;-1)$ | $(-1;\,0)$ | $0$ | $(0;\,1)$ | $(1;\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | *mavjud emas* | $+$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | ↘ | $f_{\min}(0)=0$ | ↗ | ↘ |

Бу жадвалдан, $f'(x)$ ҳосиланинг $x_1=-1$ нуқтадан ўтишда ўз ишорасини «+» дан «-» га, $x_3=1$ нуқтадан ўтишда ҳам «+» дан «-» га ўзгартиради деган хулосага келамиз. Равшанки, берилган функция $x_1=-1, \;\; x_3=1$ нуқталарда узлуксиз. Демак, берилган функция $x_1=-1, \;\; x_3=1$ нуқталарда максимумга эга ва унинг максимум қийматлари: $f_{\max}(-1)=4, \;\; f_{\max}(1)=4;$ ниҳоят, $x=0$ нуқтада берилган функциянинг минимумга эга бўлиши юқоридагидек кўрсатилади ва унинг $x=0$ нуқтадаги минимуми қиймати $f_{\min}(0)=0$ бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

16.8-мисол. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(x-5)$ функцияни экстремумга текширинг.

Ечилиши. 1. $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(x-5)+\sqrt[3]{x^2}=\frac{5}{3}\frac{x-2}{\sqrt[3]{x}}$.

2. $x=0$ (бу нуқтада ҳосила узилишга эга) ва $x=2$ (бу нуқтада ҳосила нолга айланади) нуқталар критик нуқталардир.

3. Қуйидаги жадвални тузамиз:

| $x$ | $(-\infty;0)$ | 0 | (0; 2) | 2 | $(2;\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | Мавжуд<br>эмас | - | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | $f_{\max}(0)=0$ | ↘ | $f_{min}(2)\approx -4{,}8$ | ↗ |

4. $f_{\max}(0)=0,\ f_{\min}(2)=-3\sqrt[3]{4}\approx -4{,}8.$

*b*) Экстремум мавжуд бўлишининг иккинчи етарли шарти. $x_0$ нуқта $f(x)$ функциянинг стационар нуқтаси, яъни $f'(x_0)=0$ бўлсин. Агар $f(x)$ функциянинг $x_0$ нуқтадаги иккинчи тартибли ҳосиласи мавжуд бўлиб, $f''(x_0)<0$ $(f''(x_0)>0)$ бўлса, $f(x)$ функция $x_0$ нуқтада максимумга (минимумга) эришади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$y = f(x)$ функцияга экстремум қиймат берувчи нуқталарни *иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида топиш қоидаси:*

1. $f'(x)$ ҳосила топилади.

2. Берилган функциянинг критик нуқталари, яъни $f'(x)=0$ бўладиган нуқталар топилади.

3. Иккинчи тартибли ҳосила $f''(x)$ топилади.

4. Иккинчи тартибли ҳосиланинг ишораси ҳар бир критик нуқтада текширилади. Бунда агар иккинчи тартибли ҳосила манфий бўлса, у ҳолда функция текширилаётган нуқтада максимумга, мусбат бўлса, минимумга эга бўлади. Агар иккинчи тартибли ҳосила нолга тенг бўлса, у ҳолда функциянинг экстремумини биринчи етарли шарт бўйича текшириш ёки юқори тартибли ҳосилалардан фойдаланиб текширишга тўғри келади ( **с)** бандга қаранг).

5. Функциянинг экстремум нуқталардаги қийматлари ҳисобланади.

**16.9-мисол.** $f(x)=x^3-9x^2+24x-12$ функцияни иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида экстремумга текширинг.

Ечилиши. Берилган функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

ҳосилаларини топамиз:

$$f'(x)=3x^2-18x+24=3(x^2-6x+8)\Rightarrow f''(x)=6(x-3).$$

$3(x^2-6x+8)=0$ тенгламадан $x_1=2,$ $x_2=4$ стационар нуқталарни топамиз. Топилган иккинчи тартибли ҳосилаларнинг ҳар бир стационар нуқталардаги ишораларини аниқлаймиз: $f''(2)=-6<0,$ $f''(4)=6>0.$

Демак, $x_1=2$ нуқтада функция максимумга $f_{\max}(2)=8,$ $x_2=4$ нуқтада функция минимумга $f_{\min}(4)=4$ эга бўлади.

**16.10-мисол.** $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$ функцияни иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида экстремумга текширинг.

Ечилиши. Берилган функция $R$ нинг $x=1$ нуқтадан ташқари барча нуқталарида аниқланган ва дифференциалланувчи. Функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топамиз:

$$f'(x)=\frac{x(x^2-3x-4)}{(x-1)^3},\quad f''(x)=\frac{14x+4}{(x-1)^4}.$$

$x(x^2-3x-4)=0$ тенгламадан $x_1=-1,$ $x_2=0,$ $x_3=4$ стационар нуқталарни

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

топамиз. Иккинчи тартибли ҳосиланинг ҳар бир стационар нуқтадаги ишорасини аниқлаймиз:

$$f''(-1) = -\frac{5}{8} < 0 \qquad f''(0) = 4 > 0, \qquad f''(4) = \frac{20}{27} > 0.$$

Шундай қилиб, функция, экстремум мавжуд бўлишининг иккинчи етарли шартига кўра, $x_1 = -1$ нуқтада максимумга: $f_{\max}(-1) = \frac{1}{4}$; $x_2 = 0$ нуқтада минимумга: $f_{\min}(0) = 0$; $x_3 = 4$ нуқтада эса, минимумга: $f_{\min}(4) = \frac{32}{3}$ эга бўлар экан.

**16.11-мисол.** $f(x)=(x\text{-}2)^4$ функцияни экстремумга текширинг.

Ечилиши. Берилган функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топамиз: $f'(x)=4(x\text{-}2)^3$, $f''(x)=12(x\text{-}2)^2$.

$4(x-2)^3 = 0$ тенгламадан $x = 2$ стационар нуқта эканлигини топамиз. Иккинчи тартибли ҳосила $x = 2$ нуқтада нолга айланади, шунинг учун экстремумнинг биринчи етарли шарти бўйича берилган функцияни экстремумга текширамиз.

Равшанки, $\forall x \in U_\delta^-(2)$, яъни $x < 2$ учун $f'(x)=4(x\text{-}2)^3$ <0, $\forall x \in U_\delta^+(2)$,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

яъни $x>2$ учун $f'(x)=4(x-2)^3>0 \Rightarrow \quad x>2$ бўлади.

Демак, берилган функция, экстремумнинг биринчи етарли шартига кўра, $x=2$ нуқтада минимумга эришади: $f_{\min}(2)=f(2)=0$.

**16.12- мисол.** $f(x)=2\sin x+\cos 2x$ функцияни иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида экстремумга текширинг.

Ечилиши. Берилган функция даврий функция бўлгани учун уни экстремумга текширишни $[0,2\pi]$ кесмада олиб борамиз. Функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топамиз:

$$f^{/}(x)=2\cos x-2\sin 2x=2\cos x(1-2\sin x);\ f^{//}(x)=-2\sin x-4\cos 2x.$$

$2\cos x(1-2\sin x)=0$ тенгламадан функциянинг $[0;\ 2\pi]$ кесмадаги стационар нуқталарини топамиз: $x_1=\dfrac{\pi}{6}$, $x_2=\dfrac{\pi}{2}$, $x_3=\dfrac{5\pi}{6}$, $x_4=\dfrac{3\pi}{2}$.

Иккинчи тартибли ҳосиланинг ҳар бир стационар нуқталардаги ишораларини топамиз:

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-3<0,\quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=2>0,\quad f''\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-3<0,\qquad f''\left(\frac{3\pi}{2}\right)=6>0.$$

Шундай қилиб, функция экстремум мавжуд бўлишининг иккинчи

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

етарли шартга кўра, $x_1 = \frac{\pi}{6}$ нуқтада максимумга: $f_{\max}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$; $x_2 = \frac{\pi}{2}$ нуқтада минимумга: $f_{\min}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $x_3 = \frac{5\pi}{6}$ нуқтада минимумга: $f_{\min}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$; $x_4 = \frac{3\pi}{2}$ нуқтада эса, яна минимумга: $f_{\min}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3$; эга бўлар экан.

c) Экстремум мавжуд бўлишининг учинчи етарли шарти. $f(x)$ функциянинг $x_0 \in (a,b)$ нуқтада $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ ҳосилалари мавжуд бўлиб, бирор $n>2$ сон учун $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = \; = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ бўлсин.

Агар: *a*) *n* жуфт сон бўлиб ($n=2m$, $m \in N$), $f^{(n)}(x_0) = f^{(2m)}(x_0) < 0$ тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция $x_0$ нуқтада максимумга; $f^{(n)}(x_0) = f^{(2m)}(x_0) > 0$ тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция $x_0$ нуқтада минимумга эга бўлади.

*b*) *n* тоқ сон бўлса ($n=2m+1$, $m \in N$), $f(x)$ функция экстремумга эга бўлмайди.

**16.13- мисол**. Ушбу $f(x) = (x-c)^n$ функцияни экстремумга текширинг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Ечилиши. Равшанки, $f'(c)=f^{(2)}(c)=...=f^{(n-1)}(c)=0$, $f^{(n)}(c)=n!>0$ бўлади. Экстремумнинг учинчи етарли шартига кўра, $n$ жуфт бўлганда функция $x=c$ нуқтада минимумга эга бўлади, $n$ тоқ бўлганда эса экстремумга эга бўлмайди.

**16.14- мисол**. $f(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$ функцияни экстремумга текширинг.

Ечилиши. Берилган функция учун $f'(x)=-\sin x+x$ бўлиб, $f'(x)$ ҳосила $x=0$ нуқтада нулга айланади. $x=0$ стационар нуқтада функциянинг иккинчи, учинчи ва тўртинчи тартибли ҳосилаларини топамиз:

$$f''(x)=-\cos x+1;\quad f''(0)=0;\quad f'''(x)=\sin x;\quad f'''(0)=0;$$
$$f^{(4)}(x)=\cos x;\quad f^{(4)}(0)=1\neq 0.$$

Шундай қилиб, $x=0$ стационар нуқтада тўртинчи тартибли, яъни жуфт тартибли, ҳосила нолдан фарқли бўлиб, $f^{(4)}(0)=1>0$ бўлганлиги учун функция $x=0$ нуқтада минимумга эга, ва $f_{\min}(0)=0$.

**16.3. Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топиш.** $f(x)$ функция $[a;b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Вейерштрасснинг иккинчи теоремасига кўра, функциянинг $[a;b]$ да энг катта, ҳамда энг кичик қийматлари мавжуд ва функция бу қийматларга сегментнинг

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

нуқталарида эришади.

*Функциянинг энг катта қиймати қуйидагича топилади:*

1) $f(x)$ функциянинг $(a;\, b)$ оралиқдаги максимум қийматлари топилади. $f(x)$ функциянинг $(a;\, b)$ даги ҳамма максимум қийматларидан иборат тўплам $\{\max f(x)\}$ бўлсин.

2) $f(x)$ функциянинг $[a;\, b]$ сегментнинг чегарасидаги, яъни $x=a,\ x=b$ нуқталардаги $f(a)$ ва $f(b)$ қийматлари ҳисобланади. Сўнгра $\{\max f(x)\}$ тўпламнинг барча элементлари билан $f(a)$ ва $f(b)$ лар таққосланади. Бу қийматлар ичида энг каттаси $f(x)$ функциянинг $[a;\, b]$ даги энг катта қиймати бўлади. Худди шу усулда функциянинг энг кичик қиймати ҳам топилади.

Бирор оралиқда узлуксиз бўлган функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топиш учун:

1) бу оралиқда функциянинг тегишли стационар нуқталарини топиш, бу топилган стационар нуқталарни экстремумга текшириш ва функциянинг бу нуқталардаги қийматларини ҳисоблаш;

2) функциянинг оралиқнинг четки нуқталаридаги қийматларини топиш ;

3) топилган қийматларни функциянинг оралиқнинг ичидаги

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

нуқталаридаги экстремум қийматлари билан солиштириш керак; бу қийматларнинг энг кичиги ва энг каттаси, мос равишда, функциянинг қаралаётган оралиқдаги энг кичик ва энг катта қийматлари бўлади.

**16.15- мисол**. Ушбу $f(x)=x^2-4x+6$ функциянинг $[-3;10]$ оралиқда энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

Ечилиши. 1) $f'(x)=2x-4$; $f'(x)=2x-4=0$; бундан $x=2\in[-3,10]$ стационар нуқта бўлади. $f'(x)$ ҳосила $x=2$ нуқтадан ўтишда ўз ишорасини «-» дан «+» га ўзгартиради.

Демак, функция экстремуми мавжуд бўлишининг биринчи етарли шартига кўра, $x=2$ нуқтада минимум қийматга эга бўлади: $f_{\min}(2)=2$.

2) $f(-3)=27,\ f(10)=66.$

3) Шундай қилиб, функциянинг $[-3;10]$ оралиқдаги энг кичик қиймати $2$ га тенг бўлиб, функция унга оралиқнинг ички нуқтасида эришади, энг катта қиймати 66 га тенг бўлиб, функция унга оралиқнинг ўнг четида эришади: $f_{eng\ kichik}=f(2)=2,\quad f_{eng\ katta}=f(10)=66,$

**16.16- мисол**. Ушбу $f(x)=\sqrt{5-4x}$ функциянинг $[-1;1]$ оралиқда энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Ечилиши. Берилган функция $[-1;1]$ оралиқда нолдан фарқли ҳосилага эга: $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{5-4x}}$. Бундан, функция энг катта ва энг кичик қийматига оралиқнинг четки нуқталарида эришади: $f(-1)=3,\ f(1)=1.$

Шундай қилиб, берилган функциянинг $[-1;1]$ оралиқдаги энг катта қиймати $3$ га, энг кичик қиймати эса $1$ га тенг:

$$f_{eng\ katta} = f(-1)=3,\quad f_{eng\,kichik} = f(1)=1.$$

**16.17- мисол.** $f(x) = \arccos x^2$ функциянинг $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ оралиқдаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

Ечилиши. Берилган функция қаралаётган оралиқда $f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ ҳосилага эга. $-\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} = 0$ тенгламадан $x=0$ стационар нуқтани топамиз. $f'(x)$ ҳосила $x=0$ нуқтадан ўтишда ўз ишорасини «+» дан «-» га ўзгартиради.

Демак, берилган функция $x=0$ нуқтада максимум қийматга эришади: $f_{\max}(0) = \frac{\pi}{2}$. Функциянинг оралиқнинг четки нуқталаридаги қийматлари

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$f(\pm\sqrt{2}/2)=\frac{\pi}{3}$.

Шундай қилиб, функциянинг $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ оралиқдаги энг катта қиймати $f(0)=\frac{\pi}{2}$ га, энг кичик қиймати эса $f(\pm\sqrt{2}/2)=\frac{\pi}{3}$ га тенг.

**16.18- мисол**. Консерва банкаси радиуси *r* ва баландлиги *h* бўлган цилиндрдан иборат. *r* ва *h* лар орасидаги муносабат қандай бўлганда тўла сирти ўзгармас бўлган консерва банкаси энг катта ҳажмга эга бўлади?

Ечилиши. Консерва банкасининг тўла сиртини *S* билан белгилаймиз. Маълумки,

$$S=2\pi r^2+2\pi rh,\ \ h=const, \qquad (1)$$

бундан $h=\dfrac{S}{2\pi\ r}-r$. Консерва банкасининг хажми $V=\pi r^2h=\dfrac{S}{2}r-\pi r^3$.

Демак, масала $V(r)=\dfrac{S}{2}r-\pi r^3$ функциянинг энг катта қийматини топишга келтирилди. Шунинг учун бу функцияни максимумга текширамиз. $V'(r)=$ $\dfrac{S}{2}-3\pi r^2$, $r>$о эканлигини эътиборга олиб,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}} \qquad (2)$$

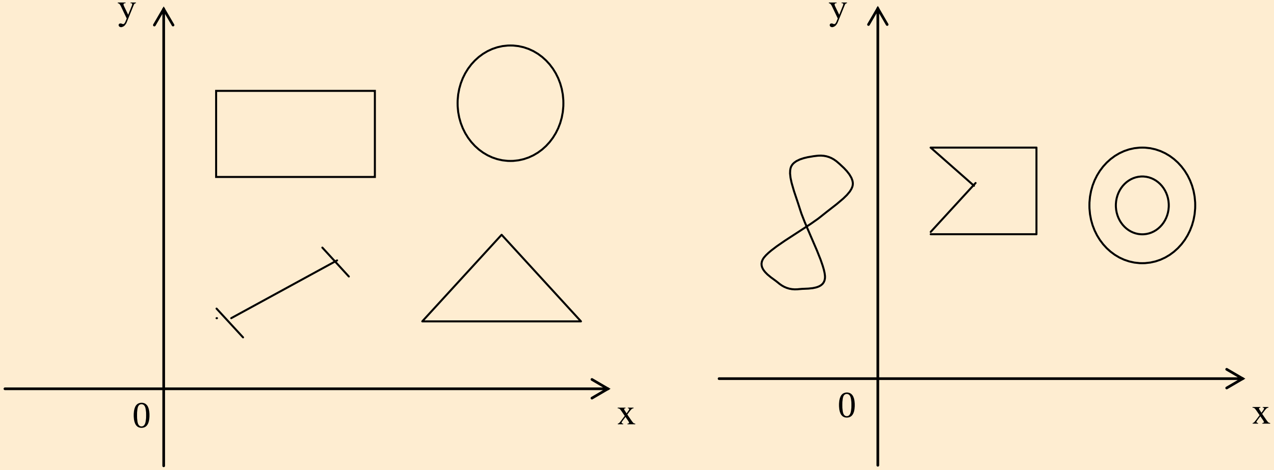
бўлишини топамиз.

Функция экстремумга эга бўлса, у фақат $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ нуқтада эга бўлиши мумкин. $r < \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ бўлганда $V'(r) = 3\pi\left(\frac{S}{6\pi} - r^2\right) > 0$ бўлади. $r > \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ бўлганда эса $V'(r) < 0$ бўлади.

Демак, функция экстремумга эга бўлишининг биринчи етарли шартига асосан, *V(r)* функция $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ нуқтада максимумга эришади. Энди консерва банкаси, энг катта ҳажмга эга бўлиши учун *r* билан *h* орасида қандай боғланиш борлигини аниқлаймиз.(1) билан (2) дан $\frac{h}{r} = 2$, *h=2r*. Демак, энг катта ҳажмга эга бўлган консерва банкасини ясашда унинг баландлигини диаметрга тенг қилиб олиш етарли.

## 16.4. Функция графигининг қавариқлиги ва ботиқлиги.

Функция графигининг эгилиш (букилиш) нуқталарини топишда қавариқ тўплам ва қавариқ функция тушунчаси муҳим аҳамиятга эга. Шунинг



*a*) 16.7-чизма *b*)

учун биз аввало қавариқ тўплам ва қавариқ функция тушунчаларини берамиз.

Бўш бўлмаган $G$ $(G \subset R^2)$ тўплам берилган бўлсин.

**1-таъриф.** Агар $G$ тўпламнинг ихтиёрий икки нуқтаси билан бирга уларни туташтирувчи кесма ҳам шу тўпламга қарашли бўлса, $G$ – *қавариқ тўплам* дейилади. Бошқача айтганда, агар $\forall\, x, y \in G$ ва барча $\lambda \in [0;1]$ учун $\lambda x + (1-\lambda) y \in G$ бўлса, $G$ – *қавариқ тўплам* дейилади.

16.7- *a*) -чизмадаги тўғри тўртбурчак, доира, учбурчаклар қавариқ тўпламларга мисол бўла олади, 16.7- *b*)-чизмадаги шакллар эса, қавариқ

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

бўлмаган тўпламлардир. Ягона элементли ва бўш тўпламларни ҳам қаварик тўплам деб қараш мумкин.

**2-таъриф.** Агар ихтиёрий $x, y \in G$, $x \neq y$ нуқталар ва барча $\lambda \in (0,1)$ сонлар учун $\lambda x + (1-\lambda) y$ – $G$ тўпламнинг ички нуқтаси бўлса, $G$ – *қатъий қаварик тўплам* дейилади. Масалан, доира қатъий қаварик тўплам бўлади, параллепипед эса қатъий қаварик тўплам эмас.

$f(x)$ функция $G$ – қаварик тўпламда берилган бўлсин.

**3-таъриф.** Агар $\forall\, x, y \in G$ ва $\forall \lambda \in [0;1]$ учун

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda\ f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, қаварик $G$ тўпламда аниқланган ва чекли $f(x)$ функция *қаварик* дейилади $(16.7\text{-}a)$-чизма).

**4-таъриф.** Агар $\forall\, x, y \in G$, $x \neq y$ нуқталар ва $\forall \lambda \in (0;1)$ учун

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda\ f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

қатъий тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция $G$ тўпламда *қатъий қаварик* дейилади.

**5-таъриф.** Агар $g(x) = -f(x)$ функция қаварик $G \subset R^2$ тўпламда қаварик

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

бўлса, $f(x)$ функция $G$ тўпламда *ботиқ* дейилади (16.8-$b$)-чизма).

Мисоллар. 1) $f(x)=|x|$, $x\in R$, функция қаварикдир, чунки $\forall x_1,\ x_2\in R$, $x_1\neq x_2$ нуқталар ва $\forall\lambda\in[0;1]$ учун $|\lambda x_1+(1-\lambda)x_2|\le\lambda|x_1|+(1-\lambda)|x_2|$ тенгсизлик ўринли бўлади.

2) $f(x)=e^x$ функция $R$ да қатий қаварик функциядир, чунки $\forall x_1,\ x_2\in R,\ \ x_1\neq x_2$ нуқталар ва $\forall\lambda\in(0,1)$ учун

$$e^{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}<\lambda e^{x_1}+(1-\lambda)e^{x_2}$$

тенгсизлик бажарилади.

3) $f(x)=-e^x$ функция $R$ да ботиқ функция бўлади.

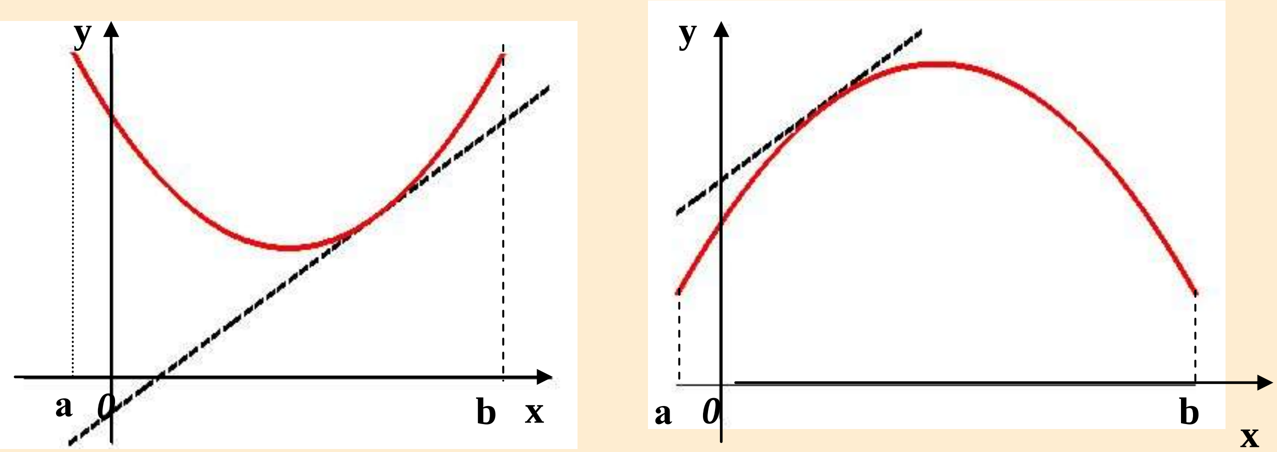
Амалиётда, кўпинча, функция графиги қавариқлиги (ботиқлиги)ни текширишда юқоридаги келтирилган таърифларга эквивалиент бўлган қуйидаги таърифлардан фойдаланилади.

$y=f(x)$ функция $(a,b)$ оралиқда берилган бўлсин. Агар $y=f(x)$ функциянинг графиги $(a,b)$ оралиқнинг ихтиёрий нуқтасидан ўтказилган уринмадан юқорида (пастда) ётса, бу функциянинг графиги *қавариқ (ботиқ)* дейилади (16.7-$a$), 16.8-$b$) чизмалар).

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Ҳосила ёрдамида функция графигининг қавариқлиги ва ботиқлигини текшириш мумкин.

$y = f(x)$ функция $(a,b)$ оралиқда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин.



*a*)  b)

16.8-чизма.

**19.5-теорема.** $f(x)$ функциянинг графиги $(a,b)$ оралиқда қаварик (қатъий қаварик) бўлиши учун, унинг $f'(x)$ ҳосиласининг шу оралиқда

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

камаювчи (қатъий камаювчи) бўлиши зарур ва етарли.

**16.6-теорема.** $f(x)$ функциянинг $(a,b)$ оралиқда ботиқ (қатъий ботиқ) бўлиши учун, унинг $f'(x)$ ҳосиласининг шу оралиқда ўсувчи (қатъий ўсувчи) бўлиши зарур ва етарли.

$y=f(x)$ функция $(a,b)$ оралиқда иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлсин.

**16.7-теорема.** $f(x)$ функциянинг графиги $(a,b)$ оралиқда қаварик (ботиқ) бўлиши учун $f''(x)\geq 0$ $(f''(x)\leq 0)$ тенгсизликнинг ўринли бўлиши зарур ва етарли.

16.19-мисол. Ушбу $f(x)=x^4-2x^3+6x-4$ функция графигининг қавариқлик ва ботиқлик оралиқларини топинг.

Ечилиши. $f'(x)=4x^3-6x^2+6$, $f''(x)=12x^2-12x=12(x^2-x)=12x(x-1)$ ларни топамиз. Равшанки, $(-\infty;0)$ ва $(1;\ \infty)$ оралиқларда $f''(x)>0$ тенгсизлик ўринли, яъни бу оралиқларда функциянинг графиги қаварик бўлади, $(0,1)$ оралиқда эса $f''(x)<0$ тенгсизлик ўринли, яъни бу оралиқда функциянинг графиги ботик бўлади.

## 16.5. Функция графигининг эгилиш нуқталари.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$f(x)$ функция $x_0$ нуқтанинг бирор $U_\delta(x_0)$ $(\delta>0)$ атрофида аниқланган бўлсин.

**16.3-таъриф**. Агар $f(x)$ функция $U_\delta^-(x_0)$ ораликда ботиқ (қавариқ) бўлиб, $U_\delta^+(x_0)$ ораликда эса қавариқ (ботиқ) бўлса, яъни $f(x)$ функция $x_0$ нуқтадан ўтишда ўз қавариқлигининг йўналишини ўзгартирса, у ҳолда $x_0$ нуқта $f(x)$ функциянинг *эгилиш нуқтаси* дейилади, бу ҳолда $(x_0, f(x_0))$ нуқта $f(x)$ *функция графигининг эгилиш нуқтаси* дейилади.

Агар $x_0\in(a,b)$- $f(x)$ функция графиги эгилиш нуқтасининг абсциссаси бўлса, бу нуқтада иккинчи тартибли ҳосила мавжуд бўлиши ҳам, бўлмаслиги ҳам мумкин.

Функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи нолга айланадиган ёки мавжуд бўлмайдиган нуқталар *II тур критик нуқталар* дейилади. Бу нуқталарда эгилиш мавжуд бўлиши ҳам, бўлмаслиги ҳам мумкин. Масалан, $x=0$ нуқта $y=x^3$ ва $y=x^{\frac{1}{3}}$ функциялар учун эгилиш нуқтаси бўлиб, $y=x^3$ функциянинг $x=0$ нуқтада иккинчи тартибли ҳосиласи мавжуд, $y=x^{\frac{1}{3}}$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи эса, мавжуд эмас.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**16.8-теорема** (эгилиш нуқтаси бўлишнинг зарурий шарти). Агар $M(x_0, f(x_0))$ нуқта $f(x)$ функция графигининг эгилиш нуқтаси бўлиб, $f(x)$ функция $x_0$ нуқтада иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $f''(x_0)=0$ бўлади.

Бу шарт функция графиги эгилиш нуқтасига эга бўлиши учун етарли шарт бўла олмайди.

Масалан, $f(x)=x^4$ функциянинг $f''(x)=12x^2$ ҳосиласи $x=0$ нуқтада нолга айланади, лекин функциянинг графиги $M(0;\,0)$ нуқтада эгилишга эга эмас.

**16.9-теорема** (эгилиш нуқтаси бўлишнинг биринчи етарли шарти). $f(x)$ функция $x_0$ нуқтанинг бирор атрофида иккинчи тартибли ҳосилага эга ва $f''(x_0)=0$ бўлсин. У ҳолда, кўрсатилган атрофда $f''(x_0)$ иккинчи тартибли ҳосила $x_0$ нуқтанинг чап ва ўнг атрофида ҳар хил ишорага эга бўлса, у ҳолда $M(x_0, f(x_0))$ нуқта $f(x)$ функция графигининг эгилиш нуқтаси бўлади.

**16.10-теорема** (эгилиш нуқтаси бўлишнинг иккинчи етарли шарти). Агар $f(x)$ функция $x_0$ нуқтада чекли учинчи тартибли ҳосилага эга ва бу нуқтада

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$f''(x_0)=0, \quad f'''(x_0)\neq 0$ шартларни қаноатлантирса, у ҳолда $M(x_0, f(x_0))$ нуқта $f(x)$ функция графигининг эгилиш нуқтаси бўлади.

**16.11-теорема** (эгилиш нуқтаси бўлишнинг учинчи етарли шарти). $n\geq 2$ – бирор жуфт сон бўлсин. Агар $f(x)$ функция $x_0$ нуқтанинг бирор атрофида $n$ тартибли ҳосилага, $x_0$ нуқтанинг ўзида эса $n+1$ тартибли ҳосилага эга бўлиб, $f^{(1)}(x_0)=f^{(2)}(x_0)=\ldots=f^{(n)}(x_0)=0, \ f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$ шартлар бажарилса, у ҳолда $M(x_0, f(x_0))$ нуқта $f(x)$ функция графигининг эгилиш нуқтаси бўлади.

*$y=f(x)$ функция графигининг эгилиш нуқталарини топиш қоидаси:*

1.Функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи $f''(x)$ топилади;

2. $y=f(x)$ функциянинг II тур критик нуқталари, яъни $f''(x)$ ҳосила нолга айланадиган ёки узилишга эга бўлган нуқталар топилади;

3.Топилган критик нуқталар $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасини оралиқларга ажратади. Бу оралиқларда иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосиланинг ишораси текширилади. Агар бунда $x_0$ критик нуқта қавариқлик ва ботиқлик оралиқларини ажратиб турса, $x_0$ нуқта функция графигининг эгилиш нуқтаси

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

абсциссасидан иборат бўлади;

4.Функциянинг эгилиш нуқталаридаги қийматлари ҳисобланади.

16.20- мисол. $f(x)=6x^2-x^3$ функция графигининг эгилиш нуқталарини топинг.

Ечилиши. 1. $f'(x)=12x-3x^2$, $f''(x)=12-6x.$

2. $f''(x)=0 \Rightarrow 12-6x=0$, яъни $x=2$ ягона критик нуқта.

3. $(-\infty;\ 2)$ оралиқда $f''(x)>0$, $(2;\ +\infty)$ оралиқда эса, $f''(x)<0$ бўлгани учун 16.9-теоремага кўра, $x=2$ нуқта функция графиги эгилиш нуқтасининг абсциссасидир.

4. Бу нуқтанинг ординатасини топамиз: $f(2)=16$.

Шундай қилиб, $(2;16)$ -функция графигининг эгилиш нуқтаси бўлар экан.

16.21- мисол. $f(x)=3x^4$-$8x^3+6x^2$ $+12$ функция графигининг қавариқлик, ботиқлик оралиқларини ва эгилиш нуқталарини топинг.

Ечилиши. Берилган функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топамиз: $f'(x)=12x^3$-$24x^2+12x$, $f''(x)=36x^2$-$48x+12$,

$36x^2$-$48x+12=0$ тенгламадан $x_1=1$ ва $x_2=\frac{1}{3}$ илдизларни топиб функциянинг

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

иккинчи тартибли ҳосиласининг 1 ва 1/3 нуқтадаги ҳийматларини ҳисоблаймиз:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad f''(1) = 0, \quad f''\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$$

Қуйидаги жадвални тузамиз:

| $x$ | $-\infty < x < \frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3} < x < 1$ | $1 < x < \infty$ |
|---|---|---|---|
| $sign f''$ | + | - | + |
| $f(x)$ | $\cup$<br>қаварик | $\cap$<br>ботиқ | $\cup$<br>қаварик |

Шундай қилиб, $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$, $(1;\infty)$ оралиқларда $f''(x) > 0$, $\left(\frac{1}{3};1\right)$ оралиқда эса $f''(x) < 0$ бўлади.

Демак, 16.7-теоремага асосан, $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ **ва** $(1;\infty)$ оралиқларда функция графиги қаварик, $\left(\frac{1}{3};1\right)$ оралиқда ботиқ. $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$ нуқталардан ўтишда $f''(x)$ ҳосила ўз ишорасини ўзгартиради. У ҳолда, 16.9-теоремага асосан,

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$(1;13)$, $\left(\frac{1}{3};\frac{335}{27}\right)$ нуқталар берилган функциянинг графиги учун эгилиш нуқталари бўлади.

16.22- мисол. Ушбу $f(x)=x^4-6x^2+6x-1$ функция графигининг қавариқлик ботиқлик оралиқларини ва эгилиш нуқталарини топинг.

Ечилиши. $f(x)$ функциянинг биринчи, иккинчи ва учинчи тартибли ҳосилаларини топамиз:

$$f(x)=4x^3-12x-6,\quad f'(x)=12x^2-12=12(x^2-1),\quad f'''(x)=24x$$

$12(x^2-1)=0$ тенгламадан $x_1=-1$ ва $x_2=1$. Бу нуқталарда $f''(\pm1)=0$ ва $f'''(\pm1)\neq0$. Қуйидаги жадвални тузамиз:

| $x$ | $-\infty<x<-1$ | $-1<x<1$ | $1<x<\infty$ |
|---|---|---|---|
| sign $f''$ | + | - | + |
| $f(x)$ | $\cup$<br>қаварик | $\cap$<br>ботик | $\cup$<br>қаварик |

Бу жадвалдан, 16.7-теоремага асосан, берилган функциянинг графиги

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$ ораликқларда қаварик, $(-1;1)$ ораликда эса, ботиқлигига ишонч ҳосил қиламиз.

$f'''(\pm 1)=0$ бўлганлиги, ҳамда $x=\pm 1$ нуқталарнинг чап ва ўнг томонларида $f''(x)$ ҳосила ўз ишорасини ўзгартиргани учун $x=\pm 1$ нуқталар функция графиги эгилиш нуқталарининг абсциссалари бўлади, яъни $(-1;\,0)$ , $(1;\,-12)$ нуқталар функция графигининг эгилиш нуқталари бўлади.

$(-1;\,0)$ , $(1;\,-12)$ нуқталар функция графиги учун эгилиш нуқталари эканлигини, бошқа усул, яъни 16.11-теорема орқали ҳам кўрсатиш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, $f''(\pm 1)=0$, $f'''(x)=24x$, $f'''(\pm 1)\neq 0$ бўлганлиги учун, 16.10-теоремага асосан, $(-1;\,0)$ , $(1;\,-12)$ нуқталар функция графиги учун эгилиш нуқталари бўлар экан.

16.23- мисол. $f(x)=x\sin(\ln x)$ $(x>0)$ функция графигининг қавариқлиги, ботиқлик оралиқларини ва эгилиш нуқталарини топинг.

Ечилиши. Берилган функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топамиз:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$f'(x)=\sin(\ln x)+x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}=\sin(\ln x)+\cos(\ln x),$$

$$f''(x)=\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}-\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{2}}{x}\cos\left(\ln x+\frac{\pi}{4}\right).$$

$x_{\mathbf{k}}=e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}\ (k=0,\pm1,\pm2,...)$ нуқталарда $f^{'}(x)=0$ бўлади.

$-\frac{3\pi}{4}+2k\pi<\ln x<\frac{\pi}{4}+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,...)$ оралиқда $f''(x)>0$,

$\frac{\pi}{4}+2k\pi<\ln x<\frac{5\pi}{4}+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,...)$ оралиқда эса $f''(x)<0$ бўлади.

Шундай қилиб,

$$e^{-\frac{3\pi}{4}+2k\pi}<x<e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}\ ,\ (k=0,\pm1,\pm2,...)$$

оралиқда функция графиги қаварик,

$$e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}<x<e^{\frac{5\pi}{4}+2k\pi},\ (k=0,\pm1,\pm2,...)$$

оралиқда ботиқ,

$$\left(e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi};\ \frac{(-1)^k e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}}{\sqrt{2}}\right)\quad(k=0,\pm1,\pm2,...)$$

нуқталар эса, функция графигининг эгилиш нуқталари бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

16.24- мисол. Тенгламаси параметрик шаклда берилган ушбу

$$x=t\cdot e^{t},\ y=t\ e^{-t},\ t>0 \qquad (*)$$

функция графигининг эгилиш нуқтасини топинг.

Ечилиши. Маълумки, (*) тенглама билан берилган $y=f(x)$ функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари қуйидаги формулалар билан топилади:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t},\quad y''_{xx}=(y'_x)'\cdot\frac{1}{x'_t}\cdot,\ x'_t\neq 0.$$

Бунда $y'_t=e^{-t}(1-t)$, $x'_t=e^{t}(1+t)$ , $(y'_x)'_t=-\frac{2e^{-2t}(2-t^2)}{(1+t)^2}$ .

Шундай қилиб, $y''_{xx}=-\dfrac{2e^{-2t}(2-t^2)}{(1+t)^3}$ иккинчи тартибли ҳосила $t=\sqrt{2}$ да нулга айланади ва у $t=\sqrt{2}$ нуқтадан ўтишдан ўз ишорасини ўзгартиради. Параметрнинг бу қийматида $y=f(x)$ функциянинг графиги эгилиш нуқтасига эга бўлади. Параметрнинг $t=\sqrt{2}$ қийматига функция графигининг $\left(\sqrt{2}\cdot e^{\sqrt{2}};\ \sqrt{2}\cdot e^{-\sqrt{2}}\right)$ нуқтаси тўғри келади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Демак, $\left(\sqrt{2}\cdot e^{\sqrt{2}};\ \sqrt{2}\cdot e^{-\sqrt{2}}\right)$ нуқта функциянинг графиги учун эгилиш нуқтаси бўлади.

16.25- мисол. $a, b, c$ коэффициентларнинг қандай қийматларида ушбу

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

функциянинг графиги эгилиш нуқтасига эга бўлади.

Ечилиши. Берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топамиз: $f''(x)=12ax^2+6bx+2c$. Функциянинг графиги эгилиш нуқтасига эга бўлиши учун $6ax^2+3bx+c=0$ тенглама иккита ҳар хил ҳақиқий илдизга эга бўлиши зарур ва етарли, ёки $3b^2-8ac>0$ шарт бажарилиши керак.

**16.6. Қаварик функцияларнинг тенгсизликларни ечишда қўлланилиши.** Қаварик тўпламлар ва қаварик функциялар тушунчаси классик асосий тенгсизликларни исбот қилишда муҳим роль ўйнайди. Асосий классик тенгсизликлар ичида энг муҳими Йенсен тенгсизлиги ҳисобланади. Қолган классик тенгсизликлар, хусусий ҳолда, яъни натижа сифатида, Йенсен тенгсизлигидан келиб чиқади. Шунинг учун Йенсен тенгсизлигини қаварик функция таърифидан фойдаланиб, батафсил исбот қиламиз.

***Теорема (Йенсен тенгсизлиги).***___ $f(x)$ функция бирор

Титул варақ
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$(a,b)$ интервал*да қаварик* функция бўлсин. $x_1, x_2 ....., x_n$ лар - $(a,b)$ интервалдан олинган ихтиёрий нуқталар, $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ лар эса, ихтиёрий мусбат сонлар бўлиб, уларнинг йиғиндиси 1 га тенг бўлсин. У ҳолда

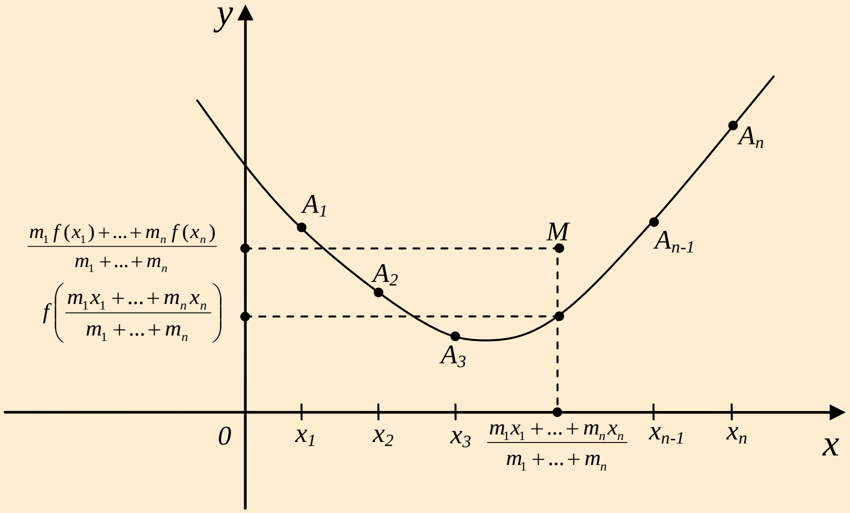
$$f(\lambda_1 x_1 + ....+ \lambda_n x_n)\le \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+...+\lambda_n f(x_n) \qquad (1)$$

тенгсизлик ўринли. Одатда (1) тенгсизлик- *Йенсен тенгсизлиги* дейилади.

**Исботи**. Шартга кўра $y=f(x)$ қаварик функция бўлгани учун унинг графигини 16.9- чизмада берилган кўринишда тасвирлаш мумкин. $y=f(x)$ функция графигидан абсциссалари $x_1 x_2,....,x_n$ бўлган $A_1, A_2,...,A_n$ нуқталарни олиб, бу нуқталарга массалари $m_1, m_2,...,m_n$ бўлган юклар жойлаштирилган, деб фараз қиламиз. Унда физикадан маълумки, бу нуқталардаги массалар марказининг координаталари қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i};\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\right)$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



16.9-чизма.

$A_1, A_2, ...., A_n$ нуқталар қаварик функция графигининг юқорисидаги қаварик тўпламда ётганлиги учун улар массаларининг маркази ҳам шу қаварик тўпламда ётади. Шунинг учун массалар маркази – М нуқтанинг ординатаси

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$y=f(x)$ функция графигидаги абсциссаси $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}$ бўлган нуқтанинг ординатаси $f\left(\dfrac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}\right)$ дан кичик бўлмайди, яъни

$$f\left(\frac{mx_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}\right)\le\frac{m_1f(x_1)+m_2f(x_2)+\ldots+m_nf(x_n)}{m_1+m_2+\ldots+m_n} \qquad (2)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бунда $m_1=\lambda_1,\ldots,m_n=\lambda_n$ деб олсак, (1) Йенсен тенгсизлиги исбот бўлади. (1) ва (2) тенгсизликлар ўзаро эквивалент. Ҳақиқатан ҳам, (1) тенгсизликни исбот қилиш давомида (2) тенгсизликни исбот қилдик, агар (1) да $\lambda_i=\dfrac{m_i}{m_1+\ldots+m_n}$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ деб олсак, натижада (2) тенгсизликни ҳам Йенсен тенгсизлиги деб айтиш мумкин.

Агар $f(x)$ ботиқ функция бўлса, у ҳолда (1) ва (2) Йенсен тенгсизликларидаги тенгсизлик ишораси қарама-қаршисига ўзгаради. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун - $f(x)$ қаварик функцияни қараш етарли.

**16.25- мисол**. Ушбу

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$(a_1b_2+....+a_nb_n)^2\le\left(a_1^{\ 2}+a_2^2+...+a_n^2\right)\cdot\left(b_1^{\ 2}+b_2^2+...+b_n^2\right)$$

Коши – Буняковский тенгсизлигини исбот қилинг. Бунда $a_i$ ва $b_i$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ лар ихтиёрий мусбат сонлар.

**Ечилиши**. Равшанки, $y=x^2$ қаварик функциядир. Шу сабабга кўра, бу функция учун Йенсен тенгсизлигини қўллаш мумкин:

$$\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+...+m_nx_n}{m_1+m_2+...+m_n}\right)^2\le\frac{m_1x_2^{\ 2}+m_2x_2^{\ 2}+....+m_nx_n^{\ 2}}{m_1+m_2+...+m_n}\qquad(m_i>0)$$

Бундан $(m_1x_1+....+m_nx_n)^2\le\left(m_1x_1^{\ 2}+...+m_nx_n^{\ 2}\right)\left(m_1+...+m_n\right)$ тенгсизлик келиб чиқади. Бу ерда $m_i=b_i^{\ 2}$, $x_i=\dfrac{a_i}{b_i}$ деб олсак, Коши – Буняковский тенгсизлиги исбот бўлади.

**16.26- мисол**. Ўрта арифметик ва ўрта геометрик микдорлар ҳақида Коши тенгсизлигини, яъни

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1...x_n}\qquad\left(x_i>0,\ i=\overline{1,n}\right)$$

тенгсизликни исботланг.

**Ечилиши**. Бу тенгсизликнинг иккала томонини логарифмлаш

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

натижасида

$$\ln\left(\frac{1}{n}x_1+\frac{1}{n}x_2+\ldots+\frac{1}{n}x_n\right)\geq\frac{1}{n}\ln x_1+\frac{1}{n}\ln x_2+\ldots+\frac{1}{n}\ln x_n$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу тенгсизлик Йенсен тенгсизлигини эслатади, лекин тенгсизлик қарама – қарши ишорали, чунки $\ln x$ функция қаварик эмас, лекин $-\ln x$ функция қаварик бўлади. Шунинг учун $\lambda_i=\frac{1}{n}\left(i=\overline{1,n}\right)$ деб олиб, $-\ln x$ функция учун Йенсен тенгсизлигини қўлласак, натижада Коши тенгсизлигини ҳосил қиламиз.

**16.27- мисол**. Ушбу

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\ p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{\ q}\right)^{\frac{1}{q}},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ \left(a_i,b_i>0\right)$$

тенгсизликни (Гельдёр тенгсизлигини) исботланг.

**Ечилиши**. Равшанки, $x>0,\ p>1$ бўлганда $y=x^p$ функция қаварик функция. Демак, бу функцияга (2) Йенсен тенгсизлигини қўллаш мумкин.

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum\limits_{n=1}^{n}m_i}\right)^p\leq\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_ix_i^{\ p}}{\sum\limits_{n=1}^{n}m_i}$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Бу тенгсизликдан, $\sum_{n=1}^{n} m_i x_i \le \left(\sum_{n=1}^{n} m_i\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{n} m_i x_i^{\ p}\right)^{\frac{1}{p}}$ Шартга кўра, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ бўлгани учун, $\frac{p-1}{p}=\frac{1}{q}$. Буни эътиборга олган ҳолда, кейинги тенгсизликдан

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^{\ p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^{\frac{1}{q}}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенгсизликда $m_i = b_i^{\ q}$, $x_i = a_i b_i^{\ 1-q}$ деб олинса, у ҳолда исбот қилиниши керак бўлган Гельдер тенгсизлиги келиб чиқади.

**16.28- мисол**. Ушбу

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} + \sqrt[n]{b_1 .. b_n} \le \sqrt[n]{(a_1+b_1).....(a_n+b_n)} \quad (a_i, b_i > 0)$$

Минковский тенгсизлигини исботланг.

**Ечилиши.** Тенгсизликнинг иккала томонини $\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$ га бўламиз натижада

$$1+\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}} .... \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} \le \left(1+\frac{b_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}} .... \left(1+\frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бунда $x_i=\ln\frac{b_i}{a_i}$, $\frac{b_i}{a_i}=e^{x_i}$ деб тенгсизликни қуйидаги $1+e^{\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n}x_i}\le\Pi\left(1+e^{x_i}\right)^{\frac{1}{n}}$ кўринишга келтирамиз. Тенгсизликнинг иккала томонини логарифмлаш натижасида

$$\ln\left(1+e^{\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n}x_i}\right)\le\sum\frac{1}{n}\ln\left(1+e^{x_i}\right)$$

ни ҳосил қиламиз. $y=\ln\left(1+e^{x}\right)$ функция қаварик функция. Кейинги тенгсизлик $y=\ln\left(1+e^{x}\right)$ учун Йенсен тенгсизлигини ифодалайди.

16.7. Функцияларни тўлиқ текшириш ва уларнинг графикларини чизиш. Биз III бобнинг юқоридаги параграфларида функцияларнинг ўзгариш характерини ҳосилалар ёрдамида ўргандик. Функциянинг ўзгариш характерини ҳосила ёрдамида ўрганиш функция графигини аниқроқ ясашда муҳим рол ўйнайди.

*Функцияларни тўлиқ текшириш ва уларнинг графикларини ясашни қуйидаги схема бўйича олиб бориш мақсадга мувофиқ бўлади:*

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

1. Функциянинг аниқланиш соҳасини топиш;
2. Функцияни узлуксизликка текшириш ва узилиш нуқталарини топиш;
3. Функциянинг жуфт, тоқлиги ҳамда даврийлигини аниқлаш;
4. Функция графигининг ўқлар билан кесишиш нуқталарини топиш;
5. Функциянинг ишораси сақланадиган оралиқларни аниқлаш;
6. Функция графигининг асимптоталарини топиш;
7. Функциянинг монотонлик оралиқларини топиш ва экстремумга текшириш;
8. Функция графигининг қавариқлиги ҳамда ботиқлигини аниқлаш, эгилиш нуқталарини топиш;
9. Функциянинг графигини чизиш.

16.29- мисол. $f(x)=x^3-3x^2+4$ функцияни тўлиқ текширинг ва графигини чизинг.

Ечилиши. Берилган функция R да аниқланган, узлуксиз ва дифференциалланувчи. Функциянинг графиги асимптоталарга эга эмас,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

Берилган функцияни ушбу $f(x)=(x+1)(x\text{-}2)^2$ кўринишда тасвирлаймиз.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$(x+1)(x-2)^2=0$ тенгламадан $x_1=$-1, $x_2=2$ нуқталар $f(x)=0$ тенгламанинг илдизлари эканлигини топамиз.

Демак, функциянинг графиги $(-1;\,0)$, $(2;\,0)$ нуқталарда абсцисса ўқи билан, $(0;4)$ нуқтада эса, ордината ўқи билан кесишади.

Функцияни экстремумга текширамиз: $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$. Бундан биринчи тартибли ҳосила $x_1=0,\ x_2=2$ нуқталарда нолга айланиши келиб чиқади, яъни бу нуқталар-критик нуқталар бўлади. $x\in(-\infty;\,0)$ бўлганда $f'(x)>0$, $x\in(0;2)$ бўлганда $f'(x)<0$, $x\in(2;+\infty)$ бўлганда эса, $f'(x)>0$ бўлади.

Шундай қилиб, функциянинг биринчи тартибли $f'(x)$ ҳосиласи $x_1=0$ нуқтадан ўтишда ўз ишорасини «+» дан «-» га, $x_2=2$ нуқтадан ўтишда эса «-» дан «+» га ўзгартиради. Демак, экстремум мавжуд бўлишининг биринчи етарли шартига асосан, функция $x_1=0$ нуқтада максимум $\left(f_{\max}(0)=4\right)$ га, $x_2=2$ нуқтада эса минимум $\left(f_{\min}(2)=0\right)$ га эга бўлади. Функция графигини чизишда қулайлик учун, функция тўғрисида юқорида олинган маълумотлар ёрдамида қуйидаги жадвални тузамиз:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

1-жадвал.

| $x$ | $(-\infty;0)$ | 0 | $(0;2)$ | 2 | $(2;+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| sign $y^{/}$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $y=f(x)$функциянинг ўзгариши | ↗ | $f_{\max}(0)=4$ | ↘ | $f_{\min}(2)=0$ | ↗ |

Функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топамиз: $f''(x)=6(x-1)$.

Функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи $x=1$ нуқтада нолга айланади, яъни $x=1$ нуқта II-тур критик нуқта бўлади. $x\in(-\infty;\,1)$ да $f''(x)<0$ , $x\in(1;+\infty)$ да эса $f''(x)>0$ . Демак, 16.7-теоремага асосан, $(-\infty;1)$ ораликда функциянинг

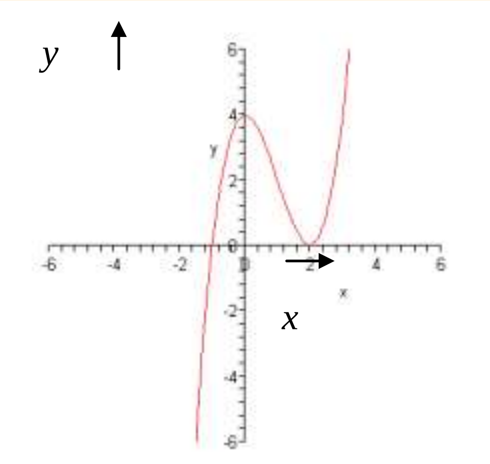
графиги ботиқ, $(1;+\infty)$ ораликда қаварик, $x=1$ нукта функциянинг графиги эгилиш нуктасининг абсциссаси бўлиб, $(1;\,2)$ нукта эгилиш нуктаси бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

2-жадвал.

| x | (−∞;1) | 1 | (1;+∞) |
|---|---|---|---|
| sign $f^{//}$ | - | 0 | + |
| $y = f(x)$ функция графиги кавариқлигининг йўналиши. | ∩<br>↑ | (1;2) | ↓<br>∪ |

Юқоридаги мулоҳазалар ва 1-,-2-жадваллар ёрдамида функциянинг графигини ( 16.10- чизма) чизамиз.



16.10- чизма.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

16.30- мисол. $f(x)=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$ функцияни тўлиқ текширинг ва графигини чизинг.

Ечилиши. Берилган функция $R$ нинг $x=-1$ нуқтадан ташқари барча нуқталарида аниқланган. Равшанки, функция графиги мос равишда $(1;\,0)$ ва $(0;\,1)$ нуқталарда абсцисса ва ордината ўқларини кесади. $x<-1$ да функция манфий, $x>-1$ да эса мусбат. Функция $x=-1$ нуқтада II-тур узилишга эга ва $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1+0} f(x)=+\infty$ бўлгани учун $x=-1$ тўғри чизиқ функция графиги учун вертикал асимптота, $y=0$ тўғри чизиқ эса, горизонтал асимптота.

Берилган функция даврий ҳам эмас, жуфт ҳам эмас ва тоқ ҳам эмас.

Функцияни экстремумга текшириш учун унинг биринчи тартибли ҳосиласини топамиз:

$$f'(x)=-\frac{x^2-6x+5}{(x+1)^4}=-\frac{(x-1)(x-5)}{(x+1)^4}.$$

Биринчи тартибли $f'(x)$ ҳосила $x_1=1$ ва $x_2=5$ нуқталарда нолга айланади, яъни бу нуқталар критик нуқталар бўлади. $x\in(-\infty;\,1)$ да $f'(x)<0$, $x\in(1;\,5)$ да $f'(x)>0$, $x\in(5;+\infty)$ да эса $f'(x)<0$ бўлади. Демак, $f'(x)$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

ҳосила $x_1 = 1$ нуқтадан ўтишда ўз ишорасини «-» дан «+» га ўзгартиради, $x_2 = 5$ нуқтадан ўтишда эса, «+» дан «-» га ўзгартиради. Шундай қилиб, функция $x_1 = 1$ нуктада минимум $f_{\min}(1) = 0$ қийматга, $x_2 = 5$ нуктада эса, максимум $f_{\max}(5) = \frac{2}{27}$ қийматга эга бўлади.

1-жадвал

| x | $(-\infty;1)$ | 1 | (1;5) | 5 | $(5;\infty)$ | $x<-1$ | -1 | $x>-1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $signf'$ | - | 0 | + | 0 | - | - | $\infty$ | - |
| $y = f(x)$-функциянинг ўзгариши | ↘ | 0 | ↗ | $\frac{2}{27}$ | ↘ | Манфий | $\infty$ | Мусбат |

Функциянинг қавариқлик, ботиқлик оралиқлари ва эгилиш нуқталарини топамиз:

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 10x + 13)}{(x+1)^5}.$$

Иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосила $x_1 = 5 + \sqrt{12}$, $x_2 = 5 - \sqrt{12}$ нуқталарда нулга

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

айланади, яъни бу нуқталар II-тур критик нуқта бўлади. $x \in \left(-\infty;\, 5-\sqrt{12}\right)$ да $f''(x) > 0, x \in \left(5-\sqrt{12}\ ;5+\sqrt{12}\right)$да $f''(x) < 0, x \in (5+\sqrt{12}\,;+\infty)$ да эса $f''(x) > 0.$

Демак, $(-\infty;5-\sqrt{12})$ ораликда функция графиги қаварик $(5-\sqrt{12}\,;5+\sqrt{12})$ ораликда ботиқ, $(5+\sqrt{12};+\infty)$ ораликда қаварик.

Шундай қилиб, $x_1 = 5+2\sqrt{3}$, $x_2 = 5-2\sqrt{3}$ нуқталар функция графиги

2-жадвал.

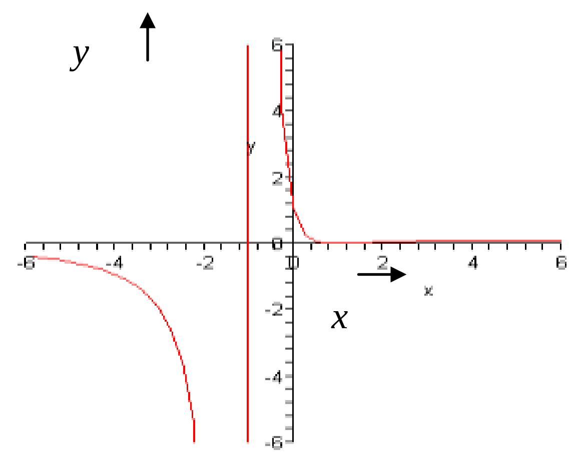
| x | $(-\infty;5-2\sqrt{3}\,)$ | $5-2\sqrt{3}$ | $(5-2\sqrt{3};5+2\sqrt{3}\,)$ | $5+2\sqrt{3}$ | $(5+2\sqrt{3};\,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| sign $f^{//}$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f\left(x\right)$функция графиги кавариқлигининг йўналиши. | $\overset{\downarrow}{\cup}$ | 0,0196 | $\underset{\uparrow}{\cap}$ | 0,0659 | $\overset{\downarrow}{\cup}$ |

эгилиш нуқталарининг абсциссалари бўлиб, $(5+2\sqrt{3};\ 0{,}0659)$ ва

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$(5-2\sqrt{3};\ 0,0196)$ нуқталар эгилиш нуқтаси бўлади.

Юқоридаги мулоҳазалар ва 1-, 2- жадвалларга биноан берилган функциянинг графигини (16.11 -чизма) чизамиз.



16.11-чизма.

16.31- мисол. Ушбу

$$y=f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}$$

функцияни тўлиқ текширинг ва графигини чизинг.

Ечилиши. Берилган функция R да аниқланган узлуксиз, тоқ ва $2\pi$ даврга эга бўлган даврий функция, координата боши, симметрия маркази

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

бўлади. $x = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ да $y = 0$ бўлади. Равшанки, унинг ишораси $\sin x$ нинг ишораси каби бўлади, яъни $\mathrm{sign}(y) = \mathrm{sign}(\sin x)$. Функция даврий бўлгани учун текширишни $[0; 2\pi]$ да олиб бориш етарли.

Функция графиги асимптотага эга эмас. Функциянинг биринчи тартибли ҳосиласини топамиз:

$$f'(x) = \frac{1 + 2\cos x}{(2 + \cos x)^2}$$

Биринчи тартибли $f'(x)$ ҳосила $x_1 = \frac{2\pi}{3}$, $x_2 \frac{4\pi}{3}$ нуқталарда нолга айланади, яъни бу нуқталар критик нуқталар бўлади.

$x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$; $x \in \left(\frac{4\pi}{3}; 2\pi\right]$ **ларда** $f'(x) > 0$, $x \in \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right)$ **лар да** $f'(x) < 0$ бўлади.

Шунинг учун $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ нуқтада максимумга, яъни $f_{\max}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $x_2 = \frac{4\pi}{3}$ нуқтада эса, минимум га, яъни $f_{\min}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ га эга бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

1-жадвал.

| x | $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right)$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\left(\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right)$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\left(\frac{4\pi}{3};2\pi\right]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| sign $f'$ | + | 0 | - | 0 | + |
| *y=f(x)* – функциянинг ўзгариши | ↗ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | ↘ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | ↗ |

Энди, функция графигининг қавариқлик, ботиқлик оралиқлари ва эгилиш нуқталарини топамиз: бунинг учун аввало, функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топамиз:

$$y''= f''(x) = \frac{2\sin x(\cos x - 1)}{(2+\cos x)^2}.$$

$x\in(0;\pi)$ да $f''(x)<0$, $x\in(\pi;\,2\pi)$ да $f''(x)>0$ бўлади.

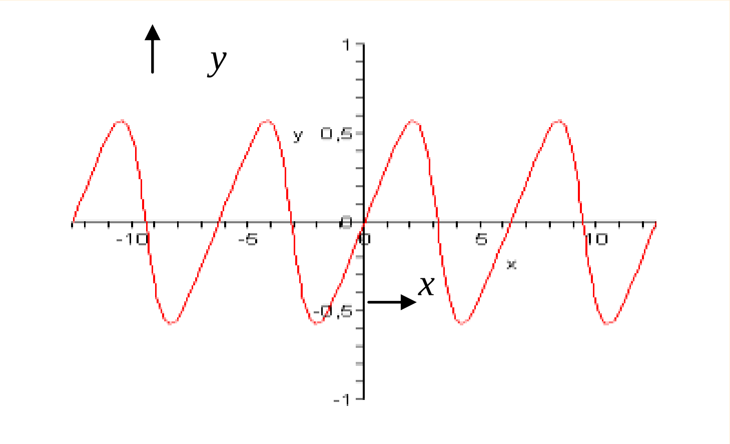
Демак, $(\pi;\,0)$ ораликда функция графиги ботиқ, $(\pi;2\pi)$ ораликда эса, қаварик бўлиб, $(0;\pi)$ нукта эгилиш нуқтаси бўлади.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

2-жадвал.

| X | $(0;\pi)$ | $\pi$ | $(\pi;2\pi)$ |
|---|---|---|---|
| *sign y''* | - | 0 | + |
| Функция графиги каварикдлигининг йўналиши. | $\underset{\uparrow}{\cap}$ | 0 | $\overset{\downarrow}{\cup}$ |

Юқоридаги мулоҳаза ва 1- , 2 – жадвалларга асосланиб, берилган функциянинг графиги чизилади ( 16.12- чизма).



16.12- чизма.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

## 16.8. Maple тизимидан фойдаланиб функцияларни тўлиқ текшириш ва уларнинг графикларини ясаш

16.32-мисол. Maple тизимидан фойдаланиб, ушбу $f(x)=\dfrac{x^3}{6(3-x)^2}$ функцияни тўлиқ текширинг ва унинг графигини чизинг.

Ечилиши. 1 Функциянинг аниқланиш соҳаси: D( $f$ )= $(-\infty;3)\cup(3;\infty)$.

2. Maple тизимидан фойдаланиб, берилган функцияни узлуксизликка текширамиз:

```
> readlib(singular):singular((x^3)/(6*(3-x)^2),x);
```

$$\{x=3\},\ \{x=-\infty\},\ \{x=+\infty\}$$

```
> limit(x^3/(6*(3-x)^2),x=3,left)=limit(x^3/(6*(3-x)^2),x=3,left);
```

$$\lim_{x\to 3-0}\left(\frac{x^3}{6(3-x)^2}\right)=\infty$$

```
limit(x^3/(6*(3-x)^2),x=3,right)=limit(x^3/(6*(3-x)^2),x=3,right);
```

$$\lim_{x\to 3+0}\left(\frac{x^3}{6(3-x)^2}\right)=+\infty.$$

Демак, Maple тизимидаги натижаларига кўра, $x=3$ функциянинг 2-тур

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

узилиш нуқтаси бўлади.

3. Maple тизимидан фойдаланиб, берилган функцияни даврийликка, жуфт ва тоқликка текширамиз:

```
> evalb(y(x)=y(-x));
```

*false*

```
> evalb(y(x)=-y(-x));
```

*false*

```
> solve(y(x)=y(x+T),T);
```

$$0, -\frac{(2x^2+27-18x-3\sqrt{-27+12x})\,x}{2\,(9-6x+x^2)}, -\frac{(2x^2+27-18x+3\sqrt{-27+12x})\,x}{2\,(9-6x+x^2)}$$

Демак, функция даврий ҳам эмас, жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас экан.

4. Maple тизимидан фойдаланиб, функциянинг координаталар ўқлари билан кесишиш нуқталарини топамиз:

```
> y:=x->x^3/(6*(3-x)^2);
```

$$y := x \to \frac{x^3}{6\,(3-x)^2}$$

```
> solve(y(x)=0,x);
```

0, 0, 0

Шундай қилиб, функция графиги фақат битта O(o,o) нуқтада координаталар ўқлари билан кесишади.

5. Maple тизимида функциянинг ишораси сақланадиган интервалларни аниқлаймиз:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

```
> solve(y(x)>0,x);
```

$$\mathrm{Re}\,alRange(Open(0),\ Open(3)), \mathrm{Re}\,alRange(Open(3), \infty)$$

```
> solve(y(x)<0,x);
```

$$\mathrm{Re}\,alRange(-\infty,\ Open(0))$$

Maple тизимидаги натижаларига кўра, қуйидаги жадвални тузамиз:

| *X* | (-∞;0) | | (0;3) | 3 | (3; ∞) |
|---|---|---|---|---|---|
| *signy* | – | | + | ∞ | + |
| графикнинг жойланиши | О *x* ўқи остида | | О *x* ўқи устида | | О *x* ўқи устида |

5. Maple тизимидан фойдаланиб, берилган функция графигининг асимптоталарини топамиз:

```
> alpha[1]:=limit(y(x)/x,x=+infinity);
```

$$\alpha_1 := \frac{1}{6}$$

```
> alpha [2]:=limit(y(x)/x,x=-infinity);
```

$$\alpha_2 := \frac{1}{6}$$

```
> a:=alpha[1];
```

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$a := \frac{1}{6}$

```
> beta[1]:=limit(y(x)-a*x,x=+ infinity );
```

$\beta_1 := 1$

```
> beta[2]:= limit (y(x)-a*x,x=- infinity );
```

$\beta_2 := 1$

Демак, $y = \frac{1}{6}x + 1$ - тўғри чизиқ функция графигининг оғма асимптотаси бўлади.

7. Maple тизимидан фойдаланиб, берилган функциянинг монотонлик ораликлари ва экстремум қийматларини топамиз:

```
> solve (diff (y(x),x)>0,x);
```

$\mathrm{Re}\,\mathit{alRange}(-\infty, \mathit{Open}(0)), \mathrm{Re}\,\mathit{alRange}(\mathit{Open}(0), \mathit{Open}(3)),$

$\mathrm{Re}\,\mathit{alRange}(\mathit{Open}(9), \infty)$

```
> solve (diff (y(x),x)<0,x);
```

$\mathit{RealRange}(\mathit{Open}(3), \mathit{Open}(9))$

```
> solve (diff (y(x),x)=0,x);
```

$9, 0, 0$

```
> eval(diff(y(x),x$2),x=0);
```

$0$

```
> eval(diff(y(x),x$2),x=9);
```

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\frac{1}{16}$$

```
> eval(y(x),x=0);
```

$$0$$

```
> eval(y(x),x=9);
```

$$\frac{27}{8}$$

Maple тизимидаги натижаларига кўра, қуйидаги жадвални тузамиз:

| $x$ | (-∞;0) | 0 | (0;3) |  | (3;9) | + | (9; ∞) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $sign(y')$ | + | 0 | + | ∞ | - | 0 | + |
| функцияни-нг ўзгариши | ↗ | 0 | ↗ | ∞ | ↘ | $\frac{27}{8}$ | ↗ |

$y_{\min} = y(9) = \frac{27}{8}$. A(9, $\frac{27}{8}$)-берилган функция графигининг минимум нуқтаси бўлади.

8. Maple тизимидан фойдаланиб, берилган функциянинг қавариқлик ва ботиқлик оралиқларини топамиз:

```
> solve (diff (y(x),,x$2)>0,x);
```

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$$\mathrm{Re}\,alRange(Open(0),\ Open(3)),\mathrm{Re}\,alRange(Open(3),\ \infty).$$

```
> solve (diff (y(x),x$2)<0,x);
```

$$\mathrm{Re}\,alRange(-\infty,\ Open(0))$$

```
> solve (diff (y(x),x$2)=0,x);
```

0

Maple тизимидаги натижаларига кўра, қуйидаги жадвални тузамиз:

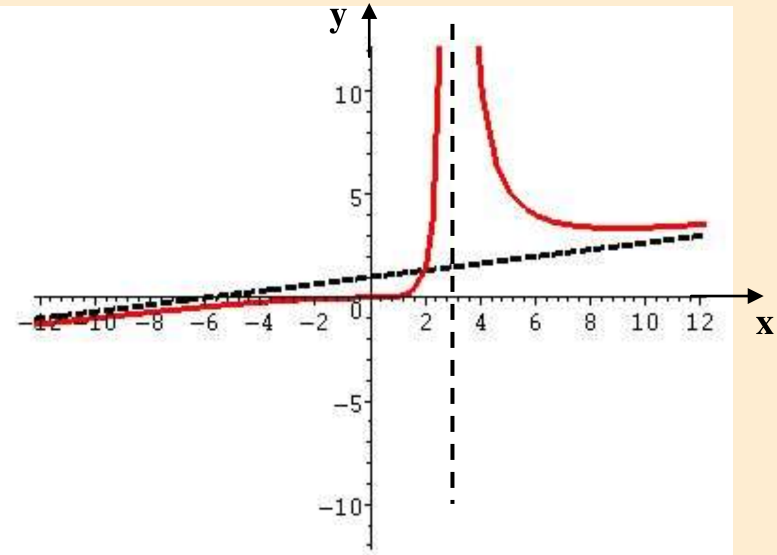
| $x$ | (-∞;0) | 0 | (0;3) | 3 | (3;+∞) |
|---|---|---|---|---|---|
| $sign\ y''$ | - | 0 | + | ∞ | + |
| Функция графигиниг қавариқлик йўналиши | ∩<br>↑ | 0 | ↓∪ | ∞ | ↓<br>∪ |

9. Maple тизимидан фойдаланиб, берилган функциянинг графигини чизамиз:

```
>plot([y(x),[3,t,t=-4..12]],x=-
6..16,6..6,color=[red,black],thickness=3,linestyle=[1,3]);
```

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Функциянинг графиги 16.13-чизмада тасвирланган.



16.13-чизма.

16.33-мисол. Maple тизимидан фойдаланиб, ушбу

$$y=\frac{x^2}{1+x^2}$$

функцияни тўла текширинг ва графигини чизинг.

**Ечилиши.** 1 Функциянинг аниқланиш соҳаси: D( $f$ )= (-∞;∞)

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

2. Maple тизимидан фойдаланиб, берилган функцияни узлуксизликка текширамиз:

```
> readlib(singular):singular((x^2)/(1+x^2),x);
false
```

Демак, брилган функциянинг узилиш нуқтаси йўқ.

3. Maple тизимидан фойдаланиб, берилган функцияни даврийликка, жуфт ва тоқликка текширамиз:

```
> evalb(y(x)=y(-x));
true
> evalb(y(x)=-y(-x));
false
> solve(y(x)=y(x+T),T);
0, -2 x
```

Демак, Функция даврий ҳам эмас, жуфт функция.

4. Maple тизимидан фойдаланиб, функциянинг координаталар ўқлари билан кесишиш нуқталарини топамиз:

```
> y:=x->x^2/(1+x^2);
```

$$y := x \to \frac{x^2}{1 + x^2}$$

```
> solve(y(x)=0,x);
```

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$0, 0$

Шундай қилиб, функция графиги фақат битта O(o,o) нуқтада координаталар ўқлари билан кесишади.

5. Maple тизимида функциянинг ишораси сақланадиган интервалларни аниқлаймиз:

```
> solve(y(x)>0,x);
```

$$\mathrm{Re}\,alRange(-\infty, Open(0)), \mathrm{Re}\,alRange(Open(0), \infty)$$

```
> solve(y(x)<0,x);
```

Юқаридаги хулосага кўра,қуйидаги жадвални тузамиз:

| $x$ | (-∞;0) | 0 | (0; ∞) |
|---|---|---|---|
| *signy* | + | 0 | + |
| графикнинг жойланиши | O$x$ ўқи устида |  | O$x$ ўқи устида |

6. Maple тизимидан фойдаланиб, берилган функция графигининг асимптоталарини топамиз:

```
> alpha[1]:=limit(y(x)/x,x=+infinity);
```

$\alpha_1 := 0$

```
> alpha[2]:=limit(y(x)/x,x=-infinity );
```

$\alpha_2 := 0$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

```
> a:=alpha[1];
a := 0
> beta[1]:=limit(y(x)-a*x,x=+ infinity );
β1 := 1
> beta [2]:=limit(y(x)-a*x,x=- infinity );
β2 := 1
```

Демак, $y=1$ - тўғри чизиқ функция графигининг горизонтал асимптотаси бўлади.

7. Maple тизимидан фойдаланиб, берилган функциянинг монотонлик оралиқлари ва экстремум қийматларини топамиз:

```
> solve(diff(y(x),x)>0,x);
RealRange(Open(0), ∞)

> solve(diff(y(x),x)<0,x);
RealRange(–∞, Open(0))

> solve(diff(y(x),x)=0,x);
0
```

Демак, Maple тизимидаги натижаларига кўра, қуйидаги жадвални тузамиз:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

| $x$ | $(-\infty;0)$ | 0 | $(0;\ \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $sign\ y^{/}$ | - | 0 | + |
| функциянинг<br>ўзгариши | ↘ | 0 | ↗ |

$y_{\min} = y(0)=0$. A(0,0)-берилган функция графигининг минимум нуқтаси бўлади.

8. Maple тизимидан фойдаланиб, берилган функциянинг қавариқлик ва ботиқлик ораликларини топамиз:

```
> solve(diff(y(x),x$2)>0,x);
```

$$\mathrm{Re}\,alRange(\,Open(-\frac{1}{3}\sqrt{3}),(Open(\frac{1}{3}\sqrt{3}))$$

```
>solve(diff(y(x),x$2)<0,x);
```

$$\mathrm{Re}\,alRange(-\infty,\ Open(-\frac{1}{3}\sqrt{3})),\ \mathrm{Re}\,alRange(\,Open(\frac{1}{3}\sqrt{3}),\infty))$$

```
> solve(diff(y(x),x$2)=0,x);
0
```

Демак, Maple тизимидаги натижаларига кўра, қуйидаги жадвални тузамиз:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

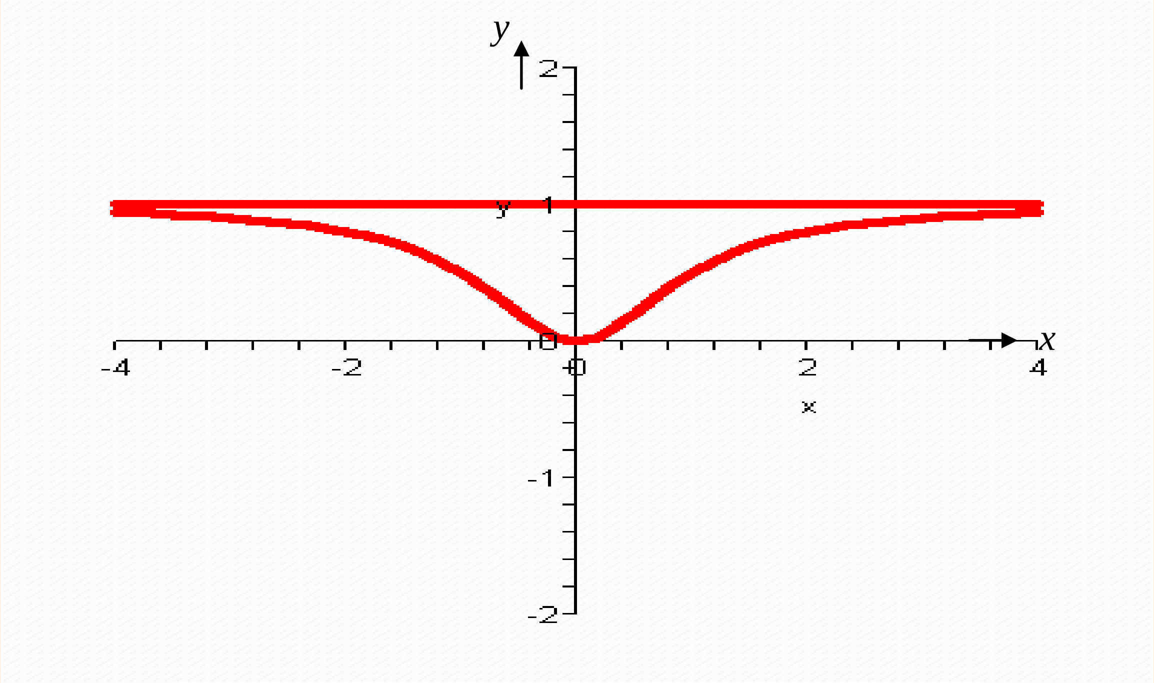
| $x$ | $(-\infty;-\frac{1}{3}\sqrt{3})$ | $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | $(-\frac{1}{3}\sqrt{3};\frac{1}{3}\sqrt{3})$ | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | $(\frac{1}{3}\sqrt{3};+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $sign\, y$ | - | 0 | + | 0 | - |
| Функция графигиниг қавариқлик йўналиши | $\cap$<br>$\uparrow$ | 0 | $\downarrow$<br>$\cup$ |  | $\downarrow$<br>$\cup$ |

9. Maple тизимидан фойдаланиб, берилган функциянинг графигини чизамиз:

```
> plot([y(x),[3,t,t=-4..12]],x=-4..4,-2..2,color=[red,black],thickness=3,linestyle=[1,3]);
```

Берилган функциянинг графиги 16.14-чизмада тасвирланган.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш



16.14-чизма.

## Мустақил ечиш учун мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларни монотонликка текширинг.

16.1. $y=3x-x^2$. 16.2. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+100}$ $(x\geq 0)$. 16.3. $y=x+\sin x$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

16.4. $y = x^2 - \ln x^2$. 16.5. $y = x^2 e^{-x}$. 16.6. $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$.

16.7. $y = 2\sin x + \cos x,\ (0 \le x \le 2\pi)$. 16.8. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

**16.9.** Қуйидаги функцияларнинг ўсувчи ва камаювчи бўлиш оралиқларини топинг:

**1)** $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{1 + |\cos x|}$. **2)** $y = (x-2)^5 (2x+1)^4$ .

**3)** $y = \sqrt[3]{(2x - a)(a - x)^2}$ . **4)** $y = \dfrac{2x}{1 + 2x}$.

**5)** $y = x - e^x$. **6)** $y = x - 2\sin x\ \ (0 \le x \le 2\pi)$.

**7)** $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$ . **8)** $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x + 50}$.

16.10. **Ушбу 1)** $y = \dfrac{a^2 - 1}{3} x^3 + (a - 1)x^2 + 2x$; 2) $y = ax + 3\sin x + 4\cos x$

Функциялар $a$ нинг қандай қийматларида ўсувчи бўлади.

Қуйидаги функцияларни экстремумга текширинг.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

16.11. $y=2+x-x^2.$

16.12. $y=(x-1)^3.$

16.13. $y=\frac{3}{4}x^4+x^3-9x^2+7.$

16.14. $y=x^4e^{-x^2}.$

16.15. $y=2\sin x+\cos 2x.$

16.16. $y=\frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}.$

16.17. $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x.$

16.18. $y=(x^2-2x)\ln x-\frac{3}{2}x^2+4x.$

16.19. $y=\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\arcsin x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}-\frac{\pi}{12}x^2$

16.20. $y=\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$

16.21. $y=|x-5|(x-3)^3.$

16.22. $y=(x+1)^5e^{-x}.$

16.23. $y=\ln(x^2+1)-2\operatorname{arctg} x.$

16.24. $y=\left(\frac{1}{2}-x\right)\cos x+\sin x-\frac{x^2-x}{4}\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right).$

16.25. $y=ae^{px}+be^{-px}.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

16.26. $y = \begin{cases} 1+x, & x \le 0, \\ x^{x^2 \ln x}, & x > 0. \end{cases}$

16.27. $y = \begin{cases} 1+x, & x \le 0, \\ x^{x^{x^3}}, & x > 0. \end{cases}$ 16.28. $y = |x-1|\sqrt[3]{x+2}.$

16.29. $y = \sin(x+1) - (\cos x),\ x \in (0;\pi).$ 16.30. $y = \dfrac{1+|\cos x|}{2+\cos x + \sqrt{3}\sin x},\ x \in (0;\pi).$

**Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган ораліқларда энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.**

16.31. $y = 2x^3 - 3x^{25} - 12x + 1,\quad x \in [-2;2,5].$ 16.32. $y = x + \sqrt{x},\quad x \in [0;4].$

16.33. $y = x^3 - 3x^2 + 1,\quad x \in [-1;4].$

16.34. $y = \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln x,\ x \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right].$

16.35. $y = 2\sin x + \sin 2x,\ x \in \left[0; \dfrac{3}{2}\pi\right].$ 16.36. $y = x - 2\ln 2,\ x \in [1;e].$

16.37. $y = \begin{cases} 2x^2 + \dfrac{2}{x^2}, & x \in [-2;0) \cup (0;\ 2], \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

16.38. $y=-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x$ функциянинг $x\in[-1;\,1]$кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматлари йиғиндисини ҳисобланг.

Қуйидаги функциялар графигининг қавариқлик ва ботиқлик оралиқларини топинг.

16.39. $y=x^4+x^3-18x^2+24x-12.$ 16.40. $y=x+x^{5/3}.$

16.41. $y=x+\sin x.$ 16.42. $y=2-\left|x^5-1\right|$

16.43. $y=3x^4-4x^3+1.$ 19.**44.** $y=x^\alpha,\alpha>1,x>0.$

16.45. $y=x\ln x.$ 16.46. $y=4\sqrt{(x-1)^5}+20\sqrt{(x-1)^3}\quad(x\geq 1).$

16.47. $y=\frac{10}{x}\ln\frac{10}{x}.$ 16.48. $y=e^{arctgx}.$ 16.49. $y=\frac{\sqrt{x}}{x+1}.$

Қуйидаги функциялар графигининг эгилиш нуқталарини топинг.

16.50. $y=x+36x^2-2x^3-x^4.$ 16.51. $y=1+x^2-\frac{x^4}{2}.$

16.52. $y=3x^4-8x^3+6x^2-12.$ 16.53. $y=\frac{x+1}{x^2+1}.$

16.54. $y=\frac{2x^2-x-4}{x^2-4x+4}.$ 16.55. $y=\frac{\ln^2 x}{x}\quad(x>0).$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

16.56. $y = e^{\sin x}, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$ 16.57. $y = e^{-2x}\sin^2 x.$

**16.58.** $a$ параметрнинг қандай қийматларида $f(x) = ax^3 + e^x$ функция эгилиш нуқтасига эга бўлади.

Қуйидаги функцияларни тўлиқ текширинг ва уларнинг графигини чизинг.

**16.59**. $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}.$ **16.60**. $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 4}.$ **16.61**. $y = x^2 \ln(x+2).$

**16.62**. $y = x^3 e^{-4x}.$ **16.63**. $y = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3} + 4\sqrt{x}.$ **16.64**. $y = \frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}.$

**16.65**. $y = |x|\sqrt{1-x^2}.$ **16.66.** $y = (x^2 - 2)e^{-2x}.$ **16.67.** $y = \frac{x^2+2x-3}{x}e^{1/x}.$

**16.68.** $y = \frac{\ln x}{x}.$ **16.69.** $y = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{6}{x+1}.$ **16.70.** $y = \sin x - \sin^2 x.$

**16.71.** $y = \sin x \sin 3x.$ **16.72.** $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x.$

**16.73.** $y = \frac{3}{2}x - \arccos\frac{1}{x}.$ **16.74.** $y = e^{-arctgx}.$ **16.75.** $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**16.76.** $y = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 5.$ **16.77.** $y = x^2 e^{1/x}.$ **16.78.** $y = x^2 e^{-x}.$

**16.79.** $y = \frac{x^3}{x-1}.$ **16.80.** $y = \cos x + \frac{1}{2}\sin 2x.$ **16.81.** $y = \ln x - x + 1.$

**16.82.** $y = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1}.$

## Мустақил ечиш учун берилган мисол ва масалаларнинг жавоблари

**19.1.** $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ да функция ўсувчи, $\left(\frac{1}{2}; \infty\right)$ да эса функция камаювчи.

**19.2.** $(0;\ 100)$ да функция ўсувчи, $(100;\infty)$ да эса, функция камаювчи. **16.3.** $R$ да функция ўсувчи. **19. 4.** $(-\infty;-1)\cup(0;1)$ да функция камаювчи, $(-1;0)\cup(1;\infty)$ да эса, функция ўсувчи. **16.5.** $(-\infty;0)\cup(2;\infty)$ да функция камаювчи, $(0;2)$ да функция ўсувчи. **16.6.** $(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$ да функция ўсувчи, $(-1;\ 1)$ да эса, функция камаювчи. **16.7.** $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ да функция ўсувчи, $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right)$ да эса, функция камаювчи. **16.8.**

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

Ўсувчи. **16.9.** 1) $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right), k\in Z$ да функция ўсувчи, $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right), k\in Z$ да эса функция камаювчи. 2) $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ да ўсувчи; $\left(-\frac{1}{2},\frac{11}{18}\right)$ да камаювчи, $\left(\frac{11}{18};\infty\right)$ да ўсувчи. 3) $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$да ўсувчи; $\left(\frac{2}{3}a,a\right)$ да камаювчи, $(a;\infty)$ да ўсувчи. 4) $(-\infty;-1)$да камаювчи; $(-1,1)$ да ўсувчи; $(1;\infty)$ да камаювчи. 5) $(-\infty;0)$ да ўсувчи; $(0,\infty)$ да камаювчи. 6) $\left(-\infty;\frac{\pi}{3}\right)$ камаювчи; $\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$ да ўсувчи ; $\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right)$да камаювчи. **7)** $(-\infty;-\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};\infty)$ ларда ўсувчи; $(-\sqrt{3};-1)$, $(-1;1)$, $(1;\sqrt{3})$ ларда камаювчи. **8)** $(-\infty;-50)\cup(-50;25)$ да функция ўсувчи, $(25;+\infty)$ да эса, функция камаювчи. **16.10.** 1) $a\le 3$, $a\ge 1$; 2) $a\ge 5$.**16.11.** $y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right)=2\frac{1}{4}$. **16.12.** Экстремумга эга эмас. **16.13.** $y_{\min}(-2)=-9$, $y_{\min}(3)=-40{,}5$, $y_{\max}(0)=7$.**16.14.** $y_{\max}(\pm\sqrt{2})=4e^{-2}$, $y_{\min}(0)=0$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**16.15.** $y_{\max}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$, $y_{\max}\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$, $y_{\min}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $y_{\max}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $y_{\min}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-3$.

16.16. $y_{\max}(0)=4$, $y_{\max}(-2)=\frac{2}{3}$. 16.17. $y_{\min}\left(2\pi k-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}, k\in Z$,

$y_{\max}\left(2\pi k+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $k\in Z$. 16.18. $y_{\max}(1)=2\frac{1}{2}$, $y_{\min}(e)=\frac{e(4-e)}{2}$.

16.19. $y_{\max}(0)=0$, $y_{\min}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}-2\pi}{48}$. 16.20. $y_{\max}(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\approx 0{,}439$. 16.21.

$y_{\max}\left(\frac{9}{2}\right)=\frac{27}{16}$, $y_{\min}(5)=0$. 16.22. $y_{\max}(4)=5^5\cdot e^{-4}$. 16.23.

$y_{\min}(1)=\ln 2-\frac{\pi}{2}$. 16.24. $y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right)=\sin\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$, $y_{\min}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{36\sqrt{3}-12\pi\sqrt{3}+72-\pi^2+6\pi}{144}$.

16.25. Агар $ab\le 0$ бўлса, экстремум йўқ; агар $ab>0$ ва $a>0$ бўлса, $y_{\min}\left(\frac{1}{2p}\ln\frac{b}{a}\right)=2\sqrt{ab}$; агар $ab>0$ ва $a<0$ бўлса, $y_{\max}\left(\frac{1}{2p}\ln\frac{b}{a}\right)=-2\sqrt{ab}$.

16.26. $y_{\max}\left(\frac{1}{e}\right)=e^{\frac{1}{e^2}}$, $y_{\min}(1)=1$. 16.27. $y_{\max}(0)=1$, $y_{\min}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right)=e^{-\frac{1}{3e}}$.

16.28. $y_{\max}\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{9\cdot\sqrt[3]{6}}{8}$, $y_{\min}(1)=0$. 16.29. $y_{\max}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos 1$.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

16.30. $y_{\min}\left(\frac{\pi}{2}\right)=2-\sqrt{3}$. 16.31. $y_{eng\ katta}(-1)=8,\ y_{eng\ kichik}(2)=19$.

16.32. $y_{eng\ katta}(4)=6,\ y_{eng\ kichik}(0)=0$. 16.33. $y_{eng\ katta}(4)=17,\ y_{eng\ kichik}(2)=y_{eng\ kichik}(-1)=-3$.

16.34. $y_{eng\ katta}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}+0{,}25\cdot\ln 3,\quad y_{eng\ kichik}(\sqrt{3})=\frac{\pi}{6}-0{,}25\cdot\ln 3$. 16.35.

$y_{eng\ katta}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2},\quad y_{eng\ kichik}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-2$. 16.36. $y_{eng\ katta}(1)=1,\ y_{eng\ kichik}(2)=2(1-\ln 2)$.

16.37. Энг каттаси йўк, $y_{eng\ kichik}(0)=1$. 16.38. $0$. 16.39. $(-\infty;-2)\cup\left(\frac{3}{2};\infty\right)$ да қаварик; $\left(-2;\frac{3}{2}\right)$ да ботиқ. 16.40. $(-\infty;0)$ да ботиқ; $(0;\infty)$ да қаварик. 16.41. $(2\pi k,(2k+1)\pi),k\in Z$ да ботиқ; $((2k+1)\pi,(2k+2)\pi),k\in Z$ да қаварик. 16.42. $(-\infty;0)\cup(1;\infty)$ да ботиқ; $(0;1)$ да қаварик. 16.43. $(-\infty;0)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$ да қаварик; $\left(0;\frac{2}{3}\right)$ да ботиқ. 16.44. Қаварик. 16.45. Қаварик. 16.46. Ҳамма жойда қаварик. 16.47. $(0;\,10e\sqrt{e})$ да ботиқ, $(10e\sqrt{e};+\infty)$ да эса қаварик. 16.48. $(-\infty;\,0{,}5)$ да

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

қаварик. 16.49. $\left(0;\ \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$ да ботик, $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}};+\infty\right)$ да эса қаварик. 16.50. $(-3;\ 294)$ . 16.51. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{23}{18}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{23}{18}\right)$. 16.52. $\left(\frac{1}{3};12\frac{11}{27}\right),\ (1;\ 13)$ . 16.53. $\left(-2-\sqrt{3};\frac{-\sqrt{3}-1}{4}\right),\ \left(-2+\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right),\ (1;1)$. 16.54. $\left(\frac{8}{7};-\frac{31}{9}\right)$.

16.55. $\left(e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}};\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2\cdot e^{\frac{\sqrt{5}-3}{2}}\right),\ \left(e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}};\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2\cdot e^{\frac{-\sqrt{5}-3}{2}}\right)$. 16.56. Абсциссаи $x=\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ бўлган нуқтада . 16.57. $\left((6k+(-1)^k)\frac{\pi}{12};\ \frac{2-\sqrt{3}}{4}e^{-(6k+(-1)^k)\frac{\pi}{6}}\right),\ k\in Z.$

16.58. $a\in\left(-\infty;-\frac{e}{6}\right),\ a\in(0;+\infty)$. 19.**59**. Функциянинг аниқланиш соҳаси: $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ +\infty)$. x = -1- вертикал асимптота, $y=x-3$ оғма асимптота. $y_{\min}(0)=0,\ y_{\max}(-4)=-\frac{256}{27}$. $\left(-6;-\frac{3296}{125}\right)$ ва $\left(2;\ \frac{16}{27}\right)$ нуқталар эгилиш нуқталари (16.15-чизма). 16.60. $R$ да аниқланган, жуфт функция. График $Oy$ ўқига нисбатан симметрик, $y=0$ - горизонтал асимптота. $y_{\min}(0)=\sqrt[3]{4},\ y_{\max}(\pm\sqrt{2})=2\sqrt[3]{2}$. $(2;\ \sqrt[3]{4}),\ (-2;\ \sqrt[3]{4})$- эгилиш нуқталари (16.16-чизма).

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

16.61. Функция $(-2;+\infty)$ ораликда аниқланган. $x=-2$ вертикал асимптота. $y_{\min}(0)=0$, $y_{\max}(-0{,}73)\approx 0{,}12$. $(-0{,}37;0{,}075)$ – эгилиш нуқтаси (16.17-чизма).16.62. Функция $R$ да аниқланган, $x\to+\infty$ да $y=0$- горизонтал асимптота. $y_{\max}\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{3}{4e}\right)^3$. Эгилиш нуқталари: $(0;\ 0)$, $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4};\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4}\right)^3 e^{\sqrt{3}-3}\right)$, $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{4};\left(\frac{3+\sqrt{3}}{4}\right)^3 e^{-\sqrt{3}-3}\right)$.(16.18-чизма). 16.63. Функция $x\geq 0$да аниқланган, ордината ўқи билан эса $\left(0;\frac{1}{3}\right)$ нуқтада кесишади; функция қатъий ўсувчи; $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2};\approx 8\right)$- эгилиш нуқтаси (16.19-чизма). 16.64. Функция $|x|\geq 1$да аниқланган; ордината ўқига нисбатан симметрик; ордината ўқи билан кесишиш нуқталари: $(1;\ 0)$, $(-1;\ 0)$; $x\to+\infty$ да $y=\frac{x}{2}$ ва $x\to-\infty$да $y=-\frac{x}{2}$ асимптоталари; $(-\infty;-1)$ да камаювчи $(1;+\infty)$да ўсувчи (16.20-чизма). 16.65. Функция $|x|\leq 1$да аниқланган; ордината ўқига нисбатан симметрик; ўқлар

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

билан кесишиш нуқталари: $(-1;\,0);(0;0),(1;\,0)$; $y_{\min}(0)=0,\ y_{\max}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}$ (16.21-чизма). 16.66. Функция $R$ да аниқланган, координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(-\sqrt{2};\,0),(\sqrt{2};\,0),(0;\,-2)$; $x\to+\infty$ да $y=0$ асимптота; $y_{\min}(-1)\approx-7{,}4$, $y_{\max}(2)\approx 0{,}04$; функциянинг эгилиш нуқталарининг абсциссалари: $x=1-\sqrt{10}/2\approx-0{,}6$, $x=1+\sqrt{10}/2\approx 2{,}6$. (16.22-чизма). 16.67. Функция $x=0$ дан ташқари $R$ да аниқланган; абсцисса ўқи билан кесишиш нуқталари: $(-3;\,0)$ ва $(1;\,0)$; $x\to 0+$ да $y=x+3$ ва $x=0$ асимптоталар; $y(-0)=0,\ y'(-0)=0;\ y_{\max}(-1)=\frac{4}{e}$; функциянинг эгилиш нуқталари абсциссалари: $x=-5\pm\sqrt{22}$ (16.23-чизма). 16.68. Функциянинг аниқланиш соҳаси: $x>0$; абсцисса ўқи билан кесишиш нуқтаси: $(1;\,0)$; асимптоталари: $x\to+\infty$ да $y=0$ ва $x\to 0+$ да $x=0$; $y_{\max}(e)=\frac{1}{e}$; эгилиш нуқтаси: $\left(e^{\frac{3}{2}};\,1{,}5e^{-\frac{3}{2}}\right)$. (16.24- чизма). 16.69. Функциянинг аниқланиш соҳаси: $(-\infty;-1)\cup(-1;\,1)\cup(1;\,+\infty)$; асимптоталари: $x=-1,\ x=1,\ y=0$, координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(\approx 0{,}9;\,0),(\approx 1{,}2;\,0),(0;\,6)$; $y_{\max}(2)=2-\ln 3$; эгилиш нуқталари:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$(0{,}5;\ 4-\ln 3)$, $(3{,}1;\ 5-\ln 2)$. (16.25- чизма). 16.70. Функция $R$ да аниқланган; $2\pi$ даврга эга бўлган даврий функция; функциянинг ноллари:

$$y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=y(\pi)=0;\qquad y_{\max}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4},\quad y_{\max}\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{4},\qquad y_{\min}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\quad y_{\min}\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-2;$$

функциянинг эгилиш нуқталари абсциссалари:

$$x=\arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8},\ x=\pi-\arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8},\ \ x=\pi+\arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8},\ x=2\pi-\arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}$$

(16.26-чизма). 16.71. Функция $R$ да аниқланган; $\pi$ даврга эга бўлган даврий функция: функциянинг графиги ордината ўқига симметрик:

$$y(0)=y\left(\frac{\pi}{3}\right)=y\left(-\frac{\pi}{3}\right)=0;\ \ y_{\min}(0)=0,\ y_{\min}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=-1,\ \ y_{\max}(\pm\arccos(1/4))=9/16;$$

функциянинг эгилиш нуқталари абсциссалари: $x=\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{129}+1}{16}$,

$$x=\pm\frac{1}{2}\left(\pi-\arccos\frac{\sqrt{129}-1}{16}\right),$$ (16.27-чизма). **16.72.** Функция $R$ да аниқланган; $2\pi$ даврга эга бўлган даврий функция: функциянинг графиги координата бошига нисбатан симметрик; функциянинг ноллари: $y(0)=y(\pi)=0;$

$[0;\ \pi]$ даги максимумлари $y_{\max}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=(3+4\sqrt{2})/6,\ y_{\max}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1/2$, минимуми:

$y_{\min}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt{3}/4;$ Функциянинг эгилиш нуқталарининг абсциссалари: $x=0,\ x=\pi,$ $x=\arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{6},\ x=\pi-\arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{6}$ (16.28-чизма). **16.73.** Функциянинг аниқланиш соҳаси: $(-\infty;\,-1]\cup[1;\,+\infty)$; $(0;\,-\frac{\pi}{2})$ симметрия маркази; $x\to+\infty$ да $y=\frac{3x-\pi}{2}$ асимптота; $y_{\max}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{6\sqrt{3}+5\pi}{6}\approx-4{,}4;$ $y_{\min}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{6\sqrt{3}-\pi}{6}\approx1{,}2;$ $(-\infty;\,-1)$ да ботиқ (16.29-чизма). **16.74.** Функциянинг $R$ да аниқланган, асимптоталари: $x\to-\infty$ да $y=e^{\frac{\pi}{2}}$, $x\to+\infty$ да $y=e^{-\frac{\pi}{2}}$; камаювчи функция; эгилиш нуқтаси-$\left(-\frac{1}{2};\,e^{\operatorname{arctg}0{,}5}\right)$. (16.30-чизма).

**16.75**. Функциянинг аниқланиш соҳаси: $(-\infty;\,-1)\cup(0;\,+\infty)$; асимптоталари: $x\to\pm\infty$ да $y=e$, $y\to+\infty$ да $x=-1$; $(-\infty;\,-1)$ да ботиқ, $(0;\,+\infty)$ да эса қаварик. (16.31- чизма). **16.76.** Аниқланиш соҳаси: $R$; жуфт функция; асимптотага эга эмас; $(-\infty;0)$ да камаяди, $(0;\infty)$ да ўсади; $y_{\min}(0)=-5$; эгилиш нуқталари:

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

$\left(\frac{1}{\sqrt{5}};-4{,}51\right)$, $(1;-4)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}};-4{,}51\right)$, $(-1;-4)$; $(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cup(1;\infty)$да қаварик; $\left(-1;-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{5}};1\right)$ да ботик; 16.32-чизма. **16.77.** Аниқланиш соҳаси: $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$; $x=0$ функциянинг иккинчи тур узилиш нуқтаси; асимптота: $x=0$; $y_{\min}\left(\frac{1}{2}\right)\approx 1{,}87$; $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ да қаварик; 16.33-чизма. **16.78.** Аниқланиш соҳаси: $R$; координата ўқлари билан кесишиш нуқтаси: $O(0;0)$; асимптота: $x\to\infty$ да $y=0$; $y_{\min}(0)=0$, $y_{\max}(2)=4e^{-2}\approx 0{,}54$; эгилиш нуқталари: $(\sqrt{3}-1;0{,}3)$, $(\sqrt{3}+1;0{,}47)$; $(\sqrt{3}-1;\sqrt{3}+1)$ да ботик; $(-\infty;\sqrt{3}-1)$ да қаварик; 16.34-чизма. **16.79**. Аниқланиш соҳаси: $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$; $x=1$ функциянинг иккинчи тур узилиш нуқтаси; координата ўқлари билан кесишиш нуқтаси: $O(0;0)$; асимптота: $x=1$; $y_{\max}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{4}$; эгилиш нуқталари $O(0;0)$; $(-\infty;0)\cup(1;\infty)$ да қаварик; $(0;1)$ да ботик; 16.35-чизма. **16.80.** Аниқланиш соҳаси: $R$; даврий функция: $T=2\pi$; координата ўқлари билан кесишиш

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

нуқталари: $(0;1)$, $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2};0\right)$; асимптотага эга эмас;

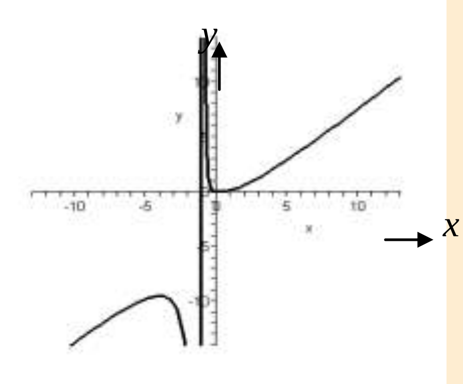
$y_{\max}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $y_{\min}\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$; эгилиш нуқталари: $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$, $\left(\pi+\arcsin\frac{1}{4};\frac{-3\sqrt{15}}{16}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2};0\right)$, $\left(2\pi-\arcsin\frac{1}{4};\frac{3\sqrt{15}}{16}\right)$; 16.36-чизма. **16.81.** Аниқланиш соҳаси: $(0;\infty)$; координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(1;0)$; асимптота: $x=0$; $y_{\max}(1)=0$; $(0;\infty)$ да ботиқ; 16.37-чизма.

**16.82.** Функция $x=1$ дан ташқари бутун $R$ да аниқланган; координата ўқлари билан кесиш нуқталари: $\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2};\ 0\right)$, $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};\ 0\right)$, $(0;\ -1)$; асимптоталари: $y=1$ ва $x=1$ тўғри чизиқлар; $y_{\min}\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{4}$; нуқта эгилиш нуқтаси $(0;\ -1)$ (16.38-чизма).

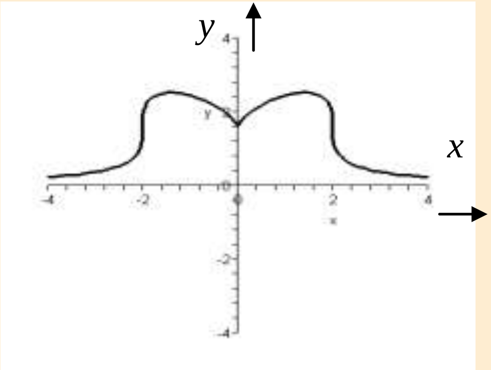
**16.59.**

**16.60.**

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

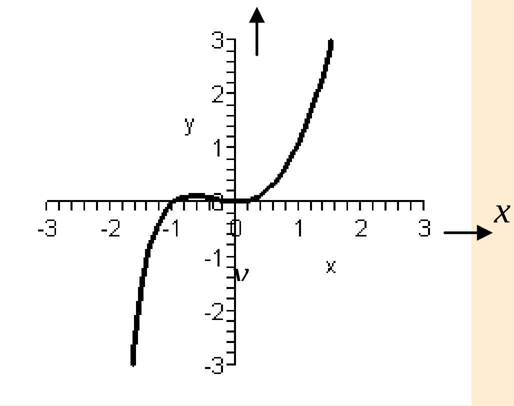


**16.15- чизма.**



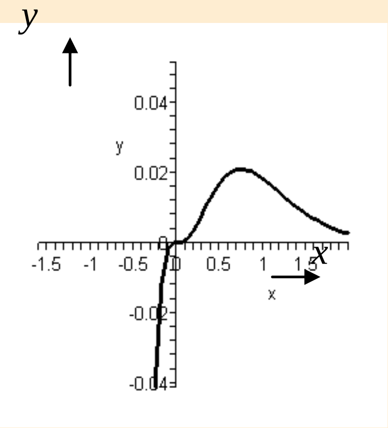
**16.16- чизма.**

**16.61.**



**16.17-** чизма.

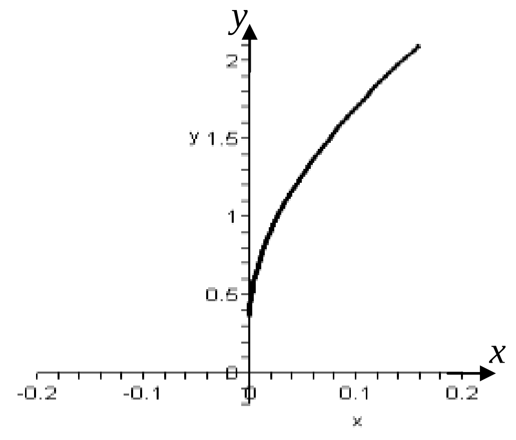
**16.62.**



**16.18-** чизма.

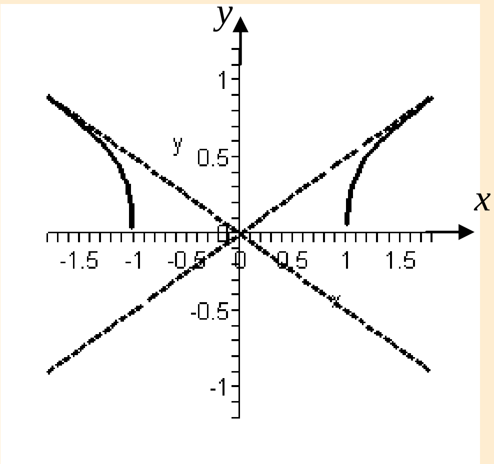
Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**16.63.**



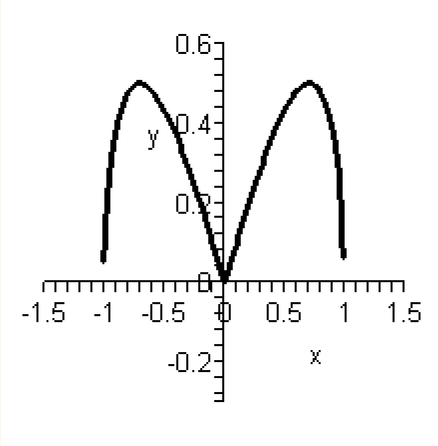
**16.19-** чизма.

**16.64.**

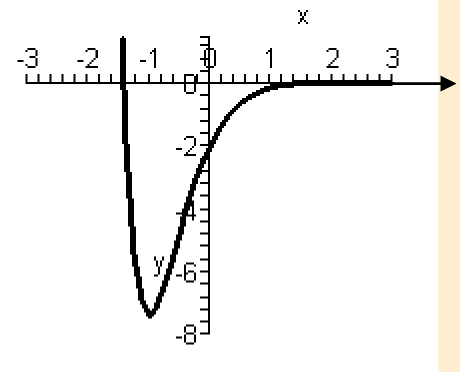


**16.20-** чизма.

**16.65.**



**16.66.**

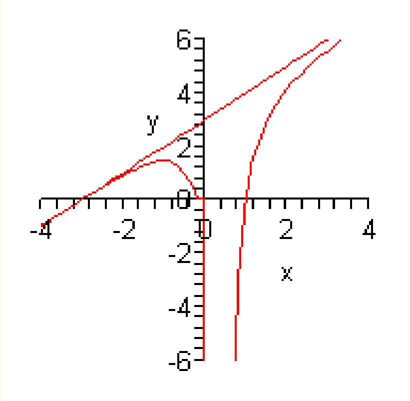


Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**16.21-** чизма.

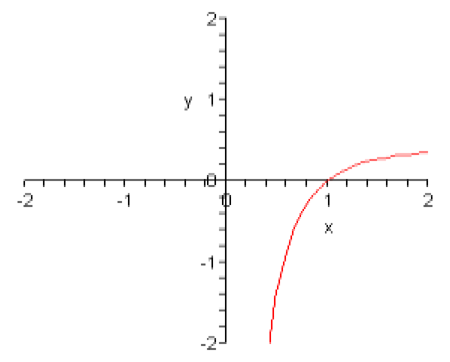
**16.22-** чизма.

**16.67.**



**16.23-** чизма.

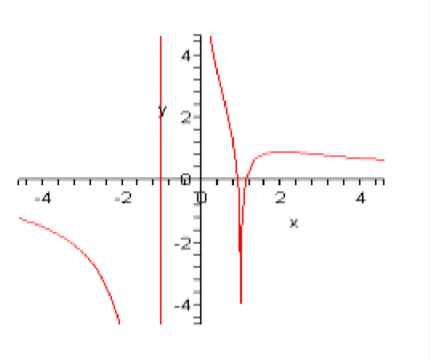
**16.68.**



**16.24-** чизма.

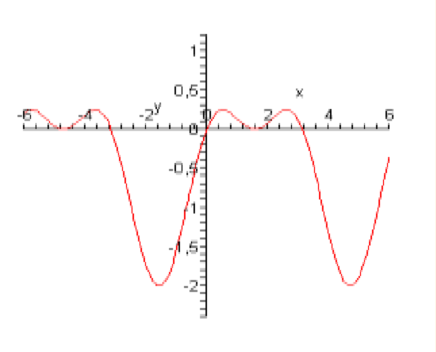
Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**16.69.**



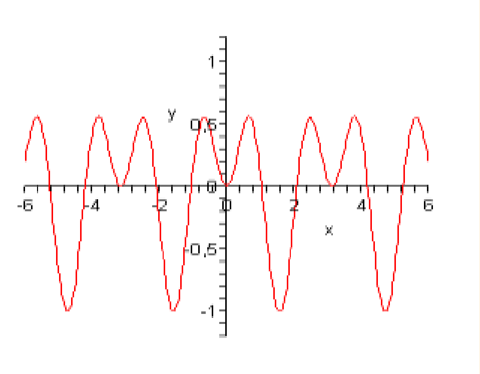
**16.25-** чизма

**16.70.**



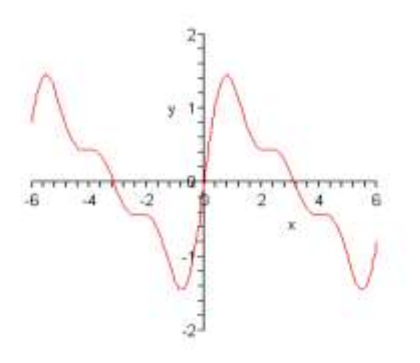
**16.26-** чизма

**16.71.**



**16.27-** чизма

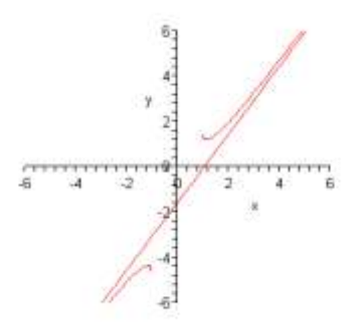
**16.72.**



**16.28-** чизма

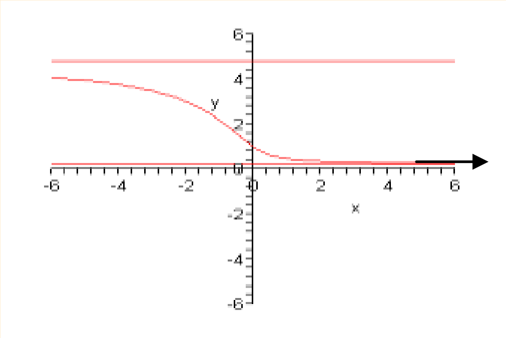
Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**16.73.**



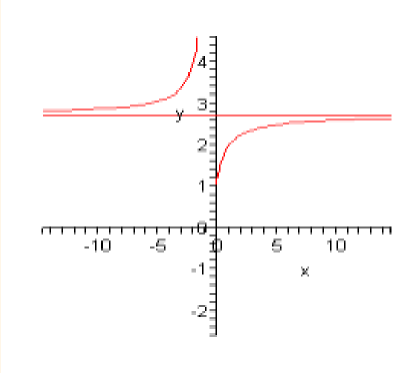
**16.29-** чизма

**16.74.**



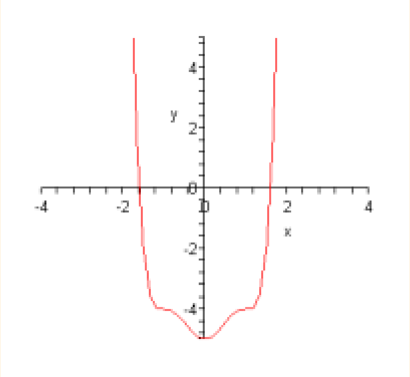
**16.30-** чизма.

**16.75.**



**16.31-** чизма

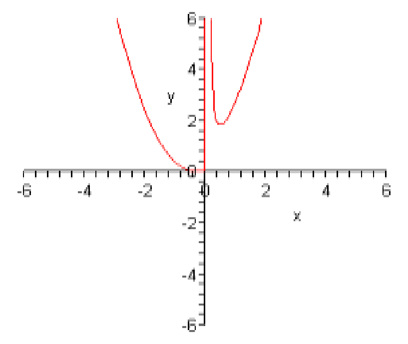
**16.76.**



**16.32-** чизма

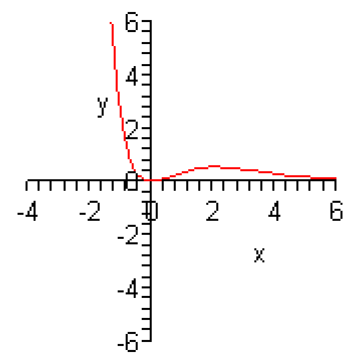
Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**16.77.**



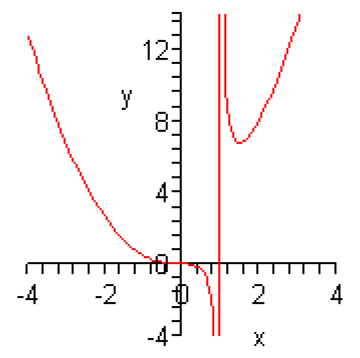
**16.33-** чизма.

**16.78**



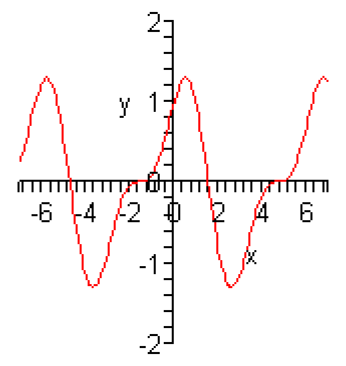
**16.34-** чизма.

**16.79.**



**16.35-** чизма

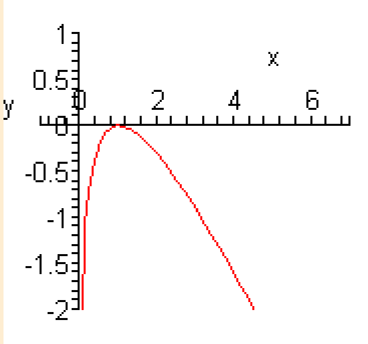
**16.80.**



**16.36-** чизма.

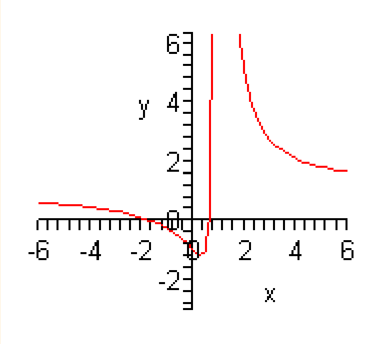
Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**16.81.**



**16.37-** чизма.

**16.82.**



**16.38-** чизма

# АДАБИЁТЛАР

**1.** Азларов Т.А, Мансуров Х.Т. Математик анализ. 1- қисм. -Т.: «Ўқитувчи» 1994.

**2.**Азларов Т.А., Мирзааҳмедов М.А., Отақўзиев Д.О., Собиров М.А., Тўлаганов С.Т.- Математикадан қўлланма, II-қисм. Т.: «Ўқитувчи», 1990.

**3**. Атаханов К.У., Ерзин В.А., Ходжаев Б. – Математик анализдан мисол ва масалалар тўплами, 1-қисм, Т.: 2004.

**4.** Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.- М.:Наука,1985.

**5.** Бруй И.Н., Гаврилюк А.В и др. Лабораторный практикум по математическому анализу. – Минск.: Выщей школа, 1991.

**6.** Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.– Задачи упражнения по математическому анализу, М.: Изд. МГУ, 1988.

**7**. Gaziyev A., Israilov I., Yaxshiboyev M. Funksiyalar va grafiklar. “VORIS-NASHRIYOT”. Toshkent-2006.

**8.** Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. -М. : Наука,1981.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**9.** Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 1.- М. :Наука,1984.

**10.** Ильин В.А, Садовничий В.А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1. -М.: Наука, 1979.

**11.** Коровкин Н.П. – Определенный интеграл и ряды. - М.: Учпедгиз., 1959.

**12.** Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа.Т.1.- М.: Высшая школа, 1981.

**13.** Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу: предел, неперывность, дифференцируемость.- М.: Наука, 1984.

**14.** Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Голович Г.П. – Справочное пособие по математическому анализу, Киев.: «Высшая школа», 1984.

**15.** Марон И.А.– Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. - М.: «Наука», 1970.

**16**. Матросов А. Maple-6. Решения задач высшей математики и механики. Петер.Санкт-Петербург, 2000.

**16.** Никольский С.М.Курс математического анализа.Т.1.-М.: «Наука», 1983.

**17.** Садуллаев А., Мансуров Х., Худойберганов Г., Ворисов А., Ғуламов Р. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. Т. 1- қисм.- Т. 1993.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
Оркага
Тулик экран
Чикиш

**18.** Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. -М.: Наука,1969.

**19**.Thomas’CALCULUS.Tenth Edition.- Boston, San Francisco, New York, London, Toronto, Sydney, Tokyo, Singapore, Madrid….2001.

**20**. Ижболдин О., Курляндчик Л. Неравенство Иенсена. КВАНТ, №4-2005г.

**21**. Salas Hille Engen. Calculus one variable. Copyright 1999 John Wiley&Sons.

Титул варак
Мундарижа
1-боб
2-боб
3-боб
Адабиётлар
←  →
|←  →|
Оркага
Тулик экран
Чикиш